Vojtěch Jarník

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, 2. Abhandlung [2b]

Math. Ann. 101 (1929), pp. 136--146

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500699

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden.

Zweite Abhandlung[1]).

Von

Vojtěch Jarník in Göttingen.

---

§ 1.

Einleitung; Wortlaut des Satzes.

Es sei $x > 0$, $r \geqq 5$, r ganz;

$$Q(u) = \sum_{\varrho, \sigma = 1}^{r} a_{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma$$

sei stets eine positiv definite quadratische Form. $J_Q(x)$ sei der Inhalt des Ellipsoids $Q(u) \leqq x$; $A_Q(x)$ sei die Anzahl der Gitterpunkte in diesem abgeschlossenen Ellipsoid; endlich sei $\mathsf{P}_Q(x) = A_Q(x) - J_Q(x)$. Wenn die Zahlen $a_{\varrho\sigma}$ sämtlich ganzzahlige Vielfache einer und derselben Zahl sind, so ist bekanntlich

$$\mathsf{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right), \quad \mathsf{P}_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

Für die „irrationalen" Ellipsoide hat Herr Walfisz[2]) unlängst folgendes bewiesen: Es habe $Q(u)$ die spezielle Form

$$Q(u) = \sum_{\varrho, \sigma = 1}^{r-1} a_{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma + \alpha u_r^2, \quad a_{\varrho\sigma} \text{ ganz}, \quad \alpha \text{ irrational}, \quad r \geqq 10;$$

dann ist

$$\mathsf{P}_Q(x) = o\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right), \tag{1}$$

und diese Abschätzung läßt sich — auch bei festen $a_{\varrho\sigma}$ ($\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, r-1$) — nicht verschärfen, solange man α keiner weiteren Bedingung unterwirft.

---

[1]) Die erste Abhandlung ist in den Math. Annalen **100** (1928), S. 699–721, erschienen und wird weiter mit I zitiert; sie enthält auch nähere Literaturangaben.

[2]) A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, 3. Abhandlung, Math. Zeitschr. 27 (1927), S. 245—268.

Wenn man aber von Mengen vom Lebesgueschen Maß Null absieht, kann man das Resultat noch weiter verschärfen: für *fast alle* $\alpha > 0$ ist

$$\mathrm{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-\frac{6}{5}} \log^{\frac{1}{4}} x\right).$$

Ich habe kürzlich in I allgemein die Formen der Gestalt

$$Q(u) = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \ldots + \alpha_r u_r^2, \quad \alpha_j > 0, r \geqq 4$$

mit einer anderen Methode in Angriff genommen und habe unter anderem gezeigt: für *fast alle* positiven Wertsysteme der α_j und jedes $\varepsilon > 0$ gilt bei diesen Formen

$$\mathrm{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{4}+\varepsilon}\right).$$

In dieser Note will ich auch die Abschätzung (1) auf *alle* diese Formen ohne Ausnahme übertragen — allerdings nur für $r \geqq 6$; ich werde nämlich folgendes zeigen:

Satz. *Es sei*

$$r \geqq 6, \quad \alpha_j > 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r);$$

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2; \quad A_Q(x) = \sum_{Q(m) \leqq x} 1 \quad \text{für} \quad x > 0;$$

endlich sei mindestens eine von den $r-1$ *Zahlen* $\frac{\alpha_j}{\alpha_1}$ $(j = 2, 3, \ldots, r)$ *irrational*; *dann ist*

$$A_Q(x) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}\, \Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} + o\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

Nach H. Walfisz läßt sich hier das $o\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right)$ nicht weiter verschärfen.

Ich benutze eine analoge Methode wie in I, d. h. den Hardyschen Ansatz mit den Thetafunktionen. Statt direkt von $A_Q(x)$ auszugehen, gehe ich jetzt von $\int_0^x A_Q(y)\,dy$ aus; dadurch werden nicht-absolut konvergente Integrale vermieden, die damals immer einen überflüssigen logarithmischen Faktor in den Abschätzungen verursachten (der für meine damaligen Zwecke belanglos war, hier aber stören würde). Der Beweis ist ziemlich einfach, insbesondere brauche ich keine tieferliegenden Sätze aus der Theorie der Irrationalzahlen. Das Resultat ließe sich mit der benutzten Methode zweifellos auch auf positiv definite Formen der Gestalt

$$\begin{aligned} Q(u) = \alpha_1 Q_1(u_1, u_2, \ldots, u_{r_1}) &+ \alpha_2 Q_2(u_{r_1+1}, u_{r_1+2}, \ldots, u_{r_1+r_2}) \\ &+ \alpha_3 Q_3(u_{r_1+r_2+1}, \ldots, u_{r_1+r_2+r_3}) + \ldots \end{aligned}$$

übertragen, wo die Formen Q_i ganzzahlige Koeffizienten haben.

§ 2.

Beweis.

Es sei $r \geqq 6$ und ganz; $\alpha_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$; mindestens eine der $r-1$ Zahlen $\frac{\alpha_j}{\alpha_1}$ $(j = 2, 3, \ldots, r)$ sei irrational. Mit $Q(u)$ bezeichnen wir die quadratische Form

$$Q(u) = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \ldots + \alpha_r u_r^2.$$

Wir setzen für $x > 0$

$$A_Q(x) = \sum_{Q(m) \leqq x} 1;$$

die Behauptung unseres Satzes lautet dann

$$A_Q(x) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}\, \Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} + o\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

Wir setzen noch

$$\theta(s) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-m^2 s} \quad \text{für} \quad \Re(s) > 0;$$

die Dirichletsche Reihe

$$\theta(\alpha_1 s)\,\theta(\alpha_2 s) \ldots \theta(\alpha_r s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \quad (0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots) \tag{2}$$

ist für $\Re(s) > 0$ absolut konvergent, und es ist

$$\sum_{\lambda_n \leqq x} a_n = A_Q(x);$$

daraus folgt sofort

$$\int_0^x A_Q(y)\, dy = \sum_{\lambda_n \leqq x} (x - \lambda_n) a_n.$$

Aus der bekannten Formel[3])

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{Ts}}{s^2}\, ds = \operatorname{Max}(T, 0) \qquad (a > 0,\ T \gtreqless 0)$$

folgt für $x > 0$, $a > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \frac{e^{xs}}{s^2}\, ds = \sum_{\lambda_n \leqq x} (x - \lambda_n) a_n = \int_0^x A_Q(y)\, dy, \tag{3}$$

da der Integrand offenbar gliedweise integriert werden darf.

---

[3]) Alle Integrationswege sind geradlinig zu nehmen.

Wir setzen nun $A = \underset{j=1,2,\ldots,r}{\mathrm{Max}} \frac{1}{\alpha_j}$. Weil die Zahlen $\frac{\alpha_j}{\alpha_1}$ nicht alle rational sind, gibt es eine für $x > 0$ definierte positive Funktion $f(x)$ mit $\lim_{x=+\infty} f(x) = +\infty$, so daß aus

$$h_j \text{ ganz}, \quad k_j \text{ ganz}, \quad h_j > 0, \quad k_j > 0,$$

$$\left| \frac{h_j}{k_j} \frac{1}{\alpha_j} - \frac{h_1}{k_1} \frac{1}{\alpha_1} \right| \leqq \frac{2A}{\sqrt{x}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

folgt

$$\mathrm{Max}(h_1, h_2, \ldots, h_r; \quad k_1, k_2, \ldots, k_r) > f(x).$$

Wir setzen nun dauernd $z = z(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{f(x)}}$; aus (2) und (3) folgt dann für $x > c$[4])

$$(4) \qquad \int_x^{x \pm z} A_Q(y)\, dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x} - i\infty}^{\frac{1}{x} + i\infty} \frac{\theta(\alpha_1 s)\, \theta(\alpha_2 s) \ldots \theta(\alpha_r s)\, e^{xs} (e^{\pm zs} - 1)}{s^2} ds.$$

Wir werden beweisen

$$(5) \qquad \int_x^{x \pm z} A_Q(y)\, dy = \pm \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}} z}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}\, \Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right)} + o\left(x^{\frac{r}{2} - 1} z\right).$$

Damit wird unser Satz bewiesen sein. Denn, weil $A_Q(x)$ eine nicht abnehmende Funktion von x ist, folgt aus (5)

$$A_Q(x) \leqq \frac{1}{z} \int_x^{x+z} A_Q(y)\, dy = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}\, \Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right)} + o\left(x^{\frac{r}{2} - 1}\right),$$

$$A_Q(x) \geqq \frac{1}{z} \int_{x-z}^{x} A_Q(y)\, dy = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}\, \Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right)} + o\left(x^{\frac{r}{2} - 1}\right);$$

diese beiden Ungleichungen geben aber unsere Behauptung.

Beweis von (5). Wir schätzen zunächst

$$J_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x} - \frac{2\pi A}{\sqrt{x}} i}^{\frac{1}{x} + \frac{2\pi A}{\sqrt{x}} i} \theta(\alpha_1 s)\, \theta(\alpha_2 s) \ldots \theta(\alpha_r s) \frac{e^{xs}}{s^2} (e^{\pm zs} - 1)\, ds$$

---

[4]) Mit c bezeichnen wir unterschiedslos positive Zahlen, die nur von $r, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ und von der Form der Funktion $f(x)$ abhängen. Mit μ bezeichnen wir unterschiedslos Funktionen von irgendwelchen Veränderlichen, für die $|\mu| \leqq 1$.

ab. Nach einer bekannten Transformationsformel ist[5])

$$\theta(\alpha_j s) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_j s}}\,(1 + \Psi_j(s)),$$

wo

$$\Psi_j(s) = 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2\frac{\pi^2}{\alpha_j s}};$$

für $s = \frac{1}{x} + ti$, $|t| \leqq \frac{2\pi A}{\sqrt{x}}$, $x > c$ ist $\Re\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{x}{1+x^2t^2} > c$, also

$$|\Psi_j(s)| \leqq 2\, e^{-\frac{\pi^2 x}{\alpha_j(1+x^2t^2)}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha_j}c(m^2-1)} < c\, e^{-\frac{cx}{1+x^2t^2}}.$$

Demnach ist

$$J_1(x) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}} \int_{-\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}}^{\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}} \frac{e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+2}} \left(e^{\pm z\left(\frac{1}{x}+it\right)} - 1\right)\left(1 + \mu c\, e^{-\frac{cx}{1+x^2t^2}}\right) dt.$$

Es sei ein für allemal bemerkt: für $x > c$ ist einerseits

$$(6)\qquad \left|e^{\pm z\left(\frac{1}{x}+ti\right)} - 1\right| = \left|e^{\pm\frac{z}{x}}(\cos zt \pm i\sin zt) - 1\right|$$
$$= \left|\left(1 + \mu c\frac{z}{x}\right)(1 + \mu czt) - 1\right| = \mu c\frac{z}{x} + \mu czt,$$

andererseits

$$(7)\qquad \left|e^{\pm z\left(\frac{1}{x}+ti\right)} - 1\right| = \mu c.$$

Es ist also erstens

$$\int_{-\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}}^{\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}} \left|\frac{e^{-\frac{cx}{1+x^2t^2}}\, e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+2}} \left(e^{\pm z\left(\frac{1}{x}+ti\right)} - 1\right)\right| dt = O\int_0^{\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-\frac{cx}{1+x^2t^2}}\left(\frac{z}{x} + zt\right)}{\left(\frac{1}{x^2}+t^2\right)^{\frac{r}{4}+1}}\, dt$$

$$= O\left(\frac{z}{x}\,x^{\frac{r}{2}+1}\int_0^{2\pi A\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{cx}{1+t^2}}}{(1+t^2)^{\frac{r}{4}+1}}\, dt\right) + O\left(z x^{\frac{r}{2}}\int_0^{2\pi A\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{cx}{1+t^2}}}{(1+t^2)^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}}\, dt\right).$$

---

[5]) Alle Quadratwurzeln sind mit positivem Realteil zu nehmen.

Der Integrand im ersten Integral hat für $x > c$ sein Maximum für $1+t^2=\frac{cx}{\frac{r}{4}+1}$, und dieses Maximum ist $O\left(\frac{1}{x^{\frac{r}{4}+1}}\right)$; also ist der erste Summand gleich $O\left(zx^{\frac{r}{4}-\frac{1}{2}}\right)$; ebenso erkennt man, daß der zweite Summand $O\left(zx^{\frac{r}{4}}\right)$ ist.

Weiter ist

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{-\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}}\frac{e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+2}}\left(e^{\pm z\left(\frac{1}{x}+it\right)}-1\right)dt\right|=\left|\int\limits_{+\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}}^{+\infty}\cdots\right|$$

$$=O\int\limits_{\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}}^{\infty}\left(\frac{z}{x}+zt\right)\frac{dt}{t^{\frac{r}{2}+2}}=O\left(zx^{\frac{r}{4}}\right).$$

Endlich ist

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+2}}\left(e^{\pm z\left(\frac{1}{x}+it\right)}-1\right)dt=\frac{1}{i}\int\limits_{\frac{1}{x}-\infty i}^{\frac{1}{x}+\infty i}\frac{e^{(x\pm z)s}}{s^{\frac{r}{2}+2}}ds-\frac{1}{i}\int\limits_{\frac{1}{x}-\infty i}^{\frac{1}{x}+\infty i}\frac{e^{xs}}{s^{\frac{r}{2}+2}}ds$$

$$=\frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+2\right)}\left((x\pm z)^{\frac{r}{2}+1}-x^{\frac{r}{2}+1}\right)=\pm\frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}x^{\frac{r}{2}}z+O\left(x^{\frac{r}{2}-1}z^2\right).$$

Es ist also

$$J_1(x)=\pm\frac{\pi^{\frac{r}{2}}x^{\frac{r}{2}}z}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}+o\left(x^{\frac{r}{2}-1}z\right).$$

Um (5) zu beweisen, genügt es also — weil der Integrand rechts in (4) für konjugiert komplexe Werte von s konjugiert komplexe Werte annimmt — zu zeigen, daß

$$\int\limits_{\frac{1}{x}+\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}i}^{\frac{1}{x}+i\infty}\theta(\alpha_1 s)\theta(\alpha_2 s)\ldots\theta(\alpha_r s)\frac{e^{xs}}{s^2}(e^{\pm zs}-1)\,ds=o\left(x^{\frac{r}{2}-1}z\right).$$

Auf dem Integrationswege ist $t \geqq \frac{2\pi A}{\sqrt{x}}$, also ist nach (6), (7) $|e^{\pm zs} - 1| < c \operatorname{Min}(zt, 1)$ für $x > c$. Es genügt also zu zeigen, daß

$$\int\limits_{\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}}^{\infty} |\theta(\alpha_1 s)\,\theta(\alpha_2 s)\ldots\theta(\alpha_r s)| \operatorname{Min}(zt, 1)\frac{dt}{t^2} = o\left(x^{\frac{r}{2}-1} z\right) \tag{8}$$

$$\left(s = \frac{1}{x} + ti\right).$$

Beweis von (8). Wir legen nun, bei gegebenem $x > 1$, auf das Intervall $-\infty < t < +\infty$ alle Fareybrüche $\frac{h}{k}$ mit $h \gtreqless 0$, $0 < k \leqq \sqrt{x}$, $(h, k) = 1$ und konstruieren noch ihre Medianten, d. h. alle Zahlen $\frac{h+\bar{h}}{k+\bar{k}}$, wo $\frac{h}{k}, \frac{\bar{h}}{\bar{k}}$ zwei benachbarte von unseren Fareybrüchen sind. Es sei $\mathfrak{B}_{h,k}$ das linksseitig abgeschlossene, rechtsseitig offene Intervall, dessen Endpunkte zwei benachbarte Medianten sind und welches den Punkt $\frac{h}{k}$ enthält. Bekanntlich ist

$$\mathfrak{B}_{h,k} = \left\langle \frac{h}{k} - \frac{\mu}{k\sqrt{x}}, \ \frac{h}{k} + \frac{\mu}{k\sqrt{x}}\right).\tag{9}$$

Es gilt nun bekanntlich folgendes: wenn $\begin{pmatrix} l & m \\ n & p\end{pmatrix}$ mit $n > 0$ eine Modulsubstitution ist mit $\frac{p}{n} = \frac{2h}{k}$ $\left(\text{also } n = k \text{ oder } n = \frac{k}{2}\right)$, so ist

$$\theta(\alpha_j s) = \frac{\mu c}{\sqrt{k\left(s - \frac{2\pi i}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right)}}\,\bar{\theta}\left(-\pi i \frac{l\alpha_j s - m\pi i}{n\alpha_j s - p\pi i}\right), \tag{10}$$

wo

entweder $\bar{\theta}(s) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 s}$ oder $\bar{\theta}(s) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m e^{-m^2 s}$

oder $\bar{\theta}(s) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 s}$ [6]).

Wenn nun $s = \frac{1}{x} + ti$ und t im Intervall $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ liegt, so ist

$$\Re\left(-\pi i \frac{l\alpha_j s - m\pi i}{n\alpha_j s - p\pi i}\right) = \frac{\pi^2 \alpha_j}{xn^2\left(\frac{\alpha_j^2}{x^2} + \left(\alpha_j t - \frac{2\pi h}{k}\right)^2\right)} > c; \tag{11}$$

denn es ist $\left|\alpha_j t - \frac{2\pi h}{k}\right| < \frac{c}{k\sqrt{x}}$, $n \leqq k \leqq \sqrt{x}$.

---

[6]) A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen, Leipzig (1903), S. 183—185.

Für $s = \frac{1}{x} + ti$, t in $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ [7]) ist daher nach (10) und (11)

$$|\theta(\alpha_j s)| < \frac{c}{\sqrt{k}\sqrt[4]{\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi h}{\alpha_j k}\right)^2}}. \tag{12}$$

Zu jedem t unseres Integrationsintervalls $\frac{2\pi A}{\sqrt{x}} \leqq t < \infty$ gehören nun eindeutig $2r$ ganze Zahlen

$$h_1(t), h_2(t), \ldots, h_r(t); \quad k_1(t), k_2(t), \ldots, k_r(t) \tag{13}$$

so, daß der Punkt t im Durchschnitt der r Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h_j(t), k_j(t)}$ liegt.

Da das Intervall $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{0,1}$ sicher im Intervall $\left\langle -\frac{2\pi}{\alpha_j\sqrt{x}}, \frac{2\pi}{\alpha_j\sqrt{x}}\right\rangle$ liegt und $A \geqq \frac{1}{\alpha_j}$, so ist für unsere t immer $h_j(t) > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Weiter ist wegen (9)

$$\left| t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h_j(t)}{k_j(t)} \right| \leqq \frac{2\pi}{\alpha_j k_j(t)\sqrt{x}} \leqq \frac{2\pi A}{\sqrt{x}};$$

also ist sicher

$$\left| \frac{1}{\alpha_j}\frac{h_j(t)}{k_j(t)} - \frac{1}{\alpha_1}\frac{h_1(t)}{k_1(t)} \right| \leqq \frac{2A}{\sqrt{x}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r); \tag{14}$$

nach der Definition von $f(x)$ ist also mindestens eine von den $2r$ Zahlen (13) größer als $f(x)$. Bei einem t unseres Integrationsintervalles sind also nur folgende zwei Fälle möglich:

1. Entweder ist mindestens eine von den r Zahlen $k_j(t)$ größer als $\sqrt{f(x)}$.

2. Oder es sind alle Zahlen $k_j(t)$ höchstens gleich $\sqrt{f(x)}$; dann ist für $x > c$ sicher mindestens eine der r Zahlen $h_j(t)$ größer als $f(x)$; der zugehörige Quotient $\frac{h_j(t)}{k_j(t)}$ ist also größer als $\sqrt{f(x)}$; nach (14) sind also für $x > c$ *alle* r Quotienten $\frac{h_j(t)}{k_j(t)}$ größer als $c\sqrt{f(x)}$; um so mehr ist dann $h_j(t) > c\sqrt{f(x)}$ für alle j $(j = 1, 2, \ldots, r)$.

Wir teilen nun das Integrationsintervall $\frac{2\pi A}{\sqrt{x}} \leqq t < \infty$ in abzählbar viele paarweise punktfremde Mengen

$$M(h_1, h_2, \ldots, h_r; k_1, k_2, \ldots, k_r) = M(h; k)$$

---

[7]) Wenn $\beta < \gamma$, $J = \langle\beta, \gamma\rangle$ und $\delta > 0$, so bedeute δJ das Intervall $\langle\delta\beta, \delta\gamma\rangle$.

folgendermaßen: wenn $h_1, h_2, \ldots, h_r$; $k_1, k_2, \ldots, k_r$ positive ganze Zahlen sind, so sei $M(h_1, \ldots, h_r; k_1, \ldots, k_r)$ die Menge derjenigen t unseres Integrationsintervalls, für welche $h_1(t) = h_1, \ldots, h_r(t) = h_r$; $k_1(t) = k_1, \ldots, k_r(t) = k_r$; mit anderen Worten: $M(h_1, \ldots, h_r; k_1, \ldots, k_r)$ ist der Durchschnitt der $r+1$ Intervalle

$$\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h_j, k_j}\ (j = 1, 2, \ldots, r),\ \left\langle \frac{2\pi A}{\sqrt{x}}, \infty \right).$$

Jedes $M(h; k)$ ist entweder leer oder ein halboffenes Intervall; auf jeder endlichen t-Strecke liegen höchstens endlich viele Mengen $M(h; k)$.

Die zu beweisende Beziehung (8) ist nun mit

$$(15)\qquad \sum_{\substack{h_1, h_2, \ldots, h_r \\ k_1, k_2, \ldots, k_r}} \int_{M(h;k)} |\theta(\alpha_1 s)\theta(\alpha_2 s)\ldots\theta(\alpha_r s)| \operatorname{Min}(zt, 1)\frac{dt}{t^2} = o\left(x^{\frac{r}{2}-1} z\right)$$

gleichbedeutend. Wir wissen, daß für $x > c$ eine Menge $M(h; k)$ höchstens dann nicht leer ist, wenn entweder

$$(16)\qquad \operatorname{Max}(k_1, k_2, \ldots, k_r) > \sqrt{f(x)}$$

oder

$$(17)\qquad \operatorname{Min}(h_1, h_2, \ldots, h_r) > c\sqrt{f(x)}.$$

Wir betrachten zunächst den Beitrag derjenigen $M(h; k)$ zu der Summe in (15), bei welchen (16) gilt. Aus Symmetriegründen dürfen und wollen wir uns dabei auf die $M(h; k)$ mit $k_1 > \sqrt{f(x)}$ beschränken. Auf $M(h; k)$ mit $k_1 > \sqrt{f(x)}$ ist nach (12)

$$\theta(\alpha_1 s) < c\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k_1}} < c\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{f(x)}};$$

also ist

$$J_2(x) = \sum_{\substack{h_1, \ldots, h_r \\ k_1, \ldots, k_r \\ k_1 > \sqrt{f(x)}}} \int_{M(h,k)} |\theta(\alpha_1 s)\ldots\theta(\alpha_r s)| \operatorname{Min}(zt, 1)\frac{dt}{t^2}$$

$$\leqq c\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{f(x)}} \int_{\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}}^{\infty} |\theta(\alpha_2 s)\ldots\theta(\alpha_r s)| \operatorname{Min}(zt, 1)\frac{dt}{t^2}$$

$$\leqq c\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{f(x)}} \sum_{j=2}^{r} \int_{\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}}^{\infty} |\theta(\alpha_j s)|^{r-1} \operatorname{Min}(zt, 1)\frac{dt}{t^2}.$$

Es ist

$$J_{2,j}(x) = \int_{\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}}^{\infty} |\theta(\alpha_j s)|^{r-1} \operatorname{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2}$$
$$\leqq \sum_{h>0,k} \int_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} |\theta(\alpha_j s)|^{r-1} \operatorname{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2}.$$

Wenn t in $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ liegt $(h>0)$, so ist $\left|t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right| \leqq \frac{2\pi}{\alpha_j k\sqrt{x}}$, also ist $c\frac{h}{k} < t < c\frac{h}{k}$ für $x > c$. Wegen (12) ist also für $h > 0$

$$\int_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} |\theta(\alpha_j s)|^{r-1} \operatorname{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2} < c\frac{k}{h} \operatorname{Min}\left(z, \frac{k}{h}\right) \frac{1}{k^{\frac{r-1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi h}{\alpha_j k}\right)^2\right)^{\frac{r-1}{4}}}$$
$$= \frac{c}{h k^{\frac{r-3}{2}}} \operatorname{Min}\left(z, \frac{k}{h}\right) x^{\frac{r-3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{r-1}{4}}}.$$

Also ist

$$J_{2,j}(x) \leqq c x^{\frac{r-3}{2}} \sum_{h>0,k} \frac{1}{h k^{\frac{r-3}{2}}} \operatorname{Min}\left(z, \frac{k}{h}\right) < c x^{\frac{r-3}{2}} z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log \frac{k}{z}}{k^{\frac{r-3}{2}}} < c x^{\frac{r-3}{2}} z \log \frac{1}{z}.$$

Also ist

$$J_2(x) \leqq c x^{\frac{r}{2}-1} z \frac{\log \frac{1}{z}}{\sqrt[4]{f(x)}} = c x^{\frac{r}{2}-1} z \frac{\log \sqrt[4]{f(x)}}{\sqrt[4]{f(x)}} = o\left(x^{\frac{r}{2}-1} z\right).$$

Nun bleibt uns noch übrig, den Beitrag derjenigen $M(h; k)$ zu der Summe in (15) abzuschätzen, für welche (17) gilt. Es ist

$$\sum_{\substack{h_1, h_2, \ldots, h_r \\ k_1, k_2, \ldots, k_r \\ \operatorname{Min} h_m > c\sqrt{f(x)}}} \int_{M(h;k)} |\theta(\alpha_1 s) \ldots \theta(\alpha_r s)| \operatorname{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2}$$
$$\leqq \sum_{j=1}^{r} \sum_{\substack{h_1, \ldots, h_r \\ k_1, \ldots, k_r \\ \operatorname{Min} h_m > c\sqrt{f(x)}}} \int_{M(h;k)} |\theta(\alpha_j s)|^r \operatorname{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2}.$$

Aus Symmetriegründen dürfen wir uns wieder auf das Glied mit $j = 1$ beschränken. Die Mengen $M(h_1, h_2, \ldots, h_r; k_1, k_2, \ldots, k_r)$ sind paarweise punktfremd, und $M(h_1, h_2, \ldots, h_r; k_1, k_2, \ldots, k_r)$ liegt in $\frac{2\pi}{\alpha_1}\mathfrak{B}_{h_1,k_1}$; also ist

$$\sum_{\substack{h_1,\ldots,h_r\\ k_1,\ldots,k_r\\ \mathrm{Min}\, h_m > c\sqrt{f(x)}}} \int\limits_{M(h;k)} |\theta(\alpha_1 s)|^r \,\mathrm{Min}(z t, 1)\frac{dt}{t^2} \leqq \sum_{\substack{h_1, k_1\\ h_1 > c\sqrt{f(x)}}} \int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_1}\mathfrak{B}_{h_1,k_1}} |\theta(\alpha_1 s)|^r \,\mathrm{Min}(z t, 1)\frac{dt}{t^2}$$

$$\leqq c \sum_{\substack{h_1, k_1\\ h_1 > c\sqrt{f(x)}}} \frac{1}{h_1 k_1^{\frac{r}{2}-1}} \mathrm{Min}\left(z, \frac{k_1}{h_1}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{h_1}{k_1}\right)^2\right)^{\frac{r}{4}}}$$

$$= c \sum_{\substack{h_1, k_1\\ h_1 > c\sqrt{f(x)}}} \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{h_1\, k_1^{\frac{r}{2}-1}} \mathrm{Min}\left(z, \frac{k_1}{h_1}\right)$$

$$\leqq \left\{ \begin{array}{l} c\, x^{\frac{r}{2}-1} \displaystyle\sum_{h_1 > c\sqrt{f(x)}} \frac{\log(z h_1)}{h_1^2} \;{}^{8)} \\[2ex] \dfrac{c x^{\frac{r}{2}-1}}{z^{\frac{r}{2}-3}} \displaystyle\sum_{h_1 > c\sqrt{f(x)}} \frac{1}{h_1^{\frac{r}{2}-1}} \;{}^{9)} \end{array} \right\} \leqq \frac{c x^{\frac{r}{2}-1}}{z^{\frac{r}{2}-3}} \frac{\log \sqrt{f(x)}}{(\sqrt{f(x)})^{\frac{r}{2}-2}}$$

$$= c\, x^{\frac{r}{2}-1} z \frac{\log \sqrt{f(x)}}{(f(x))^{\frac{r}{8}-\frac{1}{2}}} = o\left(x^{\frac{r}{2}-1} z\right).$$

Damit ist aber (15), also auch unser Satz, vollständig bewiesen.

Göttingen, den 27. Januar 1928.

---

[8]) Für $r = 6$.

[9]) Für $r > 6$.

(Eingegangen am 1. 2. 1928.)