Vojtěch Jarník

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Zweite Mitteilung [2a]

Math. Zeitschr. 28 (1928), pp. 311--316

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500698

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden.

(Zweite Mitteilung[1]).)

Von

Vojtěch Jarník in Göttingen.

Es sei dauernd $x > 0$ ganz, $k \geqq 5$ ganz, $Q(u) = \sum_{\mu,\nu=1}^{k} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu$ sei eine positiv definite quadratische Form mit ganzzahligen Koeffizienten (d. h. $a_{\mu\mu}$ und $2\,a_{\mu\nu}$ $(\mu \neq \nu)$ seien ganz) und mit der Determinante D. Ich setze

$$F(x) = \sum_{Q(m) \leqq x} 1 = \frac{\pi^{k/2}\, x^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\sqrt{D}} + \mathsf{P}(x),$$

$$M = \frac{\pi^{k/2}}{2\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{D}}.$$

Bekanntlich gilt[2])

$$\mathsf{P}(x) = O(x^{k/2-1}), \qquad \mathsf{P}(x) = \Omega(x^{k/2-1}),$$

ersteres sogar auch bei stetig wachsendem x. In der Ω-Richtung habe ich bewiesen[3]) ($c_1, c_2, \ldots$ seien in dieser Note positive Zahlen, die nur von der Form $Q(u)$ abhängen):

Es gibt eine Zahl $c_1 > 0$, so daß jede der beiden Ungleichungen

$$\mathsf{P}(x) > (M + c_1)\, x^{k/2-1}, \qquad \mathsf{P}(x) < (M - c_1)\, x^{k/2-1}$$

für unendlich viele natürliche Zahlen x erfüllt ist.

---

[1]) Vgl. die erste Mitteilung, Math. Zeitschr. 27 (1927), S. 154—160; weiter mit I zitiert.

[2]) Nähere Literaturangaben siehe in I.

[3]) In I.

In der vorliegenden Note will ich nun aus diesem Satz folgenden schärferen Satz ableiten[4]):

Satz. *Es gibt zwei Zahlen* $c_2 > 0$, $c_3 > 0$ *und drei ganze nur von der Form* $Q(u)$ *abhängige Zahlen* $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, $N > 0$, *so daß*

$$\mathsf{P}(x) > (M + c_2)\, x^{k/2-1} \tag{1}$$

für alle x *mit* $x > c_3$, $x \equiv A_1 \pmod{N}$,

$$\mathsf{P}(x) < (M - c_2)\, x^{k/2-1} \tag{2}$$

für alle x *mit* $x > c_3$, $x \equiv A_2 \pmod{N}$.

§ 1.

Hilfssätze.

Hilfssatz 1[5]). *Es sei* $x > 0$ *ganz; dann ist*

$$\sum_{n=0}^{x} n^{k/2-1} = \frac{2}{k} x^{k/2} + \frac{1}{2} x^{k/2-1} + O(x^{k/2-2}).$$

Beweis. Es sei $\chi(u) = u - [u] - \frac{1}{2}$, wenn u nicht ganz; $\chi(u) = 0$ für u ganz; dann gibt die Eulersche Summenformel

$$\sum_{n=0}^{x} n^{k/2-1} = \frac{1}{2} x^{k/2-1} + \int_0^x u^{k/2-1}\, du + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \int_0^x u^{k/2-2} \chi(u)\, du$$
$$= \frac{1}{2} x^{k/2-1} + \frac{2}{k} x^{k/2} + O(x^{k/2-2}).$$

Hilfssatz 2. *Es seien* x, p, q *ganz und positiv;* $(p, q) = 1$, $q > 1$. *Wir setzen noch*

$$x = Lq + R,$$

wo $L = L(x, q)$ *ganz,* $R = R(x, q)$ *ganz,* $0 \leqq R < q$. *Endlich sei*

$$C = C(p, q, x) = \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} r\, e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} + \sum_{r=0}^{R} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}};$$

dann behaupten wir:

$$\sum_{n=0}^{x} n^{k/2-1} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}} = C x^{k/2-1} + O(x^{k/2-2}).$$

---

[4]) Wegen seiner Beziehungen zu anderen Ergebnissen vgl. die Einleitung und Bemerkungen in I und den § 3 der vorliegenden Note.

[5]) Die Zeichen O, o sind stets in bezug auf $x \to +\infty$ zu verstehen; Gleichmäßigkeit in bezug auf evtl. vorkommende Parameter wird *nicht* behauptet.

Vorbemerkung. Man beachte, daß bei festen p, q die Größe C nur von der Restklasse von x modulo q abhängt.

Beweis.

$$(1)\quad \sum_{n=0}^{x} n^{k/2-1} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}} = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{r=0}^{q-1} (lq+r)^{k/2-1} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} + \sum_{r=0}^{R} (Lq+r)^{k/2-1} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}}.$$

Hier ist

$$(2)\quad \sum_{r=0}^{R} (Lq+r)^{k/2-1} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} = x^{k/2-1} \sum_{r=0}^{R} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} + O(x^{k/2-2}).$$

Weiter ist bei festem r mit $0 \leqq r < q$

$$\sum_{l=0}^{L-1} (lq+r)^{k/2-1} = \sum_{l=1}^{L-1} (lq)^{k/2-1} + \left(\frac{k}{2}-1\right) \sum_{l=1}^{L-1} r (lq)^{k/2-2} + O \sum_{l=1}^{L-1} (lq)^{k/2-3} + O(1)$$

$$= \sum_{l=0}^{L-1} (lq)^{k/2-1} + \frac{r}{q} x^{k/2-1} + O(x^{k/2-2}).$$

Daher ist $\left(\text{wegen } \sum_{r=0}^{q-1} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} = 0\right)$

$$(3)\quad \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{r=0}^{q-1} (lq+r)^{k/2-1} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} = \frac{x^{\frac{k}{2}-1}}{q} \sum_{r=0}^{q-1} r\, e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} + O(x^{k/2-2}).$$

Aus (1), (2), (3) folgt aber die Behauptung.

Hilfssatz 3. *Es seien x, p, q ganz und positiv*; $(p, q) = 1$, $q > 1$, $0 < p < q$,

$$s = s(p, q) = \operatorname{Max}\left(\frac{q}{p}, \frac{q}{q-p}\right).$$

Dann ist

$$\left| \sum_{n=0}^{x} n^{k/2-1} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}} \right| \leqq s \cdot x^{k/2-1}.$$

Beweis. Für $m_2 \geqq m_1$, m_1, m_2 ganz ist

$$\left| \sum_{n=m_1}^{m_2} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}} \right| \leqq \frac{1}{\left| \sin \pi \frac{p}{q} \right|} \leqq \frac{s}{2};$$

also durch partielle Summation

$$\left| \sum_{n=0}^{x} n^{k/2-1} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}} \right| \leqq s \cdot x^{k/2-1}.$$

§ 2.

Beweis des Hauptsatzes.

Es ist[6])

$$F(x)=\frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{D}}\sum_{n=0}^{x} n^{k/2-1}$$

$$+\frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{D}}\sum_{2\leqq q\leqq\sqrt{x}}\sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q}}{q^k}\sum_{n=0}^{x} n^{k/2-1}e^{-2\pi i n\frac{p}{q}}+O(x^{k/4}\log x);$$

dabei ist

$$S_{p,q}=\sum_{(m)=0}^{q-1} e^{2\pi i\frac{p}{q}Q(m)}$$

und $\sum'$ bedeutet, daß nur über die p mit $(p,q)=1$ summiert wird. Nach Hilfssatz 1 ist also

$$\mathsf{P}(x)=Mx^{k/2-1}+\frac{\pi^{k/2}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\sum_{2\leqq q\leqq\sqrt{x}}\sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q}}{q^k}\sum_{n=0}^{x} n^{k/2-1}e^{-2\pi i n\frac{p}{q}}+o(x^{k/2-1}).$$

Wir setzen

$$\frac{\mathsf{P}(x)-Mx^{k/2-1}}{x^{k/2-1}}=\mathsf{P}_1(x);$$

wir wissen, daß jede der beiden Ungleichungen

$$(4)\qquad \mathsf{P}_1(x)>c_1,\quad \mathsf{P}_1(x)<-c_1$$

unendlich oft erfüllt ist[7]).

Es ist[8])

$$|S_{p,q}|<c_4\,q^{k/2};$$

also ist nach Hilfssatz 3 für jedes ganze d mit $2<d<\sqrt{x}$

$$\left|\sum_{d\leqq q\leqq\sqrt{x}}\sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q}}{q^k}\sum_{n=0}^{x} n^{k/2-1}e^{-2\pi i n\frac{p}{q}}\right|\leqq c_4\,x^{k/2-1}\sum_{d\leqq q\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{q^{k/2}}\sum_{p=0}^{q-1}{}' s$$

$$\leqq c_5\,x^{k/2-1}\sum_{d\leqq q\leqq\sqrt{x}}\frac{\log q}{q^{k/2-1}}\leqq\frac{c_6}{d^{1/4}}x^{k/2-1}.$$

---

[6]) E. Landau, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. 21 (1924), S. 126—132, Formel (4).

[7]) „unendlich oft" bedeutet: für unendlich viele natürliche Zahlen x.

[8]) E. Landau, loc. cit. [6]), Formel (12).

Nach Hilfssatz 2 ist also

$$\mathsf{P}_1(x) = \frac{\pi^{k/2}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \sum_{2 \leqq q < d} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q}}{q^k} C(p,q,x) + \frac{\varphi(x)}{d^{1/4}} + \psi(x),$$

wo $|\varphi(x)| < c_7$; $\psi(x) = o(1)$.

Wir wählen nun $d = c_8$ so, daß $\frac{c_7}{d^{1/4}} < \frac{c_1}{8}$ und dann ein c_3 so, daß (bei $d = c_8$) gilt $|\psi(x)| < \frac{c_1}{8}$ für $x > c_3$. Wir setzen noch

$$\mathsf{P}_2(x) = \frac{\pi^{k/2}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \sum_{2 \leqq q < c_8} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q}}{q^k} C(p,q,x).$$

Wegen (4) ist unendlich oft $\mathsf{P}_1(x) > c_1$, also auch unendlich oft $\Re\,\mathsf{P}_2(x) > \frac{3}{4}c_1$. Wir nehmen ein ganzes positives $x = A_1$ mit $\Re\,\mathsf{P}_2(A_1) > \frac{3}{4}c_1$; nach der Vorbemerkung zum Hilfssatz 2 ist aber $\mathsf{P}_2(x)$ nur von der Restklasse abhängig, in welcher sich x modulo $N = (c_8 - 1)!$ befindet; also ist für alle $x \equiv A_1 \pmod N$ die Ungleichung $\Re\,\mathsf{P}_2(x) > \frac{3}{4}c_1$ erfüllt; für alle $x \equiv A_1 \pmod N$ mit $x > c_3$ gilt also

$$\mathsf{P}_1(x) > \frac{1}{2}c_1, \quad \text{also} \quad \mathsf{P}(x) > \left(M + \frac{c_1}{2}\right) x^{k/2-1},$$

womit die erste Hälfte des Hauptsatzes bewiesen ist. Aus der unendlich oft richtigen Ungleichung $\mathsf{P}_1(x) < -c_1$ folgt dann ebenso die andere Hälfte.

§ 3.

Schlußbemerkungen.

Wegen der trivialen Beziehung[9])

$$\mathsf{P}(x-1) - \mathsf{P}(x-0) \sim 2\,M x^{k/2-1}$$

kann man unseren Hauptsatz auch folgendermaßen formulieren:

Es gibt fünf positive, nur von $Q(u)$ abhängige Zahlen $\lambda, c_9, A_1, A_2, N$ mit A_1, A_2, N ganz, $\lambda > M$, so daß $\mathsf{P}(x) > \lambda x^{k/2-1}$ für alle $x > c_9$ mit $x \equiv A_1 \pmod N$, $\mathsf{P}(x-0) < -\lambda x^{k/2-1}$ für alle $x > c_9$ mit $x \equiv A_2 + 1 \pmod N$.

Trivial war nur[10]), daß für jedes $\lambda < M$ mindestens eine der beiden Ungleichungen

$$\mathsf{P}(x) > \lambda x^{k/2-1}, \quad \mathsf{P}(x-0) < -\lambda x^{k/2-1}$$

---

[9]) Vgl. I, Formel (4).

[10]) Vgl. I, Bemerkungen.

unendlich oft erfüllt ist. Darüber hinaus haben wir gezeigt: 1. das unendliche Auftreten von *jeder* dieser beiden Ungleichungen, und zwar 2. mit einem $\lambda > M$,[11] und zwar 3. bei „mehr als $0^0/_0$" von natürlichen Zahlen x, ja sogar 4. in ganzen arithmetischen Progressionen.

Einige von diesen Ergebnissen sind schon früher von den Herren Landau, Müntz, Walfisz und Petersson[12] bewiesen worden. Wenn insbesondere $Q(u) = \sum_{\mu=1}^{k} u_\mu^2$, so sind die $S_{p,q}$ Potenzen von Gaußschen Summen, also bekannte Größen. In diesem Spezialfall sind unsere Resultate bereits von Herrn Petersson[13] vollständig bewiesen worden.

Göttingen, den 14. Dezember 1927.

---

[11]) Allzu groß darf λ wegen $\mathsf{P}(x) = O(x^{k/2-1})$ sicher nicht sein.

[12]) Vgl. die Literaturangaben in I und dazu noch: H. Petersson, Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Abhandlungen a. d. math. Seminar Hamburg 5 (1927), S. 116—150.

[13]) loc. cit. [12]).

(Eingegangen am 17. Dezember 1927.)