Vojtěch Jarník

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Eine Anwendung des Hausdorffschen Massbegriffes

Math. Zeitschr. 38 (1934), pp. 217--256

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/500694`

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden: eine Anwendung des Hausdorffschen Maßbegriffes.

Von

Vojtěch Jarník in Prag.

§ 1.

Einleitung; Darstellung der Resultate.

Es sei $r \geqq 5$, r ganz;

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2 \quad (\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0, \ldots, \alpha_r > 0). \tag{1}$$

Wenn $x > 0$ ist, so sei $A_Q(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte im abgeschlossenen Ellipsoid $Q(u) \leqq x$; das Volumen dieses Ellipsoids ist

$$V_Q(x) = \frac{\pi^{r/2} x^{r/2}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}\, \Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right)};$$

endlich sei

$$\mathsf{P}_Q(x) = A_Q(x) - V_Q(x).$$

Wenn es eine reelle Zahl α gibt, so daß alle α_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ ganzzahlige Vielfache von α sind, so heiße die quadratische Form $Q(u)$ „rational", sonst „irrational". Es sind (unter anderem) folgende Resultate bekannt[1]):

[1]) Satz I ist in der Abhandlung: V. Jarník, Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoides à plusieurs dimensions (Bulletin international de l'Académie de Bohême 1928, 10 S.) bewiesen worden. Satz II steht bei E. Landau, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden (zweite Abhandlung), Math. Zeitschr. **24** (1926), S. 299—310. Satz III stammt für $r \geqq 6$ von mir [Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden (zweite Abhandlung), Math. Annalen **101** (1929), S. 136—146], für $r = 5$ von A. Walfisz [V. Jarník und A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. **32** (1930), S. 152—160]. Satz IV wurde von A. Walfisz [Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden (dritte Abhandlung), Math. Zeitschr. **27** (1927), S. 245—268] bewiesen. Satz VI rührt von E. Landau her [Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen (vierte Abhandlung), Göttinger Nachr. 1924, S. 137—150]. Die Sätze V, VII, VIII sind in meiner Abhandlung, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Annalen **100** (1928), S. 699—721, bewiesen (diese Abhandlung wird weiter mit Gp I zitiert). — Übrigens werde ich, um dieser Abhandlung eine gewisse Abrundung zu geben, dem Leser im § 6 die Beweise der Sätze I, II, VIII vorführen.

Satz I.

$$\mathsf{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

Für rationale Q ist diese Abschätzung definitiv nach dem

Satz II. *Wenn $Q(u)$ rational ist, so ist*

$$\mathsf{P}_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

Ganz anders liegen die Verhältnisse bei irrationalen Formen, wie die folgenden Sätze zeigen:

Satz III. *Wenn $Q(u)$ irrational ist, so ist*

$$\mathsf{P}_Q(x) = o\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

Satz IV. *Wenn $\varphi(x) > 0$ für $x > 0$, $\varphi(x) \to 0$ für $x \to +\infty$, so gibt es für jedes ganze $r \geqq 5$ eine irrationale Form* (1) *mit*

$$\mathsf{P}_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1}\varphi(x)\right).$$

Satz V. *Für fast alle positiven Wertsysteme $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ist aber sogar*

$$\mathsf{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{4}+\varepsilon}\right)$$

für jedes $\varepsilon > 0$[2]).

Ob man im Satz V den Exponenten $\frac{r}{4}+\varepsilon$ unter $\frac{r}{4}$ herabdrücken kann, weiß man nicht; man kennt aber folgende Abschätzung nach unten:

Satz VI.

$$\mathsf{P}_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r-1}{4}}\right).$$

Für eine tiefere Untersuchung der Funktion $\mathsf{P}_Q(x)$ empfiehlt es sich, die Form $Q(u)$ noch weiter zu spezialisieren; und zwar werden wir folgende Formen betrachten:

---

[2]) Der Satz V ist folgendermaßen zu verstehen: Es sei $r \geqq 5$, r ganz; dann gibt es im r-dimensionalen cartesischen Raume der Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ eine Punktmenge M_r vom Lebesgueschen Maß Null, welche folgende Eigenschaft besitzt: Ist $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\ldots$, $\alpha_r > 0$ und liegt der Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ nicht in M_r, so gilt für die Form (1) die Abschätzung

$$\mathsf{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{4}+\varepsilon}\right)$$

bei jedem $\varepsilon > 0$.

Analog sind die Worte „fast alle" auch stets im folgenden zu verstehen.

Es sei $\sigma \geqq 2$, σ ganz; $r_j \geqq 4$, r_j ganz $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$; wir setzen $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$. Es sei $\beta_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$; wir betrachten die Form

$$(2) \quad Q(u) = \sum_{j=1}^{\sigma} \beta_j (u_{1,j}^2 + u_{2,j}^2 + \ldots + u_{r_j,j}^2) \quad (\beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \ldots, \beta_\sigma > 0).$$

Die Sätze I, II, III gelten freilich auch für die Formen (2); statt der Sätze V, VI gelten hier folgende Sätze:

Satz VII. *Es sei* $\sigma \geqq 2$, σ *ganz;* $r_j \geqq 4$, r_j *ganz* $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$; $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$. *Für fast alle positiven Wertsysteme* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma$ *gilt für die Form* (2) *die Abschätzung*

$$\mathsf{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2} - \sigma + \varepsilon}\right)$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Satz VIII. *Es sei* $\sigma \geqq 2$, σ *ganz;* $r_j \geqq 4$, r_j *ganz* $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$; $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$. *Dann gilt für die Form* (2) *die Abschätzung*

$$\mathsf{P}_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2} - \sigma}\right).$$

Wir sind hier also wesentlich weiter gekommen als bei den allgemeinen Formen (1): Der Exponent $\frac{r}{2} - \sigma + \varepsilon$ im Satz VII ist infolge des Satzes VIII schon der „wahre Exponent" (bis auf ε).

Wir ordnen nun jeder Form (1) eine Zahl $f = f(Q)$ folgendermaßen zu: $f(Q)$ sei die untere Grenze derjenigen reellen Zahlen a, für welche

$$\mathsf{P}_Q(x) = O(x^a)$$

ist (d. h. für jedes $\varepsilon > 0$ ist

$$\mathsf{P}_Q(x) = O(x^{f+\varepsilon}), \quad \mathsf{P}_Q(x) = \Omega(x^{f-\varepsilon})).$$

Diese Größe $f(Q)$, welche die Größenordnung von $\mathsf{P}_Q(x)$ in erster Näherung charakterisiert, wollen wir nun insbesondere für die Formen (2) studieren.

Es sei also $\sigma \geqq 2$, σ ganz, $r_j \geqq 4$, r_j ganz, $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$; $Q(u)$ sei durch (2) gegeben. Dann ist nach Satz I und VIII

$$\frac{r}{2} - \sigma \leqq f(Q) \leqq \frac{r}{2} - 1,$$

und diese beiden Schranken werden tatsächlich angenommen; denn für rationale Q ist nach Satz II $f(Q) = \frac{r}{2} - 1$, für fast alle Q ist nach Satz VII $f(Q) = \frac{r}{2} - \sigma$. Es entsteht nun die Frage, ob $f(Q)$ auch alle Werte *zwischen* $\frac{r}{2}-\sigma$ und $\frac{r}{2}-1$ annehmen kann, und diese Frage werden wir in dieser Abhandlung bejahend beantworten; wir beweisen also zunächst den

Satz 1. *Es seien ganze Zahlen* $\sigma \geqq 2$, $r_j \geqq 4$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ *gegeben; es sei* f *eine reelle Zahl mit*

$$\frac{r}{2}-\sigma < f < \frac{r}{2}-1 \quad (r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma).$$

Dann gibt es eine Form $Q(u)$ *von der Gestalt* (2), *so daß*

$$f(Q) = f.$$

Bevor wir die übrigen Resultate dieser Abhandlung aussprechen, schicken wir einige Bemerkungen voraus. Wenn $a > 0$ und wenn wir statt der Form (1) die Form $a\,Q(u) = a\,\alpha_1 u_1^2 + a\,\alpha_2 u_2^2 + \ldots + a\,\alpha_r u_r^2$ betrachten, so ist offenbar

$$\mathsf{P}_{aQ}(x) = \mathsf{P}_Q\left(\frac{x}{a}\right) \tag{3}$$

(also insbesondere $f(aQ) = f(Q)$); es bedeutet also keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir uns bei der Untersuchung der Formen (2) auf die Formen mit $\beta_1 = 1$ beschränken.

Es seien also ganze Zahlen $\sigma \geqq 2$, $r_j \geqq 4$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ gegeben. Wir betrachten alle Formen (2) mit $\beta_1 = 1$, $\beta_2 > 0$, $\beta_3 > 0, \ldots, \beta_\sigma > 0$. Jeder solchen Form ist umkehrbar eindeutig das System $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ ihrer Koeffizienten zugeordnet; wir deuten diese Systeme $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ als Punkte im $(\sigma-1)$-dimensionalen cartesischen Raum $R_{\sigma-1}$.

Wenn $g(x)$ für hinreichend große x definiert und positiv ist, so sei

$$E(g(x)) = E(g(x);\ \sigma, r_1, r_2, \ldots, r_\sigma)$$

die Menge derjenigen Punkte $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ mit $\beta_j > 0$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$, für welche die zugehörige Form (2) (mit $\beta_1 = 1$) die Beziehung

$$\mathsf{P}_Q(x) = \Omega(g(x))$$

erfüllt. Der Satz 1 wird bewiesen sein, wenn wir folgendes zeigen: Wenn

$$\frac{r}{2}-\sigma < f < \frac{r}{2}-1 \quad (r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma),$$

so gibt es mindestens einen Punkt $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$, der zwar in $E(x^f)$, nicht aber in $E(x^f(\log x)^{6\sigma+5})$ liegt. Denn für die diesem Punkt zugeordnete Form (2) (mit $\beta_1 = 1$) ist dann

$$\mathsf{P}_Q(x) = \Omega(x^f), \quad \mathsf{P}_Q(x) = o\left(x^f(\log x)^{6\sigma+5}\right),$$

also $f(Q) = f$.

Die Existenz eines solchen Punktes beweisen wir dadurch, daß wir zeigen: Die Menge $E(x^f)$ ist „wesentlich größer“ als die Menge $E(x^f(\log x)^{6\sigma+5})$, so daß nicht jeder Punkt von $E(x^f)$ zu $E(x^f(\log x)^{6\sigma+5})$ gehören kann. Die Worte „wesentlich größer“ müssen wir freilich noch präzisieren, und zwar werden wir es im Sinne der Maßtheorie tun; der Lebesguesche Maßbegriff zeigt sich aber dazu nicht geeignet, da, wie wir im Satz 4 (der ein genaues Analogon zum Satz VII bildet) beweisen werden, das Lebesguesche Maß von $E(x^f)$ gleich Null ist für jedes $f > \frac{r}{2} - \sigma$. Wir müssen also zu einem anderen Maßbegriff greifen, der die Mengen vom Lebesgueschen Maß Null noch weiter zu klassifizieren gestattet. Zu diesem Zweck eignet sich ein von Herrn F. Hausdorff eingeführter Maßbegriff[3]); wir wollen jetzt die Definition und die einfachsten Eigenschaften dieses Maßbegriffes (in einer für unsere Zwecke spezialisierten und etwas modifizierten Form) angeben.

Wir betrachten den $(\sigma-1)$-dimensionalen cartesischen Raum $R_{\sigma-1}$ (σ ganz, $\sigma \geqq 2$) der Punkte $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$. Es sei eine positive Zahl λ gegeben; M sei eine Punktmenge aus $R_{\sigma-1}$. Wir ordnen der Menge M eine Zahl $L(M; x^\lambda)$ $(0 \leqq L(M; x^\lambda) \leqq \infty)$ folgendermaßen zu.

Es sei $\eta > 0$; $\mathfrak{S}$ sei ein höchstens abzählbares System von Würfeln W_1, $W_2, \ldots$, deren Kanten $d_1, d_2, \ldots$ sämtlich kleiner als η sind[4]); $\mathfrak{S}$ sei ein Überdeckungssystem von M (d. h. jeder Punkt von M sei in mindestens einem Würfel aus $\mathfrak{S}$ enthalten). Wir setzen

$$\Lambda(\mathfrak{S}) = \sum_i d_i^\lambda$$

(die rechte Seite soll $+\infty$ bedeuten, wenn $\sum_i d_i^\lambda$ divergiert). Die untere Grenze von $\Lambda(\mathfrak{S})$ für alle solche höchstens abzählbaren Überdeckungssysteme $\mathfrak{S}$ von M, die der Bedingung $d_i < \eta$ genügen, heiße $L_\eta(M; x^\lambda)$. Wenn η abnimmt, so verschärft sich die Bedingung $d_i < \eta$, also nimmt $L_\eta(M; x^\lambda)$ nicht ab, also existiert der Grenzwert

$$L(M; x^\lambda) = \lim_{\eta=0} L_\eta(M; x^\lambda) \quad (0 \leqq L(M; x^\lambda) \leqq \infty).$$

Von den Eigenschaften der Mengenfunktion $L(M; x^\lambda)$ werden wir nur die folgenden trivialen Folgerungen der Definition brauchen:

---

[3]) F. Hausdorff, Dimension und äußeres Maß, Math. Annalen 79 (1919), S. 157 – 179. Der Leser braucht von der Hausdorffschen Theorie nichts zu kennen.

[4]) Unter einem Würfel verstehen wir hier und im folgenden stets einen $(\sigma-1)$-dimensionalen Würfel in $R_{\sigma-1}$, dessen Kanten den Koordinatenachsen parallel sind und zwar, wenn nichts weiter gesagt wird, einen offenen Würfel.

Eigenschaft 1. Aus $A \subset B$ folgt $L(A; x^\lambda) \leqq L(B; x^\lambda)$.

Eigenschaft 2. Wenn $V_1, V_2, \ldots$ höchstens abzählbar viele Mengen aus $R_{\sigma-1}$ sind, $V = \sum_i V_i$, so ist

$$L(V; x^\lambda) \leqq \sum_i L(V_i; x^\lambda).$$

Eigenschaft 3. $L(M; x^{\sigma-1})$ ist das äußere Lebesguesche Maß von M.

Eigenschaft 4. Es sei $\lambda > \mu > 0$; aus $L(M; x^\lambda) > 0$ folgt $L(M; x^\mu) = \infty$; aus $L(M; x^\mu) < \infty$ folgt also $L(M; x^\lambda) = 0$ (Beweis: folgt aus $\lim\limits_{x=0+0} x^{\lambda-\mu} = 0$).

Eigenschaft 5. Für $\lambda > \sigma - 1$ ist $L(M; x^\lambda) = 0$ für jedes $M \subset R_{\sigma-1}$. (Beweis: Es sei W ein Würfel von der Kante 1. Für ganzes $n > 0$ kann man W mit $(n+1)^{\sigma-1}$ Würfeln der Kante $1/n$ überdecken; für $\lambda > \sigma - 1$ ist aber

$$\lim_{n=\infty} (n+1)^{\sigma-1} \frac{1}{n^\lambda} = 0;$$

daraus folgt sehr leicht $L(W; x^\lambda) = 0$, also (da sich $R_{\sigma-1}$ als Vereinigungsmenge von abzählbar vielen solchen Würfeln darstellen läßt) $L(R_{\sigma-1}; x^\lambda) = 0$, also auch $L(M; x^\lambda) = 0$.)

Eigenschaft 6. Es sei M eine nichtleere Menge aus $R_{\sigma-1}$; mit $d(M)$ bezeichnen wir die untere Grenze derjenigen positiven Zahlen λ, für welche $L(M; x^\lambda) = 0$ ist. Nach den Eigenschaften 4, 5 ist

$$0 \leqq d(M) \leqq \sigma - 1,$$

$L(M; x^\lambda) = 0$ für $\lambda > d(M)$; $L(M; x^\lambda) = \infty$ für $0 < \lambda < d(M)$.

Eigenschaft 7. $L(M; x^\lambda)$ ändert sich nicht, wenn wir in seiner Definition die Überdeckungssysteme $\mathfrak{S}$ aus abgeschlossenen (statt aus offenen) Würfeln $W_1, W_2, \ldots$ zusammensetzen.

Das Hauptergebnis dieser Abhandlung ist in den beiden folgenden Sätzen enthalten.

Satz 2. *Es seien ganze Zahlen* $\sigma \geqq 2$, $r_j \geqq 4$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ *gegeben; wir setzen* $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$. *Weiter sei* $0 < \lambda < \sigma - 1$. *Dann ist*

$$L\left(E\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}} (\log x)^{6\sigma+5}\right); x^\lambda\right) = 0.$$

Satz 3. *Es seien ganze Zahlen* $\sigma \geqq 2$, $r_j \geqq 4$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ *gegeben; wir setzen* $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$. *Weiter sei* $0 < \lambda < \sigma - 1$. *Dann ist*

$$L\left(E\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}\right); x^\lambda\right) = \infty.$$

Aus diesen Sätzen folgt der Satz 1; denn es gibt mindestens einen Punkt $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$, der zwar in $E\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}\right)$, nicht aber in $E\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}(\log x)^{6\sigma+5}\right)$ liegt; für die zugehörige Form (2) (mit $\beta_1 = 1$) ist dann offenbar $f(Q) = \frac{r}{2} - 1 - \frac{\lambda}{\sigma - \lambda}$. Wenn aber λ das (offene) Intervall $(0, \sigma - 1)$ durchläuft, so durchläuft $\frac{r}{2} - 1 - \frac{\lambda}{\sigma - \lambda}$ genau das Intervall $\left(\frac{r}{2} - \sigma, \frac{r}{2} - 1\right)$. Wir wollen aus den Sätzen 2, 3 noch einige weitere Folgerungen ziehen. Erstens folgt aus ihnen der

Satz 4. *Es seien ganze Zahlen* $\sigma \geqq 2$, $r_j \geqq 4$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ *gegeben; wir setzen* $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$. *Für fast alle positiven Wertsysteme* $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma$ *gilt für die Form* (2) (*mit* $\beta_1 = 1$) *die Gleichung*

$$f(Q) = \frac{r}{2} - \sigma\text{[5]}.$$

Beweis: Wir wählen eine Folge $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ mit $\lim\limits_{n=\infty} \lambda_n = \sigma - 1$; also ist $\lim\limits_{n=\infty}\left(\frac{r}{2} - 1 - \frac{\lambda_n}{\sigma - \lambda_n}\right) = \frac{r}{2} - \sigma$. Wenn für ein positives Wertsystem $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ die Form (2) (mit $\beta_1 = 1$)

$$f(Q) > \frac{r}{2} - \sigma$$

ergibt[6], so muß der Punkt $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ für mindestens ein n in

$$E_n = E\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda_n}{\sigma-\lambda_n}}(\log x)^{6\sigma+5}\right)$$

liegen; es ist aber nach Satz 2 $L(E_n; x^{\lambda_n}) = 0$, also (wegen $\sigma - 1 > \lambda_n$ und wegen der Eigenschaft 4) $L(E_n; x^{\sigma-1}) = 0$, also (Eigenschaft 2)

$$L\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n; x^{\sigma-1}\right) = 0;$$

damit ist aber der Satz 4 nach der Eigenschaft 3 bewiesen.

Wir wollen noch zwei Sätze angeben, die darüber berichten, wie „groß" die Menge derjenigen Punkte $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ ist, welche für $f(Q)$ einen vorgegebenen Wert liefern.

Satz 5. *Voraussetzungen und Bezeichnungen. Es seien ganze Zahlen* $\sigma \geqq 2$, $r_j \geqq 4$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ *gegeben.* $G(f) = G(f; \sigma, r_1, r_2, \ldots, r_\sigma)$ *sei*

---

[5]) Dieser Satz ist das genaue „inhomogene" ($\beta_1 = 1$) Analogon des „homogenen" Satzes VII.

[6]) Nach Satz VIII ist $f(Q) \geqq \frac{r}{2} - \sigma$.

die Menge derjenigen Punkte $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$, *für welche für die Form* (2) (*mit* $\beta = 1$) $f(Q) = f$ *ist.*

Behauptung:

a) $L\left(G\left(\frac{r}{2} - 1\right); x^\alpha\right) = 0$ *für jedes* $\alpha > 0$.

b) $L\left(G\left(\frac{r}{2} - \sigma\right); x^\alpha\right) = \infty$ *für* $0 < \alpha \leqq \sigma - 1$.

c) *Für* $0 < \lambda < \sigma - 1$ *ist*

$$L\left(G\left(\frac{r}{2} - 1 - \frac{\lambda}{\sigma - \lambda}\right); x^\alpha\right) = 0 \text{ bzw. } = \infty,$$

je nachdem $\lambda < \alpha \leqq \sigma - 1$ *oder* $0 < \alpha \leqq \lambda$ *ist*[7]).

Beweis: a) ist trivial; denn für $0 < \lambda < \sigma - 1$ ist

$$G\left(\frac{r}{2} - 1\right) \subset E\left(x^{\frac{r}{2} - 1 - \frac{\lambda}{\sigma - \lambda}} (\log x)^{6\sigma + 5}\right);$$

also ist nach Satz 2 (und nach den Eigenschaften 1, 4)

$$L\left(G\left(\frac{r}{2} - 1\right); x^\lambda\right) = 0$$

für jedes $\lambda > 0$.

b) ist auch trivial: Nach dem Satz 4 füllt die Menge $G\left(\frac{r}{2} - \sigma\right)$ den ganzen Winkelraum $\beta_2 > 0, \beta_3 > 0, \ldots, \beta_\sigma > 0$ mit Ausnahme einer Menge vom Lebesgueschen Maß Null aus; also ist

$$L\left(G\left(\frac{r}{2} - \sigma\right); x^\alpha\right) = \infty$$

für $\alpha = \sigma - 1$, also auch für $0 < \alpha \leqq \sigma - 1$.

c) folgt folgendermaßen: Für $\sigma - 1 \geqq \alpha > \lambda$ ist $\frac{r}{2} - 1 - \frac{\lambda}{\sigma - \lambda} > \frac{r}{2} - 1 - \frac{\alpha}{\sigma - \alpha}$, also

$$G\left(\frac{r}{2} - 1 - \frac{\lambda}{\sigma - \lambda}\right) \subset E\left(x^{\frac{r}{2} - 1 - \frac{\alpha}{\sigma - \alpha}} (\log x)^{6\sigma + 5}\right),$$

also nach Satz 2

$$L\left(G\left(\frac{r}{2} - 1 - \frac{\lambda}{\sigma - \lambda}\right); x^\alpha\right) = 0.$$

---

[7]) Man beachte, daß dem Intervall $(0, \sigma - 1)$ für λ genau das Intervall $\left(\frac{r}{2} - \sigma, \frac{r}{2} - 1\right)$ für $\frac{r}{2} - 1 - \frac{\lambda}{\sigma - \lambda}$ entspricht.

Andererseits ist offenbar

$$E\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}\right) \subset E\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}(\log x)^{6\sigma+5}\right) + G\left(\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}\right);$$

nach den Sätzen 2, 3 und den Eigenschaften 1, 2 ist also

$$L\left(G\left(\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}\right);\, x^{\lambda}\right) = \infty,$$

w. z. b. w.

Nach dem Satz 5 ist also

$$d\left(G\left(\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}\right)\right) = \lambda$$

für $0 \leqq \lambda \leqq \sigma - 1$ $\left(\text{man beachte, daß } G\left(\frac{r}{2}-1\right) \text{ nach den Sätzen I, II nicht leer ist}\right)$; wenn wir

$$f = \frac{r}{2} - 1 - \frac{\lambda}{\sigma-\lambda}$$

setzen, bekommen wir also folgenden

Satz 6. *Dieselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie im Satz 5. Behauptung: Für* $\frac{r}{2} - \sigma \leqq f \leqq \frac{r}{2} - 1$ *ist*

$$d\,(G(f)) = \left(1 - \frac{2}{r-2f}\right)\sigma.$$

Die Aufgabe der folgenden Paragraphen wird also sein, die Sätze 2 und 3 zu beweisen. Die Hauptschwierigkeit liegt im Beweis des Satzes 2, dem die Paragraphen 2, 3, 4 gewidmet sind. Der Beweis verläuft analog wie der Beweis des Satzes VII in Gp I, ist aber komplizierter; und zwar wird in § 2 der leichteste Teil des Beweises durchgeführt, durch welchen die ganze Untersuchung auf die Betrachtung des Integrals

$$(4) \qquad \int\limits_{\frac{1}{x}+i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\infty} \prod_{j=1}^{\sigma} \Theta^{r_j}(\beta_j s)\, e^{xs}\,(e^{\pm zs}-1)^n \frac{ds}{s^{n+1}} \qquad \left(B = \operatorname*{Max}_{1\leqq j\leqq\sigma} \frac{2\pi}{\beta_j}\right)$$

zurückgeführt wird. In § 3 wird hauptsächlich ein metrischer Hilfssatz über diophantische Approximationen bewiesen; in § 4 wird endlich das Integral (4) mit Hilfe des Hilfssatzes aus § 3 und mit Hilfe der Transformationen der Thetafunktion $\Theta(s) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 s}$ abgeschätzt.

Der Beweis des Satzes 3 ist eigentlich nicht einfacher als derjenige des Satzes 2; ich habe aber in meiner Arbeit „Über die simultanen diophantischen Approximationen“[8]) schon fast die ganze zum Beweis notwendige Vorarbeit geleistet, so daß ich den Beweis des Satzes 3 in § 5 schon auf wenigen Zeilen durchführen kann. Um aber dem Leser das Nachschlagen in der Litèratur zu ersparen und um ihm ein gewissermaßen abgerundetes Bild dieser Theorie zu geben, beweise ich im § 6 noch die bekannten Sätze I, II, VIII; das kann ich auf verhältnismäßig engem Raum machen, da ich in den §§ 2, 4, 5 sowieso die meisten Hilfsmittel zum Beweis dieser Sätze (von welchen eigentlich nur der Satz I nicht trivial ist) entwickeln muß.

Ich will noch eine Bemerkung über den Satz 1 machen. Dieser Satz ist neu nur für $\sigma > 2$; für $\sigma = 2$ ist nicht nur der Satz 1, sondern auch noch ein wesentlich schärferer Satz bekannt[9]):

Satz 1*. *Es sei $\beta_2 > 0$; $\nu(\beta_2)$ sei die obere Grenze derjenigen reellen Zahlen a, welche folgende Eigenschaft haben: Es gibt eine Folge von Paaren ganzer Zahlen p_1, q_1; p_2, q_2; p_3, q_3; ..., so daß für wachsendes n gilt*

$$q_n \to \infty,\ \beta_2 - \frac{p_n}{q_n} = O\left(\frac{1}{q_n^{2+a}}\right)^{10)}.$$

Es sei nun r_1 ganz, r_2 ganz, $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$, $r = r_1 + r_2$, $\beta_2 > 0$, $\nu(\beta_2) = \nu$ $(0 \leqq \nu \leqq \infty)$,

$$Q(u) = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{r_1}^2 + \beta_2 (u_{r_1+1}^2 + u_{r_1+2}^2 + \ldots + u_r^2).$$

Dann ist

$$f(Q) = \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\nu + 1}$$

$\left(\text{\it für } \nu = \infty \text{ \it ist } \frac{1}{\nu+1} = 0 \text{ \it zu setzen}\right)$.

Man beachte, daß der Ausdruck $\frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\nu+1}$ genau das (abgeschlossene) Intervall $\left(\frac{r}{2} - 2,\ \frac{r}{2} - 1\right)$ durchläuft, wenn ν das Intervall $0 \leqq \nu \leqq \infty$ durchläuft; daraus und aus der Fußnote [10]) folgt, daß der Satz 1* tatsächlich den Satz 1 im Spezialfall $\sigma = 2$ enthält. Darüber hinaus gestattet uns der Satz 1*, zu jedem f mit $\frac{r}{2} - 2 \leqq f \leqq \frac{r}{2} - 1$

[8]) Math. Zeitschr. 33 (1931), S. 505—543 (weiter mit S. D. A. zitiert). Autorkorrektur.

[9]) V. Jarník, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, The Tôhoku Mathematical Journal 30 (1929), S. 354—371.

[10]) Bekanntlich ist $0 \leqq \nu(\beta_2) \leqq \infty$; und umgekehrt: zu jedem ν mit $0 \leqq \nu \leqq \infty$ kann man (mit Hilfe der regelmäßigen Kettenbruchentwickelung der Zahl β_2) leicht eine positive Zahl β_2 mit $\nu(\beta_2) = \nu$ konstruieren.

eine Form (2) (im Falle $\sigma = 2$) mit $f(Q) = f$ wirklich zu konstruieren, während der Satz 1 ein reiner Existenzsatz ist, aus welchem sich (und ebenso aus seinem Beweis) keine Konstruktionsvorschrift ergibt. Dieser tiefe Unterschied zwischen den Fällen $\sigma = 2$ und $\sigma > 2$ beruht darin, daß es sich — roh gesagt — für $\sigma = 2$ um die diophantischen Approximationen *einer einzigen* Zahl β_2, für $\sigma > 2$ dagegen um die simultanen diophantischen Approximationen *mehrerer* Zahlen $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma$ handelt. Bekanntlich sieht aber das Problem der simultanen diophantischen Approximationen von n Zahlen wesentlich anders aus, je nachdem $n = 1$ oder $n > 1$ ist[11]) (für $n = 1$ leistet uns z. B. die Theorie der Kettenbrüche sehr gute Dienste); und dieser Unterschied zwingt uns, bei dem Beweis des Satzes 1 im Falle $\sigma > 2$ den „konstruktiven" Weg des Beweises des Satzes 1* zu verlassen und zu den mengentheoretischen Methoden zu greifen, auf welchen die vorliegende Abhandlung beruht.

§ 2.

Vorbereitende Betrachtungen.

Hilfssatz 1. *Es sei* $r \geqq 5$, r *ganz*; $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0, \ldots, \alpha_r > 0$;

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2.$$

Für $x > 0$ *sei* $A(x) = A_Q(x) = \sum_{Q(m) \leqq x} 1$ *die Anzahl der Gitterpunkte im abgeschlossenen Ellipsoid* $Q(u) \leqq x$. *Weiter sei* $n > 0$, n *ganz*, $B = \max_{1 \leqq j \leqq r} \frac{2\pi}{\alpha_j}$, $\Theta(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 s}$ *für* $\Re(s) > 0$; $z = z(x)$ *sei eine für* $x > 1$ *definierte Funktion*, $0 < z(x) \leqq 1$. *Endlich sei*[12])

$$\mathsf{P}(x) = \mathsf{P}_Q(x) = A(x) - \frac{\pi^{r/2} x^{r/2}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}\, \Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right)}.$$

---

[11]) Dieser tiefgehende Unterschied ist besonders deutlich bei A. Khintchine, Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 50 (1926), S. 170—195 hervorgehoben.

[12]) Alle vorkommenden Quadratwurzeln sind mit positivem Realteil zu nehmen; alle vorkommenden Integrationswege sind geradlinig; mit $\bar{c}$ bezeichne ich unterschiedslos absolute positive Konstanten; mit c bezeichne ich unterschiedslos positive Zahlen, die nur von $r, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, n, z(x)$ abhängen; mit μ bezeichne ich unterschiedslos Zahlen, die von irgendwelchen Veränderlichen abhängen dürfen und der Bedingung $|\mu| \leqq 1$ genügen.

Behauptung:

$$\mathsf{P}(x) = O\left(x^{\frac{r}{4}} + x^{\frac{r}{2}-1} z + \frac{1}{z^n}\left| \int_{\frac{1}{x}+i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\infty} \prod_{j=1}^{r} \Theta(\alpha_j s)\, e^{xs}\, (e^{zs}-1)^n \frac{ds}{s^{n+1}} \right|\right.$$

$$\left. + \frac{1}{z^n}\left| \int_{\frac{1}{x}+i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\infty} \prod_{j=1}^{r} \Theta(\alpha_j s)\, e^{xs}\, (e^{-zs}-1)^n \frac{ds}{s^{n+1}} \right|\right).$$

Beweis. Wir setzen für $\Re(s) > 0$

$$\Theta(\alpha_1 s)\,\Theta(\alpha_2 s)\ldots\Theta(\alpha_r s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s} \qquad (0=\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\ldots);$$

dann ist für $x > 0$ offenbar $A(x) = \sum_{\lambda_m \leqq x} a_m$, also

$$\int_0^x A(y)\,dy = \sum_{\lambda_m \leqq x} a_m (x-\lambda_m).$$

Aus der bekannten Formel

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{Ts}}{s^2}\,ds = \operatorname{Max}(T, 0) \qquad (a>0,\ T \gtreqless 0)$$

folgt für $x > 0$, $a > 0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \prod_{j=1}^{r} \Theta(\alpha_j s)\, e^{xs}\frac{ds}{s^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s}\cdot e^{xs}\frac{ds}{s^2} \tag{5}$$

$$= \sum_{\lambda_m \leqq x} a_m (x-\lambda_m) = \int_0^x A(y)\,dy,$$

da der Integrand im zweiten Glied offenbar gliedweise integriert werden darf. Wir setzen nun für $-1 \leqq \xi \leqq 1$

$$A_1(x,\xi) = \int_x^{x+\xi} A(y)\,dy \quad \text{für } x > 1;$$

$$A_k(x,\xi) = \int_x^{x+\xi} A_{k-1}(y,\xi)\,dy \quad \text{für ganzes } k>1 \text{ und für } x>k.$$

Für $x > k \geqq 1$ (k ganz), $a > 0$ ist

$$(6)\qquad A_k(x, \xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a - i\infty}^{a + i\infty} \prod_{j=1}^{r} \Theta(\alpha_j s)\, e^{xs}(e^{\xi s} - 1)^k \frac{ds}{s^{k+1}}.$$

(6) gilt nämlich wegen (5) für $k = 1$; gilt aber (6) für irgendein ganzes $k \geqq 1$, so gilt (6) auch für $k + 1$ [man braucht nur in (6) rechts hinter dem Integralzeichen nach x in den Grenzen $x, x + \xi$ zu integrieren, was offenbar erlaubt ist]. Wir wenden nun (6) für $\xi = \pm z = \pm z(x)$, $k = n$, $x > n$ an und bekommen, wenn wir noch $a = \frac{1}{x}$ setzen,

$$(7)\qquad A_n(x, \pm z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{x} - i\infty}^{\frac{1}{x} + i\infty} \prod_{j=1}^{r} \Theta(\alpha_j s)\, e^{xs}(e^{\pm zs} - 1)^n \frac{ds}{s^{n+1}} \quad (x > n).$$

Wir bemerken noch, daß $A(x)$ für $x > 0$ offenbar eine positive, nicht abnehmende Funktion von x ist; daher ist für $x > n$

$$(8)\qquad \frac{1}{(-z)^n} A_n(x, -z) \leqq A(x) \leqq \frac{1}{z^n} A_n(x, z).$$

Es ist nun

$$(9)\quad \begin{cases} \qquad\qquad A_n(x, \pm z) = J_1 + J_2 + J_3, \\ \text{wo} \\ J_1 = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{x} - i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x} + i\frac{B}{\sqrt{x}}}, \quad J_2 = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{x} + i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x} + i\infty} \quad J_3 = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{x} - i\infty}^{\frac{1}{x} - i\frac{B}{\sqrt{x}}} \\ \qquad\qquad \text{(derselbe Integrand wie in (7));} \end{cases}$$

offenbar ist

$$(10)\qquad |J_2| = |J_3|.$$

Wir wollen noch J_1 berechnen. Nach einer bekannten Transformationsformel ist

$$\Theta(\alpha_j s) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_j s}}(1 + \psi_j(s)),$$

wo

$$\psi_j(s) = 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2\frac{\pi^2}{\alpha_j s}};$$

für $s = \frac{1}{x} + t i$, $|t| \leqq \frac{B}{\sqrt{x}}$ (t reell), $x > c$ ist

$$\Re\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{x}{1 + x^2 t^2} > c,$$

also

$$|\psi_j(s)| \leqq 2\, e^{-\frac{\pi^2 x}{\alpha_j (1 + x^2 t^2)}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-(m^2-1)\frac{\pi^2}{\alpha_j} c} < c\, e^{-\frac{c x}{1 + x^2 t^2}}.$$

Also ist

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} J_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi^{r/2}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r}} \int_{-\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{B}{\sqrt{x}}} & \frac{e^{x\left(\frac{1}{x} + i t\right)}}{\left(\frac{1}{x} + i t\right)^{\frac{r}{2} + n + 1}} \left(e^{\pm z\left(\frac{1}{x} + i t\right)} - 1\right)^n \\ & \left(1 + \mu c\, e^{-\frac{c x}{1 + x^2 t^2}}\right) d t. \end{aligned} \right.$$

Es sei nun ein für allemal bemerkt: für $x > \bar{c}$ ist einerseits (man beachte $0 < z \leqq 1$)

$$(12)\quad \begin{aligned} \left| e^{\pm z\left(\frac{1}{x} + i t\right)} - 1 \right| &= \left| e^{\pm \frac{z}{x}} (\cos z t \pm i \sin z t) - 1 \right| \\ &= \left| \left(1 + \mu \bar{c} \frac{z}{x}\right)(1 + \mu \bar{c} z t) - 1 \right| = \mu \bar{c} \frac{z}{x} + \mu \bar{c} z t, \end{aligned}$$

andererseits

$$(13)\quad \left| e^{\pm z\left(\frac{1}{x} + i t\right)} - 1 \right| = \mu \bar{c}.$$

Für $x > c$ ist also

$$(14)\quad \begin{aligned} &\int_{-\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{B}{\sqrt{x}}} \left| \frac{e^{x\left(\frac{1}{x} + i t\right)}}{\left(\frac{1}{x} + i t\right)^{\frac{r}{2} + n + 1}} \left(e^{\pm z\left(\frac{1}{x} + i t\right)} - 1\right)^n e^{-\frac{c x}{1 + x^2 t^2}} \right| d t \\ &= O\left(x^{\frac{r}{2} + n + 1} \int_0^{\frac{B}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-\frac{c x}{1 + x^2 t^2}}}{(1 + x^2 t^2)^{\frac{r}{4} + \frac{n+1}{2}}} \cdot z^n \cdot \left(\frac{1}{x} + t\right)^n d t \right) \\ &= O\left(x^{\frac{r}{2} + 1} \cdot z^n \int_0^{\frac{B}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-\frac{c x}{1 + x^2 t^2}}}{(1 + x^2 t^2)^{\frac{r}{4} + \frac{1}{2}}} d t \right) = O\left(x^{r/4} z^n\right); \end{aligned}$$

denn die Funktion $e^{-cxu}\cdot u^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}$ nimmt im Intervall $0 < u < \infty$ ihren größten Wert für $u = \left(\frac{r}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{cx}$ an; und dieser Wert ist $O\left(x^{-\frac{r}{4}-\frac{1}{2}}\right)$.

Weiter ist

$$\left|\int_{-\infty}^{-\frac{B}{\sqrt{x}}} \frac{e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+n+1}}\left(e^{\pm z\left(\frac{1}{x}+it\right)}-1\right)^n dt\right| = \left|\int_{\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\infty}\cdots\right| \tag{15}$$

$$= O\left(z^n \int_{\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}+t\right)^n}{t^{\frac{r}{2}+n+1}}\,dt\right) = O\left(z^n \int_{\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{dt}{t^{\frac{r}{2}+1}}\right) = O\left(z^n x^{r/4}\right).$$

Endlich ist für $x > n$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\pi^{r/2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+n+1}}\left(e^{\pm z\left(\frac{1}{x}+it\right)}-1\right)^n dt \tag{16}$$

$$= \frac{\pi^{r/2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty}\frac{e^{s(x\pm kz)}}{s^{\frac{r}{2}+n+1}}\,ds$$

$$= \frac{\pi^{r/2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(x\pm kz)^{\frac{r}{2}+n}\frac{1}{2\pi i}\int_{1\pm\frac{kz}{x}-i\infty}^{1\pm\frac{kz}{x}+i\infty}\frac{e^{s}}{s^{\frac{r}{2}+n+1}}\,ds$$

$$= \frac{\pi^{r/2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+n+1\right)}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(x\pm kz)^{\frac{r}{2}+n}$$

Die letzte Summe ist aber gleich der n-ten Differenz der Funktion $X^{\frac{r}{2}+n}$ mit der Spanne z; also ist (mit $0 < \vartheta < n$)

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(x \pm k z)^{\frac{r}{2}+n} = (\pm z)^n \left(\frac{d^n}{d y^n}\left(y^{\frac{r}{2}+n}\right)\right)_{y=x\pm\vartheta z} \tag{17}$$

$$= (\pm z)^n \frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+n+1\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}(x \pm \vartheta z)^{\frac{r}{2}}$$

$$= (\pm z)^n \frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+n+1\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}\left(x^{\frac{r}{2}} + O\left(x^{\frac{r}{2}-1} z\right)\right).$$

Aus (7), (9), (10), (11), (14), (15), (16), (17) folgt

$$A_n(x, \pm z) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r}} \frac{(\pm z)^n}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}$$

$$+ O\left(x^{\frac{r}{4}} z^n + x^{\frac{r}{2}-1} z^{n+1} + \left| \int_{\frac{1}{x}+i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\infty} \prod_{j=1}^{r} \Theta(\alpha_j s) e^{xs} (e^{\pm zs} - 1)^n \frac{ds}{s^{n+1}} \right| \right).$$

Nach (8) ist also

$$\frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}$$

$$+ O\left(x^{\frac{r}{4}} + x^{\frac{r}{2}-1} z + \frac{1}{z^n} \left| \int_{\frac{1}{x}+i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\infty} \prod_{j=1}^{r} \Theta(\alpha_j s) e^{xs} (e^{-zs} - 1)^n \frac{ds}{s^{n+1}} \right| \right)$$

$$\leqq A(x) \leqq \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}$$

$$+ O\left(x^{\frac{r}{4}} + x^{\frac{r}{2}-1} z + \frac{1}{z^n} \left| \int_{\frac{1}{x}+i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\infty} \prod_{j=1}^{r} \Theta(\alpha_j s) e^{xs} (e^{zs} - 1)^n \frac{ds}{s^{n+1}} \right| \right);$$

damit ist aber die Behauptung bewiesen.

§ 3.

Metrische Hilfssätze.

Es seien fünf Zahlen σ, λ, C, D, a gegeben:

$$\sigma \geqq 2, \sigma \text{ ganz}, \quad 0 < \lambda < \sigma - 1, \quad 0 < C < D, \quad a > 0.$$

Wir bilden den $(\sigma - 1)$-dimensionalen cartesischen Raum $R_{\sigma-1}$ der Punkte $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ und bezeichnen mit $W = W(C, D)$ den Würfel $C < \gamma_j < D$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$. Wenn h_j, k_j, n_j $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$, ϱ ganze Zahlen sind, $h_j > 0$, $k_j > 0$, $n_j \geqq 0$, $\varrho > 0$, so wollen wir sagen, daß das System

$$\{h_1, \ldots, h_\sigma; k_1, \ldots, k_\sigma; n_1, \ldots, n_\sigma; \varrho\} = \{h; k; n; \varrho\}$$

„zur Ordnung $[l; m_1, \ldots, m_\sigma; n_1, \ldots, n_\sigma; \varrho] = [l; m; n; \varrho]$ gehört", wenn die ganzen Zahlen $l, m_1, m_2, \ldots, m_\sigma$ die Ungleichungen

$$2^l \leqq h_1 < 2^{l+1}, \quad 2^{m_j} \leqq k_j < 2^{m_j+1} \quad (j = 1, 2, \ldots, \sigma) \tag{18}$$

erfüllen; es ist dann sicher $l \geqq 0$, $m_j \geqq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$. Wir wollen uns aber — ohne es wiederholt zu betonen — in diesem Paragraphen auf solche Ordnungen $[l; m; n; \varrho]$ $(l, m_j, n_j, \varrho$ ganz, $l \geqq 0, m_j \geqq 0, n_j \geqq 0,$ $\varrho > 0)$ beschränken, für welche

$$2^{m_1+n_1} \geqq 2^{m_2+n_2} \geqq \ldots \geqq 2^{m_\sigma+n_\sigma} \tag{19}$$

gilt.

Es liege nun eine Ordnung $[l; m; n; \varrho]$ mit (19) vor. Wenn $\{h; k; n; \varrho\}$ ein zu dieser Ordnung gehöriges System ist, so bezeichnen wir mit $M(h; k; n; \varrho)$ die Menge aller Punkte $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ aus W, welche die $\sigma - 1$ Ungleichungen

$$\left| \frac{h_1}{k_1} - \frac{h_j}{k_j}\gamma_j \right| < \frac{a}{2^{n_j} k_j 2^\varrho} \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma) \tag{20}$$

erfüllen. (20) ist aber mit

$$\left| \frac{h_1}{k_1}\frac{k_j}{h_j} - \gamma_j \right| < \frac{a}{2^{n_j} h_j 2^\varrho} \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma)$$

gleichbedeutend. Wenn $\varrho > c'$[13]), so ist $a \cdot 2^{-n_j} \cdot h_j^{-1} 2^{-\varrho} < \frac{C}{2}$; wenn also $M(h; k; n; \varrho)$ nicht leer sein soll, so muß

$$\frac{C}{2} < \frac{h_1 k_j}{k_1 h_j} < D + \frac{C}{2}$$

sein, also

$$c' 2^{l+m_j-m_1} < h_j < c' 2^{l+m_j-m_1} \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma), \tag{21}$$

[13]) Mit c' bezeichne ich unterschiedslos positive Zahlen, die nur von $\sigma, \lambda, C,$ D, a abhängen.

wenn $\varrho > c'$. Von nun an sei bis zum Schluß dieses Paragraphen stets $\varrho > c'$. Die Anzahl derjenigen Systeme $\{h; k; n; \varrho\}$ der Ordnung $[l; m; n; \varrho]$, denen ein nichtleeres $M(h; k; n; \varrho)$ entspricht, ist also höchstens

$$(22)\qquad c'\, 2^l \cdot 2^{l+m_2-m_1} \cdot 2^{l+m_3-m_1} \ldots 2^{l+m_\sigma-m_1} \cdot 2^{m_1+m_2+\cdots+m_\sigma}$$
$$= c'\, 2^{\sigma l-(\sigma-2)m_1+2m_2+2m_3+\cdots+2m_\sigma} = \mathfrak{A}.$$

Wir setzen zur Abkürzung $[\lambda] = \omega$ (also ω ganz, $\omega \leqq \lambda < \omega + 1$, also $0 \leqq \omega \leqq \sigma - 2$),

$$(23)\qquad \alpha = \alpha(l; m; n; \varrho) = 2^{-l+m_1-m_\sigma-\omega-n_\sigma-\omega-\varrho}$$

und wir überdecken den Raum $R_{\sigma-1}$ mit abzählbar vielen abgeschlossenen Würfeln (ich werde sie „α-Würfel" nennen)

$$p_j\alpha \leqq \gamma_j \leqq (p_j+1)\alpha \quad (p_j \text{ ganz};\ j = 2, 3, \ldots, \sigma).$$

Wenn $\{h; k; n; \varrho\}$ ein zur Ordnung $[l; m; n; \varrho]$ gehöriges System ist, so bilden diejenigen α-Würfel, die mit $M(h; k; n; \varrho)$ einen nichtleeren Durchschnitt haben, eine endliche [für leeres $M(h; k; n; \varrho)$ eine leere] Menge von α-Würfeln, die wir als „die Würfelschar $\{h; k; n; \varrho\}$" bezeichnen. Die Menge $M(h; k; n; \varrho)$ ist ein offenes Parallelepiped (wenn sie nicht leer ist), dessen Kanten den Koordinatenachsen parallel und der Reihe nach höchstens gleich

$$(24)\qquad \frac{2a}{2^{n_j} h_j 2^\varrho} < c'\, 2^{-l+m_1-m_j-n_j-\varrho} \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma)$$

sind. Wegen (19), (23), (24) besteht also die Würfelschar $\{h; k; n; \varrho\}$ aus höchstens

$$(25)\qquad c' \prod_{j=\sigma-\omega+1}^{\sigma} \left(2^{-l+m_1-m_j-n_j-\varrho} \cdot \frac{1}{\alpha}\right)$$
$$= c'\,\alpha^{-\omega}\, 2^{-l\omega-\varrho\omega+m_1\omega} \prod_{j=\sigma-\omega+1}^{\sigma} 2^{-m_j-n_j} = \mathfrak{B}$$

α-Würfeln[14]).

Es sei

$$(26)\qquad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}(l; m; n; \varrho)$$
$$= \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\alpha^\lambda \left((l+1)(\varrho+1) \prod_{j=1}^{\sigma} (m_j+1)(n_j+1)\right)^2;$$

[14]) Für $\omega = 0$ soll $\prod_{j=\sigma-\omega+1}^{\sigma} 2^{-m_j-n_j} = 1$ sein; überhaupt sollen leere Produkte stets 1 bedeuten.

es sei $\mathfrak{P}(l; m; n; \varrho)$ die Menge derjenigen Punkte $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ aus W, die folgende Eigenschaft haben: Es gibt mindestens $\mathfrak{N}$ zur Ordnung $[l; m; n; \varrho]$ gehörige Systeme $\{h; k; n; \varrho\}$, für welche $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ in $M(h; k; n; \varrho)$ liegt.

Jeder Punkt von $\mathfrak{P}(l; m; n; \varrho)$ liegt in (mindestens) einem α-Würfel und dieser α-Würfel gehört offenbar zur Würfelschar $\{h; k; n; \varrho\}$ für mindestens $\mathfrak{N}$ zur Ordnung $[l; m; n; \varrho]$ gehörige Systeme $\{h; k; n; \varrho\}$; es kann aber offenbar nicht mehr als

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}:\mathfrak{N} = \alpha^{-\lambda}\Big((l+1)(\varrho+1)\prod_{j=1}^{\sigma}(m_j+1)(n_j+1)\Big)^{-2}$$

derartige α-Würfel geben. Daher sieht man: $\mathfrak{P}(l; m; n; \varrho)$ läßt sich mit höchstens

$$\alpha^{-\lambda}\Big((l+1)(\varrho+1)\prod_{j=1}^{\sigma}(m_j+1)(n_j+1)\Big)^{-2}$$

α-Würfeln überdecken.

Es sei nun $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(C, D, a, \sigma, \lambda)$ die Menge derjenigen Punkte $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ aus W, die folgende Eigenschaft haben: „Zu jedem $\varrho_0 > 0$ gibt es mindestens eine Ordnung $[l; m; n; \varrho]$ mit $\varrho > \varrho_0$ (und mit (19)), so daß der Punkt $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ für mindestens

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\,\alpha^{\lambda}\Big((l+1)(\varrho+1)\prod_{j=1}^{\sigma}(m_j+1)(n_j+1)\Big)^{2}$$

Systeme $\{h; k; n; \varrho\}$ der Ordnung $[l; m; n; \varrho]$ die Ungleichungen (20) erfüllt.“

Ich behaupte nun: $L(\mathfrak{M}; x^{\lambda}) = 0$.

Beweis: Es sei $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$. Wenn zu einer Ordnung $[l; m; n; \varrho]$ (mit (19)) mindestens ein System $\{h; k; n; \varrho\}$ mit nichtleerem $M(h; k; n; \varrho)$ gehören soll, so muß nach (21)

$$2^{l+m_j-m_1} > c' \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma)$$

sein (da $h_j \geqq 1$); wegen (23) muß also

$$\alpha < c'\,2^{-\varrho}$$

sein. Wir können also $\varrho_0 > c'$ so wählen, daß

$$(27)\qquad c'\,2^{-\varrho_0} < \eta, \quad \sum_{l,\,m_j,\,n_j}\ \sum_{\varrho>\varrho_0} \frac{1}{\Big((l+1)(\varrho+1)\prod_{j=1}^{\sigma}(m_j+1)(n_j+1)\Big)^{2}} < \varepsilon.$$

[Dabei wird für alle ganzen, nichtnegativen l, m_j, n_j mit (19) summiert.]

Jeder Punkt von $\mathfrak{M}$ muß in mindestens einer Menge $\mathfrak{P}(l; m; n; \varrho)$ mit $\varrho > \varrho_0$ liegen, also

$$\mathfrak{M} \subset \sum_{l,\,m_j,\,n_j}\ \sum_{\varrho>\varrho_0} \mathfrak{P}(l; m; n; \varrho).$$

Man kann aber jede nichtleere Menge $\mathfrak{P}(l; m; n; \varrho)$ $(\varrho > \varrho_0)$ mit höchstens

$$\alpha^{-\lambda}\Big((l+1)(\varrho+1)\prod_{j=1}^{\sigma}(m_j+1)(n_j+1)\Big)^{-2}$$

abgeschlossenen Würfeln der Kante α überdecken, wobei $\alpha < c' 2^{-\varrho} < c' 2^{-\varrho_0} < \eta$. Multiplizieren wir diese Anzahl mit α^λ und summieren über l, m_j, n_j, ϱ $(\varrho > \varrho_0)$, bekommen wir nach (27)

$$L_\eta(\mathfrak{M}; x^\lambda) < \varepsilon \text{ für jedes } \varepsilon > 0,\ \eta > 0,$$

also

$$L_\eta(\mathfrak{M}; x^\lambda) = 0 \text{ für jedes } \eta > 0,$$

also

$$L(\mathfrak{M}; x^\lambda) = 0.$$

Wir wollen das eben Bewiesene im folgenden Hilfssatz zusammenfassen:

Hilfssatz 2. *Es sei* $\sigma \geqq 2$, σ *ganz,* $0 < \lambda < \sigma - 1$, $0 < C < D$, $a > 0$; $R_{\sigma-1}$ *sei der* $(\sigma-1)$*-dimensionale cartesische Raum der Punkte* $(\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_\sigma)$; W *sei der Würfel* $C < \gamma_j < D$ $(j = 2, 3, \dots, \sigma)$. *Dann gibt es im* $R_{\sigma-1}$ *eine Punktmenge*

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(C, D, a, \sigma, \lambda) \quad \textit{mit} \quad L(\mathfrak{M}; x^\lambda) = 0,$$

die folgende Eigenschaft besitzt:

Wenn $(\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_\sigma)$ *ein Punkt aus* W *ist, der nicht in* $\mathfrak{M}$ *liegt, so gibt es eine positive Zahl* $\varrho_0 = \varrho_0(C, D, a, \sigma, \lambda, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_\sigma)$ *mit folgender Eigenschaft:*

Sind l, m_j, n_j $(j = 1, 2, \dots, \sigma)$, ϱ *nichtnegative ganze Zahlen mit*

$$2^{m_1+n_1} \geqq 2^{m_2+n_2} \geqq \dots \geqq 2^{m_\sigma+n_\sigma},\quad \varrho > \varrho_0,$$

so haben die Ungleichungen

$$\left|\frac{h_1}{k_1} - \frac{h_j}{k_j}\gamma_j\right| < \frac{a}{2^{n_j} k_j 2^\varrho} \qquad (j = 2, 3, \dots, \sigma),$$

$$2^l \leqq h_1 < 2^{l+1},\quad 2^{m_j} \leqq k_j < 2^{m_j+1} \qquad (j = 1, 2, \dots, \sigma)$$

weniger als $\mathfrak{N}(l; m; n; \varrho)$ *Lösungen in ganzen Zahlen* h_j, k_j $(j = 1, 2, \dots, \sigma)$. *Dabei ist*[15])

$$\mathfrak{N}(l; m; n; \varrho) = c' 2^{(\sigma-\lambda)l} \cdot 2^{(\lambda-\sigma+2)m_1} \cdot 2^{(2-\lambda+\omega)m_{\sigma-\omega} - (\lambda-\omega)n_{\sigma-\omega}} \cdot$$

$$\cdot 2^{-\varrho\lambda} \cdot \prod_{1<j<\sigma-\omega} 2^{2m_j} \cdot \prod_{\sigma-\omega<j\leqq\sigma} 2^{m_j-n_j} \cdot \Big((l+1)(\varrho+1)\prod_{j=1}^{\sigma}(m_j+1)\prod_{j=1}^{\sigma}(n_j+1)\Big)^2$$

$$(\omega = [\lambda];\ \text{für } \omega = 0 \text{ soll } \prod_{\sigma-\omega<j\leqq\sigma} 2^{m_j-n_j} = 1 \text{ sein};$$

$$\text{für } \omega = \sigma - 2 \text{ soll } \prod_{1<j<\sigma-\omega} 2^{2m_j} = 1 \text{ sein}).$$

---

15) Vgl. (26), (22), (25), (23).

Wir führen noch zwei einfache Hilfssätze an, welche das äußere Maß $L(M; x^\lambda)$ betreffen.

Hilfssatz 3. *Es sei σ ganz, $\sigma \geqq 2$, $0 < \lambda < \sigma - 1$. M sei eine Punktmenge im $(\sigma - 1)$-dimensionalen cartesischen Raum $R_{\sigma-1}$. Es sei $i_2, i_3, \ldots, i_\sigma$ irgend eine Permutation der Ziffern $2, 3, \ldots, \sigma$. N sei die Punktmenge, welche vom Punkt $(\gamma_{i_2}, \gamma_{i_3}, \ldots, \gamma_{i_\sigma})$ durchlaufen wird, wenn der Punkt $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ die Punktmenge M durchläuft.*

Behauptung: $L(N; x^\lambda) = L(M; x^\lambda)$.

Beweis: klar.

Hilfssatz 4. *Es sei $\sigma \geqq 2$, σ ganz, $0 < \lambda < \sigma - 1$, $0 < C < D$; g ganz, $1 \leqq g \leqq \sigma$. $R_{\sigma-1}$ sei der $(\sigma - 1)$-dimensionale cartesische Raum der Punkte $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$.*

Es sei M eine Punktmenge aus $R_{\sigma-1}$, die ganz im Würfel $C < \gamma_j < D$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$ liegt. Jedem Punkt $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ aus M ordnen wir σ Zahlen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\sigma$ folgendermaßen zu:

$$\delta_g = 1, \quad \gamma_j = \frac{\delta_1}{\delta_j} \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma)^{16}). \tag{28}$$

Es sei N die Menge, die der Punkt $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{g-1}, \delta_{g+1}, \ldots, \delta_\sigma)$ durchläuft, wenn der Punkt $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ die Menge M durchläuft.

Behauptung. *Wenn $L(M; x^\lambda) = 0$, so ist auch $L(N; x^\lambda) = 0$.*

Beweis. Es sei $L(M; x^\lambda) = 0$. Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem $g = 1$ oder $g > 1$ ist.

1. Fall: $g = 1$. In diesem Fall ist nach der letzten Fußnote $\delta_j = \gamma_j^{-1}$ für $j = 2, 3, \ldots, \sigma$.

Es sei $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$. Es gibt eine höchstens abzählbare Menge von Würfeln

$$W_i\colon \quad a_{ij} < \gamma_j < b_{ij} \quad (j = 2, 3, \ldots, \sigma;\ i = 1, 2, \ldots),$$

welche die Menge M überdeckt, so daß

$$0 < b_{i2} - a_{i2} = b_{i3} - a_{i3} = \ldots = b_{i\sigma} - a_{i\sigma} = l_i < \operatorname{Min}\left(\frac{C}{2}, \frac{\eta C^2}{2}\right),$$

$$\sum_i l_i^\lambda < \left(\frac{C^2}{2}\right)^\lambda \varepsilon.$$

---

[16]) Dadurch ist tatsächlich jedem Punkt $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ aus M genau ein System $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\sigma$ zugeordnet. Denn ist $g = 1$, so besagt (28): $\gamma_j = \delta_j^{-1}$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$, also

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_j = \frac{1}{\gamma_j} \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma);$$

ist aber $g > 1$, so besagt (28): $\gamma_g = \delta_1$, $\gamma_j = \dfrac{\gamma_g}{\delta_j}$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$, also

$$\delta_1 = \gamma_g, \ \delta_j = \gamma_g \gamma_j^{-1} \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $b_{ij} > C$ $\left(\text{also } a_{ij} > \frac{C}{2}\right)$ voraussetzen, da sonst der Durchschnitt $W_i \cdot M$ leer wäre. Wenn der Punkt $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ in W_i liegt, so liegt der Punkt $(\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_\sigma)$ im Parallelepiped

$$W_i': \quad \frac{1}{b_{ij}} < \delta_j < \frac{1}{a_{ij}} \ (j = 2, 3, \ldots, \sigma;\ i = 1, 2, \ldots).$$

Die Parallelepipede W_i' $(i = 1, 2, \ldots)$ überdecken also die Menge N und es ist

$$0 < \frac{1}{a_{ij}} - \frac{1}{b_{ij}} = \frac{b_{ij} - a_{ij}}{a_{ij}\, b_{ij}} < \frac{2\, l_i}{C^2} < \eta.$$

Man kann also W_i' mit einem Würfel W_i'' mit der Kante $2\, l_i C^{-2} < \eta$ überdecken; die Würfel W_i'' $(i = 1, 2, \ldots)$ überdecken die Menge N und es ist

$$\sum_i \left(\frac{2\, l_i}{C^2}\right)^\lambda < \varepsilon.$$

Daher ist $L_\eta(N; x^\lambda) < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, also $L_\eta(N; x^\lambda) = 0$ für jedes $\eta > 0$, also $L(N; x^\lambda) = 0$.

2. Fall: $g > 1$. In diesem Falle ist nach der letzten Fußnote $\delta_1 = \gamma_g$, $\delta_j = \gamma_g \gamma_j^{-1}$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma, j \neq g)$. Es sei $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$. Es gibt eine höchstens abzählbare Menge von Würfeln

$$W_i: \quad a_{ij} < \gamma_j < b_{ij} \quad (j = 2, 3, \ldots, \sigma;\ i = 1, 2, \ldots),$$

welche die Menge M überdeckt, so daß

$$0 < b_{i2} - a_{i2} = b_{i3} - a_{i3} = \ldots = b_{i\sigma} - a_{i\sigma} = l_i < \operatorname{Min}\left(\frac{C}{2}, \frac{C^2\eta}{6D + C^2}\right),$$

$$\sum_i l_i^\lambda < \left(\frac{C^2}{6D + C^2}\right)^\lambda \varepsilon.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $b_{ij} > C$ $\left(\text{also } a_{ij} > \frac{C}{2}\right)$ und $a_{ij} < D$ $\left(\text{also } b_{ij} < D + \frac{C}{2} < 2D\right)$, da sonst der Durchschnitt $W_i \cdot M$ leer wäre.

Wenn der Punkt $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ in W_i liegt, so liegt der Punkt $(\delta_1, \ldots, \delta_{g-1}, \delta_{g+1}, \ldots, \delta_\sigma)$ im Parallelepiped

$$W_i': \qquad a_{ig} < \delta_1 < b_{ig}$$

$$\frac{a_{ig}}{b_{ij}} < \delta_j < \frac{b_{ig}}{a_{ij}}$$

$$(j = 2, 3, \ldots, \sigma;\ j \neq g;\ i = 1, 2, \ldots).$$

Die Parallelepipede W_i' überdecken also die Menge N und es ist

$$0 < b_{ig} - a_{ig} = l_i < \frac{6D + C^2}{C^2} l_i < \eta,$$

$$0 < \frac{b_{ig}}{a_{ij}} - \frac{a_{ig}}{b_{ij}} = \frac{b_{ig} b_{ij} - a_{ig} a_{ij}}{a_{ij} b_{ij}}$$

$$= \frac{b_{ig}(b_{ij} - a_{ij}) + a_{ij}(b_{ig} - a_{ig})}{a_{ij} b_{ii}} < \frac{6D}{C^2} l_i < \frac{6D + C^2}{C^2} l_i < \eta$$

$$(j = 2, 3, \ldots, \sigma;\ j \neq g;\ i = 1, 2, \ldots).$$

Man kann also W_i' $(i = 1, 2, \ldots)$ mit einem Würfel W_i'' von der Kante

$$\frac{6D + C^2}{C^2} l_i < \eta$$

überdecken; die Würfel W_i'' $(i = 1, 2, \ldots)$ überdecken die Menge N und es ist

$$\sum_i \left(\frac{6D + C^2}{C^2}\right)^\lambda l_i^\lambda < \varepsilon.$$

Daher ist $L_\eta(N; x^\lambda) < \varepsilon$ für jedes $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$, also $L_\eta(N; x^\lambda) = 0$ für jedes $\eta > 0$, also $L(N; x^\lambda) = 0$.

§ 4.

Schluß des Beweises des Satzes 2.

Hilfssatz 5. *Es sei* $\sigma \geqq 2$, $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$, $\ldots$, $r_\sigma \geqq 4$, $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$; σ, r_j *ganz* $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$; $0 < \lambda < \sigma - 1$. *Wir bilden den* $(\sigma - 1)$*-dimensionalen cartesischen Raum der Punkte* $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$. *Für ganzes* $\nu > 1$ *sei* $\mathfrak{M}_\nu$ *die Menge derjenigen Punkte* $(\beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$ *mit* $\frac{1}{\nu} < \beta_j < \nu$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$, *die folgende Eigenschaft haben: wenn*

$$Q(u) = u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + \ldots + u_{r_1,1}^2 + \sum_{j=2}^{\sigma} \beta_j (u_{1,j}^2 + u_{2,j}^2 + \ldots + u_{r_j,j}^2) \tag{29}$$

und (für $x > 1$) $z = x^{-\frac{\lambda}{\sigma - \lambda}}$ *gesetzt wird, so ist*

$$\int_{\frac{1}{x} + i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x} + i\infty} \prod_{j=1}^{\sigma} \Theta^{r_j}(\beta_j s)\, e^{xs} (e^{\pm zs} - 1)^\sigma \frac{ds}{s^{\sigma+1}} = \Omega\left(x^{\frac{r}{2} - 1 - \lambda} z^{1+\lambda} (\log x)^{6\sigma + 5}\right)$$

$$\left(\beta_1 = 1,\ B = \max_{1 \leqq j \leqq \sigma} \frac{2\pi}{\beta_j}\right).$$

Behauptung: $L(\mathfrak{M}_\nu; x^\lambda) = 0$.

Wir behaupten zunächst: beweisen wir den Hilfssatz 5, so wird damit der Satz 2 bewiesen sein. Beweis: Der Hilfssatz 5 sei wahr; wir setzen $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_4 + \ldots$; dann ist

$$L(\mathfrak{M}; x^\lambda) \leqq \sum_{\nu=2}^{\infty} L(\mathfrak{M}_\nu; x^\lambda) = 0.$$

Wenn ein Punkt $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ mit $\beta_j > 0$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$ nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört, so gibt es ein ganzes $\nu > 1$, so daß $\frac{1}{\nu} < \beta_j < \nu$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$; andererseits aber liegt dieser Punkt nicht in $\mathfrak{M}_\nu$. Nach dem Hilfssatz 1 mit $z = x^{-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}$, $n = \sigma$ und nach dem Hilfssatz 5 ist also (man beachte $\lambda < \sigma - 1 \leqq \frac{r}{4} - 1$, also

$$\frac{\lambda}{\sigma-\lambda} < \frac{\sigma-1}{1} \leqq \frac{r}{4} - 1, \text{ also } \frac{r}{4} < \frac{r}{2} - 1 - \frac{\lambda}{\sigma-\lambda})$$

für die Form (29)

$$\mathsf{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{4}} + x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}\right) + o\left(x^{\frac{r}{2}-1-\lambda-\frac{1+\lambda-\sigma}{\sigma-\lambda}\lambda} \log^{6\sigma+5} x\right)$$
$$= o\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}} \log^{6\sigma+5} x\right),$$

womit Satz 2 bewiesen ist.

Beweis des Hilfssatzes 5. $\sigma, r_1, r_2, \ldots, r_\sigma, r, \nu$ seien den Voraussetzungen gemäß gegeben; W' sei der Würfel $\frac{1}{\nu} < \beta_j < \nu$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$; wir greifen einen Punkt $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ aus W' heraus und bilden das Integral

$$J = \int_{\frac{1}{x}+i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\infty} \prod_{j=1}^{\sigma} \Theta^{r_j}(\beta_j s)\, e^{xs}\, (e^{\pm zs} - 1)^\sigma \frac{ds}{s^{\sigma+1}}. \tag{30}$$

Den Integrationsweg teilen wir in abzählbar viele Stücke folgendermaßen (bis zum Schluß dieses Paragraphen sei $x_4 > 4$).

Eine Zahl h/k nenne ich eine Fareyzahl oder einen Fareypunkt, wenn $h \geqq 0$, $0 < k \leqq \sqrt{x}$, $(h, k) = 1$. Ein für allemal bemerke ich: wenn ich einen Bruch h/k aufschreibe und ihn eine Fareyzahl oder einen Fareypunkt nenne, verstehe ich darunter, daß der Bruch schon in seiner reduzierten Gestalt aufgeschrieben ist, d. h. daß $h \geqq 0$, $0 < k \leqq \sqrt{x}$, $(h, k) = 1$. Zwei Fareypunkte (und ebenso später zwei Medianten) heißen benachbart, wenn zwischen ihnen kein Fareypunkt (bzw. keine Mediante) liegt. Dabei bezeichne ich als Medianten alle Zahlen $\frac{h+h'}{k+k'}$, wo $\frac{h}{k}$, $\frac{h'}{k'}$ zwei benachbarte Fareypunkte sind. Wenn h/k ein Fareypunkt mit $h > 0$ ist, so sei $\mathfrak{B}_{h,k}$ dasjenige linksseitig abgeschlossene, rechtsseitig offene Intervall, welches den Punkt h/k enthält und zu Endpunkten zwei benachbarte Medianten hat. Wenn $J = \langle a, b)$ und $\delta > 0$, so bedeute δJ das Intervall $\langle \delta a, \delta b)$. Die kleinste Mediante ist $\frac{0+1}{1+[\sqrt{x}]} < \frac{1}{\sqrt{x}}$; wenn also bei festem $j\,(1 \leqq j \leqq \sigma)$ die Zahl h/k alle Fareybrüche mit $h > 0$ durchläuft, so überdeckt die Vereinigungsmenge der Intervalle $\frac{2\pi}{\beta_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ sicher das ganze Intervall $\left(\frac{B}{\sqrt{x}}, +\infty\right)$ $\left(\text{denn } \frac{2\pi}{\beta_j} \leqq B\right)$. Bekanntlich ist

$$(31)\qquad \mathfrak{B}_{h,k} = \left\langle \frac{h}{k} - \frac{\vartheta'}{k\sqrt{x}},\ \frac{h}{k} + \frac{\vartheta''}{k\sqrt{x}}\right),$$

wo $\frac{1}{2} \leqq \vartheta' \leqq 1$, $\frac{1}{2} \leqq \vartheta'' \leqq 1$.

Im Integral (30) setzen wir nun $s = \frac{1}{x} + ti$ (t reell) und bekommen sofort

$$|J| \leqq e \int\limits_{\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\infty} \prod_{j=1}^{\sigma} |\Theta^{r_j}(\beta_j s)| \cdot |e^{\pm zs} - 1|^{\sigma} \frac{dt}{t^{\sigma+1}}.$$

Zu jedem t des Integrationsintervalls $\left(\frac{B}{\sqrt{x}}, +\infty\right)$ und zu jedem j $(1 \leqq j \leqq \sigma)$ gibt es genau eine Fareyzahl h_j/k_j (wo $h_j > 0$), so daß t in $\frac{2\pi}{\beta_j}\mathfrak{B}_{h_j,k_j}$ liegt; wenn dazu noch $t \neq \frac{2\pi}{\beta_j}\frac{h_j}{k_j}$, so gibt es genau eine ganze Zahl n_j, so daß

$$(32)\qquad \frac{2\pi}{\beta_j 2^{n_j+1} k_j\sqrt{x}} < \left| t - \frac{2\pi}{\beta_j}\frac{h_j}{k_j}\right| \leqq \frac{2\pi}{\beta_j 2^{n_j} k_j\sqrt{x}} \qquad (1 \leqq j \leqq \sigma);$$

nach (31) ist

$$\left| t - \frac{2\pi}{\beta_j}\frac{h_j}{k_j}\right| \leqq \frac{2\pi}{\beta_j k_j \sqrt{x}},$$

also ist $n_j \geqq 0$. Also: zu jedem $t > \frac{B}{\sqrt{x}}$, welches mit keinem der abzählbar vielen Punkte $\frac{2\pi}{\beta_j}\frac{h}{k}$ $(0 < k \leqq \sqrt{x},\ h > 0,\ (h,k) = 1,\ j = 1, 2, \dots, \sigma)$ übereinstimmt, gibt es ein System von 3σ eindeutig bestimmten ganzen Zahlen

$$h_j, k_j, n_j \ (j = 1, 2, \dots, \sigma;\ h_j > 0;\ 0 < k_j \leqq \sqrt{x};\ (h_j, k_j) = 1;\ n_j \geqq 0),$$

so daß t im Durchschnitt der σ Intervalle $\frac{2\pi}{\beta_j}\mathfrak{B}_{h_j,k_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ liegt und die Ungleichungen (32) erfüllt.

Umgekehrt, wenn ein System von 3σ ganzen Zahlen

$$h_j, k_j, n_j \quad (j = 1, 2, \ldots, \sigma;\ h_j > 0;\ 0 < k_j \leqq \sqrt{x};\ (h_j, k_j) = 1;\ n_j \geqq 0)$$

gegeben ist, so sei

$$S(h_1, h_2, \ldots, h_\sigma;\ k_1, k_2, \ldots, k_\sigma;\ n_1, n_2, \ldots, n_\sigma) = S(h; k; n)$$

die Menge derjenigen t des Intervalls $\left(\frac{B}{\sqrt{x}}, +\infty\right)$, die im Durchschnitt der σ Intervalle $\frac{2\pi}{\beta_j}\mathfrak{B}_{h_j,k_j}$ liegen und den Ungleichungen (32) genügen[17]. Die Vereinigungsmenge aller Mengen $S(h; k; n)$ überdeckt offenbar, mit Ausnahme von abzählbar vielen Punkten, das Intervall $\frac{B}{\sqrt{x}} < t < +\infty$. Daher ist

$$|J| \leqq e \sum_{\substack{h_1, \ldots, h_\sigma \\ k_1, \ldots, k_\sigma \\ n_1, \ldots, n_\sigma}} \int\limits_{S(h;k;n)} \prod_{j=1}^{\sigma} |\Theta^{r_j}(\beta_j s)| \cdot |e^{\pm zs} - 1|^\sigma \frac{dt}{t^{\sigma+1}}.$$

Es sei nun $i_1, i_2, \ldots, i_\sigma$ irgend eine Permutation der Ziffern $1, 2, \ldots, \sigma$; $U(i_1, i_2, \ldots, i_\sigma)$ sei die Menge derjenigen $S(h; k; n)$, für welche

$$2^{n_{i_1}} k_{i_1} \geqq 2^{n_{i_2}} k_{i_2} \geqq \ldots \geqq 2^{n_{i_\sigma}} k_{i_\sigma}$$

ist. Der Hilfsatz 5 wird offenbar bewiesen sein, wenn wir folgende Behauptung beweisen:

Behauptung A. *Es sei $(i_1, i_2, \ldots, i_\sigma)$ irgend eine Permutation der Ziffern $1, 2, \ldots, \sigma$. Dann gibt es im cartesischen Raume der Punkte $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ eine Menge $\mathfrak{M}_\nu(i_1, i_2, \ldots, i_\sigma)$ mit*

$$L(\mathfrak{M}_\nu(i_1, i_2, \ldots, i_\sigma); x^\lambda) = 0,$$

die folgende Eigenschaft besitzt:

Ist $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ irgend ein Punkt mit $\frac{1}{\nu} < \beta_j < \nu$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$, der nicht zu $\mathfrak{M}_\nu(i_1, i_2, \ldots, i_\sigma)$ gehört, so ist ($\beta_1 = 1$ gesetzt)

$$\sum \int\limits_{S(h;k;n)} \prod_{j=1}^{\sigma} |\Theta^{r_j}(\beta_j s)| \cdot |e^{\pm zs} - 1|^\sigma \frac{dt}{t^{\sigma+1}}$$

$$= o\left(x^{\frac{r}{2}-1-\lambda} z^{1+\lambda} \log^{6\sigma+5} x\right);$$

dabei ist die Summe über alle $S(h; k; n)$ aus $U(i_1, i_2, \ldots, i_\sigma)$ zu erstrecken.

---

[17]) $S(h; k; n)$ kann freilich auch leer sein.

Wir numerieren nun die Summationsbuchstaben um: statt $h_{i_f}, k_{i_f}, n_{i_f}$ schreiben wir h_f, k_f, n_f, und statt β_{i_f} schreiben wir δ_f (also $\delta_g = 1$, wenn g durch $i_g = 1$ definiert ist). Statt der Behauptung A beweisen wir nun die äquivalente[18])

Behauptung A'. *Es seien $\sigma, r_1, r_2, \ldots, r_\sigma, r, \lambda, \nu$ gemäß den Voraussetzungen des Hilfssatzes 5 gegeben; es sei weiter eine ganze Zahl g gegeben, $1 \leqq g \leqq \sigma$. Wir setzen $\delta_g = 1$ und betrachten den $(\sigma - 1)$-dimensionalen cartesischen Raum $R_{\sigma-1}$ der Punkte $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{g-1}, \delta_{g+1}, \ldots, \delta_\sigma)$. Dann gibt es in $R_{\sigma-1}$ eine Punktmenge $\mathfrak{M}_\nu(g)$ mit*

$$L(\mathfrak{M}_\nu(g); x^\lambda) = 0,$$

so daß folgendes gilt: Ist $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{g-1}, \delta_{g+1}, \ldots, \delta_\sigma)$ ein Punkt mit $\frac{1}{\nu} < \delta_j < \nu \, (1 \leqq j \leqq \sigma, j \neq g)$, der nicht zu $\mathfrak{M}_\nu(g)$ gehört, so ist[19])

$$(33) \qquad \sum_{h;\,k;\,n} \int\limits_{S(h;\,k;\,n)} \prod_{j=1}^{\sigma} |\Theta^{r_j}(\delta_j s)| \cdot |e^{\pm zs} - 1|^\sigma \frac{dt}{t^{\sigma+1}}$$

$$= o\left(x^{\frac{r}{2}-1-\lambda} z^{1+\lambda} \log^{6\sigma+5} x\right).$$

Dabei wird über alle Systeme ganzer Zahlen $h_j; k_j; n_j$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ summiert, für welche

$$(34) \qquad h_j > 0, \quad 0 < k_j \leqq \sqrt{x}, \quad (h_j, k_j) = 1, \quad n_j \geqq 0,$$

$$(35) \qquad k_1 2^{n_1} \geqq k_2 2^{n_2} \geqq \ldots \geqq k_\sigma 2^{n_\sigma} \text{ gilt.}$$

$$S(h; k; n) = S(h_1, h_2, \ldots, h_\sigma; k_1, k_2, \ldots, k_\sigma; n_1, n_2, \ldots, n_\sigma)$$

ist als die Menge derjenigen t des Intervalls $\left(\frac{B}{\sqrt{x}}, +\infty\right)$ definiert, die im Durchschnitt der σ Intervalle $\frac{2\pi}{\delta_j}\mathfrak{B}_{h_j, k_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ liegen und den Ungleichungen

$$(36) \qquad \frac{2\pi}{\delta_j 2^{n_j+1} k_j \sqrt{x}} < \left| t - \frac{2\pi}{\delta_j} \frac{h_j}{k_j} \right| \leqq \frac{2\pi}{\delta_j 2^{n_j} k_j \sqrt{x}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

genügen; B ist durch $B = \operatorname*{Max}_{1 \leqq j \leqq \sigma} \frac{2\pi}{\delta_j}$ definiert.

Es liege nun ein Punkt $(\delta_1, \ldots, \delta_{g-1}, \delta_{g+1}, \ldots, \delta_\sigma)$ mit $\frac{1}{\nu} < \delta_j < \nu$ vor.

Es seien $l; m_1, m_2, \ldots, m_\sigma; n_1, n_2, \ldots, n_\sigma$ ganze nichtnegative Zahlen; wir wollen sagen, daß eine Menge

$$S(h; k; n) = S(h_1, h_2, \ldots, h_\sigma; k_1, k_2, \ldots, k_\sigma; n_1, n_2, \ldots, n_\sigma)$$

---

[18]) Die Äquivalenz folgt aus dem Hilfssatz 3.

[19]) Ich schreibe r_j statt r_{i_j}; das schadet nicht, da die Voraussetzungen des Hilfssatzes 5 in den r_j symmetrisch sind.

mit (34), (35) zur Klasse

$$[l;\, m;\, n] = [l;\, m_1, m_2, \ldots, m_\sigma;\, n_1, n_2, \ldots, n_\sigma]$$

gehört, wenn

(37) $$2^l \leqq h_1 < 2^{l+1};\ 2^{m_j} \leqq k_j < 2^{m_j+1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \sigma)$$ [20].

Jede von unseren Mengen $S(h;\, k;\, n)$ gehört also genau zu einer Klasse $[l;\, m;\, n]$; für diese Klasse gilt dann nach (34), (35), (37) offenbar

(38) $$2^{m_1+n_1} \geqq 2^{m_2+n_2} \geqq \ldots \geqq 2^{m_\sigma+n_\sigma};\quad 2^{m_j} \leqq \sqrt{x} \quad (j = 1, 2, \ldots, \sigma).$$

Wenn eine Menge $S(h;\, k;\, n)$ der Klasse $[l; m; n]$ nicht leer sein soll, so muß nach (36) und (35) sein $\left(\text{da } \frac{1}{\nu} < \delta_j < \nu\right)$:

$$\left|\frac{2\pi}{\delta_1}\frac{h_1}{k_1} - \frac{2\pi}{\delta_j}\frac{h_j}{k_j}\right| \leqq \frac{2\pi}{\delta_1 2^{n_1} k_1 \sqrt{x}} + \frac{2\pi}{\delta_j 2^{n_j} k_j \sqrt{x}} < 2\pi\cdot 3\nu\cdot\frac{1}{2^{n_j} k_j \sqrt{x}}$$
$$(j = 2, 3, \ldots, \sigma),$$

also

$$\left|\frac{h_1}{k_1} - \frac{\delta_1}{\delta_j}\frac{h_j}{k_j}\right| < \frac{3\nu^2}{2^{n_j} k_j 2^\varrho} \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma),$$

wenn die ganze (wegen $x > 4$ positive) Zahl ϱ durch $2^\varrho \leqq \sqrt{x} < 2^{\varrho+1}$ definiert ist.

Wir wenden nun den Hilfssatz 2 mit $C = \frac{1}{\nu^2}$, $D = \nu^2$, $a = 3\nu^2$ an. Wir setzen $\gamma_j = \frac{\delta_1}{\delta_j}$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$ und bezeichnen mit $\mathfrak{N}_\nu(g)$ die Menge, welche der Punkt $(\delta_1, \ldots, \delta_{g-1}, \delta_{g+1}, \ldots, \delta_\sigma)$ durchläuft, wenn der Punkt $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ die Menge $\mathfrak{M}\left(\frac{1}{\nu^2}, \nu^2, 3\nu^2, \sigma, \lambda\right)$ durchläuft[21]. Nach Hilfssatz 2 ist

$$L\left(\mathfrak{M}\left(\frac{1}{\nu^2}, \nu^2, 3\nu^2, \sigma, \lambda\right);\, x^\lambda\right) = 0;$$

nach Hilfssatz 4 ist also auch

$$L(\mathfrak{N}_\nu(g);\, x^\lambda) = 0.$$

Es sei $\mathfrak{M}_\nu(g)$ der Durchschnitt der Menge $\mathfrak{N}_\nu(g)$ mit dem Würfel

$$\frac{1}{\nu} < \delta_j < \nu \qquad (j = 1, 2, \ldots, \sigma;\ j \neq g);$$

dann ist auch

$$L(\mathfrak{M}_\nu(g);\, x^\lambda) = 0.$$

[20]) Wenn die Klasse $[l; m; n]$ gegeben ist, so sind für die zugehörigen Mengen $S(h; k; n)$ die n_j bereits bestimmt, während die h_j, k_j noch einen gewissen Spielraum haben.

[21]) Ich bemerke noch einmal [vgl. die Fußnote [16])], daß $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\sigma$ $(\delta_g = 1)$ durch die Angabe von $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma$ eindeutig bestimmt sind.

Wir greifen nun aus dem Würfel

$$\frac{1}{\nu} < \delta_j < \nu \qquad (j = 1, 2, \ldots, \sigma;\ j \neq g)$$

einen Punkt $(\delta_1, \ldots, \delta_{g-1}, \delta_{g+1}, \ldots, \delta_\sigma)$ heraus, welcher nicht in $\mathfrak{M}_\nu(g)$ [d. h. nicht in $\mathfrak{N}_\nu(g)$] liegt; diesen Punkt wollen wir bis zum Schluß dieses Paragraphen festhalten. Wir setzen noch $\delta_g = 1$ und werden für dieses System $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\sigma$ die Abschätzung (33) beweisen. Dadurch wird offenbar die Behauptung A' bewiesen sein. Mit c'' werde ich jetzt unterschiedslos positive Zahlen bezeichnen, die nur von $\sigma, r_1, r_2, \ldots, r_\sigma, \lambda, \nu, g, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\sigma$ abhängen.

Es sei $[l; m; n] = [l; m_1, m_2, \ldots, m_\sigma; n_1, n_2, \ldots, n_\sigma]$ eine Klasse [mit (38)]; wir wollen den Beitrag abschätzen, den die zur Klasse $[l; m; n]$ gehörigen Mengen $S(h; k; n)$ zu der Summe in (33) liefern.

Dazu bemerken wir folgendes:

I. Wenn t in $S(h; k; n)$ liegt und $S(h; k; n)$ zur Klasse $[l; m; n]$ gehört, so ist nach (36) (wegen $n_j \geqq 0$)

$$\left| t - \frac{2\pi}{\delta_1} \frac{h_1}{k_1} \right| \leqq \frac{2\pi}{\delta_1 k_1 \sqrt{x}},$$

also für $x > c''$ (da $h_1 \geqq 1$)

$$c'' \frac{h_1}{k_1} < t < c'' \frac{h_1}{k_1},$$

also

$$c''\, 2^{l-m_1} < t < c''\, 2^{l-m_1}.$$

Bis zum Schluß dieses Paragraphen sei von nun an stets $x > c''$.

II. Es sei $s = \frac{1}{x} + ti$, wo t in $S(h; k; n)$ liegt; $S(h; k; n)$ gehöre zur Klasse $[l; m; n]$. Dann liegt t für $j = 1, 2, \ldots, \sigma$ in $\frac{2\pi}{\delta_j} \mathfrak{B}_{h_j, k_j}$, also ist[22])

$$|\Theta(\delta_j s)| < \frac{c''}{\sqrt{k_j} \sqrt[4]{\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi}{\delta_j} \frac{h_j}{k_j}\right)^2}};$$

wegen (36), (37) ist also

$$|\Theta(\delta_j s)| < c'' \operatorname{Min}\left(x^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{m_j}{2}},\ x^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{n_j}{2}}\right).$$

III. Es sei t in $S(h; k; n)$; die Menge $S(h; k; n)$ gehöre zur Klasse $[l; m; n]$. Nach den Abschätzungen (12), (13) haben wir $\left(\text{man beachte } t > \frac{B}{\sqrt{x}} > \frac{1}{x},\ t < c''\, 2^{l-m_1}\right)$

$$|e^{\pm zs} - 1| < c'' \operatorname{Min}(1, z\, 2^{l-m_1}).$$

[22]) Vgl. Gp I, Formel (13), S. 708.

IV. Das Maß von $S(h; k; n)$ (welches zur Klasse $[l; m; n]$ gehört) ist nach (36), (37) kleiner als
$$\frac{c''}{2^{m_1+n_1}\sqrt{x}}.$$

V. Der Punkt $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$, wo $\gamma_j = \delta_1 \delta_j^{-1}$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$, gehört dem Würfel $\frac{1}{\nu^2} < \gamma_j < \nu^2$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$ an, liegt aber nicht in der Menge $\mathfrak{M}\left(\frac{1}{\nu^2}, \nu^2, 3\nu^2, \sigma, \lambda\right)$. Daher gilt nach Hilfssatz 2 [23]): die Anzahl der nichtleeren Mengen $S(h; k; n)$, die zur Klasse $[l; m; n]$ gehören, ist für $\varrho > c''$ (d. h. für $x > c''$) kleiner als
$$c'' \cdot x^{-\frac{\lambda}{2}} \log^2 x \cdot 2^{(\sigma-\lambda)l} \cdot 2^{(\lambda-\sigma+2)m_1} \cdot 2^{(2-\lambda+\omega)m_{\sigma-\omega}-(\lambda-\omega)n_{\sigma-\omega}} \cdot$$
$$\prod_{1<j<\sigma-\omega} 2^{2m_j} \cdot \prod_{\sigma-\omega<j\leqq\sigma} 2^{m_j-n_j} \cdot \left((l+1)\prod_{j=1}^{\sigma}(m_j+1)\prod_{j=1}^{\sigma}(n_j+1)\right)^2.$$
Der Beitrag, den die Klasse $[l; m; n]$ zu der Summe links in (33) liefert, ist also höchstens ($[\lambda] = \omega$ gesetzt)
$$c'' 2^{-m_1-n_1} \cdot x^{-1/2} \cdot 2^{-(\sigma+1)l+(\sigma+1)m_1} \tag{39}$$
$$\cdot \prod_{j=1}^{\sigma} \mathrm{Min}\left(x^{\frac{r_j}{2}} \cdot 2^{-\frac{r_j}{2}m_j},\ x^{\frac{r_j}{4}}\, 2^{\frac{r_j}{2}n_j}\right)$$
$$\cdot \mathrm{Min}\,(1, z^\sigma 2^{\sigma l-\sigma m_1}) \cdot x^{-\frac{\lambda}{2}} \log^2 x \cdot 2^{(\sigma-\lambda)l} \cdot 2^{(\lambda-\sigma+2)m_1}$$
$$\cdot 2^{(2-\lambda+\omega)m_{\sigma-\omega}-(\lambda-\omega)n_{\sigma-\omega}} \cdot \prod_{1<j<\sigma-\omega} 2^{2m_j} \cdot \prod_{\sigma-\omega<j\leqq\sigma} 2^{m_j-n_j}$$
$$\cdot \left((l+1)\cdot\prod_{j=1}^{\sigma}(m_j+1)\cdot\prod_{j=1}^{\sigma}(n_j+1)\right)^2.$$
Diesen Ausdruck sollen wir über alle ganzen nichtnegativen l, m_j, n_j $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ mit
$$2^{m_1+n_1} \geqq 2^{m_2+n_2} \geqq \ldots \geqq 2^{m_\sigma+n_\sigma};\quad 2^{m_j} \leqq \sqrt{x}\quad (j = 1, 2, \ldots, \sigma) \tag{40}$$
summieren; wenn die Summe gleich
$$o\left(x^{\frac{r}{2}-1-\lambda} z^{1+\lambda} \log^{6\sigma+5} x\right) \tag{41}$$
herauskommt, so wird der Hilfssatz 5 bewiesen sein.

Zu diesem Zwecke bemerken wir zuerst, daß die Summation über l ergibt (man beachte $\sigma - 1 - \lambda > 0$)
$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^{-(1+\lambda)l}\,\mathrm{Min}\,(1, z^\sigma 2^{\sigma l-\sigma m_1}) \cdot (l+1)^2 \tag{42}$$
$$< c'' z^{1+\lambda} \cdot 2^{-m_1(1+\lambda)} \cdot \log^2 (2^{m_1} : z)$$
$$< c'' z^{1+\lambda} 2^{-m_1(1+\lambda)} \cdot \log^2 x.$$

---

[23]) Man beachte $2^\varrho \leqq \sqrt{x} < 2^{\varrho+1}$.

Wir vereinigen nun die Klassen $[l; m; n]$ in $\sigma + 1$ Oberklassen „0", „1", „2", ..., „σ" folgendermaßen: $[l; m; n]$ gehöre zur Oberklasse „τ", wenn

$$(43)\qquad \begin{cases} 2^{m_j + n_j} \geqq \sqrt{x} & \text{für } j \leqq \tau, \\ 2^{m_j + n_j} < \sqrt{x} & \text{für } j > \tau; \end{cases}$$

und wir werden den Ausdruck (39) über jede Oberklasse gesondert summieren; wenn dabei bei jeder der $\sigma + 1$ Oberklassen

$$(44)\qquad o\left(x^{\frac{r}{2} - 1 - \lambda} z^{1+\lambda} \log^{6\sigma+5} x\right)$$

herauskommt, so wird der Hilfssatz 5 bewiesen sein.

I. Die Oberklasse „0". Wir sollen den Ausdruck[24])

$$c'' z^{1+\lambda} \cdot \log^2 x \cdot 2^{-(1+\lambda) m_1} \cdot 2^{-m_1 - n_1} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{(\sigma+1) m_1} \cdot \prod_{j=1}^{\sigma} x^{\frac{r_j}{4}}$$
$$\cdot \prod_{j=1}^{\sigma} 2^{\frac{r_j}{2} n_j} \cdot x^{-\frac{\lambda}{2}} \cdot \log^2 x \cdot 2^{(\lambda - \sigma + 2) m_1}$$
$$\cdot 2^{(2-\lambda+\omega) m_\sigma - \omega - (\lambda - \omega) n_\sigma - \omega} \cdot \prod_{1<j<\sigma-\omega} 2^{2 m_j} \cdot \prod_{\sigma-\omega<j\leqq\sigma} 2^{m_j - n_j}$$
$$\cdot \prod_{j=1}^{\sigma} (m_j + 1)^2 \cdot \prod_{j=1}^{\sigma} (n_j + 1)^2$$

über die $m_j \geqq 0$, $n_j \geqq 0$ mit den Nebenbedingungen (40) und $2^{m_j + n_j} < \sqrt{x}$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ summieren. Die Summation ergibt:

$$\sum_{m_1, n_1} 2^{m_1 + \left(\frac{r_1}{2} - 1\right) n_1} (m_1 + 1)^2 (n_1 + 1)^2$$
$$\leqq c'' \cdot \log^4 x \cdot x^{\frac{1}{2}} \sum_{n_1} 2^{\left(\frac{r_1}{2} - 2\right) n_1} \leqq c'' x^{\frac{r_1}{4} - \frac{1}{2}} \log^5 x.$$

$$\sum_{m_j, n_j} 2^{2 m_j + \frac{r_j}{2} n_j} (m_j + 1)^2 (n_j + 1)^2 \leqq c'' \cdot \log^4 x \cdot x \sum_{n_j} 2^{\left(\frac{r_j}{2} - 2\right) n_j}$$
$$\leqq c'' x^{\frac{r_j}{4}} \cdot \log^5 x \quad \text{für } 1 < j < \sigma - \omega.$$

$$\sum_{m_j, n_j} 2^{(2-\lambda+\omega) m_j + \left(\frac{r_j}{2} - \lambda + \omega\right) n_j} (m_j + 1)^2 (n_j + 1)^2$$
$$\leqq c'' \log^4 x \cdot x^{1 - \frac{\lambda - \omega}{2}} \sum_{n_j} 2^{\left(\frac{r_j}{2} - 2\right) n_j}$$
$$\leqq c'' x^{\frac{r_j}{4} - \frac{\lambda - \omega}{2}} \log^5 x \quad \text{für } j = \sigma - \omega.$$

[24]) Die Summation über l wurde bereits in (42) durchgeführt; bei der folgenden Rechnung beachte man $2 \leqq \sigma - \omega \leqq \sigma$, $r_j \geqq 4$.

$$\sum_{m_j, n_j} 2^{m_j + \left(\frac{r_j}{2} - 1\right) n_j} (m_j + 1)^2 (n_j + 1)^2$$
$$\leqq c'' \log^4 x \cdot x^{\frac{1}{2}} \sum_{n_j} 2^{\left(\frac{r_j}{2} - 2\right) n_j} \leqq c'' x^{\frac{r_j}{4} - \frac{1}{2}} \log^5 x$$
$$\text{für } \sigma - \omega < j \leqq \sigma.$$

Die Summation über die Oberklasse „0" ergibt also zusammen

$$O\left(z^{1+\lambda} \cdot \log^4 x \cdot x^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{\sigma} x^{\frac{r_j}{4}} \cdot \prod_{j=1}^{\sigma} x^{\frac{r_j}{4}} \cdot \log^{5\sigma} x \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{\lambda - \omega}{2}} \prod_{\sigma - \omega < j \leqq \sigma} x^{-\frac{1}{2}}\right)$$
$$= O\left(z^{1+\lambda} \cdot x^{\frac{r}{2} - 1 - \lambda} \cdot \log^{5\sigma + 4} x\right),$$

im Einklang mit (44).

II. Die Oberklasse „τ" mit $1 \leqq \tau < \sigma - \omega$. Wir sollen den Ausdruck[24])

$$c'' z^{1+\lambda} \cdot \log^2 x \cdot 2^{-(1+\lambda) m_1} \cdot 2^{-m_1 - n_1} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{(\sigma+1) m_1}$$
$$\cdot \prod_{j=1}^{\tau} x^{\frac{r_j}{2}} 2^{-\frac{r_j}{2} m_j} \cdot \prod_{j=\tau+1}^{\sigma} x^{\frac{r_j}{4}} 2^{\frac{r_j}{2} n_j} \cdot x^{-\frac{\lambda}{2}} \cdot \log^2 x \cdot 2^{(\lambda - \sigma + 2) m_1}$$
$$\cdot 2^{(2 - \lambda + \omega) m_{\sigma - \omega} - (\lambda - \omega) n_{\sigma - \omega}} \cdot \prod_{1 < j < \sigma - \omega} 2^{2 m_j} \cdot \prod_{\sigma - \omega < j \leqq \sigma} 2^{m_j - n_j}$$
$$\cdot \prod_{j=1}^{\sigma} (m_j + 1)^2 \cdot \prod_{j=1}^{\sigma} (n_j + 1)^2$$

über die $m_j \geqq 0$, $n_j \geqq 0$ mit den Nebenbedingungen (40), (43) summieren. Wir summieren zunächst über die m_j, n_j mit $1 \leqq j \leqq \tau$ (man beachte $\tau < \sigma - \omega$); dabei benutzen wir, daß nach (40)

$$2^{n_j} \leqq 2^{m_j + n_j} \leqq 2^{m_1 + n_1} \leqq \sqrt{x} \cdot 2^{n_1},$$

also

$$n_j + 1 \leqq c'' \operatorname{Max}(\log x, n_1 + 1)$$

ist:

$$\sum_{\substack{m_j, n_j \\ 1 \leqq j \leqq \tau}} 2^{-\left(\frac{r_1}{2} - 1\right) m_1 - n_1} \prod_{1 < j \leqq \tau} 2^{-\left(\frac{r_j}{2} - 2\right) m_j} \prod_{1 \leqq j \leqq \tau} (m_j + 1)^2 (n_j + 1)^2$$
$$\leqq c'' \log^{3(\tau - 1)} x \cdot \sum_{m_1, n_1} 2^{-\left(\frac{r_1}{2} - 1\right) m_1 - n_1} (m_1 + 1)^2 (n_1 + 1)^2 \cdot (\operatorname{Max}(\log x, n_1 + 1))^{3(\tau - 1)}$$
$$\leqq c'' \log^{6(\tau - 1) + 4} x \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{m_1} 2^{-\left(\frac{r_1}{2} - 2\right) m_1}$$
$$\leqq c'' \log^{6(\tau - 1) + 5} x \cdot x^{-\frac{1}{2}}.$$

Weiter ist

$$\sum_{m_j, n_j} 2^{2m_j + \frac{r_j}{2} n_j} \cdot (m_j+1)^2 (n_j+1)^2 \leqq c'' \log^4 x \cdot x^{\frac{r_j}{4}} \cdot \sum_{m_j} 2^{-\left(\frac{r_j}{2}-2\right) m_j}$$

$$\leqq c'' x^{\frac{r_j}{4}} \log^5 x \quad \text{für} \quad \tau < j < \sigma - \omega;$$

$$\sum_{m_j, n_j} 2^{(2-\lambda+\omega) m_j + \left(\frac{r_j}{2} - \lambda + \omega\right) n_j} \cdot (m_j+1)^2 (n_j+1)^2$$

$$\leqq c'' \log^4 x \cdot x^{\frac{r_j}{4} - \frac{\lambda-\omega}{2}} \sum_{m_j} 2^{-\left(\frac{r_j}{2}-2\right) m_j}$$

$$\leqq c'' x^{\frac{r_j}{4} - \frac{\lambda-\omega}{2}} \cdot \log^5 x \quad \text{für} \quad j = \sigma - \omega;$$

$$\sum_{m_j, n_j} 2^{m_j + \left(\frac{r_j}{2} - 1\right) n_j} \cdot (m_j+1)^2 (n_j+1)^2$$

$$\leqq c'' \cdot \log^4 x \cdot x^{\frac{r_j}{4} - \frac{1}{2}} \cdot \sum_{m_j} 2^{-\left(\frac{r_j}{2}-2\right) m_j}$$

$$\leqq c'' x^{\frac{r_j}{4} - \frac{1}{2}} \cdot \log^5 x \quad \text{für} \quad \sigma - \omega < j \leqq \sigma.$$

Die Summation über die Oberklasse „τ“ ergibt also zusammen

$$O\Bigg(z^{1+\lambda} \cdot \log^4 x \cdot x^{-\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{\tau} x^{\frac{r_j}{2}} \cdot \prod_{j=\tau+1}^{\sigma} x^{\frac{r_j}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\prod_{j=\tau+1}^{\sigma} x^{\frac{r_j}{4}} \cdot x^{-\frac{\lambda-\omega}{2}} \cdot \prod_{\sigma-\omega < j \leqq \sigma} x^{-\frac{1}{2}} \cdot \log^{6\sigma} x \Bigg)$$

$$= O\left(z^{1+\lambda} \cdot x^{\frac{r}{2} - 1 - \lambda} \cdot \log^{6\sigma+4} x \right),$$

im Einklang mit (44).

III. Die Oberklasse „τ“ mit $\sigma - \omega \leqq \tau \leqq \sigma$. Wir sollen den Ausdruck[24])

$$c'' z^{1+\lambda} \cdot \log^2 x \cdot 2^{-(1+\lambda) m_1} \cdot 2^{-m_1 - n_1} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{(\sigma+1) m_1}$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{\tau} x^{\frac{r_j}{2}} 2^{-\frac{r_j}{2} m_j} \cdot \prod_{j=\tau+1}^{\sigma} x^{\frac{r_j}{4}} 2^{\frac{r_j}{2} \cdot n_j} \cdot x^{-\frac{\lambda}{2}} \cdot \log^2 x \cdot 2^{(\lambda - \sigma + 2) m_1}$$

$$\cdot 2^{(2-\lambda+\omega) m_{\sigma-\omega} - (\lambda-\omega) n_{\sigma-\omega}} \cdot \prod_{1 < j < \sigma - \omega} 2^{2 m_j} \cdot \prod_{\sigma-\omega < j \leqq \sigma} 2^{m_j - n_j}$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{\sigma} (m_j+1)^2 \cdot \prod_{j=1}^{\sigma} (n_j+1)^2$$

über die $m_j \geqq 0$, $n_j \geqq 0$ mit den Nebenbedingungen (40), (43) summieren. Wir summieren zunächst über die m_j, n_j mit $1 \leqq j \leqq \sigma - \omega$ (man beachte $\tau \geqq \sigma - \omega$); dabei benutzen wir wieder, daß

$$n_j + 1 \leqq c'' \operatorname{Max}(\log x, n_1 + 1)$$

ist:

$$\sum_{\substack{m_j, n_j \\ 1 \leqq j \leqq \sigma - \omega}} 2^{-\left(\frac{r_1}{2} - 1\right) m_1 - n_1}$$

$$\prod_{1 < j < \sigma - \omega} 2^{-\left(\frac{r_j}{2} - 2\right) m_j} \cdot 2^{-\left(\frac{r_{\sigma - \omega}}{2} - 2 + \lambda - \omega\right) m_{\sigma - \omega} - (\lambda - \omega) n_{\sigma - \omega}}$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{\sigma - \omega} (m_j + 1)^2 (n_j + 1)^2$$

$$\leqq c'' \log^{2(\sigma - \omega)} x \cdot x^{-\frac{\lambda - \omega}{2}} \cdot \log x \cdot \sum_{\substack{m_j, n_j \\ 1 \leqq j < \sigma - \omega}} 2^{-\left(\frac{r_1}{2} - 1\right) m_1 - n_1}$$

$$\prod_{1 < j < \sigma - \omega} 2^{-\left(\frac{r_j}{2} - 2\right) m_j} \cdot \prod_{1 \leqq j < \sigma - \omega} (n_j + 1)^2 \cdot (\operatorname{Max}(\log x, n_1 + 1))^3$$

$$\leqq c'' \log^{3(\sigma - \omega) - 1} x \cdot x^{-\frac{\lambda - \omega}{2}} \cdot \sum_{m_1, n_1} 2^{-\left(\frac{r_1}{2} - 1\right) m_1 - n_1} \cdot (n_1 + 1)^2$$

$$\cdot (\operatorname{Max}(\log x, n_1 + 1))^{3(\sigma - \omega - 1)}$$

$$\leqq c'' \cdot \log^{3(\sigma - \omega) - 1} x \cdot x^{-\frac{\lambda - \omega}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \log^{3(\sigma - \omega - 1) + 2} x \cdot \sum_{m_1} 2^{-\left(\frac{r_1}{2} - 2\right) m_1}$$

$$\leqq c'' \cdot x^{-\frac{1}{2} - \frac{\lambda - \omega}{2}} \log^{6(\sigma - \omega) - 1} x.$$

Weiter ist

$$\sum_{m_j, n_j} 2^{-\left(\frac{r_j}{2} - 1\right) m_j - n_j} (m_j + 1)^2 (n_j + 1)^2 \leqq c'' \log^4 x \cdot x^{-\frac{1}{2}} \sum_{m_j} 2^{-\left(\frac{r_j}{2} - 2\right) m_j}$$

$$\leqq c'' x^{-\frac{1}{2}} \log^5 x \quad \text{für } \sigma - \omega < j \leqq \tau;$$

$$\sum_{m_j, n_j} 2^{m_j + \left(\frac{r_j}{2} - 1\right) n_j} (m_j + 1)^2 (n_j + 1)^2$$

$$\leqq c'' \log^4 x \cdot x^{\frac{r_j}{4} - \frac{1}{2}} \sum_{m_j} 2^{-\left(\frac{r_j}{2} - 2\right) m_j}$$

$$\leqq c'' x^{\frac{r_j}{4} - \frac{1}{2}} \log^5 x \quad \text{für } \tau < j \leqq \sigma.$$

Die Summation über die Oberklasse „τ" ergibt also zusammen

$$O\left(z^{1+\lambda}\cdot\log^4 x\cdot x^{-\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}}\cdot\prod_{j=1}^{\tau} x^{\frac{r_j}{2}}\cdot\prod_{j=\tau+1}^{\sigma} x^{\frac{r_j}{4}}\cdot x^{-\frac{1}{2}-\frac{\lambda-\omega}{2}}\right.$$

$$\left.\cdot\prod_{\sigma-\omega<j\leqq\sigma} x^{-\frac{1}{2}}\cdot\prod_{j=\tau+1}^{\sigma} x^{\frac{r_j}{4}}\cdot\log^{6\sigma} x\right)=O\left(z^{1+\lambda}x^{\frac{r}{2}-1-\lambda}\log^{6\sigma+4}x\right),$$

wieder im Einklang mit (44).

Damit ist also Hilfssatz 5 bewiesen.

§ 5.

Beweis des Satzes 3.

Es sei $\sigma\geqq 2$, σ ganz; $\beta_j>0$ $(j=2,3,\ldots,\sigma)$; $\alpha>0$. Wir wollen sagen, daß das System $(\beta_2,\beta_3,\ldots,\beta_\sigma)$ die Approximation $x^{-\alpha}$ zuläßt, wenn es zu jedem $C>0$ ein System von ganzen Zahlen $p_2, p_3,\ldots,p_\sigma, q$ mit

$$q>C,\quad\left|\beta_j-\frac{p_j}{q}\right|<\frac{1}{q^\alpha}\qquad(j=2,3,\ldots,\quad\sigma)$$

gibt.

Hilfssatz 6. *Es sei*

$$\alpha>1,\quad Q(u)=\sum_{j=1}^{\sigma}\beta_j(u_{1,j}^2+u_{2,j}^2+\ldots+u_{r_j,j}^2)$$

(σ ganz, $\sigma\geqq 2$, r_j ganz, $r_j\geqq 4$ $(j=1,2,\ldots,\sigma)$, $r=r_1+r_2+\ldots+r_\sigma$, $\beta_1=1$, $\beta_j>0$ $(j=2,3,\ldots,\sigma)$). Wenn das System $(\beta_2,\beta_3,\ldots,\beta_\sigma)$ die Approximation $x^{-\alpha}$ zuläßt, so ist

$$\mathsf{P}_Q(x)=\Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{\alpha-1}}\right).$$

Beweis: Es sei $b=\operatorname*{Max}_{1\leqq j\leqq\sigma}\beta_j^{-1}$; es sei $C>0$. Dann gibt es ein System von ganzen Zahlen $p_2, p_3,\ldots,p_\sigma, q$, so daß

$$q>C,\quad\frac{1}{3b}q^\alpha>3,\quad\left|\beta_j-\frac{p_j}{q}\right|<\frac{1}{q^\alpha}\quad(j=2,3,\ldots,\sigma).$$

Wir setzen

$$\overline{Q}(u)=u_{1,1}^2+u_{2,1}^2+\ldots+u_{r_1,1}^2+\sum_{j=2}^{\sigma}\frac{p_j}{q}(u_{1,j}^2+u_{2,j}^2+\ldots+u_{r_j,j}^2).$$

Dann ist stets

$$|Q(u) - \overline{Q}(u)| \leqq \frac{b\,Q(u)}{q^\alpha}. \tag{45}$$

Wir setzen nun $l = \left[\frac{1}{3b} q^\alpha\right] - 2$ (also l ganz, $l > 0$).

Wenn

$$\frac{l+\frac{1}{3}}{q} \leqq Q(u) \leqq \frac{l+\frac{2}{3}}{q}, \tag{46}$$

so ist nach (45)

$$\frac{l}{q} < \frac{l+\frac{1}{3}}{q} - b\frac{l+1}{q^{1+\alpha}} < \overline{Q}(u) < \frac{l+\frac{2}{3}}{q} + b\frac{l+1}{q^{1+\alpha}} < \frac{l+1}{q}. \tag{47}$$

Für jeden Gitterpunkt (d. h. für ganze $u_{j,k}$) ist $\overline{Q}(u)$ gleich einem ganzzahligen Vielfachen von $\frac{1}{q}$. Nach (47) können daher im Bereich (46) keine Gitterpunkte liegen. Also ist $A_Q(x)$ konstant im Intervall

$$\frac{l+\frac{1}{3}}{q} \leqq x \leqq \frac{l+\frac{2}{3}}{q};$$

in diesem Intervall ist also nach der Definition von $\mathsf{P}_Q(x)$ [25])

$$\frac{d\,\mathsf{P}_Q(x)}{d\,x} = -\frac{d}{d\,x}\left(\frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\beta_2^{r_2}\cdots\beta_\sigma^{r_\sigma}}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}\right) < -c'''\left(\frac{l}{q}\right)^{\frac{r}{2}-1};$$

also ist

$$\mathsf{P}_Q\left(\frac{l+\frac{2}{3}}{q}\right) - \mathsf{P}_Q\left(\frac{l+\frac{1}{3}}{q}\right) < -c''' \cdot \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{l}{q}\right)^{\frac{r}{2}-1};$$

entweder für $\xi = \frac{l+\frac{1}{3}}{q}$ oder für $\xi = \frac{l+\frac{2}{3}}{q}$ ist also

$$|\mathsf{P}_Q(\xi)| > c''' \cdot \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{l}{q}\right)^{\frac{r}{2}-1} > c'''\,\xi^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{\alpha-1}}$$

(man beachte

$$c'''q^\alpha < l < c'''q^\alpha, \quad c'''\frac{l}{q} < \xi < c'''\frac{l}{q},$$

---

[25]) Mit c''' bezeichne ich unterschiedslos positive Zahlen, die nur von σ, r_j ($j = 1, 2, \ldots, \sigma$), β_j ($j = 2, 3, \ldots, \sigma$), α abhängen.

also

$$\frac{l}{q} > c''' q^{\alpha-1}, \quad \frac{1}{q} > c''' \left(\frac{l}{q}\right)^{-\frac{1}{\alpha-1}} > c''' \xi^{-\frac{1}{\alpha-1}}\Big).$$

Wegen $\alpha > 1$ ist $\xi > \frac{l}{q} > c''' q^{\alpha-1} \to \infty$ für $q \to \infty$, also für $C \to \infty$; also ist in der Tat

$$\mathsf{P}_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{\alpha-1}}\right),$$

w. z. b. w.

Beweis des Satzes 3. Es sei $\sigma \geqq 2$, σ ganz, $r_j \geqq 4$, r_j ganz $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$; $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$. Es sei $0 < \lambda < \sigma - 1$; wir setzen $\alpha = \frac{\sigma}{\lambda}$ $\left(\text{also } \alpha > 1 + \frac{1}{\sigma-1}, \ \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\lambda}{\sigma-\lambda}\right)$.

Es sei $R_{\sigma-1}$ der $(\sigma-1)$-dimensionale cartesische Raum der Punkte $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$; $M(x^{-\alpha}; \sigma-1)$ sei die Menge derjenigen Punkte $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ mit $1 \leqq \beta_j < 2$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$, welche die Approximation $x^{-\alpha}$ zulassen (statt zu sagen, daß das System $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ die Approximation $x^{-\alpha}$ zuläßt, sage ich auch, daß der Punkt $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ die Approximation $x^{-\alpha}$ zuläßt). Nach S. D. A., Satz 1 ist

$$L\left(M(x^{-\alpha}; \sigma-1); x^{\frac{\sigma}{\alpha}}\right) = \infty,$$

d. h.

$$L(M(x^{-\alpha}; \sigma-1); x^{\lambda}) = \infty \text{ [26]}. \tag{48}$$

Wenn aber ein Punkt $(\beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$ in $M(x^{-\alpha}; \sigma-1)$ liegt, so ist nach Hilfssatz 6 für die zugehörige Form $Q(u)$

$$\mathsf{P}_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{\alpha-1}}\right) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}\right);$$

also ist

$$M(x^{-\alpha}; \sigma-1) \subset E\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}\right),$$

also nach (48) auch

$$L\left(E\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}\right); x^{\lambda}\right) = \infty,$$

w. z. b. w.

---

[26]) In S. D. A., Satz 1 wurde $M(x^{-\alpha}; \sigma-1)$ als die Menge derjenigen Punkte $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ definiert, welche die Approximation $x^{-\alpha}$ zulassen und den Ungleichungen $0 \leqq \beta_j < 1$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$ genügen. Die Translation $\beta'_j = \beta_j + 1$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$ ändert aber weder die betreffende Approximationseigenschaft noch den Wert von $L(M(x^{-\alpha}; \sigma-1); x^{\lambda})$.

§ 6.

Beweis der Sätze I, II, VIII.

Beweis des Satzes I. Wir sollen für die Form (1) (mit $r \geqq 5$) die Abschätzung

$$\mathsf{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right)$$

beweisen. Wenn wir im Hilfssatz 1 $n = 1$, $z = 1$ setzen, sehen wir, daß es genügt, die Abschätzung

$$\int\limits_{\frac{1}{x}+i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\infty} \prod_{j=1}^{r} \Theta(\alpha_j s)\, e^{xs}(e^{\pm s}-1)\frac{ds}{s^2} = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right)$$

zu beweisen $\left(B = \operatorname*{Max}_{1 \leqq j \leqq r} \frac{2\pi}{\alpha_j}\right)$. Für $a_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ ist

$$\sqrt[r]{a_1 a_2 \ldots a_r} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_r}{r};$$

es genügt also, wenn wir für jedes j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ die Abschätzung[27])

$$K_j = \int\limits_{\frac{1}{x}+i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\infty} \left|\Theta^r(\alpha_j s)\cdot(e^{\pm s}-1)\right| \frac{|ds|}{|s^2|} = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right)$$

beweisen. Die Vereinigungsmenge aller Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ überdeckt (bei festem j) das ganze Intervall $\left(\frac{B}{\sqrt{x}}, +\infty\right)$ (vgl. § 4); also ist (man beachte (12), (13)) für $x > c$

$$K_j \leqq c \sum_{h,k} \int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} |\Theta^r(\alpha_j s)| \cdot \operatorname{Min}(1, t)\frac{dt}{t^2} \qquad \left(s = \frac{1}{x} + ti\right);$$

der Summationsbereich ist dabei durch

$$h > 0, \quad 0 < k \leqq \sqrt{x}, \quad (h, k) = 1$$

gegeben.

Es sei nun t eine Zahl des Intervalls $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$; dann ist erstens nach (31)

$$\left|t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right| \leqq \frac{2\pi}{\alpha_j k\sqrt{x}},$$

---

27) Man beachte $|e^{xs}| = e$.

also (wegen $h \geqq 1$)

$$c\frac{h}{k} < t < c\frac{h}{k}$$

für $x > c$; zweitens ist für $x > c$, $s = \frac{1}{x} + t\,i$ [28])

$$|\Theta(\alpha_j s)| < \frac{c}{\sqrt{k}\sqrt[4]{\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right)^2}};$$

also ist

$$K_j \leqq c \sum_{h,k} \operatorname{Min}\left(1, \frac{h}{k}\right) \cdot \frac{k^2}{h^2} \int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} \frac{dt}{k^{\frac{r}{2}}\left(\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right)^2\right)^{\frac{r}{4}}} \;{}^{29)}$$

$$\leqq c\, x^{\frac{r}{2}-1} \sum_{h,k} \operatorname{Min}\left(1, \frac{h}{k}\right) \frac{1}{h^2 k^{\frac{r}{2}-2}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{r}{4}}}$$

$$\leqq c\, x^{\frac{r}{2}-1} \sum_{k} \frac{\log k}{k^{\frac{r}{2}-1}} \leqq c\, x^{\frac{r}{2}-1},$$

w. z. b. w.

Beweis des Satzes II. In der Form (1) seien alle α_j ganzzahlige Vielfache einer und derselben Zahl $\alpha > 0$. Für ganzzahlige u_j ist dann $Q(u)$ gleich einem ganzzahligen Vielfachen von α. Wenn also l ganz, $l > 0$, so liegen im Gebiet $l\alpha < Q(u) < (l+1)\alpha$ keine Gitterpunkte, also ist $A_Q(x)$ konstant im Intervall $l\alpha < x < (l+1)\alpha$. In diesem Intervall ist also

$$\frac{d\,\mathsf{P}_Q(x)}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}\right) < -c(\alpha l)^{\frac{r}{2}-1};$$

nach dem Mittelwertsatz ist also

$$\mathsf{P}_Q\left(\left(l+\frac{2}{3}\right)\alpha\right) - \mathsf{P}_Q\left(\left(l+\frac{1}{3}\right)\alpha\right) < -c\,\alpha(\alpha l)^{\frac{r}{2}-1};$$

entweder für $\xi = \left(l+\frac{1}{3}\right)\alpha$ oder für $\xi = \left(l+\frac{2}{3}\right)\alpha$ ist also

$$|\mathsf{P}_Q(\xi)| > c\,\alpha(\alpha l)^{\frac{r}{2}-1} > c\,\alpha\,\xi^{\frac{r}{2}-1},$$

w. z. b. w.

---

[28]) Vgl. Gp I, Formel (13) (S. 708).

[29]) Substitution $t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k} = \frac{u}{x}$.

Beweis des Satzes VIII. Es seien ganze Zahlen $\sigma \geqq 2$, $r_j \geqq 4$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ gegeben; $Q(u)$ sei durch (2) gegeben; ohne Beschränkung der Allgemeinheit (wegen (3)) sei $\beta_1 = 1$. Das System $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ läßt bekanntlich die Approximation $x^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}}$ zu; nach dem Hilfssatz 6 (mit $\alpha = \frac{\sigma}{\sigma-1}$, also $\alpha - 1 = \frac{1}{\sigma-1}$) ist also

$$\mathsf{P}_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{\alpha-1}}\right) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-\sigma}\right),$$

w. z. b. w.

Prag, den 4. 1. 1933.

(Eingegangen am 5. Januar 1933.)