Vojtěch Jarník; Vladimír Knichal
K hlavní větě geometrie čísel

Rozpravy II. Třídy Čes. akademie 53 (1943), No. 43, 15 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500522

ROZPRAVY II. TŘÍDY ČESKÉ AKADEMIE.
ROČNÍK LIII. ČÍSLO 43.

K hlavní větě geometrie čísel.

Podávají

VOJTĚCH JARNÍK a VLADIMÍR KNICHAL.

Předloženo dne 30. prosince 1943.

Budiž dáno přirozené číslo r. Slovem množina rozumím vždy množinu bodů v r-rozměrném prostoru. Body tohoto prostoru značím „kamennými" typy $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ atd., na př. $\mathbf{x} = [\xi_1, \ldots, \xi_r]$, $\mathbf{y} = [\eta_1, \ldots, \eta_r]$, kde $\xi_1, \ldots, \xi_r$ jsou souřadnice bodu $\mathbf{x}$. Znak $\mathbf{o}$ značí počátek $[0, \ldots, 0]$. Malá latinská písmena (ne kamenná) značí celá čísla, malá řecká písmena značí reálná čísla. Klademe $\lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y} = [\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\eta_1, \ldots, \lambda_1\xi_r + \lambda_2\eta_r]$. Body $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ $(m \geqq 1)$ nazývám nezávislými, jestliže $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_m\mathbf{x}_m = \mathbf{o} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$ (znak $A \Rightarrow B$ značí implikaci „z A plyne B"). Je-li N množina, značí αN množinu všech bodů $\alpha\mathbf{x}$, kde $\mathbf{x} \in N$. Znak $\mu(N)$ značí vnější a znak $J(N)$ vnitřní Lebesguovu míru množiny N; t. j. $J(N)$ je supremum čísel $\mu(M)$ pro všechny měřitelné množiny $M \subset N$. Připojím ještě několik pojmů a několik poznámek částečně triviálních, částečně známých; budu je číslovati **P1**, **P2**, ...

P1. Budiž N množina, $\mathbf{s}$ bod. Jestliže $\mathbf{x} \in N \Rightarrow 2\mathbf{s} - \mathbf{x} \in N$, říkáme, že N má střed $\mathbf{s}$.

P2. Je-li $\mathbf{x} = [\xi_1, \ldots, \xi_r]$, $0 < \delta < +\infty$, značí $K(\mathbf{x}, \delta)$ množinu všech bodů $[\eta_1, \ldots, \eta_r]$ takových, že $|\eta_j - \xi_j| \leqq \delta$ pro $j = 1, \ldots, r$ („krychle").

P3. Množinu N nazývám konvexní, jestliže $(\mathbf{x} \in N,\ \mathbf{y} \in N,\ \lambda_1 \geqq 0,\ \lambda_2 \geqq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1) \Rightarrow \lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y} \in N$. Je-li N konvexní, je též uzávěr $\overline{N}$ i vnitřek $N^{(0)}$ (t. j. množina všech vnitřních bodů množiny N) konvexní a množina $N^{(0)}$ je též vnitřkem množiny $\bar{N}$. Je-li $\mathbf{o}$ vnitřním bodem konvexní množiny N, jest $\alpha\bar{N} \subset \beta N^{(0)}$ pro $0 < \alpha < \beta$.

P4. Znakem $\mathfrak{L}(N)$ značíme nejmenší konvexní množinu obsahující množinu N (t. j. průnik všech konvexních množin obsahujících množinu N); znak $\mathfrak{K}(N)$ bude znamenati uzávěr množiny $\mathfrak{L}(N)$, znak $\mathfrak{G}(N)$ bude znamenati vnitřek množiny $\mathfrak{L}(N)$, t. j. (viz **P3**) vnitřek množiny $\mathfrak{K}(N)$.

P5. Množina $\mathfrak{L}(N)$ je množina všech bodů $\mathbf{x}$ tvaru

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{u}_j, \text{ kde } m \geqq 1,\ \lambda_j > 0,\ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1,\ \mathbf{u}_j \in N.^{1)} \tag{1}$$

P6. Znak $\mathfrak{B}(N)$ bude značiti množinu všech bodů $\mathbf{y} - \mathbf{z}$, kde $\mathbf{y} \in N$, $\mathbf{z} \in N$. Zřejmě má $\mathfrak{B}(N)$ střed $\mathbf{o}$; vzniká-li N z množiny M posunutím, je $\mathfrak{B}(N) = \mathfrak{B}(M)$. Je-li N otevřená, po příp. konvexní, je též $\mathfrak{B}(N)$ otevřená, po příp. konvexní.

P7. Indukcí definujme: $\mathfrak{B}^0(N) = N$, $\mathfrak{B}^{n+1}(N) = \mathfrak{B}(\mathfrak{B}^n(N))$ pro $n \geqq 0$. Má-li N střed $\mathbf{o}$, je $N \subset \frac{1}{2}\mathfrak{B}(N)$ (je-li totiž $\mathbf{x} \in N$, je $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - (-\mathbf{x}))$, kde $-\mathbf{x} \in N$). Ježto množina $\mathfrak{B}^n(N)$ má pro $n \geqq 1$ vždy střed $\mathbf{o}$ (viz **P6**), jest $\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(N) \subset \frac{1}{2^{n+1}}\mathfrak{B}^{n+1}(N)$ pro každé N a každé $n \geqq 1$.

P8. Je-li N konvexní se středem $\mathbf{o}$, je $N = \frac{1}{2}\mathfrak{B}(N)$ a tedy $N = \frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(N)$ pro každé $n \geqq 0$.

P9. Množina $\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(N)$ je (pro $n \geqq 1$) množina všech bodů tvaru

$$\frac{1}{2^n}(\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_{2^{n-1}} - \mathbf{y}_1 - \ldots - \mathbf{y}_{2^{n-1}}),\ \mathbf{x}_j \in N,\ \mathbf{y}_j \in N. \tag{2}$$

Má-li N střed $\mathbf{o}$, jest $\mathbf{y}_j \in N \Rightarrow -\mathbf{y}_j \in N$, takže se $\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(N)$ jeví (má-li N střed $\mathbf{o}$) jako množina všech bodů tvaru

$$\frac{1}{2^n}(\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_{2^n}),\ \mathbf{x}_j \in N. \tag{3}$$

P10. Dokažme vztah $\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(N)) = \mathfrak{L}(\mathfrak{B}(N))$. Vpravo je množina všech bodů tvaru

$$\begin{gathered}\lambda_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1) + \ldots + \lambda_m(\mathbf{x}_m - \mathbf{y}_m),\ \lambda_j \geqq 0,\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1,\\ \mathbf{x}_j \in N,\ \mathbf{y}_j \in N,\end{gathered} \tag{4}$$

vlevo pak je množina všech bodů tvaru

$$\begin{gathered}\varrho_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \varrho_p\mathbf{v}_p - \sigma_1\mathbf{w}_1 - \ldots - \sigma_q\mathbf{w}_q,\\ \varrho_j \geqq 0,\ \varrho_1 + \ldots + \varrho_p = 1,\ \sigma_j \geqq 0,\ \sigma_1 + \ldots + \sigma_q = 1,\ \mathbf{v}_j \in N,\\ \mathbf{w}_j \in N\end{gathered} \tag{5}$$

---

[1]) Místo $\lambda_j > 0$ můžete též psáti $\lambda_j \geqq 0$.

(viz **P5** a pozn. [1])). Každý bod (4) má zřejmě tvar (5). Je-li naopak předložen bod (5) (vyjádřený součtem $p + q$ členů), pišme výraz $\varrho_1 \mathbf{v}_1 - \sigma_1 \mathbf{w}_1$ ve tvaru $\varrho_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}_1) - (\sigma_1 - \varrho_1)\,\mathbf{w}_1$ (je-li $\sigma_1 \geqq \varrho_1$) nebo ve tvaru $\sigma_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}_1) + (\varrho_1 - \sigma_1)\,\mathbf{v}_1$ (je-li $\sigma_1 < \varrho_1$). Tím se (5) změní ve výraz, jenž vedle „upraveného" členu $\varrho_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}_1)$ nebo $\sigma_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}_1)$ obsahuje již jen $p + q - 1$ dalších členů. Opakujeme-li tento postup, obdržíme konečně výraz tvaru (4).

P11. Užívajíce výsledku z **P10**, ukažme, že $\mathfrak{B}(\mathfrak{K}(N)) \subset \mathfrak{K}(\mathfrak{B}(N))$. Je-li $\mathbf{x} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{K}(N))$, je $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$, kde $\mathbf{y} \in \mathfrak{K}(N)$, $\mathbf{z} \in \mathfrak{K}(N)$, tedy $\mathbf{y} = \lim \mathbf{y}_n$, $\mathbf{y}_n \in \mathfrak{L}(N)$, $\mathbf{z} = \lim \mathbf{z}_n$, $\mathbf{z}_n \in \mathfrak{L}(N)$, $\mathbf{y}_n - \mathbf{z}_n \in \mathfrak{B}(\mathfrak{L}(N)) = \mathfrak{L}(\mathfrak{B}(N))$, tedy $\mathbf{x} = \lim (\mathbf{y}_n - \mathbf{z}_n) \in \mathfrak{K}(\mathfrak{B}(N))$.

P12. Každá konvexní množina je měřitelná. Je-li $J(N) > 0$, obsahuje $\mathfrak{L}(N)$ jistou krychli $K(\mathbf{a}, \delta)$,[2]) načež $\frac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(N))$ obsahuje krychli $K(\mathbf{o}, \delta)$. Je-li mimo to N neomezené, obsahuje *konvexní*[3]) množina $\frac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(N))$ vedle krychle $K(\mathbf{o}, \delta)$ též body libovolně mnoho vzdálené od počátku, načež snadno plyne $\mu(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(N))) = +\infty$.

P13. Je-li $J(N) > 0$ a má-li $\mathfrak{K}(N)$ střed $\mathbf{o}$, je $\mathfrak{K}(N) = \frac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathfrak{K}(N))$[4]) a podle **P12**, **P3** je $\alpha\mathfrak{K}(N) \subset \beta\mathfrak{S}(N) \subset \beta\mathfrak{L}(N)$ pro $0 < \alpha < \beta$.

P14. Známá věta z teorie konvexních těles praví: Budiž N konvexní, uzavřená, $0 < \mu(N) < +\infty$. Potom jest $\mu(N) \leqq \mu(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(N))$ a znamení rovnosti platí tehdy a jen tehdy, má-li N střed.[5])

Přistupme nyní k hlavnímu předmětu tohoto článku.

Každé množině N přiřadím $3r$ čísel $\tau_j(N)$, $\tau'_j(N)$, $\tau''_j(N)$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ takto:

$$\left\{\begin{matrix} \tau_j(N) \\ \tau'_j(N) \\ \tau''_j(N) \end{matrix}\right\} \textit{ je infimum oněch čísel } \alpha > 0, \textit{ pro něž množina } \left\{\begin{matrix} \prod\limits_{\alpha \leqq \beta < +\infty} \beta N \\ \alpha N \\ \sum\limits_{0 < \beta < \alpha} \beta N \end{matrix}\right\} \textit{ obsahuje}$$

aspoň j nezávislých mřížových bodů.[6])

P15. Zřejmě $0 \leqq \tau_1(N) \leqq \tau_2(N) \leqq \ldots \leqq \tau_r(N) \leqq +\infty$ a obdobně pro τ'_j, τ''_j. Dále jest $\tau''_j(N) \leqq \tau'_j(N) \leqq \tau_j(N)$. Jestliže $\alpha N \subset \beta N$ pro $0 < \alpha < \beta$, jest ovšem $\tau_j(N) = \tau'_j(N) = \tau''_j(N)$; to nastává na př., je-li N konvexní množina, obsahující $\mathbf{o}$. Ale skládá-li se na př. množina N (pro $r = 2$) ze dvou bodů $[1, 0]$, $[0, 2^{-\frac{1}{2}}]$, jest $\tau_1 = \tau_2 = +\infty$, $\tau'_1 = 1$, $\tau'_2 = +\infty$, $\tau''_1 = 1$, $\tau''_2 = \sqrt{2}$.

[2]) Není totiž možno, aby všechny body množiny N ležely v téže $(r - 1)$-rozměrné rovině.

[3]) Viz **P6**.

[4]) Viz **P8**.

[5]) Viz na př. BONNESEN-FENCHEL, Theorie der konvexen Körper, Berlin 1934, str. 105.

[6]) Infinum prázdné množiny klademe rovno $+\infty$. Mřížové body jsou body s celočíselnými souřadnicemi.

P16. Je-li $A \subset B$, jest ovšem $\tau_j(A) \geqq \tau_j(B)$ a tedy na př. $\tau_j\left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(N)\right) \geqq \tau_j\left(\frac{1}{2^{n+1}}\mathfrak{B}^{n+1}(N)\right)$ pro $n \geqq 1$ (viz **P7**); dále jest $\tau_j(\alpha A) = \alpha^{-1}\tau_j(A)$ pro $\alpha > 0$. Odtud a z **P13** ihned plyne: je-li $J(N) > 0$ a má-li $\mathfrak{K}(N)$ střed $\mathbf{o}$, je $\tau_j(\mathfrak{K}(N)) = \tau_j(\mathfrak{G}(N))$. Podobně pro τ'_j, τ''_j.

P17. Základní věta geometrie čísel praví: *Budiž A konvexní, uzavřená, omezená se středem $\mathbf{o}$, $J(A) > 0$. Potom jest*

$$\tau''_1(A) \ldots \tau''_r(A)\, J(A) \leqq 2^r. \tag{6}$$[7])

P18. V **P17** lze vynechati předpoklad o uzavřenosti množiny A. Budiž tedy *A konvexní, omezená, se středem $\mathbf{o}$, $J(A) > 0$*. Tvrdím, že *platí* (6). Jest $\mathfrak{G}(A) \subset \mathfrak{L}(A) = A \subset \mathfrak{K}(A)$ (viz **P4**), takže podle **P16** jest $\tau''_j(\mathfrak{K}(A)) = \tau''_j(\mathfrak{G}(A)) = \tau''_j(A)$. Podle **P17** jest $\tau''_1(\mathfrak{K}(A)) \ldots \tau''_r(\mathfrak{K}(A))\, J(\mathfrak{K}(A)) \leqq 2^r$, odkudž ihned plyne (6).

P19. V **P17**, **P18** lze podle **P15** psáti místo τ''_j též τ'_j nebo τ_j. Konstanta 2^r je ostrá, jak ukazuje případ $A = K(0, 1)$ ($\tau_j(A) = 1$, $J(A) = 2^r$).

Nevyhovuje-li A podmínkám, udaným v **P17**, **P18**, může levá strana v (6) nabývati libovolně velkých hodnot (příklad: je-li A interval $\frac{1}{4} \leqq \xi_1 \leqq \frac{3}{4}$, $0 \leqq \xi_j \leqq \alpha$ $(j = 2, \ldots, r)$ je $\tau''_j(A) > 1$, $J(A) = \frac{1}{2}\alpha^{r-1}$). Jestliže však nahradíme čísla $\tau''_j(A)$ čísly $\tau''_j(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A))$, obdržíme pro *zcela libovolnou* množinu A nerovnost obdobnou nerovnosti (6):

Věta 1. *Budiž $J(A) > 0$. Potom je předně $\tau''_r(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) < +\infty$. Za druhé je*

$$\tau''_1(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) = 0 \ \textit{pro}\ J(A) = +\infty,$$
$$\tau''_1(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) \ldots \tau''_r(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A))\, J(A) \leqq 2^{2r-1} \ \textit{pro}\ J(A) < +\infty. \tag{7}$$

Pro $J(A) < +\infty$ lze poslední nerovnost takto zostřiti: není-li $\tau''_1(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) = 0$, zvolme konečná čísla $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ tak, že

$$0 < \mu_j \leqq \tau''_j(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) \ \textit{a že}\ \frac{\mu_2}{\mu_1}, \frac{\mu_3}{\mu_2}, \ldots, \frac{\mu_r}{\mu_{r-1}}$$

jsou celá čísla. Potom je

$$\mu_1\mu_2 \ldots \mu_r\, J(A) \leqq 2^r. \tag{8}$$

Větu o něco méně obecnou dokázal V. Jarník;[8]) omezuje se při tom na omezené uzavřené[9]) A a za číslo $J(A)$ bere vnitřní Jordanovu míru; mimo to dokazuje pouze (7), nikoliv (8).[10])

---

[7]) Literaturu viz na př. J. F. Koksma, Diophantische Approximationen, Berlin 1936, str. 13—14 a v Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete **21**, str. 296, poslední referát.

[8]) Dvě poznámky ke geometrii čísel, Věstník Král. čes. spol. nauk, třída matemat.-přírodověd., 1941.

[9]) Tento předpoklad by se dal též při Jarníkově důkazu odstraniti.

[10]) Ač důkaz nerovnosti (8) plyne též snadno z tehdejšího Jarníkova důkazu. Věta 1 ve znění zde uvedeném, jakož i její důkaz, který zde podáme (podstatně odlišný od důkazu Jarníkova), pochází od Vl. Knichala.

Kdyby se číslo 2^{2r-1} v (7) dalo nahraditi číslem 2^r, plynula by z věty 1 věta z **P17, P18**; neboť je-li A konvexní se středem **o**, je podle **P8** $A = \frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)$. Ale to není možno, jak ukazuje tato věta:

Věta 2. *Budiž T_r supremum všech čísel $\tau''_1(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) \dots \tau''_r(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) . J(A)$ pro všechny množiny A, pro něž jest $0 < J(A) < +\infty$. Potom jest*

$$T_r \geqq 2^r . \operatorname*{Max}_{1 \leqq \eta \leqq 2} \frac{1}{\eta}(2 - (2 - \eta)^r),$$

tedy $T_r > 2^r$ pro $r > 1$.[11])

Na př. $T_2 \geqq 4 . \frac{1}{\sqrt{2}}(2 - (2 - \sqrt{2})^2) = 4(4 - 2\sqrt{2})$. Tato věta[12]) je poněkud překvapující, všimneme-li si této poznámky: Jsou-li čísla[13]) $\frac{\tau''_2}{\tau''_1}, \frac{\tau''_3}{\tau''_2}, \dots, \frac{\tau''_r}{\tau''_{r-1}}$ vesměs celá, lze ve větě 1 klásti $\mu_j = \tau''_j$ a levá strana v (7) je vskutku (podle (8)) nejvýše rovna 2^r; hodnota levé strany v (7) souvisí tedy jakýmsi způsobem též s aritmetickými vlastnostmi čísel τ''_j.

Všimněme si ještě horního odhadu pro T_r. Nerovnost (7) říká, že $T_r \leqq 2^{2r-1}$; nerovnost (7) plyne ostatně přímo z (8) a z nerovnosti $\tau''_r < +\infty$; pro $\tau''_1 = 0$ je totiž (7) zřejmá a pro $\tau''_1 > 0$ definujme celá čísla k_j pro $j = 1, 2, 3, \dots, r$ nerovnostmi $\tau''_1 . 2^{k_j} \leqq \tau''_j < \tau''_1 . 2^{k_j+1}$ a kladme $\mu_j = \tau''_1 . 2^{k_j}$ pro $j \geqq 1$,[14]) tedy $\mu_1 = \tau''_1$, $\tau''_j < 2\mu_j$ pro $j > 1$ a z nerovnosti (8) plyne (7). Tuto nerovnost lze pro $r > 1$ ještě o něco zostřiti:

Věta 1 bis. *Budiž $r > 1$. Potom jest $T_r \leqq 2^{2r-2}\sqrt{2}$. Přesněji: Budiž $r > 1$, $0 < J(A) < +\infty$, $\tau''_1 > 0$.*[13]) *Zvolme nějaké j $(1 < j \leqq r)$ a položme $\lambda = \frac{\tau''_j}{\tau''_{j-1}}$. Potom jest*[15])

$$\tau''_1\tau''_2 \dots \tau''_r J(A) \leqq 2^{2r-2} \operatorname{Min}\left(\frac{\lambda}{[\lambda]}, \frac{[\lambda]+1}{\lambda}\right). \tag{9}$$

Důkaz. Kladme především $\mu_{j-1} = \tau''_{j-1}$, $\mu_j = [\lambda]\,\tau''_{j-1} = \frac{[\lambda]}{\lambda}\tau''_j$; dále definujme celá čísla k_i a čísla μ_i pro $i = 1, \dots, r$; $i \neq j$; $i \neq j-1$ takto:

$$\begin{cases} \mu_j . 2^{k_i} \leqq \tau''_i < \mu_j . 2^{k_i+1}, & \mu_i = \mu_j . 2^{k_i} \text{ pro } i > j, \\ \mu_{j-1} . 2^{k_i} \leqq \tau''_i < \mu_{j-1} . 2^{k_i+1}, & \mu_i = \mu_{j-1} . 2^{k_i} \text{ pro } i < j-1, \end{cases} \tag{10}$$

tedy $k_1 \leqq k_2 \leqq \dots \leqq k_{j-2} \leqq 0 \leqq k_{j+1} \leqq k_{j+2} \leqq \dots \leqq k_r$. Ježto $\tau''_i < 2\mu_i$ pro $i \neq j$, $i \neq j-1$, plyne z (8) $\tau''_1 \dots \tau''_r J(A) \leqq 2^{2r-2} . \frac{\lambda}{[\lambda]}$.

[11]) Neboť výraz za znamením Max má pro $\eta = 1$ hodnotu 1 a kladnou derivaci $r - 1$, takže nabývá v intervalu $1 \leqq \eta \leqq 2$ také hodnot větších než 1.

[12]) Jež pochází od VL. KNICHALA.

[13]) Píši pro zkrácení τ''_j místo $\tau''_j(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A))$.

[14]) Ježto $k_r \geqq k_{r-1} \geqq \dots \geqq k_1 = 0$, jsou čísla $\frac{\mu_j}{\mu_{j-1}}$ celá.

Kladme za druhé $\mu_j = \tau''_j$, $\mu_{j-1} = \frac{1}{[\lambda]+1}\tau''_j = \frac{\lambda}{[\lambda]+1}\tau''_{j-1}$ a definujme pak μ_i pro $i \neq j, i \neq j-1$ opět vztahy (10); potom z (8) plyne $\tau''_1 \ldots \tau''_r J(A) \leqq 2^{2r-2}\frac{[\lambda]+1}{\lambda}$. Tím je dokázáno (9).[15])

Odtud plyne dále: Jest $\lambda \geqq 1$; nechť třeba $s \leqq \lambda < s+1$ (s celé kladné). Potom $\mathrm{Min}\left(\frac{\lambda}{[\lambda]}, \frac{[\lambda+1]}{\lambda}\right) = \mathrm{Min}\left(\frac{\lambda}{s}, \frac{s+1}{\lambda}\right)$. Zde první zlomek roste s λ, druhý klesá; tedy nabude „Min" největší hodnoty pro $\frac{\lambda}{s} = \frac{s+1}{\lambda}$, t. j. $\lambda = \sqrt{s(s+1)}$, načež ono „Min" má hodnotu $\sqrt{\frac{s+1}{s}} \leqq \sqrt{2}$. Tedy $T_r \leqq$ $\leqq 2^{2r-2}\sqrt{2}$.

Speciálně pro $r = 2$ máme: jest $T_2 \leqq 4\sqrt{2}$; je-li $0 < J(A) < +\infty$, $\tau''_1 > 0$, $\lambda = \frac{\tau''_2}{\tau''_1}$, jest

$$\tau''_1\tau''_2 J(A) \leqq 4\,\mathrm{Min}\left(\frac{\lambda}{[\lambda]}, \frac{[\lambda]+1}{\lambda}\right) \leqq 4\sqrt{\frac{[\lambda]+1}{[\lambda]}}.$$

Věta 2 ukazuje, že v (7) nelze pravou stranu nahraditi číslem 2^r. Ukážeme však:[16]) píšeme-li v (7) $\tau''_j\left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A)\right)$ — nebo (dokonce) $\tau_j\left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A)\right)$ — místo $\tau''_j(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A))$, a volíme-li n dosti veliké, můžeme pravou stranu v (7) nahraditi číslem 2^r:

Věta 3. *Budiž $0 < J(A) < +\infty$. Potom existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geqq n_0$ jest*

$$\tau_1\left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A)\right) \ldots \tau_r\left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A)\right) J(A) \leqq 2^r. \tag{11}$$

Přesněji:

Věta 4. *Budiž $0 < J(A) < +\infty$. Potom buďto existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geqq n_0$ je levá strana v (11) menší než 2^r nebo je pro všechna $n > 0$*

$$\begin{aligned}\tau''_1\left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A)\right) \ldots \tau''_r\left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A)\right) J(A) = \\ = \tau_1\left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A)\right) \ldots \tau_r\left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A)\right) J(A) = 2^r.\end{aligned} \tag{12}$$

Druhý případ nastane tehdy a jen tehdy, jsou-li splněny tyto čtyři podmínky:

1. *A jest omezená.*
2. *$\mathfrak{K}(A)$ má střed.*
3. *$\mu(\mathfrak{K}(A) - A) = 0$.*[17])

[15]) Pro $r > 2$ platí dokonce znamení $<$.
[16]) Následující věty 3, 4, 5 pocházejí od V. Jarníka.
[17]) Tedy jest ovšem A měřitelná.

4. *Je-li C množina se středem* $\mathbf{o}$, *jež vzniká z* $\mathfrak{K}(A)$ *posunutím*,[18]) *jest*

(13) $$\tau_1(C) \dots \tau_r(C)\, \mu(C) = 2^r.$$

Větu 4 odvodíme z této věty:

Věta 5. *Budiž* $J(A) > 0$. *Potom platí:*

I. *Pro* $j = 1, \dots, r$ *jest*

(14) $$0 \leqq \lim_{n \to \infty} \tau''_j \left(\frac{1}{2^n} \mathfrak{B}^n(A)\right) = \lim_{n \to \infty} \tau_j \left(\frac{1}{2^n} \mathfrak{B}^n(A)\right) < +\infty;$$

označme tuto limitu $T_j(A)$.

II. *Je-li A omezené, jest* $T_j(A) > 0$ *pro* $j = 1, \dots, r$,

(15) $$T_1(A) \dots T_r(A) \,.\, J(A) \leqq 2^r;$$

znamení rovnosti v (15) *platí tehdy a jen tehdy, jsou-li splněny podmínky 2, 3, 4 věty 4.*

III. *Není-li A omezená, jest* $T_1(A) = 0$.

Uveďme tento speciální případ věty 4: *Budiž A konvexní, uzavřená, omezená,* $J(A) > 0$. *Potom jest*

(16) $$\tau_1(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) \dots \tau_r(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A))\, J(A) \leqq 2^r.$$

Nemá-li A střed, platí v (16) *znamení nerovnosti.*

Důkaz: $\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)$ jest konvexní se středem $\mathbf{o}$ (viz **P6**), takže podle **P8** je $\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A) = \frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A)$ pro každé $n \geqq 1$ a naše tvrzení plyne z věty 2. Budiž konečně A konvexní, uzavřená, omezená *se středem* $\mathbf{o}$, $J(A) > 0$. Potom jest (viz **P8**) $A = \frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)$, takže věta z **P17** plyne ihned z (16).

1. pomocná věta. *Budiž* $\mu(\mathfrak{K}(A) - A) = 0$,[19]) *nechť* $\mathfrak{K}(A)$ *má střed* $\mathbf{o}$. *Potom jest* $\mathfrak{G}(A) \subset \frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)$.

Důkaz. Budiž $\mathbf{x} \in \mathfrak{G}(A)$. Existuje $\delta > 0$ tak, že $K(\mathbf{x}, \delta) \subset \mathfrak{G}(A) \subset \subset \mathfrak{K}(A)$. Podle předpokladu je tedy $\mu(A \,.\, K(\mathbf{x}, \delta)) = (2\delta)^r$. Probíhá-li bod $\mathbf{y}$ množinu $A \,.\, K(\mathbf{x}, \delta)$, probíhá bod $\mathbf{z} = \mathbf{y} - 2\mathbf{x}$ jistou množinu B míry $(2\delta)^r$, ležící v krychli $K(-\mathbf{x}, \delta)$. Ježto $\mathfrak{K}(A)$ má střed $\mathbf{o}$, a ježto $K(\mathbf{x}, \delta) \subset \mathfrak{K}(A)$, je též $B \subset K(-\mathbf{x}, \delta) \subset \mathfrak{K}(A)$. Ježto $\mu B > 0$, obsahuje B podle předpokladu bod $\mathbf{z} \in A$; ježto $\mathbf{z} = \mathbf{y} - 2\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in A$, je $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \in \frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)$.

2. pomocná věta. *Budiž N měřitelná množina, jejíž všechny body jsou jejími body hustoty. Potom je množina* $\mathfrak{B}(N)$ *otevřená.*

Důkaz. Budiž $\mathbf{z} \in \mathfrak{B}(N)$, tedy $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in N$, $\mathbf{y} \in N$. Ježto $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou body hustoty množiny N, existuje číslo $\delta > 0$ s touto vlastností: Je-li $0 < \varepsilon < \delta$, je

(17) $$\mu(N \,.\, K(\mathbf{x}, \varepsilon)) > (2\varepsilon)^r(1 - 2^{-r-1}), \quad \mu(N \,.\, K(\mathbf{y}, \varepsilon)) > (2\varepsilon)^r(1 - 2^{-r-1}).$$

[18]) Jde tedy o ono posunutí, jež převádí střed množiny $\mathfrak{K}(A)$ do bodu $\mathbf{o}$. Množina C jest ovšem konvexní, omezená, uzavřená, $\mu(C) = \mu(\mathfrak{K}(A)) = J(A)$.

[19]) Tedy je A měřitelná.

Tvrdím, že $K(\mathbf{z}, \frac{1}{4}\delta) \subset \mathfrak{B}(N)$; tím bude důkaz proveden. Budiž tedy $\mathbf{z}_1 \in K(\mathbf{z}, \frac{1}{4}\delta)$. Není-li $\mathbf{z}_1 \in \mathfrak{B}(N)$, platí toto: Pro libovolné $\mathbf{x}_1 \in N \,.\, K(\mathbf{x}, \frac{1}{4}\delta)$ je $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1$ non $\in N$ a současně ovšem $\mathbf{y}_1 \in K(\mathbf{y}, \frac{1}{2}\delta)$. Když $\mathbf{x}_1$ probíhá množinu $N \,.\, K(\mathbf{x}, \frac{1}{4}\delta)$, probíhá $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1$ množinu míry $\mu(N \,.\, K(\mathbf{x}, \frac{1}{4}\delta)) > (\frac{1}{2}\delta)^r(1 - 2^{-r-1})$ (viz (17)); tedy je $\mu(N \,.\, K(\mathbf{y}, \frac{1}{2}\delta)) < \delta^r - (\frac{1}{2}\delta)^r(1 - 2^{-r-1}) < \delta^r(1 - 2^{-r-1})$, což je ve sporu s (17).

3. pomocná věta. *Budiž N množina se středem $\mathbf{o}$. Bod $\mathbf{o}$ budiž vnitřním bodem množiny N. Pro $0 < \varepsilon < 1$ označme znakem $\mathfrak{K}_\varepsilon$ průnik množiny $(1 - \varepsilon)\,\mathfrak{K}(N)$ s krychlí $K\left(\mathbf{o}, \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$, takže $\mathfrak{K}_\varepsilon$ jest uzavřená konvexní omezená množina. Tvrdím: je-li $0 < \varepsilon < 1$, existuje $n > 0$ tak, že*

$$\mathfrak{K}_\varepsilon \subset \frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(N). \tag{18}$$

Důkaz. Nechť to pro jisté ε $(0 < \varepsilon < 1)$ není pravda, takže ke každému $n > 0$ existuje bod

$$\mathbf{v}_n \in \mathfrak{K}_\varepsilon - \frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(N). \tag{19}$$

Existuje hromadný bod $\mathbf{v}$ posloupnosti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots$; jest $\mathbf{v} \in \mathfrak{K}_\varepsilon$, tedy $\mathbf{v} \in (1 - \varepsilon)\,\mathfrak{K}(N) \subset \left(1 - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)\mathfrak{L}(N)$ (viz **P13**). Existuje $\delta > 0$ tak, že $K(\mathbf{o}, \delta) \subset N$.

Dále jest podle **P5**

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{z}_1 + \ldots + \lambda_m\mathbf{z}_m, \\ \text{kde } \mathbf{z}_j \in N,\ \lambda_j > 0,\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon. \end{cases} \tag{20}$$

Zvolme $p > 0$ tak velké, že

$$\mathbf{z}_j \in K\left(\mathbf{o}, \frac{2^{p-2}\varepsilon\delta}{m}\right),\ \lambda_j > \frac{1}{2^p}\ (j = 1, \ldots, m). \tag{21}$$

Tvrdím, že

$$K\left(\mathbf{v}, \frac{\delta}{2^{p+1}}\right) \subset \frac{1}{2^p}\mathfrak{B}^p(N). \tag{22}$$

Budiž tedy $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{x} \in K\left(\mathbf{v}, \dfrac{\delta}{2^{p+1}}\right)$, t. j. $\mathbf{x} \in K\left(\mathbf{o}, \dfrac{\delta}{2^{p+1}}\right)$. Podle (21) existují kladná k_j tak, že

$$\lambda_j = \frac{k_j}{2^p} + \frac{\vartheta_j}{2^p},\ 0 \leqq \vartheta_j < 1\ \ (j = 1, \ldots, m). \tag{23}$$

Položme $q = 2^p - (k_1 + \ldots + k_m)$, takže

$$q \geqq 2^p\,(1 - \lambda_1 - \ldots - \lambda_m) = 2^{p-1}\varepsilon. \tag{24}$$

Zvolme nyní 2^p bodů $\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{2^p}$ takto (ježto indexy jsou složité, píši též po příp. $\mathsf{u}(j)$ místo u_j):

$$
(25)\quad
\begin{aligned}
&\mathsf{u}(1) = \mathsf{u}(2) = \ldots = \mathsf{u}(k_1) = \mathsf{z}_1,\\
&\mathsf{u}(k_1 + 1) = \ldots = \mathsf{u}(k_1 + k_2) = \mathsf{z}_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathsf{u}(k_1 + k_2 + \ldots + k_{m-1} + 1) = \ldots = \mathsf{u}(k_1 + k_2 + \ldots + k_{m-1} + k_m) = \mathsf{z}_m,\\
&\mathsf{u}(k_1 + \ldots + k_m + 1) = \ldots = \mathsf{u}(2^p) = \frac{1}{q}\,(\sum_{j=1}^{m} \vartheta_j \mathsf{z}_j + 2^p \mathsf{x}).
\end{aligned}
$$

Jest (viz (20), (23), (25))

$$
(26)\qquad \mathsf{w} = \mathsf{v}' + \mathsf{x} = \frac{1}{2^p}\,(\mathsf{u}_1 + \mathsf{u}_2 + \ldots + \mathsf{u}_{2^p}).
$$

Dále jest $\mathsf{u}_j \in N$ pro $j \leqq 2^p - q$; pro $j > 2^p - q$ je pak

$$
(27)\qquad \mathsf{u}_j = \frac{1}{q}\,(\sum_{j=1}^{m} \vartheta_j \mathsf{z}_j + 2^p \mathsf{x}) \in K\left(\mathsf{o}, \frac{m}{q} \cdot \frac{2^{p-2}\varepsilon\delta}{m} + \frac{2^p}{q} \cdot \frac{\delta}{2^{p+1}}\right),
$$

tedy (viz (24)) $\mathsf{u}_j \in K(\mathsf{o}, \delta)$, tedy opět $\mathsf{u}_j \in N$. Podle (26) a podle **P9** je tedy $\mathsf{w} \in \frac{1}{2^p}\mathfrak{B}^p(N)$, čímž (22) dokázáno. Podle definice bodu v existuje však číslo $n \geqq p$ tak, že $\mathsf{v}_n \in K\left(\mathsf{v}, \frac{\delta}{2^{p+1}}\right)$, načež podle (22) je $\mathsf{v}_n \in \frac{1}{2^p}\mathfrak{B}^p(N) \subset \subset \frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(N)$ (viz **P7**); ale to je ve sporu s (19).

4. pomocná věta. *Budiž $J(A) > 0$; potom jest pro $j = 1, \ldots, r$*

$$
0 \leqq \lim_{n\to\infty} \tau''_j \left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A)\right) = \lim_{n\to\infty} \tau_j \left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A)\right) = \tau_j\,(\tfrac{1}{2}\mathfrak{K}(\mathfrak{B}(A))) =
$$
$$
= \tau_j\,(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathfrak{K}(A))) < +\infty.
$$

Důkaz. Položme $\frac{1}{2}\mathfrak{K}(\mathfrak{B}(A)) = B$; to je konvexní množina se středem o, tedy (viz **P8**) $\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(B) = B$. Ježto $\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A) \subset B$, jest

$$
(28)\qquad \frac{1}{2^{n+1}}\mathfrak{B}^{n+1}(A) \subset \frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(B) = B
$$

pro $n \geqq 0$; tedy jest pro $n \geqq 1$ (viz **P16, P15**)

$$
(29)\qquad \tau_j \left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A)\right) \geqq \tau''_j \left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A)\right) \geqq \tau''_j(B) = \tau_j(B).
$$

Ježto $J(A) > 0$, existuje $\delta > 0$ tak, že (viz **P12, P11**)

$$
(30)\qquad K(\mathsf{o}, \delta) \subset \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathfrak{K}(A)) \subset B,
$$

takže jistě

$$
(31)\qquad \tau_j(B) \leqq \tau_j(K(\mathsf{o}, \delta)) = \frac{1}{\delta} < +\infty.
$$

Budiž konečně dáno j $(1 \leqq j \leqq r)$ a libovolné číslo α takové, že $\tau_j(B) < \alpha < +\infty$. Volme α' tak, že $\tau_j(B) < \alpha' < \alpha$. Množina $\alpha' B$ obsahuje tedy j nezávislých mřížových bodů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j$.

Existuje měřitelná množina $A_1 \subset A$ tak, že $\mu(A_1) > 0$. Je-li A_2 množina všech bodů hustoty množiny A_1, je $\mu(A_1 - A_2) = 0$, $\mu(A_2) = \mu(A_1) > 0$ a všechny body množiny A_2 jsou jejími body hustoty. Podle 2. pomocné věty je $\mathfrak{V}(A_2)$ otevřená a ovšem neprázdná, takže množina $\frac{1}{2}\mathfrak{V}(A)$ obsahuje jistou krychli $K(\mathbf{a}, \delta)$,[20] načež množina $\frac{1}{4}\mathfrak{V}^2(A)$ (mající střed $\mathbf{o}$) obsahuje krychli $K(\mathbf{o}, \delta)$. Ježto $\frac{1}{2}\mathfrak{V}(A) \subset \frac{1}{2^2}\mathfrak{V}^2(A) \subset B$ (viz (28) a **P7**), jest $\mathfrak{K}(\frac{1}{2}\mathfrak{V}(A)) \subset \mathfrak{K}\left(\frac{1}{2^2}\mathfrak{V}^2(A)\right) \subset \mathfrak{K}(B)$. Ale první a třetí z těchto množin jest B (B je totiž uzavřená a konvexní), tedy

$$\mathfrak{K}(\tfrac{1}{4}\mathfrak{V}^2(A)) = B. \tag{32}$$

Položme v 3. pomocné větě $N = \frac{1}{4}\mathfrak{V}^2(A)$, takže pro $p > 2$ jest $\frac{1}{2^p}\mathfrak{V}^p(A) = \frac{1}{2^{p-2}}\mathfrak{V}^{p-2}(N)$. Zvolme ε $(0 < \varepsilon < 1)$ tak, aby $\alpha' < \alpha(1 - \varepsilon)$ a aby bylo $\mathbf{x}_s \in K\left(\mathbf{o}, \frac{\alpha}{\varepsilon}\right)$ pro $s = 1, 2, \ldots, j$. Podle 3. pomocné věty existuje celé $p > 2$ tak, že množina $\frac{1}{2^p}\mathfrak{V}^p(A)$ obsahuje průnik množiny $(1 - \varepsilon) B$ (viz (32)) s krychlí $K\left(\mathbf{o}, \frac{1}{\varepsilon}\right)$. Pro $\beta \geqq \alpha$ obsahuje tedy množina

$$\beta \frac{1}{2^p} \mathfrak{V}^p(A) \tag{33}$$

průnik množiny $\beta(1 - \varepsilon) B$ s krychlí $K\left(\mathbf{o}, \frac{\beta}{\varepsilon}\right)$. Ježto $\beta(1 - \varepsilon) \geqq \alpha(1 - \varepsilon) > \alpha'$, je $\beta(1 - \varepsilon) B \supset \alpha' B$ a dále $K\left(\mathbf{o}, \frac{\beta}{\varepsilon}\right) \supset K\left(\mathbf{o}, \frac{\alpha}{\varepsilon}\right)$. Množina (33) obsahuje tedy pro každé $\beta \geqq \alpha$ body $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j$, takže $\tau_j\left(\frac{1}{2^p}\mathfrak{V}^p(A)\right) \leqq \alpha$.

Podle **P16** je tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_j\left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{V}^n(A)\right) \leqq \alpha$ a to platí pro každé $\alpha > \tau_j(B)$. Odtud a z (29), (31) obdržíme ihned 4. pomocnou větu, dokážeme-li ještě rovnici

$$\tau_j(\tfrac{1}{2}\mathfrak{K}(\mathfrak{V}(A))) = \tau_j(\tfrac{1}{2}\mathfrak{V}(\mathfrak{K}(A))). \tag{34}$$

Ale (viz **P11, P10, P4**)

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{K}(\mathfrak{V}(A)) \supset \tfrac{1}{2}\mathfrak{V}(\mathfrak{K}(A)) \supset \tfrac{1}{2}\mathfrak{V}(\mathfrak{L}(A)) = \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}(\mathfrak{V}(A)) \supset \tfrac{1}{2}\mathfrak{G}(\mathfrak{V}(A)). \tag{35}$$

Ale $J(\mathfrak{V}(A)) > 0$ (viz pozn. [20]) a množina $\mathfrak{K}(\mathfrak{V}(A))$ má zřejmě střed $\mathbf{o}$. Z **P16** tedy plyne $\tau_j(\frac{1}{2}\mathfrak{K}(\mathfrak{V}(A))) = \tau_j(\frac{1}{2}\mathfrak{G}(\mathfrak{V}(A)))$, načež (34) plyne z (35).

D ů k a z věty 5. Tvrzení I plyne ihned z 4. pomocné věty.

[20]) Tedy $J(\mathfrak{V}(A)) > 0$.

II. Budiž A omezené. Klaďme nyní $B = \frac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathfrak{K}(A))$; ježto $\mathfrak{K}(A)$ jest uzavřená, omezená konvexní množina, $\mu(\mathfrak{K}(A)) > 0$, jest podle **P14**

$$(36) \qquad 0 < \mu(\mathfrak{K}(A)) \leqq \mu(B);$$

znamení rovnosti platí pak tehdy a jen tehdy, má-li $\mathfrak{K}(A)$ střed. Dále jest $J(A) \leqq \mu(\mathfrak{K}(A))$ a znamení rovnosti platí tehdy a jen tehdy, je-li $\mu(\mathfrak{K}(A) - - A) = 0$. Podle 4. pomocné věty je $T_j(A) = \tau_j(B) > 0$.[21]) Tedy jest

$$(37) \qquad T_1(A) \dots T_r(A)\, J(A) \leqq \tau_1(B) \dots \tau_r(B)\, \mu(B)$$

a znamení rovnosti platí tehdy a jen tehdy, jsou-li splněny podmínky 2, 3 věty 4. Pravá strana v (37) je podle **P18** nejvýše rovna 2^r; levá strana nerovnosti (37) je tedy též nejvýše rovna 2^r a je právě rovna 2^r tehdy a jen tehdy, jsou-li splněny podmínky 2, 3 věty 4 a je-li mimo to

$$(38) \qquad \tau_1(B) \dots \tau_r(B)\, \mu(B) = 2^r.$$

Platí-li však podmínka 2 věty 4, budiž C množina o středu $\mathbf{o}$, vznikající z $\mathfrak{K}(A)$ posunutím; potom jest ovšem $C = \frac{1}{2}\mathfrak{B}(C) = \frac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathfrak{K}(A)) = B$, takže podmínku (38) lze vskutku psáti ve tvaru (13).

III. Budiž nyní A neomezené, takže též $B = \frac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathfrak{K}(A))$ je neomezené, tedy $\mu B = +\infty$ (viz **P12**). Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje tedy γ ($0 < \gamma < < +\infty$) s touto vlastností: položíme-li $D = B \,.\, K(\mathbf{o}, \gamma)$, je $\mu(D) > \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^r$, načež podle **P18**, **P19** jest

$$\tau_1{}^r(D) \,.\, \mu(D) \leqq \tau_1(D) \dots \tau_r(D)\, \mu(D) \leqq 2^r,$$

tedy $\tau_1(D) < \varepsilon$, načež tím spíše $\tau_1(B) < \varepsilon$, tedy $\tau_1(B) = 0$ a tedy též $T_1(A) = 0$ (viz 4. pomocnou větu).

Důkaz věty 4. I. Není-li A omezené, je podle věty 5

$$(39) \qquad T_1(A) = 0, \quad T_j(A) < +\infty \text{ pro } 2 \leqq j \leqq r,$$

takže pro dosti velká n platí (11) se znamením $<$.

II. Je-li A omezené, ale není-li splněna některá z podmínek 2—4 věty 4, je podle věty 5

$$(40) \qquad T_1(A) \dots T_r(A) \,.\, J(A) < 2^r,$$

takže pro dosti velká n platí opět (11) se znamením $<$.

III. Buďte konečně splněny podmínky 1 až 4 věty 4. Proveďme posunutí, jímž střed množiny $\mathfrak{K}(A)$ přejde do počátku. Tím přejde $\mathfrak{K}(A)$ v jistou konvexní, uzavřenou, omezenou množinu C o středu $\mathbf{o}$, kdežto A přejde v jistou množinu D; zřejmě jest

$$C = \mathfrak{K}(D), \; \mu(D) = \mu(A) = \mu(\mathfrak{K}(A)) = \mu(C).$$

Podle (13) je tedy

$$(41) \qquad \tau_1(C) \dots \tau_r(C)\, \mu(A) = 2^r.$$

[21]) Ježto B jest omezené, existuje γ ($0 < \gamma < +\infty$) tak, že $B \subset K(\mathbf{o}, \gamma^{-1})$, načež zřejmě $\tau_j(B) \geqq \gamma$.

Podle 1. pomocné věty jest pro $n > 0$

(42) $\mathfrak{G}(D) \subset \frac{1}{2}\mathfrak{B}(D) = \frac{1}{2}\mathfrak{B}(A) \subset \frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A) \subset \frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(\mathfrak{K}(A)) = \frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(C) = C$

(viz **P7**, **P8**). Dále jest (viz **P15**, **P16**)

(43) $$\tau_j(C) = \tau''_j(C) = \tau''_j(\mathfrak{G}(D)) = \tau_j(\mathfrak{G}(D)).$$

Z (42), (43) a z **P16** plyne, že $\tau_j\left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A)\right)$ a rovněž $\tau''_j\left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A)\right)$ má pro každé $n > 0$ hodnotu $\tau_j(C)$, načež (12) plyne z (41).

Obraťme se nyní k důkazům vět 1, 2. Napřed ještě několik drobných poznámek.

P20. *Buďte* $\mathsf{x}^1, \mathsf{x}^2, \dots, \mathsf{x}^r$ *nezávislé mřížové body. Pak existuje unimodulární lineární substituce s celistvými součiniteli* $\mathsf{y} = L(\mathsf{x})$[22]) *tak, že pro transformované body* $\mathsf{y}^i = L(\mathsf{x}^i)$ *platí* $y_k{}^i = 0$ *pro* $k > i$ (píšeme $\mathsf{y}^i = [y_1{}^i, \dots, y_r{}^i]$ pro $i = 1, 2, \dots, r$).

Důkaz. Budiž $1 \leqq s \leqq r$. Ze všech mřížových bodů tvaru $\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\mathsf{x}^i$, kde $|\lambda_i| \leqq 1$ pro $1 \leqq i \leqq s$,[23]) vyberme jeden, a označme jej $\mathsf{z}^s = [z_1{}^s, \dots, z_r{}^s]$, pro který $|\lambda_s|$ má co nejmenší kladnou hodnotu. Nechť $\mathsf{z}^s = \sum_{i=1}^{s}\lambda_i{}^s\mathsf{x}^i$ $(0 < |\lambda_s{}^s| \leqq 1)$. Body $\mathsf{z}^1, \dots, \mathsf{z}^r$ jsou tedy nezávislé a tedy se dá každý bod x našeho r-rozměrného prostoru vyjádřiti jako lineární kombinace bodů $\mathsf{z}^1, \dots, \mathsf{z}^r$, při čemž součinitelé jsou určeni jednoznačně: $\mathsf{x} = \sum_{i=1}^{r}\varrho_i\mathsf{z}^i$. Tvrdím: Je-li x mřížový bod, jsou čísla ϱ_i celá. Kdyby tomu tak nebylo, budiž ϱ_s poslední necelý součinitel; odečtením vhodných celistvých násobků mřížových bodů $\mathsf{z}^s, \mathsf{z}^{s+1}, \dots, \mathsf{z}^r$ bychom obdrželi mřížový bod $\mathsf{x}' = \sum_{i=1}^{s}\varrho'_i\mathsf{z}^i$, kde $0 < |\varrho'_s| < 1$. Tedy $\mathsf{x}' = \sum_{i=1}^{s}\varrho'_i\sum_{k=1}^{i}\lambda_k{}^i\mathsf{x}^k = \sum_{k=1}^{s}\mu_k\mathsf{x}^k$, kde $\mu_s = \varrho'_s\lambda_s{}^s$; odečtením vhodných celistvých násobků bodů $\mathsf{x}^1, \dots, \mathsf{x}^{s-1}$ bychom konečně obdrželi mřížový bod tvaru $\nu_1\mathsf{x}^1 + \dots + \nu_{s-1}\mathsf{x}^{s-1} + \mu_s\mathsf{x}^s$, kde $|\nu_i| \leqq 1$, $0 < |\mu_s| = |\varrho'_s\lambda_s{}^s| < |\lambda_s{}^s| \leqq 1$, ale to je ve sporu s definicí čísla $\lambda_s{}^s$. Transformace $\mathsf{x} = L'(\mathsf{y})$[24]) daná rovnicemi $\xi_i = \sum_{s=1}^{r}z_i{}^s\eta_s$ je tedy transformace lineární s celočíselnými koeficienty a každému mřížovému bodu x přiřazuje opět mřížový bod y. Inversní transformace $\mathsf{y} = L(\mathsf{x})$ přiřazuje tedy každému mřížovému bodu x mřížový bod y a má tedy celočíselné koeficienty. Determinanty $|L|$, $|L'|$ obou těchto substitucí jsou tedy čísla celá a tedy $|L| = |L'| = \pm 1$ (neboť $\mathsf{x} = L'(L(\mathsf{x}))$ a tedy $|L| \,.\, |L'| = 1$). Položme $\mathsf{y}^i = L(\mathsf{x}^i)$, t. j. $x_k{}^i = \sum_{s=1}^{r}z_k{}^s y_s{}^i$, t. j. $\mathsf{x}^i = \sum_{s=1}^{r}\mathsf{z}^s y_s{}^i$.

[22]) Jež tedy zobrazuje množinu všech mřížových bodů na množinu všech mřížových bodů.

[23]) Takových mřížových bodů je jen konečný počet.

[24]) Píši $\mathsf{x} = [\xi_1, \dots, \xi_r]$, $\mathsf{y} = [\eta_1, \dots, \eta_r]$.

Poněvadž podle konstrukce bodů $\mathbf{z}^s$ je bod $\mathbf{x}^i$ lineární kombinací bodů $\mathbf{z}^1, \ldots, \mathbf{z}^i$, jest $y_s^i = 0$ pro $s > i$.

P21. Budiž A omezená. Potom existuje (aspoň jeden) systém r nezávislých bodů $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^r$ s touto vlastností: ke každému $\varepsilon > 0$ a ke každému indexu j $(1 \leqq j \leqq r)$, pro nějž je $\tau''_j(A) < +\infty$, existuje α tak, že $0 < \alpha < \tau''_j(A) + \varepsilon$, $\mathbf{x}^j \in \alpha A$.[25]) Podle **P20** lze v r-rozměrném prostoru zavésti nové souřadnice unimodulární lineární substitucí $\mathbf{y} = L(\mathbf{x})$ s celočíselnými koeficienty tak, že pro body $\mathbf{y}^i = L(\mathbf{x}^i)$ platí $y_k^i = 0$ pro $k > i$.

Pro takto zavedené souřadnice platí: *Je-li* $0 \leqq \alpha < \tau''_i(A)$ *a je-li* $\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_r]$ *mřížový bod z* αA, je $\mathbf{y}$ lineární kombinací bodů $\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^{i-1}$, t. j. *jest* $y_k = 0$ *pro* $k \geqq i$. Takto zavedenému systému souřadnic budeme říkati systém normální pro množinu A.

P22. Budiž N nějaká množina. Sestrojme libovolnou posloupnost $\mathfrak{P}$ krychlí $K(\mathbf{z}_n, \lambda_n)$ takovou, že $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty$ a položme

$$\varrho(\mathfrak{P}) = \limsup_{n \to \infty} \frac{\alpha_n}{(2\lambda_n)^r},$$

kde α_n značí počet bodů množiny N, ležících v krychli $K(\mathbf{z}_n, \lambda_n)$ (může býti též $\alpha_n = +\infty$). Supremum všech čísel $\varrho(\mathfrak{P})$ (pro všechny takové posloupnosti $\mathfrak{P}$) nazveme na chvíli hustotou množiny N. JESSEN dokázal tuto větu:[26]) Buďte ϱ, V konečná kladná čísla. Budiž N množina, mající hustotu $\geqq \varrho$. Budiž B měřitelná množina, $\mu(B) > V$. Potom lze sestrojiti množinu B_1, jež vzniká z B posunutím a obsahuje více než $V\varrho$ bodů množiny N.

Důkaz věty 1. Budiž předně $0 < J(A) < +\infty$, $\tau''_1(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) > 0$; buďte dále $\mu_1, \ldots, \mu_r$ čísla, vyhovující požadavkům, vysloveným v posledním tvrzení věty 1 a předpokládejme, že (8) neplatí, takže $\mu_1 \ldots \mu_r J(A) > 2^r$. Existuje tedy omezená měřitelná množina $B \subset A$ a číslo ϱ $(0 < \varrho < 1)$ tak, že $\varrho^r \mu_1 \ldots \mu_r J(B) > 2^r$. Kladme $\nu_j = \frac{1}{2}\varrho\mu_j$, takže $\frac{\nu_j}{\nu_{j-1}}$ $(j = 2, \ldots, r)$ jsou celá čísla, $0 < \nu_j < \frac{1}{2}\tau''_j(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) = \tau''_j(\mathfrak{B}(A)) \leqq \tau''_j(\mathfrak{B}(B))$ pro $j = 1, \ldots, r$. Sestrojme systém souřadnic normální pro množinu $\mathfrak{B}(B)$ (ve smyslu **P21**) a budiž N množina všech bodů, jež mají (ve zvoleném normálním systému souřadnic) tvar

$$\left[\frac{k_1}{\nu_1}, \ldots, \frac{k_r}{\nu_r}\right] \quad (k_1, \ldots, k_r \text{ celá}). \tag{44}$$

[25]) Zřejmé je, že pro každé $\varepsilon > 0$ takový systém $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^r$ existuje, při čemž pro ona j, pro něž je $\tau''_j(A) = +\infty$, mohu za $\mathbf{x}^j$ voliti jeden z bodů tvaru $[0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]$. Ježto A jest omezená, máme pro všechna ε intervalu $(0, 1)$ k disposici jen konečný počet takových systémů; jeden z nich vyhovuje tedy daným podmínkám pro všechna $\varepsilon > 0$.

[26]) Viz FENCHEL, Verallgemeinerungen einiger Sätze aus der Geometrie der Zahlen, Acta arithmetica 2 (1937), 230—241, viz hlavně str. 240—241.

Hustota množiny N ve smyslu **P22** je zřejmě $\nu_1 \dots \nu_r$; ježto pak $\nu_1 \dots \nu_r \,.$ $. \, J(B) > 1$, existuje podle **P22** množina B_1, vznikající z B posunutím a obsahující aspoň dva různé body $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ tvaru (44). Bod $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ *je tedy opět bod tvaru* (44), *různý od počátku a obsažený v množině* $\mathfrak{B}(B_1) = \mathfrak{B}(B)$. Budiž $\mathbf{z} = \left[\frac{p_1}{\nu_1}, \dots, \frac{p_r}{\nu_r}\right]$ a budiž p_s poslední z (celých) čísel $p_1, \dots, p_r$, které je různé od nuly $(1 \leqq s \leqq r)$. Bod

$$\nu_s \mathbf{z} = \left[\frac{\nu_s}{\nu_1} p_1, \frac{\nu_s}{\nu_2} p_2, \dots, \frac{\nu_s}{\nu_s} p_s, 0, \dots, 0\right]$$

je pak *mřížový* bod, ležící v $\nu_s \mathfrak{B}(B)$. Ježto však $0 < \nu_s < \tau''_s \mathfrak{B}(B)$, má bod $\nu_s \mathbf{z}$ podle **P21** s-tou souřadnici rovnu nule, t. j. $p_s = 0$, což je spor.

Tím je tedy dokázáno poslední tvrzení věty 1; zbytek je pak již skoro samozřejmý:

Dokažme předně, že pro $J(A) > 0$ je $\tau''_r(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) < +\infty$. Existuje totiž omezená množina $B \subset A$, pro kterou $J(B) > 0$. Kdyby bylo $\tau''_r(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) = +\infty$, bylo by i $\tau''_r(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(B)) = +\infty$; mimo to je zřejmě $\tau''_1(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(B)) > 0$.[27] Mohli bychom tedy na množinu B užíti nerovnosti (8), při čemž bychom $\mu_1, \dots, \mu_{r-1}$ volili pevně, kdežto za μ_r bychom mohli voliti jakýkoliv násobek $k\mu_{r-1}$ $(k > 0)$; potom by však levá strana pro dosti velká k byla větší než 2^r — spor.

Za druhé: ukázali jsme již (před vyslovením věty 1 bis), že (7) plyne z posledního tvrzení věty 1 a z $\tau''_r(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) < +\infty$.

Za třetí: Je-li $J(A) = +\infty$, existuje ke každému $n > 0$ množina A_n tak, že $A_n \subset A$, $n < J(A_n) < +\infty$. Podle (7) je tedy

$$\tau''_1(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A_n)) \dots \tau''_r(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A_n))\, J(A_n) \leqq 2^{2r-1}; \tag{45}$$

ježto $\tau''_1(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) \leqq \tau''_1(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A_n)) \leqq \tau''_j(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A_n))$, plyne z (45)

$$(\tau''_1(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A)))^r \,.\, n \leqq 2^{2r-1}$$

pro každé $n > 0$, tedy $\tau''_1(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) = 0$.

Důkaz věty 2. Znakem K_ϱ označme množinu všech bodů $[\xi_1, \dots, \xi_r]$, kde $\varrho < \xi_j \leqq \varrho + 1$ $(j = 1, \dots, r)$. Budiž dáno číslo η $(1 \leqq \eta \leqq 2)$ a sestrojme množinu

$$A = K_0 + (K_1 - K_\eta) \tag{46}$$

(sčítání a odčítání ve smyslu množinových operací; načrtněte si množinu A pro $r = 2$). Zřejmě $J(A) = 2 - (2 - \eta)^r$.

Je-li $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_r]$ libovolný mřížový bod různý od počátku, budiž $\tau(\mathbf{x})$ infimum oněch kladných čísel α, pro něž jest $\mathbf{x} \in \alpha\, \mathfrak{B}(A)$, t. j. $\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{y} - \mathbf{z})$, kde $\mathbf{y} \in A$, $\mathbf{z} \in A$. Zřejmě (viz **P6**) $\tau(\mathbf{x}) = \tau(-\mathbf{x})$. Pišme ještě $\mathbf{l} = [1, 1, \dots, 1]$, $-\mathbf{l} = [-1, -1, \dots, -1]$. Tvrdím: Je-li $\mathbf{x}$ mřížový bod $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}, \mathbf{l}, -\mathbf{l}$, jest $\tau(\mathbf{x}) \geqq 1$.

[27]) Ježto B jest omezená.

Důkaz: Budiž předně $\mathrm{Max}\,|x_i| \geqq 2$. Je-li $\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{y} - \mathbf{z})$, $\mathbf{y} \in A$, $\mathbf{z} \in A$, $\alpha > 0$, leží všechny souřadnice bodů $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ podle (46) v intervalu $(0, 2\rangle$, tedy nutně $\alpha > 1$, tedy $\tau(\mathbf{x}) \geqq 1$. Budiž za druhé $\mathrm{Max}\,|x_i| = 1$. Je-li $\tau(\mathbf{x}) < 1$, existuje α tak, že $0 < \alpha < 1$, $\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{y} - \mathbf{z})$, $\mathbf{y} \in A$, $\mathbf{z} \in A$, a tedy nemohou ležeti oba body $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ v K_0 ani oba v K_1 (ježto by rozdíly jejich souřadnic byly v prosté hodnotě menší než 1). Tedy leží podle (46) jeden z nich v K_0 a jeden v K_1, takže bod $\mathbf{y} - \mathbf{z}$ (a tedy i bod $\mathbf{x}$) má buďto všechny souřadnice kladné nebo všechny záporné; tedy je nutně $\mathbf{x} = \mathbf{l}$ nebo $\mathbf{x} = -\mathbf{l}$. Pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{l}, -\mathbf{l}$ je tedy $\tau(\mathbf{x}) \geqq 1$.

Zbývá odhadnouti číslo $\tau(\mathbf{l}) = \tau(-\mathbf{l})$. Poznamenejme předně: Je-li $\zeta \geqq \eta$, je $AK_\zeta = 0$. To je zřejmé, neboť A vzniká z množiny $K_0 + K_1$ právě tím, že odstraníme ony body, jejichž všechny souřadnice jsou větší než η.

Budiž nyní $\alpha > 0$, $\mathbf{l} = \alpha(\mathbf{y} - \mathbf{z})$, $\mathbf{y} \in A$, $\mathbf{z} \in A$, tedy $\frac{1}{\alpha} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{z} \in A$. Je-li $\mathbf{z} \in K_0$, je $\frac{1}{\alpha} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{z} \in K_{\frac{1}{\alpha}}$, tedy nutně $AK_{\frac{1}{\alpha}} \neq 0$, $\frac{1}{\alpha} < \eta$, $\alpha > \frac{1}{\eta}$. Je-li však $\mathbf{z} \in K_1$, je $\frac{1}{\alpha} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{z} \in K_{\frac{1}{\alpha}+1}$, tedy $AK_{\frac{1}{\alpha}+1} \neq 0$, $\frac{1}{\alpha} + 1 < \eta$, tedy opět $\frac{1}{\alpha} < \eta$, $\alpha > \frac{1}{\eta}$. Nutně je tedy $\tau(\mathbf{l}) = \tau(-\mathbf{l}) \geqq \frac{1}{\eta}$.

Tedy celkem: Množina $\alpha\mathfrak{B}(A)$ neobsahuje pro $0 < \alpha < \frac{1}{\eta}$ žádný mřížový bod $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, pro $\frac{1}{\eta} \leqq \alpha < 1$ pak žádný mřížový bod různý od $\mathbf{o}, \mathbf{l}, -\mathbf{l}$. Tedy zřejmě $\tau''_1(\mathfrak{B}(A)) \geqq \frac{1}{\eta}$, $\tau''_j(\mathfrak{B}(A)) \geqq 1$ pro $2 \leqq j \leqq r$.[28]) Ježto $\tau''_i(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) = 2\tau''_i(\mathfrak{B}(A))$, máme celkem $T_r \geqq \tau''_1(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) \ldots \tau''_r(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A))\, J(A) \geqq 2^r \cdot \frac{1}{\eta}(2 - (2 - \eta)^r)$ pro každé η intervalu $1 \leqq \eta \leqq 2$.

---

[28]) Velmi snadno bychom nahlédli, že platí znamení rovnosti.

KNIHTISKÁRNA PROMETHEUS, PRAHA VIII.