Vojtěch Jarník

Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, 3. Abhandlung

Math. Zeitsch. 36 (1933), pp. 581--617

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500469

Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre.

(Dritte Abhandlung[1]).)

Von

Vojtěch Jarník in Prag.

---

§ 1.

Einleitung.

Es sei r ganz, $r \geqq 5$;

$$Q = Q(u) = \sum_{\mu,\nu=1}^{r} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \qquad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu})$$

sei eine positiv definite quadratische Form[2]) mit der Determinante D. Wenn $x > 0$ (in der Folge wird stets $x > 0$ vorausgesetzt), so sei $A(x) = A_Q(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte im abgeschlossenen Ellipsoid $Q(u) \leqq x$. Das Volumen dieses Ellipsoides ist

$$(1) \qquad V(x) = V_Q(x) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}.$$

Endlich sei

$$(2) \qquad \mathsf{P}(x) = \mathsf{P}_Q(x) = A_Q(x) - V_Q(x); \qquad R(x) = R_Q(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |\,\mathsf{P}_Q(y)\,|\,dy.$$

In Mw I und Mw II habe ich die O-Ω-Probleme für $R(x)$ untersucht; hier will ich eine andere Reihe von Problemen behandeln, wobei ich

---

[1]) Die erste und zweite Abhandlung sind in dieser Zeitschrift **33** (1931), S. 62—84 und S. 85—97 erschienen; sie werden weiter mit Mw I, Mw II zitiert. Außerdem beachte man meine Abhandlungen „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden“, Math. Annalen **100** (1928), S. 699—721; Math. Annalen **101** (1929), S. 136—146; The Tôhoku Mathematical Journal **30** (1929), S. 354—371; sie werden weiter der Reihe nach mit Gp I, Gp II, Gp III zitiert.

[2]) Mit sonst beliebigen reellen Koeffizienten.

mich meistens auf die Formen folgender einfacher Gestalt beschränke[3]):

$$Q(u) = \alpha_1(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + u_{r_1+2}^2 + \dots + u_r^2)$$
$$(\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ r = r_1 + r_2,\ r_1 \geqq 4,\ r_2 \geqq 4).$$

Um eine bequeme Ausdrucksweise zu erreichen, führe ich folgende Bezeichnungen ein, von welchen die drei ersteren allgemein geläufig sind.

Es seien $f(x)$, $g(x)$ für hinreichend große x definiert, $g(x) > 0$ für hinreichend große x.

Die Beziehung

$$f(x) = O(g(x)), \quad \text{bzw. } f(x) = o(g(x)), \quad \text{bzw. } f(x) = \Omega(g(x))$$

sei gleichbedeutend mit

$$\limsup_{x=\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty, \quad \text{bzw. } \limsup_{x=\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0, \quad \text{bzw. } \limsup_{x=\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} > 0.$$

Ebenso die Beziehung

$$f(x) = \underline{O}(g(x)), \quad \text{bzw. } f(x) = \underline{o}(g(x)), \quad \text{bzw. } f(x) = \underline{\Omega}(g(x))$$

sei gleichbedeutend mit

$$\liminf_{x=\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty, \quad \text{bzw. } \liminf_{x=\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0, \quad \text{bzw. } \liminf_{x=\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} > 0.$$

Die Symbole O, o, Ω beziehen sich also sozusagen auf die maximale Größenordnung, die Symbole $\underline{O}, \underline{o}, \underline{\Omega}$ auf die minimale Größenordnung von $f(x)$ bei wachsendem x.

In dieser Abhandlung will ich nun eine Reihe von $\underline{O}$-$\underline{\Omega}$-Sätzen über $R(x)$ beweisen und werde diese Resultate mit den (meistens bekannten) O-o-Ω-Sätzen vergleichen. Der folgende Satz zeigt noch keinen Unterschied zwischen dem O-Ω-Problem und dem $\underline{O}$-$\underline{\Omega}$-Problem:

Satz 1. *Es sei* $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$; r_1, r_2 *ganz*; $r = r_1 + r_2$; $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ *rational*;

$$Q(u) = \alpha_1(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + u_{r_1+2}^2 + \dots + u_r^2). \tag{3}$$

Dann ist

$$R_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right), \tag{4}$$

$$R_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right), \tag{5}$$

$$R_Q(x) = \underline{O}\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right), \tag{6}$$

$$R_Q(x) = \underline{\Omega}\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right). \tag{7}$$

---

[3]) Ich formuliere auch die Resultate meistens nur für solche Formen, obwohl sie teilweise etwas allgemeiner gelten.

$R_Q(x)$ verhält sich also in diesem Fall sehr regulär: es gibt zwei positive Zahlen a_1, a_2, so daß für alle hinreichend großen x

$$a_1 x^{\frac{r}{2}-1} < R_Q(x) < a_2 x^{\frac{r}{2}-1}$$

gilt. Der Satz 1 ist nicht neu; (4) ist in der dritten Behauptung des Hauptsatzes aus Mw I[4]), (7) im Satz 3 aus Mw I enthalten; (6) folgt offenbar aus (4); (5) aus (7).

Wenn wir die Voraussetzung der Rationalität von $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ fallen lassen, bekommen wir folgenden Satz:

Satz 2. *Es sei* $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$; r_1, r_2 *ganz*, $r_1 + r_2 = r$; *für* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ *sei* $Q(u)$ *durch* (3) *gegeben.*

Behauptung 1. *Für alle* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ *ist*

$$R_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-2}\right).$$

Behauptung 2. *Für alle* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ *ist*

$$R_Q(x) = \underline{\Omega}\left(x^{\frac{r}{2}-2}\right).$$

Behauptung 3. *Für fast alle*[5]) $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ *ist*

$$R_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right) \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0.$$

Behauptung 4. *Für fast alle* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ *ist*

$$R_Q(x) = \underline{O}\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right) \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0.$$

Die Behauptung 1 folgt natürlich aus der Behauptung 2 und die Behauptung 4 aus der Behauptung 3. Übrigens ist die Behauptung 3 nicht neu[6]), sie wird aber in der Folge mitbewiesen werden.

---

[4]) Übrigens ist nach Herrn A. Walfisz $P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right)$, woraus sofort (4) folgt. Über die Geschichte der O-Ω-Probleme für $P_Q(x)$ vgl. die Einleitung zu Mw I oder noch besser A. Walfisz, Über einige neuere Ergebnisse der Gitterpunktlehre, Prace matematyczno-fizyczne **36** (1928—1929), S. 107—135.

[5]) Die Behauptung 3 ist folgendermaßen zu verstehen: Es gibt im Cartesischen Raume der Punkte $[\alpha_1, \alpha_2]$ (mit den Koordinaten α_1, α_2) eine Punktmenge N vom Lebesgueschen Maß Null, die folgende Eigenschaft besitzt: wenn $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ und wenn der Punkt $[\alpha_1, \alpha_2]$ nicht zu N gehört, so ist für die Form (3) $R_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right)$ für jedes $\varepsilon > 0$. Analog sind die Worte „fast alle" in allen übrigen Fällen zu verstehen.

[6]) In Gp I, Satz 2 (Spezialfall $\sigma = 2$) wurde nämlich bewiesen: für fast alle $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ ist $P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right)$ für jedes $\varepsilon > 0$, woraus natürlich die Behauptung 3 folgt.

Der Fall „$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ rational“ wurde durch den Satz 1 erledigt; der Fall „$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ irrational“ wurde durch den Satz 2 nur für *„fast alle“* α_1, α_2 erledigt (und dazu noch nur „bis auf x^{ε}“); wenn wir nach Resultaten suchen, die für *alle* irrationalen $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ gelten, kommen wir zu folgenden Sätzen, in welchen sich zum erstenmal ein scharfer Unterschied zwischen dem O-o-Ω-Problem und dem $\underline{O}$-$\underline{\Omega}$-Problem zeigt:

Satz 3. *Es sei* $r_1 \geqq 4,\ r_2 \geqq 4,\ r_1, r_2$ *ganz;* $r_1 + r_2 = r$.

Behauptung 1. *Wenn* $\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ *irrational, so gilt für die Form* (3)

$$R_Q(x) = o\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

Behauptung 2. *Es sei* $\varphi(x) \to +\infty$ *für* $x \to +\infty$; *dann gibt es zwei Zahlen* $\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0$ *mit irrationalem* $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ *so, daß für die Form* (3) *die Abschätzung*

$$R_Q(x) = \Omega\left(\frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{\varphi(x)}\right)$$

gilt.

Satz 4. *Es sei* $r_1 \geqq 4,\ r_2 \geqq 4;\ r_1, r_2$ *ganz;* $r = r_1 + r_2,\ z = \min(r_1, r_2)$.

Behauptung 1. *Wenn* $\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ *irrational, so gilt für die Form* (3) *die Abschätzung*

$$R_Q(x) = \underline{O}\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{z-2}{z}+\varepsilon}\right)$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Behauptung 2. *Es gibt zwei Zahlen* $\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0$ *mit irrationalem* $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ *so, daß für die Form* (3) *die Abschätzung*

$$R_Q(x) = \underline{\Omega}\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{r}{r+2}}\cdot\frac{1}{\log x}\right)$$

gilt.

Für rationales $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ gilt nach Satz 1

$$0 < \liminf_{x=\infty} \frac{R_Q(x)}{x^{\frac{r}{2}-1}} \leqq \limsup_{x=\infty} \frac{R_Q(x)}{x^{\frac{r}{2}-1}} < \infty;$$

für irrationales $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ ist zwar nach der Behauptung 1 des Satzes 3 $\lim\limits_{x=\infty} R_Q(x) : x^{\frac{r}{2}-1} = 0$, aber die Konvergenz kann nach der Behauptung 2 des Satzes 3 beliebig langsam sein, wenn man α_1, α_2 geeignet wählt; das O-Ω-Verhalten von $R_Q(x)$ bei irrationalem $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ schließt sich dem Verhalten bei rationalem $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ sozusagen stetig an. Ganz anders liegt die Sache bei dem

$\underline{O}$-$\underline{\Omega}$-Problem, wo man nach der Behauptung 1 des Satzes 4 stets sogar einen kleineren Exponenten als $\frac{r}{2}-1$ bekommt. Ich bemerke noch, daß die Behauptung 1 des Satzes 3 nicht neu ist; nach Gp II gilt nämlich in diesem Fall $\mathsf{P}_Q(x)=o\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right)$, also um so mehr $R_Q(x)=o\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right)$.

Für spätere Zwecke wollen wir noch eine unmittelbare Folgerung des Satzes 4 hervorheben. Für ganze $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$ $(r_1+r_2=r, \operatorname{Min}(r_1, r_2)=z)$ sei $g(r_1, r_2)$ die untere Grenze derjenigen Zahlen a, für welche

$$R_Q(x)=\underline{O}(x^a)$$

ist für jede Form (3) mit $\alpha_1>0, \alpha_2>0$ und mit irrationalem $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$. Dann ist nach Satz 4

$$\frac{r}{2}-1-\frac{z-2}{z} \geqq g(r_1, r_2) \geqq \frac{r}{2}-1-\frac{r}{r+2},$$

also insbesondere

Satz 4a. $$\lim_{\substack{r_1=\infty \\ r_2=\infty}}\left(g(r_1, r_2)-\left(\frac{r}{2}-2\right)\right)=0.$$

Wir wollen uns noch eine andere Frage stellen. Es sei $Q(u)$ durch (3) gegeben, wo $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$, $r=r_1+r_2$; dann sei $f_1=f_1(Q)$ die untere Grenze derjenigen Zahlen a, für welche $R_Q(x)=O(x^a)$; analog sei $f_2=f_2(Q)$ die untere Grenze derjenigen Zahlen a, für welche $R_Q(x)=\underline{O}(x^a)$. (Also ist bei jedem $\varepsilon>0$:

$$R_Q(x)=O(x^{f_1+\varepsilon}),\quad R_Q(x)=\Omega(x^{f_1-\varepsilon});\quad R_Q(x)=\underline{O}(x^{f_2+\varepsilon}),\quad R_Q(x)=\underline{\Omega}(x^{f_2-\varepsilon})).$$

Es ist stets $f_2 \leqq f_1$ und für den Verlauf von $R_Q(x)$ ist es sicher von Bedeutung, ob das Gleichheitszeichen gilt oder nicht[7]). Diese Frage wollen wir beantworten, wir müssen aber noch eine Definition vorausschicken. Es sei β eine reelle Irrationalzahl; wir bezeichnen mit $\nu(\beta)$ die obere Grenze aller Zahlen a, die folgende Eigenschaft haben: Es gibt eine Folge von Paaren ganzer Zahlen s_1, t_1; s_2, t_2; s_3, t_3 so, daß bei wachsendem n

$$t_n \to +\infty, \qquad \left|\beta-\frac{s_n}{t_n}\right|=O\left(\frac{1}{t_n^{2+a}}\right).$$

(Aus den Elementen der Theorie der Kettenbrüche folgt, daß stets

---

[7]) Wenn $f_1(Q)=f_2(Q)$, so ist für jedes $\varepsilon>0$

$$x^{f_1-\varepsilon}<R_Q(x)<x^{f_1+\varepsilon}$$

von einem x an: die Größenordnung von $R_Q(x)$ bei wachsendem x ist gewissermaßen „stabil". Wenn dagegen $f_2(Q)<f_1(Q)$, so ist für jedes $\varepsilon>0$ immer wieder $R_Q(x)>x^{f_1-\varepsilon}$ und immer wieder $R_Q(x)<x^{f_2+\varepsilon}$: Die Größenordnung von $R_Q(x)$ „schwankt" bei wachsendem x.

$0 \leqq \nu(\beta) \leqq \infty$; und umgekehrt zu jedem ν mit $0 \leqq \nu \leqq \infty$ gibt es eine reelle Irrationalzahl β mit $\nu(\beta) = \nu$; offenbar ist $\nu\left(\frac{1}{\beta}\right) = \nu(\beta)$.) Und wir werden zeigen:

Satz 5. *Es sei $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$; r_1, r_2 ganz; $r_1 + r_2 = r$; $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$; $Q(u)$ sei durch* (3) *gegeben.*

Behauptung. *Dann und nur dann ist $f_1(Q) = f_2(Q)$, wenn entweder $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ rational oder $\nu\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = 0$ ist.*

Wir werden noch mehr beweisen; wir werden nämlich f_1 bestimmen und für f_2 eine obere Schranke finden:

Satz 6. *Es sei $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$; r_1, r_2 ganz; $r = r_1 + r_2$; $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ irrational, $\nu\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \nu$; $Q(u)$ sei durch* (3) *gegeben. Dann ist*

$$f_1(Q) = \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\nu + 1}$$

$\left(\text{für } \nu = \infty \text{ ist } \frac{1}{\nu+1} = 0 \text{ zu setzen}\right)$.

Satz 7. *Es sei $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$; r_1, r_2 ganz; $r = r_1 + r_2$, $z = \mathrm{Min}(r_1, r_2)$; $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ irrational, $\nu\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \nu$; $Q(u)$ sei durch* (3) *gegeben. Dann ist*

$$\frac{r}{2} - 2 \leqq f_2(Q) \leqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{z-2}{z - \frac{2}{\nu+1}}$$

(für $\nu = \infty$ ist $\frac{2}{\nu+1} = 0$ zu setzen; die Ungleichung $f_2(Q) \geqq \frac{r}{2} - 2$ folgt aus der Behauptung 2 des Satzes 2).

Durch die Sätze 1, 6, 7 wird der Satz 5 bewiesen sein; denn aus Satz 1 folgt $f_1(Q) = f_2(Q) = \frac{r}{2} - 1$, wenn $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ rational ist. Aus Satz 6 und 7 folgt $f_1(Q) = f_2(Q) = \frac{r}{2} - 2$ für $\nu = 0$. Aus Satz 6 und 7 folgt $f_2(Q) \leqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{z-2}{z} < \frac{r}{2} - 1 = f_1(Q)$ für $\nu = \infty$. Für $0 < \nu < \infty$ folgt endlich aus Satz 6 und 7

$$f_2(Q) \leqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{z-2}{z - \frac{2}{\nu+1}} < \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\nu+1} = f_1(Q);$$

es ist nämlich

$$\frac{1}{\nu+1} < \frac{z-2}{z - \frac{2}{\nu+1}},$$

d. h.

$$z - \frac{2}{\nu+1} - (z-2)(\nu+1) < 0$$

für $0 < \nu < \infty$, $z \geqq 4$; denn für $\nu = 0$ ist die linke Seite

$$z - \frac{2}{\nu+1} - (z-2)(\nu+1)$$

gleich Null und für $\nu > 0$ ist ihre Ableitung nach ν gleich

$$\frac{2}{(\nu+1)^2} - (z-2) < 2 - (z-2) \leqq 0.$$

Bei dieser Gelegenheit — weil es keine Mühe mehr macht — beweise ich noch einen Satz, der sich auf $P_Q(x)$ bezieht und dem die Abhandlung Gp III gewidmet war. Es sei $f(Q)$ die untere Grenze derjenigen Zahlen a, für welche $P_Q(x) = O(x^a)$ ist. Dann gilt der

Satz 8. *Es sei* $r_1 \geqq 4, r_2 \geqq 4$; r_1, r_2 *ganz*; $r_1 + r_2 = r$; $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ *irrational*, $\nu\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \nu$; $Q(u)$ *sei durch* (3) *gegeben. Dann ist*

$$f(Q) = \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\nu+1}$$

$\left(\text{für } \nu = \infty \text{ ist } \frac{1}{\nu+1} = 0 \text{ zu setzen}\right)$.

Wir wollen noch einige Worte über die Formen der Gestalt

$$(8) \quad Q(u) = \alpha_1(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + u_{r_1+2}^2 + \dots + u_{r_1+r_2}^2) + \alpha_3(u_{r_1+r_2+1}^2 + u_{r_1+r_2+2}^2 + \dots + u_r^2)$$

sagen. Analog zum Satz 2 gilt hier der

Satz 9. *Es sei* $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$, $r_3 \geqq 4$; r_1, r_2, r_3 *ganz*; $r_1 + r_2 + r_3 = r$; *für* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ *sei* $Q(u)$ *durch* (8) *definiert.*

Behauptung 1. *Für alle* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ *ist*

$$R_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-3}\right).$$

Behauptung 2. *Für alle* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ *ist*

$$R_Q(x) = \underline{\Omega}\left(x^{\frac{r}{2}-3}\right).$$

Behauptung 3. *Für fast alle* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ *ist*

$$R_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-3+\varepsilon}\right)$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Behauptung 4. *Für fast alle* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ *ist*

$$R_Q(x) = \underline{O}\left(x^{\frac{r}{2}-3+\varepsilon}\right)$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Man sieht, daß die Zahl $\frac{r}{2} - 3$ im Satz 9 genau dieselbe Rolle spielt wie die Zahl $\frac{r}{2} - 2$ im Satz 2. Wir wollen nun eine Funktion $g(r_1, r_2, r_3)$ analog zu $g(r_1, r_2)$ definieren. Für ganze $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$, $r_3 \geqq 4$ sei $g(r_1, r_2, r_3)$ die untere Grenze derjenigen Zahlen a, die folgende Eigenschaft haben: Wenn $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ und wenn keine Relation

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 \qquad (k_1, k_2, k_3 \text{ ganz, } k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 > 0)$$

gilt[8]), so ist für die Form (8)

$$R_Q(x) = \underline{O}(x^a).$$

In Analogie mit dem Satz 4a könnte man erwarten, daß

$$\lim_{\substack{r_1=\infty,\, r_2=\infty,\\ r_3=\infty}} \left(g(r_1, r_2, r_3) - \left(\frac{r}{2} - 3\right)\right) = 0.$$

Dies ist aber nicht der Fall, denn es gilt der

Satz 10. *Es sei* $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$, $r_3 \geqq 4$; r_1, r_2, r_3 *ganz*, $r = r_1 + r_2 + r_3$. *Dann ist*

$$g(r_1, r_2, r_3) \geqq \frac{r}{2} - 2.$$

Der Satz 10 zusammen mit dem Satz 4a deutet auf einen tiefen Unterschied zwischen den Formen (3) und den Formen (8) hin. Den wahrscheinlichen Grund dieses Unterschieds wird der Leser bei dem Beweis des Satzes 10 kennen lernen.

Der Beweis der angeführten Sätze beruht hauptsächlich auf den folgenden Hauptsätzen:

Hauptsatz 1. Voraussetzungen und Bezeichnungen. *Es sei* $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$; r_1, r_2 *ganz*; $r = r_1 + r_2$, $z = \text{Min}(r_1, r_2)$; $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ *irrational*;

$$Q(u) = \alpha_1(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + u_{r_1+2}^2 + \ldots + u_r^2).$$

Es seien $q_0, q_1, q_2, \ldots$ *die Näherungsnenner der Zahl* $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$. *Für* $x > 1$ *werde die ganze Zahl* $w = w(x)$ *durch* $q_w \leqq x < q_{w+1}$ *definiert. Es sei* $\varepsilon > 0$.

Behauptung. *Für wachsendes* x *ist*

$$(9) \qquad P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \sum_{0 \leqq v < w} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_v} + \frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{q_w} + x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right).$$

[8]) Diese Bedingung ist ein genaues Analogon der Bedingung „$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ irrational" bei der Definition von $g(r_1, r_2)$; denn statt „Es ist $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ irrational" kann man auch sagen „Es ist $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ und es gilt keine Relation

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \qquad (k_1, k_2 \text{ ganz, } k_1^2 + k_2^2 > 0)\text{"}.$$

Bemerkung 1. Wegen $q_w \leqq x$ darf man in der Klammer rechts in (9) das Glied $x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}$ weglassen.

Bemerkung 2. Mit $c_1, c_2, c_3, \ldots$ bezeichnen wir im folgenden positive Zahlen, die nur von $\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2, \varepsilon$ abhängen.

Bemerkung 3. Wenn $\alpha > 0$ eine irrationale Zahl ist, so besitzt sie eine eindeutig bestimmte regelmäßige Kettenbruchentwicklung

$$\alpha = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \cdots}}} \quad \begin{pmatrix} b_i \text{ ganz für } i \geqq 0, \\ b_0 \geqq 0,\ b_j > 0 \text{ für } j \geqq 1 \end{pmatrix}.$$

Die Näherungszähler x_n und die Näherungsnenner y_n der Zahl α sind folgendermaßen erklärt:

$$x_0 = b_0,\ y_0 = 1;\ x_1 = b_0 b_1 + 1,\ y_1 = b_1;\ x_{n+1} = b_{n+1} x_n + x_{n-1},$$
$$y_{n+1} = b_{n+1} y_n + y_{n-1} \qquad (n \geqq 1).$$

Daraus folgt erstens

$$0 \leqq x_0 < x_1 \leqq x_2 < x_3 < x_4 < \ldots, \quad 1 = y_0 \leqq y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \ldots,$$

zweitens

$$x_{n+2} \geqq 2 x_n, \quad y_{n+2} \geqq 2 y_n \qquad (n \geqq 0).$$

Also ist offenbar für wachsendes x und für $a > 0$

$$\sum_{y_n \leqq x} y_n^a = O(x^a), \quad \sum_{y_n \geqq x} y_n^{-a} = O(x^{-a}), \quad \sum_{y_n \leqq x} 1 = O(\log x)$$

und analog für die x_n. Weiter ist bekanntlich

$$(x_n, y_n) = 1, \quad \frac{1}{2 y_n y_{n+1}} \leqq \frac{1}{y_n (y_{n+1} + y_n)} < \left| \alpha - \frac{x_n}{y_n} \right| < \frac{1}{y_n y_{n+1}} \quad (n \geqq 0)$$

und wenn für zwei ganze Zahlen p, q mit $q > 0$ gilt $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2 q^2}$, so ist notwendig $\frac{p}{q} = \frac{x_n}{y_n}$ für irgendein $n \geqq 0$.

Wenn $\alpha > 1$, so ist $b_0 > 0$ und

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \cdots}}}$$

Also: der n-te Näherungszähler von α ist gleich dem $(n+1)$-ten Näherungsnenner von $\frac{1}{\alpha}$ und der n-te Näherungsnenner von α ist gleich dem $(n+1)$-ten Näherungszähler von $\frac{1}{\alpha}$. Alle diese Eigenschaften werden wir oft brauchen. Die Näherungszähler von $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ werden wir in dieser Abhandlung stets mit p_n, die Näherungsnenner von $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ mit q_n, die Näherungszähler von $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ mit π_n, die Näherungsnenner von $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ mit ϱ_n bezeichnen.

Hauptsatz 2. *Dieselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie im Hauptsatz* 1.

Behauptung.

$$R_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \sum_{0 \leqq v < w} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_v} + \frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{q_w} + x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right).$$

Hauptsatz 3. *Dieselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie im Hauptsatz* 1.

Behauptung. *Für* $x > c_1$ *ist*

$$R_Q(x) > c_2\left(x^{\frac{r}{2}-1} \sum_{0 \leqq v < w} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{r}{2}} \cdot \frac{1}{q_v} + \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{q_w}\right).$$

Wir werden im § 2 die Sätze 1 bis 10 beweisen unter der Voraussetzung, daß die drei Hauptsätze bereits bewiesen sind; im § 3 werden wir den Beweis der beiden ersten Hauptsätze, im § 4 den Beweis des Hauptsatzes 3 durchführen.

§ 2.

Beweis der Sätze 1 bis 10.

In diesem Paragraphen setzen wir voraus, daß die Hauptsätze 1, 2, 3 bereits bewiesen sind. Den Satz 1 brauche ich nicht zu beweisen, da er bereits bekannt ist.

Beweis der Behauptung 1 und 2 des Satzes 2. Für rationales $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ sind sie durch den Satz 1 bewiesen. Für irrationales $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ ist nach dem Hauptsatz 3

$$R_Q(x) > c_2 \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{q_w} \geqq c_2\, x^{\frac{r}{2}-2} \quad \text{für} \quad x > c_1,$$

womit die Behauptung 2 und also um so mehr die Behauptung 1 bewiesen ist.

Beweis des Satzes 3. Die Behauptung 1 brauche ich nicht zu beweisen, da sie bereits bekannt ist. Die Behauptung 2 beweise ich folgendermaßen: Wir setzen $\alpha_1 = 1$ und in dem Kettenbruch

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \cdots}}$$

wählen wir die Zahlen $b_0, b_1, b_2, \ldots$ sukzessive so, daß für hinreichend große v gilt $q_v < \varphi(q_{v+1})$. Dann ist nach dem Hauptsatz 3 ($x = q_w$ gesetzt)

$$R_Q(q_w) > c_2\, q_w^{\frac{r}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_{w-1}} > c_2 \frac{q_w^{\frac{r}{2}-1}}{\varphi(q_w)}$$

für hinreichend große w, w. z. b. w.

Beweis der Sätze 6, 8. Wir bemerken zuerst: Nach den elementarsten Eigenschaften der Kettenbrüche ist $\nu\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$ gleich der unteren Grenze derjenigen Zahlen a, für welche $q_{n+1} = O(q_n^{a+1})$ (bei wachsendem n). Es sei also $\nu\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \nu$; wir beweisen zuerst die Ungleichung

$$(10) \qquad f(Q) \leqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\nu+1}.$$

Für $\nu = \infty$ ist nichts zu beweisen, da nach Gp II $f(Q) \leqq \frac{r}{2} - 1$ ist. Es sei also $0 \leqq \nu < \infty$, $a > \nu$, $\varepsilon > 0$, also $q_{n+1} = o(q_n^{a+1})$. Dann ist nach dem Hauptsatz 1 (man beachte $q_w \leqq x < q_{w+1}$, also $q_w > q_{w+1}^{\frac{1}{1+a}} > x^{\frac{1}{1+a}}$ für $x > c_3$)

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_Q(x) &= O\left(x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \sum_{0 \leqq v < w} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_v} + \frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{q_w}\right) \\
&= O\left(x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \sum_{0 \leqq v < w} \frac{q_{v+1}}{x} \cdot \frac{1}{q_v} + x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{a+1}+\varepsilon}\right) \\
&= O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} \sum_{0 \leqq v < w} q_{v+1}^{1-\frac{1}{a+1}} + x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{a+1}+\varepsilon}\right) \\
&= O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} q_w^{1-\frac{1}{a+1}} + x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{a+1}+\varepsilon}\right) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{a+1}+\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

Dies gilt für jedes $a > \nu$, $\varepsilon > 0$; also ist (10) bewiesen. Aus (10) folgt aber auch $f_1(Q) \leqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\nu+1}$.

Wir beweisen jetzt

$$(11) \qquad f_1(Q) \geqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\nu+1}.$$

Für $\nu = 0$ ist nichts zu beweisen, da nach Satz 2, Behauptung 1, $f_1(Q) \geqq \frac{r}{2} - 2$ gilt. Es sei also $0 < \nu \leqq \infty$, $0 < a < \nu$. Dann gibt es unendlich viele solche w, so daß $q_{w+1} > q_w^{1+a}$. Für jedes solche w setzen wir $x_w = q_w^{1+a}$ (man beachte $q_w \leqq x_w < q_{w+1}$); dann ist nach dem Hauptsatz 3 für hinreichend große solche w

$$R_Q(x_w) > c_2 \frac{x_w^{\frac{r}{2}-1}}{q_w} = c_2\, x_w^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{a+1}};$$

also ist $f_1(Q) \geqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{a+1}$ für jedes a mit $0 < a < \nu$; daraus folgt aber (11) und aus (11) folgt offenbar $f(Q) \geqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\nu+1}$, womit die Sätze 6, 8 bewiesen sind.

Beweis der Behauptungen 3, 4 des Satzes 2. Bekanntlich ist $\nu(\alpha)=0$ für fast alle $\alpha>0$; daher bilden offenbar auch diejenigen Wertepaare $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, für welche $\nu\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)>0$ ist, eine Menge vom (zweidimensionalen) Maß Null. Also ist nach Satz 6 für fast alle $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$ und für jedes $\varepsilon>0$

$$R_Q(x)=O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right),\quad \text{also auch } R_Q(x)=\underline{O}\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right),$$

w. z. b. w.

Wir sollen also noch (da der Satz 5 aus den Sätzen 1, 6, 7 folgt) die Sätze 4, 7, 9, 10 beweisen.

Beweis der Behauptung 1 des Satzes 4. Die Voraussetzungen des Satzes 4 seien erfüllt, es sei $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ irrational, $\varepsilon>0$. Jedem ganzen $t>c_4$ ordnen wir die Zahl $x_t=q_t^{\frac{z}{z-2}}$ zu. Aus dem Hauptsatz 2 folgt bei ganzzahlig wachsendem t

$$R_Q(x_t)=O\left(x_t^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}\left(\sum_{0\leqq v<w}\left(\frac{q_{v+1}}{x_t}\right)^{\frac{z}{2}-1}\cdot\frac{1}{q_v}+\frac{1}{q_w}\right)\right),$$

wo w durch $q_w\leqq x_t<q_{w+1}$ definiert ist; wegen $q_t=x_t^{1-\frac{2}{z}}<x_t$ ist also $w\geqq t$. Also ist

$$\sum_{0\leqq v<w}\left(\frac{q_{v+1}}{x_t}\right)^{\frac{z}{2}-1}\cdot\frac{1}{q_v}+\frac{1}{q_w}\leqq\frac{1}{x_t^{\frac{z}{2}-1}}\sum_{0\leqq v<t}q_{v+1}^{\frac{z}{2}-1}+\sum_{t\leqq v<w}\frac{1}{q_v}+\frac{1}{q_w}$$

$$=O\left(\frac{q_t^{\frac{z}{2}-1}}{x_t^{\frac{z}{2}-1}}+\frac{1}{q_t}\right)=O\left(x_t^{-1+\frac{2}{z}}\right),$$

w. z. b. w.

Beweis der Behauptung 2 des Satzes 4. Wir setzen $\alpha_1=1$ und wählen (ähnlich wie im Beweis der Behauptung 2 des Satzes 3) α_2 so, daß $q_{n+1}>e^{q_n}$ für alle $n\geqq 0$. Dann ist nach dem Hauptsatz 3 für $x>c_5$

$$R_Q(x)>c_2\left(\frac{1}{x}\frac{q_w^{\frac{r}{2}}}{q_{w-1}}+\frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{q_w}\right).$$

Für $q_w\leqq x\leqq q_w^{\frac{r+2}{r}}$ ist also

$$R_Q(x)>c_6\frac{x^{\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{r+2}}}{x\cdot\log x}=c_6\,x^{\frac{r}{2}-1-\frac{r}{r+2}}\cdot\frac{1}{\log x};$$

für $q_w^{\frac{r+2}{r}} < x < q_{w+1}$ ist

$$R_Q(x) > c_2 \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{x^{\frac{r}{r+2}}} > c_2 x^{\frac{r}{2}-1-\frac{r}{r+2}} \cdot \frac{1}{\log x},$$

w. z. b. w.[9])

Beweis des Satzes 7. Für $\nu = \infty$ ist nichts zu beweisen, denn nach Satz 4 gilt $f_2(Q) \leqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{z-2}{z}$. Es sei also $\nu < \infty$, $a > \nu$, $\varepsilon > 0$; dann ist $q_{n+1} = O(q_n^{1+a})$ bei wachsendem n. Jedem ganzen $t > c_7$ ordnen wir die Zahl $x_t = q_t^{\frac{z-\frac{2}{a+1}}{z-2}}$; dann ist nach dem Hauptsatz 2 für ganzzahlig wachsendes t

$$R_Q(x_t) = O\left(x_t^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \left(\sum_{0 \leqq v < w} \left(\frac{q_{v+1}}{x_t} \right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_v} + \frac{1}{q_w} \right) \right).$$

Dabei ist $q_w \leqq x_t < q_{w+1}$, $x_t > q_t$, also $w \geqq t$. Also ist

$$\sum_{0 \leqq v < w} \left(\frac{q_{v+1}}{x_t} \right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_v} + \frac{1}{q_w} = O\left(\frac{1}{x_t^{\frac{z}{2}-1}} \sum_{0 \leqq v < t} \frac{q_{v+1}^{\frac{z}{2}-1}}{q_{v+1}^{\frac{1}{a+1}}} + \sum_{t \leqq v < w} \frac{1}{q_v} + \frac{1}{q_w} \right)$$

$$= O\left(q_t^{\frac{z}{2}-1-\frac{1}{a+1}} \cdot x_t^{-\frac{z}{2}+1} + \frac{1}{q_t} \right) = O\left(x_t^{-\frac{z-2}{z-\frac{2}{a+1}}} \right).$$

Für jedes $a > \nu$ und jedes $\varepsilon > 0$ ist also

$$f_2(Q) \leqq \frac{r}{2} - 1 + \varepsilon - \frac{z-2}{z - \frac{2}{a+1}};$$

also ist

$$f_2(Q) \leqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{z-2}{z - \frac{2}{\nu+1}}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Beweis der Sätze 9, 10. Die Behauptungen 3, 4 des Satzes 9 brauche ich nicht zu beweisen; denn in Gp I, Satz 2 (Spezialfall $\sigma = 3$) habe ich bewiesen, daß für fast alle $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ sogar

$$\mathsf{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-3+\varepsilon} \right)$$

ist; die Behauptung 1 des Satzes 9 folgt aus der Behauptung 2 des Satzes 9,

[9]) Offenbar läßt sich die Behauptung noch verschärfen, wenn man die q_n noch schneller wachsen läßt.

so daß es genügt, die Behauptung 2 des Satzes 9 und den Satz 10 zu beweisen. Es liege also eine Form (8) mit $r_i \geqq 4$, $\alpha_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$, $r = r_1 + r_2 + r_3$ vor. Nach dem Dirichletschen Fächerprinzip lassen sich jedem $x > 0$ drei ganze Zahlen $q = q(x) > 0$, $p = p(x)$, $t = t(x)$ zuordnen, so daß

$$\left| q\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - p \right| < \frac{1}{x}, \quad \left| q\frac{\alpha_3}{\alpha_1} - t \right| < \frac{1}{x}, \quad q \leqq ([x]+1)^2;$$

$q(x)$ wähle ich dabei möglichst klein, $p(x)$ und $t(x)$ nach einer beliebigen Vorschrift. Dann setze ich

$$Q_x(u) = \frac{\alpha_1}{q}\left(q(u_1^2 + \dots + u_{r_1}^2) + p(u_{r_1+1}^2 + \dots + u_{r_1+r_2}^2) + t(u_{r_1+r_2+1}^2 + \dots + u_r^2)\right);$$

offenbar ist

$$(12) \qquad |Q(u) - Q_x(u)| \leqq c_8 \frac{Q(u)}{qx}.$$

In der Folge sei stets $x > c_9$. Wenn $0 < l$, $l + 1 < \frac{qx}{3c_8}$, l ganz, so gilt folgendes: Wenn

$$(13) \qquad \alpha_1 \frac{l + \frac{1}{3}}{q} \leqq Q(u) \leqq \alpha_1 \frac{l + \frac{2}{3}}{q},$$

so ist nach (12)

$$\alpha_1 \frac{l}{q} < Q_x(u) < \alpha_1 \frac{l+1}{q}.$$

Für ganze u_i $(i = 1, 2, \dots, r)$ ist $Q_x(u)$ gleich einem ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\alpha_1}{q}$; im Bereich (13) liegen also keine Gitterpunkte. Also ist $A_Q(y)$ konstant im Intervall

$$(14) \qquad \alpha_1 \frac{l + \frac{1}{3}}{q} \leqq y \leqq \alpha_1 \frac{l + \frac{2}{3}}{q};$$

für diese y ist daher nach (1), (2)

$$\frac{d\,\mathsf{P}_Q(y)}{dy} = -\frac{d\,V_Q(y)}{dy} = -c_{10}\, y^{\frac{r}{2}-1} < -c_{11}\left(\frac{l}{q}\right)^{\frac{r}{2}-1}.$$

Diejenigen y des Intervalls (14), für welche

$$|\mathsf{P}_Q(y)| < \frac{c_{11}\alpha_1}{12q}\left(\frac{l}{q}\right)^{\frac{r}{2}-1}$$

ist, füllen daher höchstens ein Intervall aus, dessen Länge höchstens $\frac{\alpha_1}{6q}$ ist. Also ist

$$\int\limits_{\frac{\alpha_1 l}{q}}^{\frac{\alpha_1(l+1)}{q}} |\mathsf{P}_Q(y)|\, dy > \frac{c_{11}\alpha_1^2}{72q^2}\left(\frac{l}{q}\right)^{\frac{r}{2}-1}$$

Daraus folgt aber für $x > c_{12}$

$$R_Q(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x |\mathsf{P}_Q(y)|\,dy > \frac{1}{x} c_{13} \frac{1}{q^{\frac{r}{2}+1}} \sum l^{\frac{r}{2}-1},$$

wo rechts über die ganzen l mit $0 < l$, $l+1 < \frac{qx}{3c_8}$, $l+1 < \frac{qx}{\alpha_1}$ summiert wird. Das ergibt für $x > c_{14}$

$$R_Q(x) > c_{15} \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{q}. \tag{15}$$

Daraus folgt: Da $q = q(x) = O(x^2)$, so ist

$$R_Q(x) = \underline{\Omega}\left(x^{\frac{r}{2}-3}\right),$$

womit die Behauptung 2 des Satzes 9 bewiesen ist.

Andererseits: Nach einem Satze des Herrn Khintchine[10]) kann man die Zahlen $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ so wählen, daß

1. keine Relation

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 \; (k_1, k_2, k_3 \text{ ganz, } k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 > 0)$$

gilt,

2. für jedes $x > c_{16}$ die Ungleichung

$$q = q(x) < x \log x$$

gilt.

Für die entsprechende Form $Q(u)$ ist also nach (15)

$$R_Q(x) = \underline{\Omega}\left(\frac{x^{\frac{r}{2}-2}}{\log x}\right),$$

womit offenbar der Satz 10 bewiesen ist.

---

[10]) Der betreffende Satz lautet (A. Khintchine, Über eine Klasse linearer diophantischen Approximationen, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **50** (1926), S. 170–195, Satz II): Es sei $\psi(t)$ eine stetige, positive, beständig zunehmende Funktion des positiven Argumentes t, und $\psi(t) \to +\infty$ für $t \to +\infty$. Dann lassen sich zwei linear unabhängige reelle Zahlen θ_1, θ_2 finden von folgender Beschaffenheit: Für jedes genügend große $t > 0$ können ganze Zahlen $q > 0$, p, r derart gewählt werden, daß

$$|q\theta_1 - p| < \frac{1}{t}, \quad |q\theta_2 - r| < \frac{1}{t}, \quad q < t\psi(t)$$

ist. Dabei bedeutet die Aussage „θ_1, θ_2 sind linear unabhängig", daß es keine Relation $a\theta_1 + b\theta_2 + c = 0$ gibt mit ganzen, nicht sämtlich verschwindenden a, b, c. Die Zahlen θ_1, θ_2 können ohne Beschränkung der Allgemeinheit positiv vorausgesetzt werden da sie ohne Veränderung von q um eine ganze Zahl vergrößert werden können.

Der Satz II, welcher die simultanen Approximationen *zweier* Zahlen betrifft, ha kein Analogon in der Theorie der diophantischen Approximationen *einer* Zahl, wi Herr Khintchine daselbst (Satz I) gezeigt hat. Dieser Unterschied spiegelt sich i unserer Abhandlung in dem Gegenteil zwischen dem Satz 4a und dem Satz 10 wiede

§ 3.

Beweis der Hauptsätze 1, 2.

Wir wollen zunächst zeigen, daß der Hauptsatz 1 aus folgendem Hilfssatz folgt:

Hilfssatz 1. *Dieselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie im Hauptsatz* 1. *Dazu sei noch* γ *durch*

$$\varrho_\gamma \leqq x < \varrho_{\gamma+1}$$

definiert[11]).

Behauptung. *Für wachsendes* x *ist*

$$\mathsf{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \sum_{0 \leqq v < w} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_v} + \frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{q_w} + x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right.$$

$$\left. + x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \sum_{0 \leqq \mu < \gamma} \left(\frac{\varrho_{\mu+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{\varrho_\mu} + \frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{\varrho_\gamma}\right).$$

Es seien die Voraussetzungen des Hauptsatzes 1 erfüllt; wir setzen für einen Augenblick voraus, daß der Hilfssatz 1 bereits bewiesen ist. Nach der Bemerkung 3 ist entweder $\varrho_\mu = p_{\mu-1}$ für alle $\mu > 0$ oder $\varrho_\mu = p_{\mu+1}$ für alle $\mu \geqq 0$ (je nachdem $\alpha_1 < \alpha_2$ oder $\alpha_1 > \alpha_2$). Für $x > c_{17}$ ist $\gamma > 0$. Es ist erstens (da $z \geqq 4$)

$$x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \cdot \left(\frac{\varrho_1}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{\varrho_0} = O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right). \tag{16}$$

Zweitens: Für $\mu > 0$ ist $c_{18} < \frac{\pi_\mu}{\varrho_\mu} < c_{19}$; also[12])

$$x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \sum_{\substack{0 < \mu < \gamma \\ \varrho_{\mu+1} < \frac{x}{c_{19}}}} \left(\frac{\varrho_{\mu+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \frac{1}{\varrho_\mu} = O\left(x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \sum_{0 \leqq v < w} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \frac{1}{q_v}\right). \tag{17}$$

Weiter

$$x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \sum_{\substack{0 < \mu < \gamma \\ \varrho_{\mu+1} \geqq \frac{x}{c_{19}}}} \left(\frac{\varrho_{\mu+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \frac{1}{\varrho_\mu} = O\left(x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \sum_{\frac{c_{18}}{c_{19}} x < q_{v+1} < c_{19} x} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \frac{1}{q_v}\right)$$

---

[11]) p_n, q_n, π_n, ϱ_n wurden in der Bemerkung 3 (§ 1) eingeführt; diese Bemerkung werden wir jetzt reichlich ausnutzen.

[12]) Man beachte $c_{18}\,\varrho_\mu < \pi_\mu < c_{19}\,\varrho_\mu$; $\pi_\mu = q_v$, wo entweder stets $v = \mu + 1$ oder $v = \mu - 1$. Aus $\varrho_{\mu+1} < c_{19}^{-1} x$ folgt $q_{v+1} < x$, also $v < w$.

(denn aus $\mu < \gamma$ folgt $q_{v+1} = \pi_{\mu+1} < c_{19}\,\varrho_{\mu+1} \leqq c_{19}\,x$); die Summe rechts hat höchstens c_{20} Glieder (da $q_{n+2} \geqq 2 q_n$). Wenn in einem solchen Summanden $q_{v+1} > x$, so ist $v \geqq w$ und dann ist

$$x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}\left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1}\frac{1}{q_v} \leqq c_{19}^{\frac{z}{2}-1}\, x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}\cdot\frac{1}{q_w}.$$

Wenn aber in einem solchen Summanden $q_{v+1} \leqq x$ ist, so ist $v < w$ und das Glied $x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}\,(q_{v+1}\,x^{-1})^{\frac{z}{2}-1}\,q_v^{-1}$ tritt in der Summe

$$x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}\sum_{0 \leqq v < w}\left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1}\frac{1}{q_v}$$

auf. Also ist

$$(18)\quad x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}\sum_{\substack{0 < \mu < \gamma \\ \varrho_{\mu+1} \geqq \frac{x}{c_{19}}}}\left(\frac{\varrho_{\mu+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1}\frac{1}{\varrho_\mu} = O\left(x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}\sum_{0 \leqq v < w}\left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1}\frac{1}{q_v} + \frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{q_w}\right).$$

Endlich ist

$$\frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{\varrho_\gamma} < c_{21}\,\frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{q_v},$$

wo

$$q_v < c_{19}\,\varrho_\gamma \leqq c_{19}\,x, \qquad q_{v+1} > c_{18}\,\varrho_{\gamma+1} > c_{18}\,x.$$

Wenn $q_{v+1} > x$, so ist $v \geqq w$, also

$$(19)\qquad \frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{\varrho_\gamma} < c_{21}\,\frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{q_w};$$

wenn aber $q_{v+1} \leqq x$, so ist $v < w$, also

$$(20)\qquad \frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{\varrho_\gamma} < c_{21}\,\frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{q_v}\left(\frac{q_{v+1}}{c_{18}\,x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \qquad (\text{wo } v < w).$$

Es gilt also (16), (17), (18) und entweder (19) oder (20). Also ist

$$x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}\sum_{0 \leqq \mu < \gamma}\left(\frac{\varrho_{\mu+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1}\cdot\frac{1}{\varrho_\mu} + \frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{\varrho_\gamma}$$

$$= O\left(x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}\sum_{0 \leqq v < w}\left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1}\cdot\frac{1}{q_v} + \frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{q_w} + x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right);$$

aus dem Hilfssatz 1 folgt also in der Tat der Hauptsatz 1.

Wir zeigen nun weiter, daß der Hilfssatz 1 aus folgendem Hilfssatz folgt:

Hilfssatz 2. *Dieselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie im Hilfssatz* 1.

Behauptung.

$$\int_x^{x\pm\frac{1}{x}} A_Q(y)\,dy = \pm\frac{\pi^{\frac{r}{2}}x^{\frac{r}{2}-1}}{\sqrt{\alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} + O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\sum_{0\leqq v<w}\left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1}\frac{1}{q_v}+\frac{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}}{q_w}\right.$$

$$\left.+x^{\frac{r}{2}-3+\varepsilon}+x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\sum_{0\leqq\mu<\gamma}\left(\frac{\varrho_{\mu+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1}\frac{1}{\varrho_\mu}+\frac{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}}{\varrho_\gamma}\right).$$

(Diese Formel soll gelten: erstens wenn auf beiden Seiten das Vorzeichen $+$, zweitens wenn auf beiden Seiten das Vorzeichen $-$ gewählt wird; und analog im folgenden.)

Zur Abkürzung setzen wir bis zum Ende dieses Paragraphen

$$F(x) = x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\left(\sum_{0\leqq v<w}\left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1}\cdot\frac{1}{q_v}+\frac{1}{q_w}+\sum_{0\leqq\mu<\gamma}\left(\frac{\varrho_{\mu+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1}\frac{1}{\varrho_\mu}+\frac{1}{\varrho_\gamma}+\frac{1}{x}\right).$$

Gesetzt, der Hilfssatz 2 sei wahr; dann ist, da $A_Q(x)$ eine nicht abnehmende Funktion ist,

$$A_Q(x)\leqq x\int_x^{x+\frac{1}{x}} A_Q(y)\,dy = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} + O(x\,F(x)),$$

$$A_Q(x)\geqq x\int_{x-\frac{1}{x}}^{x} A_Q(y)\,dy = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} + O(x\,F(x));$$

das ist aber genau die Behauptung des Hilfssatzes 1. (Man beachte (1), (2) und $D=\alpha_1^{r_1}\cdot\alpha_2^{r_2}$.) Um also den Hauptsatz 1 zu beweisen, genügt es, den

Beweis des Hilfssatzes 2 zu erbringen. Es seien also die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 erfüllt.

Wir setzen $\theta(s)=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}e^{-m^2 s}$ für $\Re(s)>0$; es seien

$$0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots$$

diejenigen Zahlen, die sich in der Form

$$\lambda_n=\alpha_1(u_1^2+u_2^2+\ldots+u_{r_1}^2)+\alpha_2(u_{r_1+1}^2+u_{r_1+2}^2+\ldots+u_r^2)$$

mit ganzen u_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ darstellen lassen; a_n sei die Anzahl derartiger Darstellungen der Zahl λ_n. Dann ist offenbar für $x > 0$, $\Re(s) > 0$

$$\theta^{r_1}(\alpha_1 s)\,\theta^{r_2}(\alpha_2 s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \qquad A_Q(x) = \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n,$$

also

$$\int_0^x A_Q(y)\,dy = \sum_{\lambda_n \leqq x} (x - \lambda_n)\,a_n.$$

Aus der bekannten Formel (bei geradlinigem Integrationsweg)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{Ts}\frac{ds}{s^2} = \operatorname{Max}(T, 0) \qquad (a > 0,\ T \text{ reell})$$

folgt also für $x > 0$, $a > 0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}\cdot e^{xs}\cdot\frac{ds}{s^2} = \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n(x - \lambda_n) = \int_0^x A_Q(y)\,dy,$$

da der Integrand offenbar gliedweise integriert werden darf. Also ist für $x > 1$ [13])

$$(21) \qquad \int_x^{x \pm \frac{1}{x}} A_Q(y)\,dy = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \theta^{r_1}(\alpha_1 s)\,\theta^{r_2}(\alpha_2 s)\,e^{xs}\left(e^{\pm\frac{s}{x}} - 1\right)\frac{ds}{s^2}.$$

Wir setzen dauernd $A = \operatorname{Max}\left(\frac{2\pi}{\alpha_1}, \frac{2\pi}{\alpha_2}\right)$ und schätzen zunächst das Integral

$$I_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{x}-i\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\frac{A}{\sqrt{x}}} \theta^{r_1}(\alpha_1 s)\,\theta^{r_2}(\alpha_2 s)\,e^{xs}\left(e^{\pm\frac{s}{x}} - 1\right)\frac{ds}{s^2}$$

ab; nach einer leichten, aber etwas umständlichen Rechnung [14]) findet man (man beachte $r \geqq 8$)

$$I_1(x) \mp \frac{\pi^{\frac{r}{2}}\,x^{\frac{r}{2}-1}}{\sqrt{\alpha_1^{r_1}\,\alpha_2^{r_2}}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} = O\left(x^{\frac{r}{4}-1}\right) + O\left(x^{\frac{r}{2}-3}\right) = O(F(x)),$$

---

[13]) Bis zum Ende des Beweises sei von nun an $x > c_{22}$.

[14]) Diese Rechnung ist in Gp II, S. 139, Zeile 2 v. u. bis S. 141, Zeile 7 v. u. für die allgemeinere Form $Q(u) = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \ldots + \alpha_r u_r^2$ durchgeführt, wenn man dort speziell $z = \frac{1}{x}$ setzt.

also das gewünschte Hauptglied und ein O-Glied der gewünschten Größenordnung. Wenn wir noch beachten, daß der Integrand rechts in (21) für konjugiert komplexe Werte von s konjugiert komplexe Werte annimmt, sehen wir, daß es für den Beweis des Hilfssatzes 2 genügt, wenn wir die Formel

$$(22)\qquad \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \theta^{r_1}(\alpha_1 s)\,\theta^{r_2}(\alpha_2 s)\,e^{xs}\left(e^{\pm\frac{s}{x}}-1\right)\frac{dt}{s^2} = O(F(x)) \qquad \left(s=\frac{1}{x}+it\right)$$

beweisen. Hier ist erstens

$$|e^{xs}| = e, \qquad \left|\frac{1}{s}\right| < \frac{1}{t}, \qquad \left|e^{\pm\frac{s}{x}}-1\right| < c_{23};$$

zweitens ist nach dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} e^{\pm\frac{s}{x}}-1 &= e^{\pm\frac{1}{x^2}}\left(\cos\frac{t}{x}\pm i\sin\frac{t}{x}\right)-1 \\ &= \left(1\pm\frac{1}{x^2}\,e^{\pm\frac{\delta_1}{x^2}}\right)\left(1-\frac{t}{x}\sin\delta_2\frac{t}{x}\pm i\,\frac{t}{x}\cos\delta_3\frac{t}{x}\right)-1 \\ &\qquad (0<\delta_i<1 \text{ für } i=1,2,3), \end{aligned}$$

also

$$\left|e^{\pm\frac{s}{x}}-1\right| < c_{24}\frac{1}{x^2}+c_{25}\frac{t}{x} < c_{26}\frac{t}{x}.$$

Es genügt also, wenn wir statt (22) die Formel

$$(23)\qquad \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} |\theta^{r_1}(\alpha_1 s)\,\theta^{r_2}(\alpha_2 s)|\,\mathrm{Min}\left(\frac{t}{x},1\right)\frac{dt}{t^2} = O(F(x))$$

beweisen $\left(s \text{ soll bis zum Ende des Beweises } \frac{1}{x}+it \text{ bedeuten}\right)$.

Beweis von (23). Wenn $x>1$, so nenne ich die Zahl $\frac{h}{k}$ eine Fareyzahl oder einen Fareypunkt, wenn $h\geqq 0$, $0<k\leqq\sqrt{x}$, $(h,k)=1$. Wenn ich einen Bruch $\frac{h}{k}$ aufschreibe und ihn eine Fareyzahl oder einen Fareypunkt nenne, verstehe ich darunter immer, daß der Bruch schon in seiner reduzierten Gestalt aufgeschrieben ist, d. h. daß $h\geqq 0$, $0<k\leqq\sqrt{x}$, $(h,k)=1$. Zwei Fareypunkte (und ebenso später zwei Medianten) nenne ich benachbart, wenn zwischen ihnen kein Fareypunkt (bzw. keine Mediante) liegt. Dabei bezeichne ich als Medianten alle Zahlen $\frac{h+h'}{k+k'}$, wo $\frac{h}{k}$, $\frac{h'}{k'}$ zwei benachbarte Fareypunkte sind. Wenn $\frac{h}{k}$ ein Fareypunkt mit $h>0$ ist, so sei $\mathfrak{B}_{h,k}$ dasjenige linksseitig abgeschlossene, rechtsseitig offene Intervall, welches den Punkt $\frac{h}{k}$ enthält und für Endpunkte zwei benachbarte Medianten hat. Wenn $I = \langle a, b)$ und $\delta > 0$, so bedeute δI das Intervall $\langle \delta a, \delta b)$. Die kleinste Mediante ist $\frac{0+1}{1+[\sqrt{x}]} < \frac{1}{\sqrt{x}}$; wenn also bei festem j $(j = 1, 2)$ der Bruch $\frac{h}{k}$ alle Fareyzahlen mit $h > 0$ durchläuft, so überdeckt die Vereinigungsmenge der Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_j} \mathfrak{B}_{h,k}$ sicher das ganze Intervall $\left(\frac{A}{\sqrt{x}}, +\infty\right)$. Bekanntlich ist

$$\mathfrak{B}_{h,k} = \left\langle \frac{h}{k} - \frac{\theta'}{k\sqrt{x}}, \frac{h}{k} + \frac{\theta''}{k\sqrt{x}} \right), \tag{24}$$

wo $\frac{1}{2} \leqq \theta' \leqq 1$, $\frac{1}{2} \leqq \theta'' \leqq 1$.

Zu jedem Punkt t des Intervalls $t > \frac{A}{\sqrt{x}}$, der mit keinem Punkt

$$\frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k} \qquad (h > 0,\ 0 < k \leqq \sqrt{x},\ (h, k) = 1,\ j = 1, 2) \tag{25}$$

zusammenfällt, gibt es also erstens genau zwei Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_1}\mathfrak{B}_{h_1,k_1}$, $\frac{2\pi}{\alpha_2}\mathfrak{B}_{h_2,k_2}$, in deren Durchschnitt der Punkt t liegt und zweitens genau zwei ganze Zahlen n_1, n_2, so daß

$$\left\{\begin{aligned} \frac{2\pi}{\alpha_1 2^{n_1+1} k_1 \sqrt{x}} &< \left| t - \frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{h_1}{k_1} \right| \leqq \frac{2\pi}{\alpha_1 2^{n_1} k_1 \sqrt{x}}, \\ \frac{2\pi}{\alpha_2 2^{n_2+1} k_2 \sqrt{x}} &< \left| t - \frac{2\pi}{\alpha_2}\frac{h_2}{k_2} \right| \leqq \frac{2\pi}{\alpha_2 2^{n_2} k_2 \sqrt{x}}; \end{aligned}\right. \tag{26}$$

nach (24) ist $n_1 \geqq 0$, $n_2 \geqq 0$. Umgekehrt: Wenn sechs ganze Zahlen $h_1, k_1, h_2, k_2, n_1, n_2$ mit

$$\begin{gathered} h_1 > 0, \quad h_2 > 0, \quad 0 < k_1 \leqq \sqrt{x}, \quad 0 < k_2 \leqq \sqrt{x}, \quad (h_1, k_1) = 1, \\ (h_2, k_2) = 1, \quad n_1 \geqq 0, \quad n_2 \geqq 0 \end{gathered} \tag{27}$$

gegeben sind, so bedeute

$$S(h; k; n) = S(h_1, h_2; k_1, k_2; n_1, n_2)$$

die Menge derjenigen t, welche im Durchschnitt der Intervalle

$$\left(\frac{A}{\sqrt{x}}, +\infty\right), \quad \frac{2\pi}{\alpha_1}\mathfrak{B}_{h_1,k_1}, \quad \frac{2\pi}{\alpha_2}\mathfrak{B}_{h_2,k_2}$$

liegen und die Ungleichungen (26) erfüllen. Offenbar überdeckt die Vereinigungsmenge aller Mengen $S(h; k; n)$ [15]) schlicht genau das Intervall

[15]) Von welchen freilich einige leer sein können.

$\left(\frac{A}{\sqrt{x}}, +\infty\right)$ mit Ausnahme der abzählbar vielen Punkte (25). Die zu beweisende Beziehung (23) ist also mit der Beziehung

$$(28)\qquad \sum_{\substack{h_1, k_1\\ h_2, k_2\\ n_1, n_2}} \int_{S(h;k;n)} |\theta^{r_1}(\alpha_1 s)\theta^{r_2}(\alpha_2 s)| \operatorname{Min}\left(\frac{t}{x}, 1\right)\frac{dt}{t^2} = O(F(x))$$

äquivalent; der Summationsbereich ist dabei durch (27) gegeben.

Da sich die Formel (23) nicht ändert, wenn wir in ihr α_1, r_1 mit α_2, r_2 vertauschen, dürfen und wollen wir uns auf der linken Seite von (28) auf diejenigen $S(h; k; n)$ beschränken, für welche gilt

$$(29)\qquad 2^{n_1} k_1 \geqq 2^{n_2} k_2.$$

Es sei nun $l; m_1, m_2; n_1, n_2$ ein System von nichtnegativen ganzen Zahlen; wir wollen sagen, daß die Menge $S(h; k; n) = S(h_1, h_2; k_1, k_2; n_1, n_2)$ zur Klasse $[l; m; n] = [l; m_1, m_2; n_1, n_2]$ gehört, wenn

$$(30)\qquad 2^l \leqq h_1 < 2^{l+1},\quad 2^{m_1} \leqq k_1 < 2^{m_1+1},\quad 2^{m_2} \leqq k_2 < 2^{m_2+1}.$$

Jede Menge $S(h; k; n)$ gehört also genau einer Klasse $[l; m; n]$ an, wobei wir wegen (27), (29) noch die Einschränkung

$$(31)\qquad 2^{m_1} \leqq \sqrt{x},\quad 2^{m_2} \leqq \sqrt{x},\quad 2^{m_2+n_2} \leqq 2^{m_1+n_1}$$

machen dürfen.

Endlich vereinigen wir die Klassen in drei Oberklassen $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$ folgendermaßen: die Klasse $[l; m; n]$ gehöre zur Oberklasse $\{0\}$ bzw. $\{1\}$ bzw. $\{2\}$, je nachdem

$$(32)\qquad 2^{m_2+n_2} \leqq 2^{m_1+n_1} < \sqrt{x}$$

bzw.

$$(33)\qquad 2^{m_2+n_2} < \sqrt{x} \leqq 2^{m_1+n_1}$$

bzw.

$$(34)\qquad \sqrt{x} \leqq 2^{m_2+n_2} \leqq 2^{m_1+n_1}$$

ist.

Es sei nun t ein Punkt der Menge $S(h; k; n)$, die zur Klasse $[l; m; n]$ gehört; dann ist erstens nach (26)

$$\left| t - \frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{h_1}{k_1}\right| \leqq \frac{2\pi}{\alpha_1 k_1 \sqrt{x}},$$

also (da $h_1 > 0$)

$$c_{27}\frac{h_1}{k_1} < t < c_{28}\frac{h_1}{k_1},$$

also

$$(35)\qquad c_{29}\, 2^{l-m_1} < t < c_{30}\, 2^{l-m_1};$$

Zweitens ist $s = \frac{1}{x} + ti$, t in $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h_j, k_j}$, also[16])

$$|\theta(\alpha_j s)| < \frac{c_{31}}{\sqrt{k_j}\sqrt[4]{\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h_j}{k_j}\right)^2}} \quad \text{für } j = 1, 2.$$

Daraus folgt nach (26), (30) für $j = 1, 2$

$$(36) \qquad |\theta(\alpha_j s)| < \frac{c_{32}}{2^{\frac{m_j}{2}}} \operatorname{Min}\left(x^{\frac{1}{2}},\ x^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{m_j}{2} + \frac{n_j}{2}}\right).$$

Nach (26) ist das Maß von $S(h; k; n)$ kleiner als

$$\frac{c_{33}}{2^{m_1+n_1}\sqrt{x}}.$$

Diesen Umstand und die Ungleichungen (35), (36) benutzen wir zur Abschätzung der Integrale in (28). Wir bezeichnen noch mit $N(l; m; n)$ die Anzahl der nichtleeren Mengen $S(h; k; n)$ der Klasse $[l; m; n]$ und bekommen sofort folgendes Resultat: um (28) zu beweisen, genügt es, die Formeln

$$(37) \qquad \sum_{\{0\}} x^{\frac{r}{4} - \frac{1}{2}} \frac{2^{n_1\frac{r_1}{2} + n_2\frac{r_2}{2}}}{2^{n_1+l}} \cdot \operatorname{Min}\left(2^{m_1-l}, \frac{1}{x}\right) \cdot N(l; m; n) = O(F(x)),$$

$$(38) \qquad \sum_{\{1\}} x^{\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} - \frac{1}{2}} \frac{2^{n_2\frac{r_2}{2}}}{2^{n_1+l+m_1\frac{r_1}{2}}} \cdot \operatorname{Min}\left(2^{m_1-}, \frac{1}{x}\right) \cdot N(l; m; n) = O(F(x)),$$

$$(39) \qquad \sum_{\{2\}} x^{\frac{r}{2} - \frac{1}{2}} \frac{1}{2^{n_1+l+m_1\frac{r_1}{2} + m_2\frac{r_2}{2}}} \cdot \operatorname{Min}\left(2^{m_1-l}, \frac{1}{x}\right) \cdot N(l; m; n) = O(F(x))$$

zu beweisen. Dabei bedeutet $\sum\limits_{\{\tau\}}$ für $\tau = 0, 1, 2$, daß über alle Klassen der Oberklasse $\{\tau\}$ summiert werden soll.

Unsere nächste Aufgabe besteht also darin, für $N(l; m; n)$ eine geeignete obere Schranke zu finden. Zu diesem Zweck beweisen wir folgenden Hilfssatz, der im wesentlichen von Herrn Behnke[17]) herrührt:

Hilfssatz 3. *Für reelles β sei $\psi(\beta) = \beta - [\beta]$. Es sei $L > 0$, $M > 0$; $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ seien die im Hauptsatz 1 auftretenden Zahlen.*

---

[16]) Vgl. z. B. Gp I, S. 708, Formel (13).

[17]) Zur Theorie der diophantischen Approximationen, Abhandlungen aus dem math. Seminar der Hamburgischen Universität **3** (1924), S. 261–318; vgl. insbes. die Sätze IV und V; einen verwandten Hilfssatz habe ich auch in Gp III (Hilfssatz 1) angewendet.

Die Anzahl der ganzen Zahlen ζ *mit* $\psi\left(\zeta\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) < L$, $\frac{M}{4} \leqq \zeta < M$ *werde mit* $A(L, M)$ *bezeichnet.*

Behauptung. 1. *Wenn es ein ganzes* $t \geqq 0$ *gibt, so daß*

$$q_t < \frac{1}{8L}, \quad q_t q_{t+1} > \frac{M}{8L}, \quad q_t < M,$$

so ist

$$A(L, M) \leqq \frac{M}{q_t} + 8LM.$$

2. *Sonst ist*

$$A(L, M) \leqq 8LM.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $L < \frac{1}{8}$ (sonst wäre nämlich $A(L, M) < M \leqq 8LM$). Wir setzen zur Abkürzung $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \alpha$ und bezeichnen mit $z_1 < z_2 < z_3 < \ldots < z_\nu$ diejenigen ganzen Zahlen ζ, für welche

$$0 < \zeta < M, \quad \psi(\zeta\alpha) < L$$

gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\nu > 0$ (denn sonst wäre $A(L, M) = 0 \leqq 8LM$). Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall. Es gibt ein ganzes j mit $1 \leqq j < \nu$ so, daß $\psi(z_j\alpha) > \psi(z_{j+1}\alpha)$. Wir setzen $z_j = f$, $z_{j+1} = g$, so daß also

$$0 < f < g < M, \quad \psi(g\alpha) < \psi(f\alpha) < L.$$

Dann ist $0 < g - f < M$, $\psi((g-f)\alpha) > 1 - L$. Wir konstruieren eine Folge von ganzen positiven Zahlen $v_1, v_2, v_3, \ldots$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $0 < v_{i+1} - v_i < M$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $0 < v_1 < M$.

2. Für jedes i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ gilt eine von den Ungleichungen $\psi(v_i\alpha) < L$, $\psi(v_i\alpha) > 1 - L$.

Das geschieht folgendermaßen: wir setzen $v_1 = z_1$; wenn ein v_i $(i \geqq 1)$ bereits konstruiert ist, so konstruieren wir v_{i+1} folgendermaßen: Wenn $\psi(v_i\alpha) < L$, so sei $v_{i+1} = v_i + (g - f)$; wenn aber $\psi(v_i\alpha) > 1 - L$, so sei $v_{i+1} = v_i + z_1$. Diese Folge hat offenbar die verlangten Eigenschaften.

Aus $v_1, v_2, v_3, \ldots$ greifen wir nun eine Teilfolge $w_1, w_2, w_3, \ldots$ heraus, so daß $2nM < w_n < (2n+1)M$ für $n = 1, 2, \ldots$ (das geht wegen $0 < v_{i+1} - v_i < M$, $0 < v_1 < M$). Endlich konstruieren wir die Folge

$$(40) \quad \begin{cases} w_1 + z_1,\ w_1 + z_2, \ldots, w_1 + z_\nu, \quad w_2 + z_1,\ w_2 + z_2, \ldots, w_2 + z_\nu, \\ \qquad w_3 + z_1,\ w_3 + z_2, \ldots, w_3 + z_\nu,\ w_4 + z_1, \ldots; \end{cases}$$

für jedes Glied dieser Folge ist offenbar entweder $\psi((w_n + z_i)\alpha) < 2L$ oder $\psi((w_n + z_i)\alpha) > 1 - L$. Weiter ist offenbar (40) eine wachsende Folge.

Für $X > 0$ sei $B(X)$ die Anzahl derjenigen Glieder der Folge (40), die kleiner als X sind; offenbar ist

$$B(X) = \frac{\nu}{2M} X + o(X) \tag{41}$$

(für wachsendes X). Weiter sei $C(X)$ (für $X > 0$) die Anzahl derjenigen ganzen positiven Zahlen $\zeta < X$, welche mindestens eine (also genau eine) von den Ungleichungen $\psi(\zeta\alpha) < 2L$, $\psi(\zeta\alpha) > 1 - L$ erfüllen. Offenbar ist

$$B(X) \leqq C(X) \tag{42}$$

und da α irrational ist, so ist nach einem Satz vom Herrn Weyl[18])

$$C(X) = 3LX + o(X). \tag{43}$$

Aus (41), (42), (43) folgt aber

$$A(L, M) \leqq \nu \leqq 6LM \leqq 8LM.$$

2. Fall. Der erste Fall tritt nicht ein; also ist entweder $\nu = 1$ oder

$$\psi(z_1\alpha) < \psi(z_2\alpha) < \ldots < \psi(z_\nu\alpha). \tag{44}$$

Ich behaupte: Alle z_i $(1 \leqq i \leqq \nu)$ sind ganzzahlige Vielfache von z_1 (für $\nu = 1$ besagt diese Behauptung nichts). Denn es sei schon bewiesen, daß $z_\varrho = g_\varrho z_1$ (g_ϱ ganz) für $\varrho = 1, 2, \ldots, \sigma$, wo σ eine ganze Zahl ist, $1 \leqq \sigma < \nu$. Dann ist nach (44)

$$\psi((z_{\sigma+1} - z_\sigma)\alpha) = \psi(z_{\sigma+1}\alpha) - \psi(z_\sigma\alpha) < \psi(z_{\sigma+1}\alpha) < L,$$

$0 < z_{\sigma+1} - z_\sigma < M$, also $z_{\sigma+1} - z_\sigma = z_\tau$ für ein τ mit $1 \leqq \tau \leqq \sigma$, also $z_{\sigma+1} = z_\sigma + z_\tau = (g_\sigma + g_\tau) z_1$, w. z. b. w.

Weiter behaupten wir:

$$\psi(z_\nu\alpha) = \frac{z_\nu}{z_1}\psi(z_1\alpha).$$

Denn sonst wäre $\frac{z_\nu}{z_1}\psi(z_1\alpha) > 1$, also würde es unter den Zahlen

$$\psi(z_1\alpha), \quad 2\psi(z_1\alpha), \quad 3\psi(z_1\alpha), \ldots, \frac{z_\nu}{z_1}\psi(z_1\alpha)$$

eine *erste*, sagen wir $\eta\psi(z_1\alpha)$, geben, die größer als 1 wäre. Es wäre also $\eta > 1$, $\eta z_1 \leqq z_\nu$, $1 < \eta\psi(z_1\alpha) < 1 + \psi(z_1\alpha)$, also $\psi(\eta z_1\alpha) < \psi(z_1\alpha)$, was wegen $0 < \eta z_1 \leqq z_\nu < M$ mit (44) im Widerspruch steht. Für $1 \leqq i \leqq \nu$ ist also $i\psi(z_1\alpha) \leqq \nu\psi(z_1\alpha) \leqq \frac{z_\nu}{z_1}\psi(z_1\alpha) = \psi(z_\nu\alpha) < L$, also $\psi(iz_1\alpha) = i\psi(z_1\alpha) < L$, also $z_i = iz_1$. Also ist $\nu\psi(z_1\alpha) = \psi(z_\nu\alpha) < L$, $\nu < \frac{L}{\psi(z_1\alpha)}$. Wenn $\psi(z_1\alpha) \geqq \frac{1}{8M}$, so ist also $A(L, M) \leqq \nu < 8LM$; wenn

---

[18]) Vgl. z. B. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins, Math. Annalen 77 (1916), S. 313—352.

aber $\psi(z_1\alpha) < \frac{1}{8M}$, so ist bei passendem ganzen u_1

$$0 < z_1\alpha - u_1 < L, \quad 0 < z_1\alpha - u_1 < \frac{1}{8M},$$

also

$$\left|\alpha - \frac{u_1}{z_1}\right| < \frac{1}{8Mz_1} < \frac{1}{8z_1^2},$$

also $u_1 = lp_t$, $z_1 = lq_t$ (l ganz positiv) für irgend ein ganzes $t \geqq 0$. Weiter ist

$$0 < q_t\alpha - p_t = \frac{1}{l}\,(z_1\alpha - u_1) \leqq z_1\alpha - u_1 < L,$$

also $\psi(q_t\alpha) < L$, also $q_t = z_1$ (wegen $q_t \leqq z_1$); also ist $q_t < M$. Da die z_i Vielfache von q_t sind, $z_i < M$, so ist sicher $A(L, M) \leqq \nu \leqq \frac{M}{q_t}$. Wenn $q_t \geqq \frac{1}{8L}$, so ist also wieder $A(L, M) \leqq 8LM$. Wenn endlich $q_t q_{t+1} \leqq \frac{M}{8L}$, so ist

$$L > \psi(z_\nu\alpha) = \nu\psi(q_t\alpha) > \nu q_t \cdot \frac{1}{2q_t q_{t+1}}$$

oder

$$L > \psi(z_\nu\alpha) > \frac{z_\nu}{2q_t q_{t+1}},$$

also

$$z_\nu < 2q_t q_{t+1} L \leqq \frac{M}{4},$$

also $A(L, M) = 0 \leqq 8LM$.

Wir haben also in der Tat in allen Fällen die Ungleichung $A \leqq 8LM$, ausgenommen, wenn für irgend ein ganzes $t \geqq 0$

$$q_t < M, \quad q_t < \frac{1}{8L}, \quad q_t q_{t+1} > \frac{M}{8L}$$

ist; in diesem Ausnahmefall ist entweder $A(L, M) \leqq 8LM$ oder $A(L, M) \leqq \frac{M}{q_t}$, je nachdem der Fall 1 oder der Fall 2 eintritt. Damit ist aber der Hilfssatz 3 bewiesen.

Hilfssatz 4. *Es sei* $L > 0$, $M > 0$; $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ *seien die im Hauptsatz* 1 *auftretenden Zahlen. Die Anzahl der ganzen Zahlen* ζ *mit* $\psi\left(\zeta\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) > 1 - L$, $\frac{M}{4} \leqq \zeta < M$ *werde mit* $A'(L, M)$ *bezeichnet.*

Behauptung. 1. *Wenn es ein ganzes* $t \geqq 0$ *gibt, so daß*

$$q_t < \frac{1}{8L}, \quad q_t q_{t+1} > \frac{M}{8L}, \quad q_t < M,$$

so ist

$$A'(L, M) \leqq \frac{M}{q_t} + 8LM.$$

2. *Sonst ist*

$$A'(L, M) \leqq 8LM.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $L < \frac{1}{8}$ (da sonst $A'(L, M) < M \leqq 8LM$) und $M > 1$ (da sonst $A'(L, M) = 0 \leqq 8LM$). Es sei

$$\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots}}} \qquad \left(\begin{array}{c} b_i \text{ ganz } (i \geqq 0); \\ b_0 \geqq 0,\ b_j > 0\ (j \geqq 1) \end{array}\right);$$

dann ist

$$b_0 + 1 - \alpha = \frac{1}{1 + \frac{1}{b_1 - 1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots}}}} \qquad \text{bzw. } b_0 + 1 - \alpha = \frac{1}{b_2 + 1 + \frac{1}{b_3 + \frac{1}{b_4 + \dots}}}$$

je nachdem $b_1 > 1$ oder $b_1 = 1$ ist[19]). Die Folge der Näherungsnenner $q_0', q_1', q_2', \dots$ von $b_0 + 1 - \alpha$ ist also, wie der Leser sofort nachrechnet, für $b_1 > 1$ mit der Folge

$$q_0, q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, \dots$$

und für $b_1 = 1$ mit der Folge

$$q_1, q_2, q_3, q_4, \dots$$

identisch. Jedes (geordnete) Paar q_v', q_{v+1}' ist also mit einem Paar q_t, q_{t+1} identisch, mit Ausnahme des Paares q_0', q_1' im Falle $b_1 > 1$ (wo $q_0' = 1$, $q_1' = q_0 = 1$). Da $\psi(\zeta(b_0 + 1 - \alpha)) = 1 - \psi(\zeta\alpha)$, so gilt nach dem Hilfssatz 3: Es ist $A'(L, M) \leqq 8LM$, außer wenn es ein Paar q_v', q_{v+1}' gibt, so daß

$$(44) \qquad q_v' < \frac{1}{8L}, \quad q_v' q_{v+1}' > \frac{M}{8L}, \quad q_v' < M;$$

in diesem Fall ist $A'(L, M) \leqq \frac{M}{q_v'} + 8LM$. Wenn aber (44) gilt, so ist $q_v' q_{v+1}' > 1$, also ist nicht $q_v' = q_{v+1}' = 1$, also ist das Paar q_v', q_{v+1}' mit einem Paar q_t, q_{t+1} identisch, womit der Hilfssatz 4 bewiesen ist.

Wir wollen nun für $N(l; m; n)$ (wo die nichtnegativen ganzen Zahlen l, m_1, m_2, n_1, n_2 die Beziehungen (31) erfüllen) folgende Abschätzung beweisen[20]):

Behauptung I. *Wenn es ein ganzes $v \geqq 0$ gibt, so daß*

$$(45) \quad q_v < c_{34}\, 2^{n_2 - m_1} \sqrt{x}, \quad q_v q_{v+1} > c_{35}\, 2^{l + m_2 + n_2 - m_1} \sqrt{x}, \quad q_v < c_{36}\, 2^{l + m_2},$$

so ist

$$N(l; m; n) < c_{37} \frac{2^{(l+m_2)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}}{q_v} + c_{37}\, 2^{m_1 + (m_2 + l)\left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) - n_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

---

[19]) O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen (Leipzig und Berlin 1913), S. 65, Beispiel.

[20]) Alles freilich für $x > c_{32}$.

Behauptung II. *Sonst ist*

$$N(l; m; n) < c_{37}\, 2^{m_1+(m_2+l)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)-n_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Beweis. Wenn eine Menge $S(h; k; n)$ der Klasse $[l; m; n]$ nicht leer sein soll, so muß es mindestens ein reelles t geben, welches (26) erfüllt; also muß (wegen (30) und $2^{m_2+n_2} \leqq 2^{m_1+n_1}$)

$$\left| \frac{h_1}{k_1} \frac{2\pi}{\alpha_1} - \frac{h_2}{k_2} \frac{2\pi}{\alpha_2} \right| < \frac{c_{99}}{2^{n_2} k_2 \sqrt{x}}$$

sein; also muß sein

(46) $$\left| h_1 k_2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - h_2 k_1 \right| < \frac{c_{38}\, 2^{m_1+1}}{2^{n_2}\sqrt{x}}, \quad 2^{l+m_2} \leqq h_1 k_2 < 2^{l+m_2+2}.$$

Nach den Hilfssätzen 3, 4 (mit

$$L = \frac{c_{38}\, 2^{m_1+1}}{2^{n_2}\sqrt{x}}, \quad M = 2^{l+m_2+2})$$

haben wir also folgendes Resultat:

1. Wenn es ein ganzes $v \geqq 0$ mit (45) gibt, so haben wir für $h_1 k_2$ höchstens

$$c_{39} \frac{2^{l+m_2}}{q_v} + c_{39}\, 2^{l+m_2+m_1-n_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Möglichkeiten.

2. Sonst haben wir für $h_1 k_2$ höchstens

$$c_{39}\, 2^{l+m_2+m_1-n_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Möglichkeiten.

Jedem Wert von $h_1 k_2$ entsprechen aber nach (46) höchstens c_{40} Werte von $h_2 k_1$ (da $2^{m_1} \leqq \sqrt{x}$) und es ist $h_2 k_1 < c_{41}\, 2^{l+m_2}$. Wenn endlich $h_1 k_2$, $h_2 k_1$ gegeben sind, so haben wir für h_1, k_2, h_2, k_1 höchstens $c_{42}\, 2^{\frac{\varepsilon}{4}(l+m_2)}$ Möglichkeiten, da bekanntlich die Anzahl der Teiler der ganzen Zahl X gleich $O(X^\eta)$ ist für jedes $\eta > 0$. Damit sind offenbar die Behauptungen I, II bewiesen.

Ich bemerke noch, daß aus (45) folgt

(47) $$q_{v+1} > c_{43}\, 2^{n_2-m_1} \sqrt{x}.$$

Wir werden nun die Formeln (37), (38), (39) und damit auch den Hilfssatz 2 beweisen.

Beweis von (37)[21]. Die Summe links in (37) ist höchstens gleich $c_{44}(\Sigma_1+\Sigma_2)$, wo

$$\Sigma_1 = x^{\frac{r}{4}-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{l,\, m_1,\, m_2\\ n_1,\, n_2}} 2^{n_1\frac{r_1}{2}+n_2\frac{r_2}{2}-n_1-l}\cdot \operatorname{Min}\left(2^{m_1-l}, \frac{1}{x}\right)\cdot 2^{m_1+(m_2+l)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)-n_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$\Sigma_2 = x^{\frac{r}{4}-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{v,\, l,\, m_1,\, m_2\\ n_1,\, n_2}} 2^{n_1\frac{r_1}{2}+n_2\frac{r_2}{2}-n_1-l}\cdot \operatorname{Min}\left(2^{m_1-l}, \frac{1}{x}\right)\cdot\frac{2^{(l+m_2)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}}{q_v}.$$

In Σ_1 ist der Summationsbereich durch (31), (32) gegeben, in Σ_2 summiert man über alle ganzen $v \geqq 0$ und für jedes v ist der Summationsbereich von l, m_1, m_2, n_1, n_2 durch (31), (32), (47) gegeben. Das ergibt erstens

$$\Sigma_1 = x^{\frac{r}{4}-1} \sum_{\substack{m_1,\, m_2,\\ n_1,\, n_2}} 2^{n_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)+m_1+m_2\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}\cdot\left(\frac{1}{x}\sum_{2^l<2^{m_1}x} 2^{l\frac{\varepsilon}{4}} + 2^{m_1}\sum_{2^l\geqq 2^{m_1}x} 2^{-l\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)}\right)$$

$$= O\left(x^{\frac{r}{4}-2+\frac{\varepsilon}{4}} \sum_{\substack{m_1,\, m_2,\\ n_1,\, n_2}} 2^{n_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)+m_1\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)+m_2\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}\right)$$

$$= O\left(x^{\frac{r}{2}-3+\frac{\varepsilon}{2}} \sum_{m_1,\, m_2} 2^{-m_1\left(\frac{r_1}{2}-2\right)-m_2\left(\frac{r_2}{2}-2\right)}\right) = O\left(x^{\frac{r}{2}-3+\varepsilon}\right) = O(F(x))$$

(man beachte, daß $\frac{r_j}{2}-2 \geqq 0$ und daß die letzte Summe höchstens $O(\log^2 x)$ Glieder hat; solche Bemerkungen werden wir oft gebrauchen).

Zweitens: Jedes feste v liefert folgenden Beitrag zu Σ_2:

$$\frac{x^{\frac{r}{4}-\frac{1}{2}}}{q_v}\sum_{\substack{m_1,\, m_2,\\ n_1,\, n_2}} 2^{n_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+n_2\frac{r_2}{2}+m_2\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}\cdot\left(\frac{1}{x}\sum_{2^l<2^{m_1}x} 2^{l\frac{\varepsilon}{4}} + 2^{m_1}\sum_{2^l\geqq 2^{m_1}x} 2^{-l\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)}\right)$$

$$< c_{45}\frac{x^{\frac{r}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{4}}}{q_v}\sum_{\substack{m_1,\, m_2,\\ n_1,\, n_2}} 2^{n_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+n_2\frac{r_2}{2}+m_1\frac{\varepsilon}{4}+m_2\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}$$

$$< c_{46}\frac{x^{\frac{r}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v}\sum_{m_1,\, m_2,\, n_1,\, n_2} 2^{n_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+n_2\frac{r_2}{2}+m_2} = Z_{1,v}.$$

[21]) Die Summationsbuchstaben v, l, m_1, m_2, n_1, n_2 bedeuten ganze nichtnegative Zahlen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varepsilon < 1$.

Für $v \geqq w$, d. h. für $q_{v+1} > x$ ist

$$Z_{1,v} < c_{47} \frac{x^{\frac{r}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \cdot \sqrt{x} \cdot \log x \cdot \sum_{n_1, n_2} 2^{n_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)} < c_{48} \frac{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}}{q_v}.$$

Für $v < w$ bekommen wir, wenn $r_1 \geqq r_2$ (man beachte (47))

$$Z_{1,v} < c_{49} \frac{x^{\frac{r}{4}-1+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \sum_{n_1, n_2, m_1} 2^{n_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)} < c_{50} \frac{x^{\frac{r}{4}+\frac{r_1}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \sum_{n_2, m_1} \frac{2^{n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)}}{2^{m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)}}$$

$$< c_{51} \frac{x^{\frac{r}{4}+\frac{r_1}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{r_2}{2}-1} \sum_{m_1} 2^{m_1\left(\frac{r_2}{2}-\frac{r_1}{2}\right)} < c_{52} \frac{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \quad (\text{da } z = r_2).$$

Für $v < w$, $r_1 < r_2$ bekommen wir endlich

$$Z_{1,v} < c_{53} \frac{x^{\frac{r}{4}+\frac{r_1}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \sum_{n_2, m_1} \frac{2^{n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)}}{2^{m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)}} < c_{54} \frac{x^{\frac{r}{4}+\frac{r_1}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{r_1}{2}-1} \sum_{n_2} 2^{n_2\left(\frac{r_2}{2}-\frac{r_1}{2}\right)}$$

$$< c_{55} \frac{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \quad (\text{da } z = r_1).$$

Also ist

$$\Sigma_2 \leqq \sum_{v=0}^{\infty} Z_{1,v} = O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} \sum_{0 \leqq v < w} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_v} + x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} \sum_{v \geqq w} \frac{1}{q_v}\right) = O(F(x))$$

$\left(\text{denn} \sum_{v \geqq w} \frac{1}{q_v} = O\left(\frac{1}{q_w}\right)\right)$. Damit ist aber (37) bewiesen.

Beweis von (38)[21]. Die Summe links in (38) ist kleiner als $c_{56}(\Sigma_3 + \Sigma_4)$, wo

$$\Sigma_3 = x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{l, m_1, m_2 \\ n_1, n_2}} \frac{2^{n_2 \frac{r_2}{2}}}{2^{n_1+m_1\frac{r_1}{2}+l}} \cdot \mathrm{Min}\left(2^{m_1-l}, \frac{1}{x}\right) \cdot 2^{m_1+(m_2+l)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)-n_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$\Sigma_4 = x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{v, l, m_1, m_2 \\ n_1, n_2}} \frac{2^{n_2 \frac{r_2}{2}}}{2^{n_1+m_1\frac{r_1}{2}+l}} \cdot \mathrm{Min}\left(2^{m_1-l}, \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{2^{(l+m_2)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}}{q_v}.$$

Dabei ist der Summationsbereich in Σ_3 durch (31), (33) gegeben; in Σ_4 summiert man über alle $v \geqq 0$ und bei festem v über alle l, m_1, m_2, n_1, n_2

mit (31), (33), (47). Es ist also erstens

$$\Sigma_3 = x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-1} \sum_{\substack{m_1, m_2,\\ n_1, n_2}} \frac{2^{n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)+m_2\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}}{2^{n_1+m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)}} \left(\frac{1}{x} \sum_{2^l < 2^{m_1}x} 2^{l\frac{\varepsilon}{4}} + 2^{m_1} \sum_{2^l \geqq 2^{m_1}x} 2^{-l\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)}\right)$$

$$= O\left(x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-2+\frac{\varepsilon}{4}} \sum_{\substack{m_1, m_2\\ n_1, n_2}} \frac{2^{n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)+m_2}}{2^{n_1+m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)}} \cdot 2^{\frac{\varepsilon}{4}(m_1+m_2)}\right)$$

$$= O\left(x^{\frac{r}{2}-3+\frac{\varepsilon}{4}} \sum_{m_1, m_2} \frac{1}{2^{m_1\left(\frac{r_1}{2}-2-\frac{\varepsilon}{4}\right)+m_2\left(\frac{r_2}{2}-2-\frac{\varepsilon}{4}\right)}}\right) = O\left(x^{\frac{r}{2}-3+\varepsilon}\right) = O(F(x)).$$

Zweitens: Jedes feste v liefert folgenden Beitrag zu Σ_4:

$$\frac{x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-\frac{1}{2}}}{q_v} \sum_{\substack{m_1, m_2,\\ n_1, n_2}} \frac{2^{n_2\frac{r_2}{2}+m_2\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}}{2^{n_1+m_1\frac{r_1}{2}}} \left(\frac{1}{x} \sum_{2^l < 2^{m_1}x} 2^{l\frac{\varepsilon}{4}} + 2^{m_1} \sum_{2^l \geqq 2^{m_1}x} 2^{-l\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)}\right)$$

$$< c_{57} \frac{x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{4}}}{q_v} \sum_{\substack{m_1, m_2,\\ n_1, n_2}} \frac{2^{n_2\frac{r_2}{2}+m_2}}{2^{n_1+m_1\frac{r_1}{2}}} 2^{\frac{\varepsilon}{4}(m_1+m_2)} < c_{58} \frac{x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \sum_{n_2, m_1} \frac{2^{n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)}}{2^{m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)}} = Z_{2,v}.$$

Für $v \geqq w$ ist also

$$Z_{2,v} < c_{59} \frac{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}}{q_v}.$$

Für $v < w$, $r_1 \geqq r_2$ ist

$$Z_{2,v} < c_{60} \frac{x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{r_2}{2}-1} \sum_{m_1} 2^{m_1\left(\frac{r_2}{2}-\frac{r_1}{2}\right)} < c_{61} \frac{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \quad (\text{da } z = r_2).$$

Für $v < w$, $r_1 < r_2$ ist

$$Z_{2,v} < c_{62} \frac{x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{r_1}{2}-1} \sum_{n_2} 2^{n_2\left(\frac{r_2}{2}-\frac{r_1}{2}\right)} < c_{63} \frac{x^{\frac{r_1}{4}+\frac{r_2}{2}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{r_1}{2}-1}$$

$$< c_{63} \frac{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \quad (\text{da } z = r_1).$$

Also

$$\Sigma_4 \leqq \sum_{v=0}^{\infty} Z_{2,v} = O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} \sum_{0 \leqq v < w} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_v} + x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} \sum_{v \geqq w} \frac{1}{q_v}\right) = O(F(x)).$$

Damit ist (38) bewiesen.

Beweis von (39)[21]. Die Summe links in (39) ist kleiner als $c_{64}(\Sigma_5+\Sigma_6)$, wo

$$\Sigma_5 = x^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{l, m_1, m_2,\\ n_1, n_2}} \frac{1}{2^{n_1+l+m_1\frac{r_1}{2}+m_2\frac{r_2}{2}}} \cdot \operatorname{Min}\left(2^{m_1-l}, \frac{1}{x}\right) \cdot 2^{m_1+(m_2+l)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)-n_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$\Sigma_6 = x^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{v, l, m_1, m_2,\\ n_1, n_2}} \frac{1}{2^{n_1+l+m_1\frac{r_1}{2}+m_2\frac{r_2}{2}}} \cdot \operatorname{Min}\left(2^{m_1-l}, \frac{1}{x}\right) \frac{2^{(l+m_2)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}}{q_v}.$$

Dabei ist der Summationsbereich in Σ_5 durch (31), (34) gegeben; in Σ_6 summiert man über alle $v \geqq 0$ und bei festem v über alle l, m_1, m_2, n_1, n_2 mit (31), (34), (47). Es ist also erstens

$$\Sigma_5 = x^{\frac{r}{2}-1} \sum_{\substack{m_1, m_2,\\ n_1, n_2}} \frac{2^{m_2\frac{\varepsilon}{4}}}{2^{n_1+n_2+m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+m_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)}} \left(\frac{1}{x} \sum_{2^l < 2^{m_1} x} 2^{l\frac{\varepsilon}{4}} + 2^{m_1} \sum_{2^l \geqq 2^{m_1} x} 2^{-l\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)}\right)$$

$$= O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\frac{\varepsilon}{2}} \sum_{\substack{m_1, m_2,\\ n_1, n_2}} \frac{1}{2^{n_1+n_2+m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+m_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)}}\right) = O\left(x^{\frac{r}{2}-3+\frac{\varepsilon}{2}} \sum_{m_1, m_2} \frac{1}{2^{m_1\left(\frac{r_1}{2}-2\right)+m_2\left(\frac{r_2}{2}-2\right)}}\right)$$

$$= O\left(x^{\frac{r}{2}-3+\varepsilon}\right) = O(F(x)).$$

Zweitens: Jedes feste v liefert folgenden Beitrag zu Σ_6:

$$\frac{x^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}}}{q_v} \sum_{\substack{m_1, m_2,\\ n_1, n_2}} \frac{2^{m_2\frac{\varepsilon}{4}}}{2^{n_1+m_1\frac{r_1}{2}+m_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)}} \left(\frac{1}{x} \sum_{2^l < 2^{m_1} x} 2^{l\frac{\varepsilon}{4}} + 2^{m_1} \sum_{2^l \geqq 2^{m_1} x} 2^{-l\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)}\right)$$

$$< c_{65} \frac{x^{\frac{r}{2}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \sum_{\substack{m_1, m_2,\\ n_1, n_2}} \frac{1}{2^{n_1+m_1\frac{r_1}{2}+m_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)}}$$

$$< c_{66} \frac{x^{\frac{r}{2}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \sum_{m_1, m_2, n_2} \frac{1}{2^{n_2+m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+m_2\frac{r_2}{2}}} = Z_{3,v}.$$

Für $v \geqq w$ ist

$$Z_{3,v} < c_{67} \frac{x^{\frac{r}{2}-2+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \sum_{m_1, m_2} \frac{1}{2^{m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+m_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)}} < c_{68} \frac{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}}{q_v}.$$

Für $v < w$, $r_1 \geqq r_2$ ist

$$Z_{3,v} < c_{69} \frac{x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \sum_{m_1, n_2} \frac{2^{n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)}}{2^{m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)}}$$

$$< c_{70} \frac{x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{r_2}{2}-1} \sum_{m_1} 2^{m_1\left(\frac{r_2}{2}-\frac{r_1}{2}\right)}$$

$$< c_{71} \frac{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \quad (\text{da } z = r_2).$$

Für $v < w$, $r_1 < r_2$ ist

$$Z_{3,v} < c_{72} \frac{x^{\frac{r}{2}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{r_1}{2}-1} \sum_{m_2, n_2} \frac{1}{2^{n_2\frac{r_1}{2}+m_2\frac{r_2}{2}}}$$

$$< c_{73} \frac{x^{\frac{r_1}{4}+\frac{r_2}{2}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{r_1}{2}-1} \sum_{m_2} 2^{m_2\left(\frac{r_1}{2}-\frac{r_2}{2}\right)}$$

$$< c_{74} \frac{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \quad (\text{da } z = r_1).$$

Also ist

$$\Sigma_6 \leqq \sum_{v=0}^{\infty} Z_{3,v} = O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} \sum_{0 \leqq v < w} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_v} + x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} \sum_{v \geqq w} \frac{1}{q_v}\right) = O(F(x)).$$

Damit ist aber auch (39) bewiesen.

Beweis des Hauptsatzes 2. Die Voraussetzungen des Hauptsatzes 2 seien erfüllt. Es sei $x > q_1$. Dann ist

$$\int_0^{q_1} |P_Q(y)|\, dy = c_{75}.$$

Nach (9) ist für $1 \leqq v \leqq w$, $q_v \leqq y < q_{v+1}$ (w ist durch $q_w \leqq x < q_{w+1}$ definiert)

$$|P_Q(y)| < c_{76}\left(y^{\frac{r}{2}-\frac{z}{2}+\varepsilon} \sum_{0 \leqq t < v} \frac{q_{t+1}^{\frac{z}{2}-1}}{q_t} + \frac{y^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{q_v}\right),$$

als erstens für $1 \leqq v < w$

$$\int_{q_v}^{q_{v+1}} |P_Q(y)|\, dy < c_{77}\left(q_{v+1}^{\frac{r}{2}-\frac{z}{2}+1+\varepsilon} \sum_{0 \leqq t < w} \frac{q_{t+1}^{\frac{z}{2}-1}}{q_t} + \frac{q_{v+1}^{\frac{r}{2}+\varepsilon}}{q_v}\right),$$

zweitens

$$\int_{q_w}^{x} |\mathsf{P}_Q(y)|\,dy < c_{78}\left(x^{\frac{r}{2}-\frac{z}{2}+1+\varepsilon} \sum_{0 \leqq t < w} \frac{q_{t+1}^{\frac{z}{2}-1}}{q_t} + \frac{x^{\frac{r}{2}+\varepsilon}}{q_w}\right).$$

Also ist

$$\int_{0}^{x} |\mathsf{P}_Q(y)|\,dy = O\left(1 + \left(\sum_{1 \leqq v < w} q_{v+1}^{\frac{r}{2}-\frac{z}{2}+1+\varepsilon} + x^{\frac{r}{2}-\frac{z}{2}+1+\varepsilon}\right)\right.$$

$$\left.\times \sum_{0 \leqq t < w} \frac{q_{t+1}^{\frac{z}{2}-1}}{q_t} + \sum_{1 \leqq v < w} \frac{q_{v+1}^{\frac{r}{2}+\varepsilon}}{q_v} + \frac{x^{\frac{r}{2}+\varepsilon}}{q_w}\right).$$

Es ist aber

$$\sum_{1 \leqq v < w} q_{v+1}^{\frac{r}{2}-\frac{z}{2}+1+\varepsilon} = O\left(q_w^{\frac{r}{2}-\frac{z}{2}+1+\varepsilon}\right) = O\left(x^{\frac{r}{2}-\frac{z}{2}+1+\varepsilon}\right),$$

$$\sum_{1 \leqq v < w} \frac{q_{v+1}^{\frac{r}{2}+\varepsilon}}{q_v} = O\left(x^{\frac{r}{2}-\frac{z}{2}+1+\varepsilon} \sum_{0 \leqq v < w} \frac{q_{v+1}^{\frac{z}{2}-1}}{q_v}\right).$$

Also

$$\int_{0}^{x} |\mathsf{P}_Q(y)|\,dy = O\left(1 + x^{\frac{r}{2}+\varepsilon} \sum_{0 \leqq t < w} \left(\frac{q_{t+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_t} + \frac{x^{\frac{r}{2}+\varepsilon}}{q_w}\right),$$

womit offenbar der Hauptsatz 2 bewiesen ist.

§ 4.

Beweis des Hauptsatzes 3.

Die Voraussetzungen des Hauptsatzes 3 seien erfüllt. Wir zeigen zuerst: *Es gibt ein* c_{79} *mit* $\alpha_1 c_{79} < 1$, *so daß für jedes ganze* $v \geqq 0$ *und jedes ganze* l *mit*

(48) $$l > 0, \quad l + 1 < c_{79}\, q_v\, q_{v+1}$$

gilt

(49) $$\int_{\alpha_1 \frac{l}{q_v}}^{\alpha_1 \frac{l+1}{q_v}} |\mathsf{P}_Q(y)|\,dy > c_{80} \frac{l^{\frac{r}{2}-1}}{q_v^{\frac{r}{2}+1}}.$$

Wir setzen $Q_v(u) = \alpha_1\left(u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2 + \frac{p_v}{q_v}(u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2)\right)$; also ist

(50) $$|Q(u) - Q_v(u)| \leqq c_{81} \frac{Q(u)}{q_v\, q_{v+1}}$$

$\left(\text{wo wir } c_{81} \text{ so groß wählen, daß } \frac{\alpha_1}{3 c_{81}} < 1\right)$.

Es sei l ganz, $l > 0$, $l+1 < \frac{1}{3c_{81}} q_v q_{v+1} = c_{79} q_v q_{v+1}$; wenn

$$(51) \qquad \alpha_1 \frac{l+\frac{1}{3}}{q_v} < Q(u) < \alpha_1 \frac{l+\frac{2}{3}}{q_v},$$

so ist nach (50)

$$\alpha_1 \frac{l}{q_v} < Q_v(u) < \alpha_1 \frac{l+1}{q_v}.$$

Für ganze u_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ ist aber $Q_v(u)$ ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{\alpha_1}{q_v}$; also liegen im Gebiet (51) keine Gitterpunkte. Für

$$(52) \qquad \alpha_1 \frac{l+\frac{1}{3}}{q_v} < y < \alpha_1 \frac{l+\frac{2}{3}}{q_v}$$

ist also $A_Q(y)$ konstant, also ist nach (1), (2)

$$\frac{d\,\mathsf{P}_Q(y)}{dy} = -c_{82}\, y^{\frac{r}{2}-1} < -c_{83} \left(\frac{l}{q_v}\right)^{\frac{r}{2}-1}.$$

Diejenigen y des Intervalls (52), für welche

$$|\mathsf{P}_Q(y)| < \frac{\alpha_1}{12 q_v} c_{83} \left(\frac{l}{q_v}\right)^{\frac{r}{2}-1}$$

ist, füllen daher höchstens ein Intervall aus, dessen Länge höchstens $\frac{\alpha_1}{6 q_v}$ ist. Also ist

$$\int\limits_{\alpha_1 \frac{l+\frac{1}{3}}{q_v}}^{\alpha_1 \frac{l+\frac{2}{3}}{q_v}} |\mathsf{P}_Q(y)|\, dy \geqq \frac{\alpha_1}{6 q_v} \cdot \frac{\alpha_1}{12 q_v} c_{83} \left(\frac{l}{q_v}\right)^{\frac{r}{2}-1},$$

womit (49) bewiesen ist.

Es sei nun $q_w \leqq x < q_{w+1}$, $w \geqq 2$. Es sei $v_0 = 0$ oder $v_0 = 1$, je nachdem w gerade oder ungerade ist. Dann ist (in der Folge beachte man $\alpha_1 c_{79} < 1$)

$$\int\limits_0^{\alpha_1 c_{79} q_w} |\mathsf{P}_Q(y)|\, dy \geqq \sum_{\substack{v_0 \leqq v < w \\ v \equiv v_0 \,(\mathrm{mod}\, 2)}} \int\limits_{\alpha_1 c_{79} q_v}^{\alpha_1 c_{79} q_{v+2}} |\mathsf{P}_Q(y)|\, dy.$$

Weiter ist nach (49)

$$\int\limits_{\alpha_1 c_{79} q_v}^{\alpha_1 c_{79} q_{v+2}} |\mathsf{P}_Q(y)|\, dy \geqq \sum_{\substack{l+1 < c_{79} q_v q_{v+1} \\ l > c_{79} q_v^2}} \int\limits_{\alpha_1 \frac{l}{q_v}}^{\alpha_1 \frac{l+1}{q_v}} + \sum_{\substack{l+1 < c_{79} q_{v+1} q_{v+2} \\ l > c_{79} q_{v+1}^2}} \int\limits_{\alpha_1 \frac{l}{q_{v+1}}}^{\alpha_1 \frac{l+1}{q_{v+1}}}$$

$$> c_{80} \left(\frac{1}{q_v^{\frac{r}{2}+1}} \sum_{\substack{l+1 < c_{79} q_v q_{v+1} \\ l > c_{79} q_v^2}} l^{\frac{r}{2}-1} + \frac{1}{q_{v+1}^{\frac{r}{2}+1}} \sum_{\substack{l+1 < c_{79} q_{v+1} q_{v+2} \\ l > c_{79} q_{v+1}^2}} l^{\frac{r}{2}-1} \right) = T.$$

Nun ist $q_{v+2} \geqq 2 q_v$, also

A. entweder $q_{v+1} > \sqrt{2}\, q_v$, $q_{v+2} > \sqrt{2}\, q_{v+1}$,

B. oder $q_{v+1} > \sqrt{2}\, q_v$, $q_{v+2} \leqq \sqrt{2}\, q_{v+1}$,

C. oder $q_{v+1} \leqq \sqrt{2}\, q_v$, und dann notwendig $q_{v+2} \geqq \sqrt{2}\, q_{v+1}$.

Im Fall A ist für $v > c_{84}$

$$T > c_{85}\left(\frac{(q_v\, q_{v+1})^{\frac{r}{2}}}{q_v^{\frac{r}{2}+1}} + \frac{(q_{v+1}\, q_{v+2})^{\frac{r}{2}}}{q_{v+1}^{\frac{r}{2}+1}}\right) = c_{85}\left(\frac{q_{v+1}^{\frac{r}{2}}}{q_v} + \frac{q_{v+2}^{\frac{r}{2}}}{q_{v+1}}\right).$$

Im Fall B ist für $v > c_{84}$

$$T > c_{86}\, \frac{(q_v\, q_{v+1})^{\frac{r}{2}}}{q_v^{\frac{r}{2}+1}} = c_{86}\left(\frac{q_{v+1}}{q_v}\right) q_{v+1}^{\frac{r}{2}-1} \geqq c_{86} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{q_{v+1}}{q_v}\, q_{v+1}^{\frac{r}{2}-1} + \frac{q_{v+2}}{q_{v+1}} \cdot \left(\frac{q_{v+2}}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{r}{2}-1}\right)$$

$$> c_{87}\left(\frac{q_{v+1}^{\frac{r}{2}}}{q_v} + \frac{q_{v+2}^{\frac{r}{2}}}{q_{v+1}}\right).$$

Im Fall C ist für $v > c_{84}$

$$T > c_{88}\, \frac{(q_{v+1}\, q_{v+2})^{\frac{r}{2}}}{q_{v+1}^{\frac{r}{2}+1}} = c_{88}\left(\frac{q_{v+2}}{q_{v+1}}\right)^{\frac{r}{2}} q_{v+1}^{\frac{r}{2}-1} \geqq c_{88} \cdot \frac{1}{2}\left(\left(\frac{q_{v+2}}{q_{v+1}}\right)^{\frac{r}{2}} q_{v+1}^{\frac{r}{2}-1} + \left(\frac{q_{v+1}}{q_v}\right)^{\frac{r}{2}} q_v^{\frac{r}{2}-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} c_{88}\left(\frac{q_{v+1}^{\frac{r}{2}}}{q_v} + \frac{q_{v+2}^{\frac{r}{2}}}{q_{v+1}}\right).$$

Also ist für $w > c_{84} + 2$

$$\int_0^{\alpha_1 c_{79} q_w} |\mathsf{P}_Q(y)|\, dy > c_{89} \sum_{c_{84}+1 < v < w} \frac{q_{v+1}^{\frac{r}{2}}}{q_v}. \tag{53}$$

Wir unterscheiden nun wieder drei Fälle:

H. $x < 2 q_w$,

K. $2 q_w \leqq x < \alpha_1 c_{79} q_{w+1}$,

L. $2 q_w \leqq x$ und zugleich $\alpha_1 c_{79} q_{w+1} \leqq x < q_{w+1}$.

Im Fall H ist

$$\frac{x^{\frac{r}{2}}}{q_w} < (2 q_w)^{\frac{r}{2}} \cdot \frac{1}{q_{w-1}}. \tag{54}$$

Im Fall K ist nach (49)

$$(55)\qquad \int\limits_{\alpha_1 c_{79} q_w}^{x} |P_Q(y)|\,dy \geqq c_{80}\frac{1}{q_w^{\frac{r}{2}+1}} \sum_{\substack{\alpha_1 \frac{l}{q_w} > \alpha_1 c_{79} q_w \\ \alpha_1 \frac{l+1}{q_w} < x}} l^{\frac{r}{2}-1} > c_{90}\frac{x^{\frac{r}{2}}}{q_w}$$

für $x > c_{91}$ $\left(\text{man beachte } \frac{x\, q_w}{\alpha_1} > 2\, c_{79}\, q_w^2\right)$.

Im Fall L ist nach (49) (man beachte, daß in diesem Fall $q_{w+1} > 2\, q_w$)

$$(56)\qquad \int\limits_{\alpha_1 c_{79} q_w}^{x} |P_Q(y)|\,dy \geqq \int\limits_{\alpha_1 c_{79} q_w}^{\alpha_1 c_{79} q_{w+1}} |P_Q(y)|\,dy \geqq c_{80}\cdot\frac{1}{q_w^{\frac{r}{2}+1}} \sum_{\substack{\frac{l}{q_w} > c_{79} q_w \\ \frac{l+1}{q_w} < c_{79} q_{w+1}}} l^{\frac{r}{2}-1} > c_{92}\frac{q_{w+1}^{\frac{r}{2}}}{q_w} > c_{92}\frac{x^{\frac{r}{2}}}{q_w}$$

für $x > c_{93}$.

Nach (53), (54), (55), (56) ist für $x > c_{94}$

$$\int\limits_0^x |P_Q(y)|\,dy > c_{95}\left(\sum_{c_{84}+1 < v < w} \frac{q_{v+1}^{\frac{r}{2}}}{q_v} + \frac{x^{\frac{r}{2}}}{q_w}\right).$$

Weiter ist aber

$$\sum_{v \leqq c_{84}+1} \frac{q_{v+1}^{\frac{r}{2}}}{q_v} = c_{96},$$

während $\frac{x^{\frac{r}{2}}}{q_w} \geqq x^{\frac{r}{2}-1}$. Also ist für $x > c_{97}$

$$\int\limits_0^x |P_Q(y)|\,dy > c_{98}\left(\sum_{0 \leqq v < w} \frac{q_{v+1}^{\frac{r}{2}}}{q_v} + \frac{x^{\frac{r}{2}}}{q_w}\right),$$

womit der Hauptsatz 3 bewiesen ist.

Prag, den 15. Mai 1932.

(Eingegangen am 18. Mai 1932.)