Vojtěch Jarník

Sur les points à coordonnées entiéres dans les ellipsoïdes à plusieurs dimensions

Věstník Král. čes. spol. nauk 1930, No. 6, 11 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500462

Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoïdes à plusieurs dimensions.

Par VOJTĚCH JARNÍK.

(Présenté le 5 novembre 1930.)

§ 1. Introduction.

Soit k un nombre entier, $k \geq 5$; soit

$$Q\ (u) = \sum_{r,s=1}^{k} a_{rs}\, u_r\, u_s \quad (a_{rs} = a_{sr})$$

une forme positive et définie, dont les coefficients a_{rs} sont des nombres entiers; nous désignons par D la déterminante de cette forme. Si x est un nombre entier positif (x sera toujours un nombre entier positif), désignons par $F(x)$ le nombre des points à coordonnées entières („Gitterpunkte"), situés dans l'ellipsoïde fermé $Q(u) \leq x$. Le volume de cet ellipsoïde est égal à

$$\frac{\pi^{\frac{k}{2}}\, x^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\sqrt{D}} = \frac{4\,M}{k}\, x^{\frac{k}{2}},$$

en posant $M = \dfrac{\pi^{\frac{k}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{D}}$.

Posons encore $P(x) = F(x) - \dfrac{4\,M}{k}\, x^{\frac{k}{2}}$; l'orde de grandeur de $P(x)$ est donné par les formules fondamentales suivantes, dûes à $M\,M$ Landau et Walfisz[1]):

[1]) Voir les mémoires intitulés „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden", parus dans la Mathematische Zeitschrift:

$$P(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right),\ P(x) = \Omega\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right). \tag{1}$$

Dans la direction de la relation Ω, on connaît encore des résultats plus précis, dont je ne cite que le théorème suivant:[2])

Il existe un nombre positif c_1, ne dépendant que de la forme $Q(u)$ (c'est-à-dire ne dépendant que de k et des coefficients a_{rs}) et tel que chacune des inégalités

$$P(x) > (M + c_1)\, x^{\frac{k}{2}-1},\ P(x) < (M - c_1)\, x^{\frac{k}{2}-1}$$

soit vérifiée pour une infinité des valeurs entières et positives du nombre x.

De ce théorème, il s' ensuit immédiatement, que la suite

$$\frac{P(x)}{x^{\frac{k}{2}-1}} \quad (x = 1, 2, \ldots\ldots) \tag{2}$$

qui est bornée d'après (1), a au moins deux points limites. Le but de cette note est la démonstration du théorème suivant:

La suite (2) possède une infinité des points limites.[3])

Dans une autre note, nous allons donner une application de ce théorème.[4])

A. Walfisz **19** (1924), p. 300—307, E. Landau **21** (1924), p. 126—132 et **24** (1925) (zweite Abhandlung), p. 299—310.

[2]) V. Jarník, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. **27** (1927), p. 154—160).

[3]) Dans un cas particulier $\left(Q(u) = \sum_{i=1}^{k} u_i^2,\ k \text{ pair},\ k \geqq 8\right)$ on connait des résultats encore plus précis; voir V. Jarník, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln, Math. Zeitschrift **30** (1929) p. 768—786.

[4]) Voir la note suivante „Sur une fonction arithmétique."

§ 2. Démonstration.

Nous allons démontrer notre théorème d' une façon indirecte. Nous supposons alors pour le moment que, pour une certaine forme $Q(u)$ (qui sera fixe dans tout ce qui va suivre), la suite

(2) $$\frac{P(x)}{x^{\frac{k}{2}-1}} \quad (x = 1, 2, \ldots\ldots)$$

n'ait qu'un nombre fini t des points limites, que nous désignons par

$$z_1, z_2, \ldots\ldots, z_t.$$

A côté de $Q(u)$, nous allons encore considérer les formes en nombre infini

$$Q_l(u) = Q(u) + u^2_{k+1} + u^2_{k+2} + \ldots\ldots + u^2_{k+l} \quad (Q_0(u) = Q(u));$$
$$l = 0, 1, 2, \ldots\ldots.$$

Les fonctions $F(x)$, $P(x)$ et la constante M, relatives à la forme $Q_l(u)$, seront désignées par $F_l(x)$, $P_l(x)$, M_l. Pour évaluer la fonction $F_l(x)$, on peut se servir de la formule suivante, dûe à M. Landau[1]) (spécialisée pour la forme $Q_l(u)$)

$$F_l(x) = 2 M_l \sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k+l}{2}-1} +$$

$$+ 2 M_l \sum_{2 \leq q \leq \sqrt{x}} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S'_{p,q} S^l_{p,q}}{q^{k+l}} \sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k+l}{2}-1} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}} +$$

(3) $$+ O\left(x^{\frac{k+l}{4}} \log x\right).$$

Ici on a posé

$$S'_{p,q} = \sum_{(m)=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{p}{q} Q(m)}, \quad S_{p,q} = \sum_{m=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{p}{q} m^2};$$

le symbole $\sum\limits_{p=0}^{q-1}{}'$ signifie que la somme ne s'étend que sur les nombres p, satisfaisant à la relation $(p, q) = 1$.

Dans toute cette note, nous allons désigner par c_i ($i = = 1, 2, 3, \ldots\ldots$) des nombres positifs, ne dépendant que de i et de la forme $Q(u)$.[5]) Par ϑ nous allons désigner des nombres complexes, dépendant des variables quelconques, mais tels que $|\vartheta| \leqq 1$. Nous n'allons pas distinguer les différents ϑ par des indices,

Nous ferons usage de quelques relations bien connues que voici[6]):

a) $$|S'_{p,q}| < c_2 q^{\frac{k}{2}};$$

b) $$\sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k+l}{2}-1} = \frac{2}{k+l} x^{\frac{k+l}{2}} + \frac{1}{2} x^{\frac{k+l}{2}-1} + O\left(x^{\frac{k+l}{2}-2}\right);$$

c) $$\left|\sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k+l}{2}-1} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}}\right| \leqq s x^{\frac{k+l}{2}-1},$$

$$\text{où } s = \operatorname{Max}\left(\frac{q}{p}, \frac{q}{q-p}\right);$$

d) Si p, q et l sont donnés, on a

$$\sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k+l}{2}-1} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}} = C(p, q, x) x^{\frac{k+l}{2}-1} + O\left(x^{\frac{k+l}{2}-2}\right),$$

où $C(p,q,x) = \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} r e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} + \sum_{r=0}^{x} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}}$; remarquons que, p et q étant donnés, $C(p, q, x)$ ne dépend que de la classe du nombre x modulo q.

e) $$S_{p,q} = \eta_{p,q} \sqrt{q},$$

où $$\eta_{p,q} = 0 \text{ pour } q \equiv 2 \pmod 4$$

$$\eta_{p,q} = e^{\pi i \frac{q-1}{4}} \left(\frac{-2p}{q}\right) \text{ pour } q \equiv 1 \pmod 2$$

$$\eta_{p,q} = \sqrt{2}\, e^{\pi i \frac{p-1}{4}} \left(\frac{2p}{q}\right) \text{ pour } q \equiv 0 \pmod 4.$$

f) Soit q un nombre premier impair, $(q, D) = 1$; alors on a

$$S'_{p,q} = \left(\frac{D}{q}\right) \left(\frac{-2p}{q}\right)^k e^{\pi i k \frac{q-1}{4}} q^{\frac{k}{2}}\text{ [7]}.$$

---

[5]) Donc c_i peut dépendre de k et des coefficients a_{rs}, mais il ne dépend pas de l.

[6]) Dans ces relations, on suppose $0 < p < q$, $(p, q) = 1$.

[7]) Pour la démonstration, nous renverrons aux mémoires suivants:

Nous allons maintenant appliquer la formule (3) dans le cas $l=0$. D'après b), on obtient

$$\frac{P_0(x)}{x^{\frac{k}{2}-1}} = M_0 + 2M_0 \sum_{2 \leq q \leq \sqrt{x}} A_q(x) + o(1),$$

où l'on a posé

$$A_q(x) = \frac{1}{x^{\frac{k}{2}-1}} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S'_{p,q}}{q^k} \sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}};$$

alors, d'après a) et e), on a

$$(4) \qquad |A_q(x)| < c_3 \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{1}{q^{\frac{k}{2}}} \operatorname{Max}\left(\frac{q}{p}, \frac{q}{q-p}\right) < c_4 \frac{\log q}{q^{\frac{k}{2}-1}}.$$

Posons $\alpha = \underset{1 \leq i < j \leq t}{\operatorname{Min}} |z_i - z_j|$.

D'après (4), on peut trouver un nombre entier $q_0 > 1$, $q_0 = c_5$ [8]) tel que $\left| 2M_0 \sum_{q_0 < q \leq \sqrt{x}} A_q(x) \right| < \frac{\alpha}{5}$ pour tout x entier et positif.

On a alors, pour tout $x > c_6$

$$\frac{P_0(x)}{x^{\frac{k}{2}-1}} = M_0 + 2M_0 \sum_{q=2}^{q_0} A_q(x) + \vartheta \frac{\alpha}{4}$$

ou, en utilisant la relation *d)*, pour $x > c_7$

$$\frac{P_0(x)}{x^{\frac{k}{2}-1}} = M_0 + 2M_0 \sum_{q=2}^{q_0} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S'_{p,q}}{q^k} C(p,q,x) + \vartheta \frac{\alpha}{3}.$$

Pour a): A. Walfisz, l. c. [1])

Pour b) c) d): V. Jarník, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Zweite Mitteilung, Math. Zeitschr. **28** (1928), p. 311—316.

Pour e): P. Bachmann, Zahlentheorie **2** (B. G. Teubner), p. 145—187.

Pour f): H. Weber, Über die mehrfachen Gaussischen Summen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **74** (1872), p. 14—56.

[8]) l'équation $q_0 = c_6$ doit signifier que q_0 ne dépend que de la forme $Q(u)$.

Posons $m = q_0!$ (donc $m = c_8$); le premier membre à droite de la dernière équation ne dépend que du reste du nombre x modulo m; donc, si nous considérons la suite

$$\frac{P_0(a+mn)}{(a+mn)^{\frac{k}{2}-1}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

a étant un nombre entier positif quelconque, nous voyons que deux points limites quelconques de cette suite ne peuvent différer que de $\frac{2\alpha}{3}$ au plus; d'où il suit, d'après la définition même de α, que cette suite est convergente. Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant:

(A) Il existe un nombre entier $m > 0$ tel que la suite

$$\frac{P_0(a+mn)}{(a+mn)^{\frac{k}{2}-1}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

soit convergente, quel que soit le nombre entier $a > 0$.

Nous allons maintenant démontrer le résultat suivant:

(B) Pour tout $l \geqq 0$ et pour tout $a > 0$ (l entier, a entier) la suite

$$\frac{P_l(a+mn)}{(a+mn)^{\frac{k+l}{2}-1}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

est convergente.

Ici, m est le nombre introduit plus haut.

L'assertion (B) est vraie pour $l = 0$; donc nous allons procéder par induction. Supposons que, pour un nombre $l \geqq 0$, les limites

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_l(a+mn)}{(a+mn)^{\frac{k+l}{2}-1}} = y(a) \quad (a = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

existent. Soit $b \geqq 0$ un nombre entier et laissons le nombre x parcourir la suite $b+m$, $b+2m$, $b+3m, \ldots$; alors, on aura[9])

$$F_{l+1}(x) = \sum_{|u| \leqq \sqrt{x}} F_l(x-u^2) = \frac{4 M_l}{k+l} \sum_{|u| \leqq \sqrt{x}} (x-u^2)^{\frac{k+l}{2}} +$$

[9]) en posant $F_l(0) = 1$.

$$+\sum_{a=0}^{m-1} g(b-a^2) \sum_{\substack{u\equiv a \pmod m\\ |u|\leq \sqrt{x}}} (x-u^2)^{\frac{k+l}{2}-1} + o\left(\sum_{|u|\leq\sqrt{x}} (x-u^2)^{\frac{k+l}{2}-1}\right).$$

Nous allons évaluer les deux premiers membres à l'aide de la formule sommatoire d'Euler que voici:[10])

Il existe une suite de fonctions réelles d'une variable réelle

$$f_0(z),\ f_1(z),\ f_2(z),\ldots$$

et une suite de constantes réelles

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$$

qui jouissent des propriétés suivantes: $f_r(z)$ est périodique avec la période 1;

$$\int_0^1 f_r(z)dz = 0;$$

$$f_0(z) = \begin{cases} z-[z]-\dfrac{1}{2} & \text{pour } z \text{ non entier}\\ 0 & \text{pour } z \text{ entier;}\end{cases}$$

$$f_{r+1}(z) = \int_0^z f_r(u)du + a_r \quad \text{pour } r \geq 0.$$

Soient donnés: deux nombres réels A, B $(A<B)$, un nombre entier $h>0$ et une fonction $F(z)$, réelle et possédant des derrivées continues d'ordre 1, 2, ..., h pour $A\leq z\leq B$ (pour $z=A$ et $z=B$, on suppose seulement l'existence des dérivées unilatérales correspondantes). Alors on a $(F^{(0)}(z) = F(z))$

$$\sum_{A\leq n\leq B}^{*} F(n) = \int_A^B F(z)\,dz + \sum_{r=0}^{h-1}(-1)^r\Big(f_r(A)F^{(r)}(A) - f_r(B)F^{(r)}(B)\Big) + (-1)^{h-1}\int_A^B f_{h-1}(z)F^{(h)}(z)\,dz;$$

ici l'astérisque doit signifier que, si A (resp. B) est un nombre entier, on doit prendre le terme $F(A)$ (resp. $F(B)$) avec le

---

[10]) Pour la démonstration de cette formule bien connue on peut consulter par exemple E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie (S. Hirzel, Leipzig, 1927), I Bd., p. 309—311.

facteur $\frac{1}{2}$. La dernière intégrale peut être souvent évaluée approximativement à l'aide du second théorème de la moyenne, si l'intervalle (A, B) peut être décomposé en un nombre fini d'intervalles partiels, qui sont intervalles de monotonie pour la fonction $F^{(h)}(z)$. Nous allons appliquer cette formule d'Euler aux sommes que nous avons en vue, en posant pour $s \geqq -2$

$$J_s = \int_{-1}^{1} (1-u^2)^{\frac{k+s}{2}} \, du$$

et en appliquant le second théorème de la moyenne:

$$\sum_{|u| \leqq \sqrt{x}} (x-u^2)^{\frac{k+l}{2}} = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (x-u^2)^{\frac{k+l}{2}} du -$$

$$-\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f_1(u) \frac{d^2}{du^2} \left((x-u^2)^{\frac{k+l}{2}}\right) du = J_l \,.\, x^{\frac{k+l+1}{2}} + O\left(x^{\frac{k+l}{2}-1}\right);$$

$$\sum_{\substack{|u| \leqq \sqrt{x} \\ u \equiv a (\bmod m)}} (x-u^2)^{\frac{k+l}{2}-1} = \int_{\frac{-\sqrt{x}-a}{m}}^{\frac{\sqrt{x}-a}{m}} (x-(a+mu)^2)^{\frac{k+l}{2}-1} du +$$

$$+\int_{\frac{-\sqrt{x}-a}{m}}^{\frac{\sqrt{x}-a}{m}} f_0(u) \frac{d}{du}\left((x-(a+mu)^2)^{\frac{k+l}{2}-1}\right) du =$$

$$= \frac{1}{m} J_{l-2} x^{\frac{k+l+1}{2}-1} + O\left(x^{\frac{k+l}{2}-\frac{3}{2}}\right);$$

alors on a

$$F_{l+1}(x) = \frac{4 M_l}{k+l} J_l x^{\frac{k+l+1}{2}} + \frac{1}{m} J_{l-2} \sum_{a=0}^{m-1} y(b-a^2) x^{\frac{k+l+1}{2}-1} +$$

$$+ o\left(x^{\frac{k+l+1}{2}-1}\right).$$

Mais on sait que

$$F_{l+1}(x) = \frac{4 M_{l+1}}{k+l+1} x^{\frac{k+l+1}{2}} + O\left(x^{\frac{k+l+1}{2}-1}\right),$$

donc on a

$$\frac{4\,M_l}{k+l}\,J_l = \frac{4\,M_{l+1}}{k+l+1}$$

et alors

$$P_{l+1}(x) = x^{\frac{k+l+1}{2}-1} \cdot \frac{1}{m} J_{l-2} \sum_{a=0}^{m-1} y(b-a^2) + o\left(x^{\frac{k+l+1}{2}-1}\right),$$

c'est-à-dire la suite

$$\frac{P_{l+1}(b+mn)}{(b+mn)^{\frac{k+l+1}{2}-1}} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

est convergente, *c.q.f.d.*

Nous avons, en particulier, le résultat suivant, conséquence immédiate de (B):

Il existe un nombre entier m ($m = c_8$) tel que, pour aucun $l \geq 0$, la suite

$$(5) \qquad \frac{P_l(x)}{x^{\frac{k+l}{2}-1}} \quad (x = 1, 2, 3, \ldots)$$

ne peut avoir plus de m points limites.

Mais de ce fait nous allons maintenant déduire la contradiction annoncée: nous allons montrer, en effet, qu'il existe un nombre entier $l > 0$ tel que la suite (5) ait au moins ($m+1$) points limites.

Pour cela, nous choisissons un nombre premier impair q_1 ($q_1 = c_9$) tel que $q_1 > m$, $(q_1, D) = 1$. Considérons maintenant la somme — où nous supposons $l \geqq 3$ —

$$(6) \qquad \sum_{3q_1 \leqq q \leqq \sqrt{x}} \; \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S'_{p,q} S^l_{p,q}}{q^{k+l}} \sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k+l}{2}-1} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}};$$

cette somme est, en valeur absolue (voir *a) c) e)*) au plus égale à

$$c_2\, x^{\frac{k+l}{2}-1} \sum_{q=3q_1}^{\infty} \frac{2^{\frac{l}{2}}}{q^{\frac{k+l}{2}}} \sum_{p=0}^{q-1}{}' s < c_{10}\, x^{\frac{k+l}{2}-1} \sum_{q=3q_1}^{\infty} \frac{2^{\frac{l}{2}} \log q}{q^{\frac{k+l}{2}-1}};$$

on a, de plus,

$$c_{10}\sum_{q=3q_1}^{\infty}\frac{2^{\frac{l}{2}}\log q}{q^{\frac{k+l}{2}-1}} \leqq c_{11}\frac{\log q_1}{q_1^{\frac{k}{2}-1}}\sum_{q=3q_1}^{\infty}\left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{l}{2}} =$$

$$= c_{12}\sum_{q=3q_1}^{\infty}\left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{l}{2}} \leqq c_{12}\left(\frac{2}{3q_1}\right)^{\frac{l}{2}}\sum_{q=3q_1}^{\infty}\left(\frac{3q_1}{q}\right)^{\frac{3}{2}} = c_{13}\left(\frac{2}{3q_1}\right)^{\frac{l}{2}}.$$

Nous choisissons un nombre $\lambda \geqq 3$ ($\lambda = c_{14}$) assez grand pour que

$$c_{13}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{\lambda}{2}} < \frac{1}{10\, q_1^{\frac{k}{2}}}$$

et tel que $k+\lambda \equiv 0 \pmod 8$.

On voit alors que la somme (6), où l'on a posé $l=\lambda$, est égale à

(7) $$x^{\frac{k+\lambda}{2}-1}\cdot\frac{\vartheta}{10\, q_1^{\frac{k+\lambda}{2}}}.$$

On a alors, d'après (3), *a)*, (7)

$$F_\lambda(x) = \frac{4M_\lambda}{k+\lambda}x^{\frac{k+\lambda}{2}} + M_\lambda x^{\frac{k+\lambda}{2}-1} +$$

$$+2M_\lambda\left(\sum_{\substack{2\leqq q<3q_1\\ q\neq q_1\\ q\neq 2q_1}}\ \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S'_{p,q}\,S^{\lambda}_{p,q}}{q^{k+\lambda}}\sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k+\lambda}{2}-1}e^{-2\pi i n\frac{p}{q}} +\right.$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{q_1-1}\frac{S'_{p,q_1}\,S^{\lambda}_{p,q_1}}{q_1^{k+\lambda}}\sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k+\lambda}{2}-1}e^{-2\pi i n\frac{p}{q_1}} + \frac{\vartheta x^{\frac{k+\lambda}{2}-1}}{10\, q_1^{\frac{k+\lambda}{2}}}\right) + o\left(x^{\frac{k+\lambda}{2}-1}\right)$$

(remarquons que l'on peut supprimer, d'après *e*), le terme avec $q=2q_1$).

Soit maintenant a un nombre entier, $0\leqq a<q_1$; il existe alors une suite

$$(\mathfrak{S}_a)\qquad x_1(a),\ x_2(a),\ x_3(a),\ \ldots\ ;\qquad x_n(a)\to\infty$$

telle que

$x_n(a) \equiv 0 \pmod q$ pour tout nombre entier q avec

$$2\leqq q<3q_1,\ q\neq q_1,\ q\neq 2q_1,$$

$x_n(a)\equiv a \pmod{q_1}$.

Si x parcourt la suite $(\mathfrak{S}_a)$, on a d'après *d) e) f)* pour $x > c_{15}$

$$\frac{P_\lambda(x)}{x^{\frac{k+\lambda}{2}-1}} = M_\lambda + 2M_\lambda \sum_{\substack{2 \leq q < 3q_1 \\ q \neq q_1 \\ q \neq 2q_1}} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S'_{p,q} S^{\lambda}_{p,q}}{q^{k+\lambda}} C'(p,q,0) +$$

$$2M_\lambda \left(\frac{D}{q_1}\right) \sum_{p=1}^{q_1-1} \frac{1}{q_1^{\frac{k+\lambda}{2}}} C'(p,q_1,a) + \frac{\vartheta 2 M_\lambda}{9\, q_1^{\frac{k+\lambda}{2}}}.$$

Remarquons encore que

$$C'(p,q_1,a) = \frac{1}{q_1} \sum_{r=0}^{q_1-1} r e^{-2\pi i r \frac{p}{q_1}} + \sum_{r=0}^{a} e^{-2\pi i r \frac{p}{q_1}};$$

on a alors pour $x > c_{15}$

$$\frac{P_\lambda(x)}{x^{\frac{k+\lambda}{2}-1}} = W + 2M_\lambda \left(\frac{D}{q_1}\right) \frac{1}{q_1^{\frac{k+\lambda}{2}}} \sum_{p=1}^{q_1-1} \sum_{r=0}^{a} e^{-2\pi i r \frac{p}{q_1}} + 2M_\lambda \frac{\vartheta}{9\, q_1^{\frac{k+\lambda}{2}}},$$

où W est un nombre ne dépendant que de la forme Q. On a enfin

$$\sum_{p=1}^{q_1-1} \sum_{r=0}^{a} e^{-2\pi i r \frac{p}{q_1}} = q_1 - a - 1.$$

Alors: chaque intervalle fermé de longueur

$$\frac{4}{9} \frac{M_\lambda}{q_1^{\frac{k+\lambda}{2}}},$$

ayant pour centre un quelconque des points

$$W + 2M_\lambda \left(\frac{D}{q_1}\right) \frac{q_1 - a - 1}{q_1^{\frac{k+\lambda}{2}}} \quad (a=0, 1, \ldots, q_1 - 1)$$

contient au moins un point limite de la suite

$$\frac{P_\lambda(x)}{x^{\frac{k+\lambda}{2}-1}} \quad (x = 1, 2, \ldots);$$

donc, q_1 étant plus grand que m, nous sommes parvenus à la contradiction annoncée.

Prague, le 25 X. 1930.