Borůvka, Otakar: Other works

Otakar Borůvka
O čtyřrozměrném prostoru

Věda a život VIII, 1941, 142-146

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500205

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

způsobuje se také požadavkum moderní doby. Vyrábějí se proto nejruznější smaltované předměty nejen pro praktickou potřebu, nýbrž i okrasné s nemalou uměleckou hodnotou. Kráčí zde ruku v ruce duch moderní techniky s duchem uměleckým.

O čtyřrozměrném prostoru.

OTAKAR BORŮVKA.

Jestliže pojem čtyřrozměrného prostoru jest matematikům již dlouho běžný a skoro elementární, vzbuzuje patrně sám jeho název u neodborníků dojem nesnadnosti a snad i tajuplnosti. Pokusím se zde vyložiti, kterak se k pojmu čtyřrozměrného prostoru došlo a stručně pojednám o místě, které zaujímá v matematice a v úvahách vztahujících se k poznání tohoto světa.

Základem všeho přírodovědeckého poznání jest zkušenost, jak nám ji podávají naše smysly. Jimi chápeme, že předměty tohoto světa mají tři rozměry: délku, šířku a výšku. Každý cítí, co se tím rozumí; ale popis obsahu slova „rozměr" jest nesnadný a vyžaduje hlubších úvah. Ze zkušenosti známe věci, jejichž rozměry vzhledem k jiným věcem jsou nepatrné, jako na př. malé kuličky. Dále známe věci, u nichž daleko převládá jeden rozměr, na př. dráty; a konečně věci, u nichž daleko převládají dva rozměry, na př. listy papíru. Zkušenost nás tak vede k rozlišování předmětů bezrozměrných, jednorozměrných a dvojrozměrných. Nuže, z pozorování vztahů mezi takto zhruba popsanými různorozměrnými předměty vznikly již před Kristem matematické nauky, které nazýváme geometrie dvojrozměrná a geometrie trojrozměrná. V geometrii dvojrozměrné se studují vztahy mezi útvary bezrozměrnými a jednorozměrnými čili — jak říkáme — mezi body a přímkami a podobně v geometrii trojrozměrné se studují vztahy mezi útvary bezrozměrnými, jednorozměrnými a dvojrozměrnými čili mezi body, přímkami a rovinami. Tyto vztahy se týkají protínání, promítání, měření vzdáleností a úhlů a pod.

Na základě a podle vzoru těchto geometrií vznikla geometrie čtyřrozměrná anebo — jak ji nazýváme — geometrie čtyřrozměrného prostoru. Její počátky spadají do první poloviny 19. století a pojí se ke jménum slavných matematiků: Lagrange, Argan, Jacobi, Gauss, Grassmann a j. Jejím obsahem jest studium vztahů mezi útvary bezrozměrnými, jednorozměrnými, dvojrozměrnými a trojrozměrnými čili mezi body, přímkami, rovinami a t. zv. nadrovinami. Pojmy a věty této geometrie mají, jak jsme se již zmínili, svůj původ a vzor v pojmech a větách geometrie dvojrozměrné a troj-

rozměrné. Také ve čtyřrozměrné geometrii se mluví o protínání, promítání, měření vzdáleností a úhlu a pod., ale možnosti jsou daleko bohatší, takže se mluví na př. o protínání roviny s nadrovinou, o vzdálenosti bodu od nadroviny a pod. Analogie s geometriemi dvojrozměrnou a trojrozměrnou jde ale ještě dále. Tak na př., jako se pojmy a věty o prostoru trojrozměrném dají vyjadřovati kreslenými obrazci, jak jest to obsahem deskriptivní geometrie trojrozměrného prostoru, tak můžeme kreslenými obrazci vyjadřovati pojmy a věty o prostoru čtyřrozměrném. To jest obsahem deskriptivní geometrie čtyřrozměrného prostoru. S takovými obrazci nemužeme však spojovati žádné představy jevu, které bychom snad znali ze zkušenosti; avšak obrazce nám v mysli vybavují určité geometrické vztahy anebo konstrukce. Jako příklad uvádím obrazec, v němž jest znázorněn trojúhelník ve čtyřrozměrném prostoru [1].

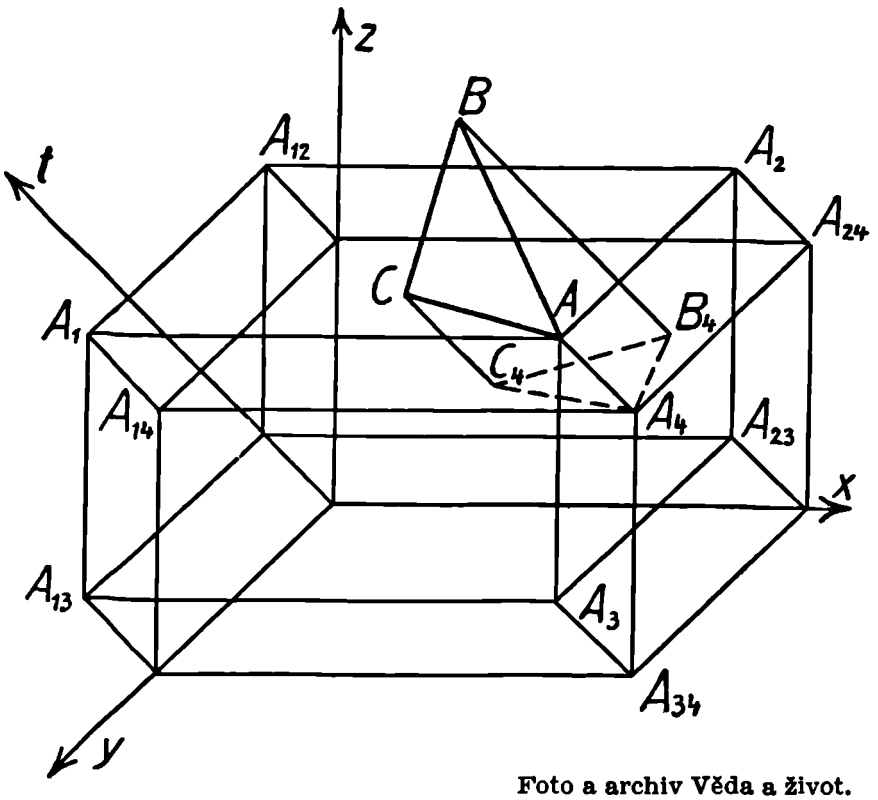

Foto a archiv Věda a život.

Na tomto obrazci jsou znázorněny čtyři nadroviny *yzt*, *xzt*, *xyt*, *xyz* a prumět A_4, B_4, C_4 trojúhelníku *A*, *B*, *C* do nadroviny *xyz*. Mimo to jsou znázorněny průměty A_1, A_2, A_3, A_4 vrcholu *A* trojúhelníku do těch nadrovin a průměty A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24}, A_{34} tohoto vrcholu do rovin *zt*, *yt*, *yz*, *xt*, *xz*, *xy*.

Poznání pojmu čtyřrozměrného prostoru a obecněji vícerozměrného prostoru znamenalo v matematice pokrok neobyčejně významný. Nejen se jim otevřely cesty k poznání nových pojmu a vztahů, pro něž nebylo analogií v prostoru trojrozměrném, nejen umožnilo matematickou formulaci fysikálních theorií o světovém názoru, nýbrž i vneslo nové světlo a nové methody do bádání o geometrii dvojrozměrné a trojrozměrné. Proslulý rumunský matematik G. Tzitzéica napsal: „Studujeme vícerozměrné prostory proto, abychom našli odpověď na otázky, vztahující se k našemu prostoru, podobně jako studujeme organisaci cizích zemí, abychom přinesli užitek zemi vlastní.“ K tomu mužeme dodati, že znalost geometrie vícerozměrné umožňuje dívati se na geometrii dvojrozměrnou

[1] Podrobnější odborný výklad redakce nezařadila, poněvadž jeho pochopení by vyžadovalo dlouhé specielní studium.

a trojrozměrnou s vyššího hlediska podobně jako přehled po cizích zemích umožňuje s vyššího hlediska zhodnotiti zemi vlastní. Nové světlo a nové methody, o nichž jsem se zmínil, zakládají se — stručně řečeno — na tom, že se na útvary v dvojrozměrné a trojrozměrné geometrii díváme jako na zvláštní případy útvaru definovaných v prostorech o větším počtu rozměru a že se na př. na útvary v prostoru trojrozměrném díváme jako na pruměty vhodných útvarů v prostoru čtyřrozměrném do prostoru trojrozměrného.

Pojednám nyní stručně o otázce, která sice s matematickým bádáním nemá nic společného, která se však přirozeně připojuje k úvahám o čtyřrozměrném prostoru, totiž, zda snad čtvrtý rozměr skutečně neexistuje. Abychom na tuto otázku odpověděli, uvažme především, z čeho by bytosti dvojrozměrné, které si můžeme představiti jako stíny na př. v rovině stolu, mohly souditi na existenci třetího rozměru, který chápeme my. Dvojrozměrné bytosti svými předpokládanými dvojrozměrnými smyslovými orgány mohly by patrně vnímati jenom takové děje, které se odehrávají v jejich světě, tedy v rovině stolu. Jim by se na př. čtverec jevil tak, že by neviděly do té části roviny, kterou nazýváme vnitřkem čtverce. Aby se do té části dostaly, musely by projíti otvorem v některé straně čtverce, podobně, jako my nevidíme skrze stěny dovnitř domu a chceme-li se tam dostati, musíme projíti otvorem ve stěně. Pro nás, trojrozměrné, jest však zcela pochopitelné, že by se dvojrozměrná bytost mohla dostati z vnějšku čtverce do jeho vnitřku, aniž by prošla otvorem v jeho straně. Prostě tak, že by se vně čtverce zvedla do třetího rozměru nad rovinu svého světa a uvnitř čtverce se zase do této roviny spustila. Pro každou dvojrozměrnou bytost, chápající jenom děje, odehrávající se v té rovině a nechápající existenci třetího rozměru, vypadala by ovšem taková věc zázračně a to jako zmizení bytosti se světa vně čtverce anebo — řekněme — vně jejího příbytku a opětné náhlé objevení bytosti uvnitř příbytku. Představme si, abych uvedl jiný příklad, že by dvojrozměrné bytosti měly ruce ve tvaru stínů našich rukou. Rukavice pro takové ruce by měly tvar obrysů těchto stínu a nebylo by možno nějakým pohybem v dvojrozměrném světě, bez obrácení na ruby, změniti levou rukavici tak. aby přiléhala na pravou ruku a obráceně pravou rukavici tak, aby přiléhala na ruku levou. Docela podobně, jako my nemůžeme nějakým pohybem, bez obrácení na ruby, změniti levou rukavici v pravou a naopak. Avšak pro nás, bytosti trojrozměrné, jest zase pochopitelné, že by se dvojrozměrná rukavice levá mohla změniti v pravou a pravá v levou b z obrácení na ruby. A to tak, že by se nad rovinou stolu překlopila a opět vrátila do té roviny. Taková věc by se opět jevila dvojrozměrné bytosti zázračně jako zmizení levé rukavice se světa a za okamžik objev ní rukavice pravé, a naopak. Nuže z těchto a řady jiných zázračných jevů mohl by dvojrozměrný matematik souditi na existenci třetího

rozměru. A podobně se věci mají, postoupíme-li o jeden rozměr výše. Kdyby se na našem světě vyskytovaly děje jako zmizení a opětné objevení předmětu a lidí, změny podobné jako přeměna levé rukavice v pravou a naopak, rozvázání uzlu na šňuře, jejíž konce jsou zapečetěny a to bez porušení pečeti a šňury a pod., mohli bychom k vysvětlení těchto jevu předpokládati existenci čtvrtého rozměru. Za tímto účelem byly skutečně konány pokusy se spiritistickými mediemi, avšak žádný z nich nebyl dostatečně ověřen. Protože také jinak není duvodu, jest domněnka, že snad náš svět jest ponořen v nějakém světě čtyřrozměrném podobně jako nějaká rovina v prostoru trojrozměrném, dnes zamítána jako neoduvodněná.

Pojem čtyřrozměrného prostoru tušil snad již Plato okolo r. 400 př. Kr. Plato v jednom svém spise ve formě dialogu mezi Sokratem a Glaukonem uvažuje takto: Představme si jeskyni, v níž jsou od dětství připoutáni zajatci tak, že mohou viděti jenom zadní stěnu jeskyně. Před otvorem do jeskyně si představme cestu, po níž mohou přecházeti lidé a dále za touto cestou oheň. Zajatci v jeskyni vidí na zadní stěně jeskyně stíny přecházejících lidí. Představíme-li si, že cesta proti jeskyni jest vyvýšena tak, že hlasy přecházejících lidí se odrážejí od zadní stěny jeskyně k zajatcům, pochopíme, že zajatci mají dojem živých dvojrozměrných mluvících lidí. Sokrates se táže, jaké dojmy bude míti takový zajatec, bude-li z jeskyně propuštěn. Jakým dojmem budou na něho působit skuteční lidé a jakým dojmem oheň? Jistě bude s počátku považovati vnější svět za mámení a pochopí-li souvislost a po návratu do jeskyně se bude snažiti ji vyložiti spoluvězňům, setká se u nich s neporozuměním a bude snad i považován za blázna. Plato pak připouští možnost, že podobně my, trojrozměrní lidé, jsme stíny nějakých vyšších bytostí.

Filosofové a theologové, spiritisté a romanopisci zmocnili se pojmu čtyřrozměrného prostoru, aby na něm budovali své theorie nebo fantasie.

Dovolím si zde ještě jako příklad uvésti ve volném překladu a zkráceně fantastickou úvahu, která však není protismyslná a vztahuje se k předešlému výkladu, jak jest uvedena v knížce R. Weitzenböcka Der vierdimensionale Raum:

„Pan Hontin objeví jednoho dne čtvrtý rozměr, který jest mu po theoretické stránce již dávno znám. Zpozoruje, že vlivem určitých fysikálních a chemických procesů muže zpusobiti, že jeho pravá ruka zmizí z našeho prostoru. K tomu stačí malé soustředění vůle; povolí-li, objeví se ruka opět v našem prostoru. Zmizelá ruka zustává při tom spojena s paží a nevznikají při tom zvláštní pocity. Jenom vidí, že na místě, kde ruka mizí, jsou viditelny kosti, svaly atd., jako by byla přeříznuta. Při ohmatání jest toto místo bolestivé a vzbuzuje pocit zlomeniny.

Pan Hontin pochopí rychle ohromný dosah svého objevu. Důkladnými

pokusy se mu brzy podaří vsunouti do čtyřrozměrného prostoru i větši části svého těla a zase je vrátiti do našeho světa. Muže také do čtyřrozměrného prostoru vsunouti jiné předměty. Nebo vsune na př. do čtyřrozměrného prostoru celou dolní končetinu a malým zpátečním pohybem vysune botu i s jejím obsahem zpět do našeho prostoru; tato bota a část nohy, která v ní jest, jeví se pak, jako by byla odtržená od těla a volně se vznášela ve vzduchu.

Nejpodivnější věci však zažije, když se mu po několika marných pokusech podaří vsunouti do čtyřrozměrného prostoru hlavu. Nejprve nevidí nic; pak se mu objeví směs úseček a křivých čar, které se při pohybování hlavou prostupují, zkracují a protahují, zkrátka mění podivným zpusobem. Pan Hontin usuzuje: Moje hlava jest v jakémsi novém trojrozměrném prostoru; tento seče trojrozměrný prostor, v němž byla dříve, v rovině a proto vidím v puvodním trojrozměrném prostoru jenom řezy jednotlivých předmětu s touto rovinou. Pan Hontin si tento úsudek prakticky ověří tak, že pozoruje zpola naplněnou krabici na cigarety. Opatrným pohybováním hlavy se mu podaří zjistiti řadu rovinných řezu, z nichž snadno vykonstruuje krabici i s jejím obsahem. Pan Hontin pokračuje ve svých pokusech a nabude brzy zběhlosti v tom směru, že si rychle vykonstruuje trojrozměrné předměty z rovinných řezu, které vidí rychle za sebou. Dovede rozeznati trojrozměrné předměty, které drží v ruce a ve čtyřrozměrném prostoru jimi pohybuje. Naučí se přehlédnouti vnitřek uzavřených skříní v našem prostoru, muže čísti z knih, které před ním leží uzavřeny. Jest pro něj hračkou proměniti levou botu v pravou, svléci košili, aniž by odložil vestu, vytáhnouti nohu ze zašněrované boty anebo vyjmouti předmět ze zamčeného stolu.

Posud se dařilo panu Hontinovi uchovati pokusy v tajnosti a jest přirozené, že si položí otázku, zda má svým spoluobčanum oznámiti svuj objev. Po zralé úvaze se rozhodne svěřiti své tajemství dru Willsovi, s nímž se častěji bavil o geometrii a jehož bodrého rozumu si velice váží. Snadno si představíme údiv pana dra Willse, když mu pan Hontin po prvé předvedl své pokusy o čtyřrozměrném prostoru. V následujících dnech probírají spolu možnosti, které přináší objev pana Hontina. Jest to především nezranitelná moc. Člověk, mající možnost pohybu do čtyřrozměrného prostoru, byl by v naprosté převaze nad ostatními. Pro něj by neexistovalo listovní tajemství; z nejpevnějších pokladen mohl by vyjmouti předměty, aniž by se dotkl stěn; viděl by skryté poklady v zemi; moc zákona by na něj nemohla a život každého jednotlivce z jeho okolí byl by v jeho rukou. Pan Hontin se svým přítelem přišli k poznání, že svět by vuči takovému nadčlověku zaujal stanovisko naprosto nepřátelské a snažil by se všemi zpusoby, aby jej zničil, neboť zdi žaláře by pro něj neexistovaly."