Otakar Borůvka

Sur les solutions similtanées de deux équations différentielles de Kummer [Resumé]

IVème Congrès des Mathématiciens d'Expression Latine et Commémoration d'Elie Cartan, Bucuresti-Brasov, 17-24 Sept. 1969, Résumés, 3-4

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/500130`

<u>SUR LES SOLUTIONS SIMULTANÉES DE DEUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE KUMMER</u>

Otakar Boruvka
Brno-Tchécoslovaquie

1. Là recherche des solutions simultanées de deux équations différentielles de Kummer de caractère oscillatoire peut être traitée, avec succès, par des méthodes de préférence algébriques. On dit qu'une équation différentielle de Kummer

$$(Qq) \qquad -\{X,t\} + Q(X)X'^2 = q(t)$$

est de caractère oscillatoire si les fonctions Q, q sont définies dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$ et les équations linéaires

$$(q) \qquad y'' = q(t)y \quad , \quad \ddot{Y} = Q(T)Y \qquad (Q)$$

sont oscillatoires (ce qui veut dire que les intégrales de ces équations admettent une infinité de zéros vers les deux limites de l'intervalle j). On suppose que les fonctions Q, q, appelées par occasion porteurs des équations (Q), (q), sont continues dans l'intervalle j.

2. Soit $\mathfrak{G}$ le groupe des phases (formé par les premières phases de toutes les équations oscillatoires dans l'intervalle j) et soit $\mathfrak{f}$ le sousgroupe dans $\mathfrak{G}$ consistant en toutes les premières phases de l'équation (-1). On a alors les deux décompositions du groupe $\mathfrak{G}$ en classes latérales à gauche et à droite par rapport à $\mathfrak{f}$: $\mathfrak{G}|_g\mathfrak{f}$, $\mathfrak{G}|_d\mathfrak{f}$. On sait que toute classe latérale à droite $\mathfrak{f}r \in \mathfrak{G}|_d\mathfrak{f}$ consiste en premières phases précisément d'une équation (q), à savoir celle dont le porteur (q) est donné par la formule

$$(1) \qquad q(t) = -\{r,t\} - r'^2(t)$$

Appelons blocs les différents éléments du plus petit recouvrement comun $\bar{U}$ des deux décompositions $\mathfrak{G}|_g\mathfrak{f}$, $\mathfrak{G}|_d\mathfrak{f}$:

$$\bar{U} = [\mathfrak{G}|_g\mathfrak{f}, \mathfrak{G}|_d\mathfrak{f}]$$

Soit $r \in \mathcal{G}$ un élément quelconque et désignons par $\bar{\mathfrak{u}}_r (\in \bar{U})$ le bloc contenant r et par $\mathcal{L}_r$ le sousgroupe dans $\mathfrak{f}$ défini par la formule

$$\mathcal{L}_r = r^{-1}\mathfrak{f}\, r \cap \mathfrak{f}$$

On démontre qu'il existe une représentations biunivoque $\mathcal{K}_r$ de l'ensemble $\bar{\mathfrak{u}}_r \cap \mathcal{G}|_d \mathfrak{f}$ sur $\mathfrak{f}|_d \mathcal{L}_r$ telle que 1°. $\mathcal{K}_r(\mathfrak{f} r) = \mathcal{L}_r$, 2°. $\bar{\alpha} \supset r \mathcal{K}_r \bar{\alpha}$ pour $\bar{\alpha} \in \bar{\mathfrak{u}}_r \cap \mathcal{G}|_d \mathfrak{f}$.

3. Considérons deux équations différentielles de Kummer de caractère oscillatoire $(Qq), (-1,-1)$. On a alors les résultats suivants:

Les équations $(Qq), (-1,-1)$ admettent des solutions simultanées si et seulement si les ensembles $\bar{A}$ et $\bar{\alpha}$, formés par les premières phases des équations (Q) et (q) , sont situés dans le même bloc $\bar{\mathfrak{u}}_r$.

Si cette condition est vérifiée, le système $(Qq), (-1,-1)$ peut être remplacé par le système suivant :

$$(2) \qquad \begin{gathered} [1+q_r(EX)](EX)'^2 = [1+q_r\,\varepsilon(t)]\,\varepsilon'^2(t) \\ \{X,t\} + X'^2 = 1 \end{gathered}$$

q_r désigne la fonction déterminée par r suivant la formule (1), tandis que E et ε sont des éléments arbitraires choisis dans les ensembles $\mathcal{K}_r \bar{A}$ et $\mathcal{K}_r \bar{\alpha}$.

L'ensemble $I(Q,q,-1,-1)$ formé par toutes les solutions du système $(Qq), (-1,-1)$ ou bien du système (2) qui lui est équivalent est donné pat la formule :

$$I(Q,q;-1,-1) = E^{-1}\mathcal{L}_r\,\varepsilon$$

4. La recherche des solutions simultanées de deux équations différentielles de Kummer de caractère oscillatoire quelconque, $(Q_1 q_1)$ $(Q_2 q_2)$, peut être ramenée au cas précédent. En effet, soient Q_{12} et q_{12} les porteurs des équations linéaires admettant les premières phases $A_1 A_2^{-1}$ et $\alpha_1 \alpha_2^{-1}$ formées à l'aide de premières phases, arbitraires, A_1, A_2 et α_1, α_2 des équations $(Q_1),(Q_2)$ et $(q_1)(q_2)$. On démontre que les équations $(Q_1 q_1)$, $(Q_2 q_2)$ admettent des solutions simultanées si et seulement si les ensembles $\bar{A}_{12}$ et $\bar{\alpha}_{12}$ consistant en premières phases des équations (Q_{12}) et (q_{12}) sont situés dans le même bloc $\bar{\mathfrak{u}}_r$.