Otakar Borůvka

Sur les correspondences analytiques entre deux plans projectifs. I

Spisy přír. fak. MU, č. 72, 1926, 40 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500092

S P I S Y
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

ROK 1926 Čís. 72

SUR LES CORRESPONDANCES ANALYTIQUES ENTRE DEUX PLANS PROJECTIFS

PREMIÈRE PARTIE

PAR

OTAKAR BORŮVKA

VYCHÁZÍ S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDÁVÁ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 63

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

TISKEM POLYGRAFIE V BRNĚ.

SUR LES CORRESPONDANCES ANALYTIQUES ENTRE DEUX PLANS PROJECTIFS. I.

Soient x_0, y_0 un point géométrique du plan (A) et ξ_0, η_0 un point géométrique du plan (B) et considérons une correspondance analytique biunivoque entre ces deux plans qui est définie aux voisinages de ces deux points géométriques. Dans le plan projectif (A) faisons alors correspondre à chaque point géométrique x, y dans le voisinage du point géométrique x_0, y_0 un point A et de la même manière faisons correspondre dans le plan projectif (B) à chaque point géométrique ξ, η qui correspond dans la correspondance considérée au point géométrique x, y, un point B (ce seront en réalité des ensembles de trois coordonnées projectives rapportées à deux systèmes de référence fixes). On obtient ainsi une correspondance analytique entre deux plans projectifs (A), (B).

Ce travail a été écrit sur l'iniciative de M. *E. Čech,* professeur à la Faculté des Sciences; il doit former la première partie d'un Mémoire plus étendu sur les correspondances analytiques en général, et de ses propriétés invariantes par rapport aux couples de transformations du groupe projectif en particulier. Nous allons appliquer ici la *méthode des systèmes de référence mobiles**. Une correspondance analytique entre deux plans projectifs étant donnée, imaginons qu'on ait associé aux deux point correspondants A, B des points A_1, A_2, B_1, B_2 comme des fonctions holomorphes de x, y, de sorte que les points A, A_1, A_2 d'une part, les points B, B_1, B_2 d'autre part soient indépendantes, quelque soit le point géométrique x, y. On peut alors prendre chacun de deux systèmes A, A_1, A_2; B, B_1, B_2 comme un système de référence mobile, et par suite on peut en particulier écrire identiquement les différentielles dA, dA_1, dA_2 comme des combinaisons homogènes des points A, A_1, A_2 et de la même manière on peut écrire identiquement les différentielles dB, dB_1, dB_2 comme des combinaisons homogènes des points B, B_1, B_2. Les coordonnées homogènes ω_{jk}, τ_{jk} de ces différentielles par rapport à ces systèmes mobiles étant des formes différentielles linéaires aux dx, dy, on voit qu'elles constituent *un système complet d'invariants* de la correspondance considérée, par rapport aux couples de transformations du groupe projectif.

La méthode que j'applique ici pour déterminer tels systèmes mobiles

* V. p. ex. *E. Čech,* Sur les surfaces dont toutes les courbes de Segre sont planes p. 4—6. (Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, No. 11, 1923).

a été employée par M. *E. Cartan* dans ses études sur la déformation projective des surfaces* et sur divers problèmes de la géométrie. En appliquant cette méthode on introduit tout d'abord les coordonnées projectives des points A, A_1, A_2; B, B_1, B_2 d'une part et les coordonnés des points géométriques x, y; ξ, η d'autre part, comme variables indépendantes. Alors on fait lier ces variables avant tout par des relations exprimant que les points soit A, A_1, A_2 soit B, B_1, B_2 soient indépendantes et par celles qui font correspondre le point A au point géomètrique x, y et le point B au point géométrique ξ, η. On les lie enfin par les relations définissant la correspondance donnée. On obtient ainsi des systèmes de référence mobiles qui dépendent d'un certain nombre des paramètres surabondants et qui donnent lieu aux systèmes des équations différentielles. A l'aide de celles-ci on définit de proche en proche les fonctions holomorphes dont on se serve pour lier les variables par des relations nouvelles. Les variables étant liées par vingt relations indépendantes, les systèmes de référence mobiles sont parfaitement déterminés, de sorte qu'on les peut regarder comme fonctions des seules variables indépendantes x, y. Les systèmes d'équations différentielles obtenus définissent alors un système complet d'invariants de la correspondance considérée.

Dans cette première partie j'ai trouvé tels systèmes d'équations différentielles ayant exclu un certain nombre de cas singuliers. Les résultats ici obtenus montrent que, une correspondance analytique entre deux plans projectifs étant donnée, le système complet d'invariants dépende tout d'abord d'une forme cubique différentielle Ψ. L'équation $\Psi=0$ définit à chaque point géométrique du voisinage considéré d'un plan des directions que j'appelle *directions caractéristiques de la correspondance donnée à ce point géométrique.* Je montre que, *pour qu'à un point d'inflexion d'une courbe quelconque du plan (A) corresponde dans la correspondance donnée un point d'inflexion de la courbe correspondante du plan (B), il faut et il suffit que la direction de cette courbe à ce point soit une direction caractéristique.* En tenant compte du nombre des directions caractéristiques distinctes à un point géométrique, je suis amené à classifier les correspondances analytiques au point géométrique considéré et à ce point de vue, je divise les correspondances analytiques en quatre espèces:

Correspondances analytiques de la première espèce, s'il y a, au point géométrique considéré et dans un certain voisinage de ce point, *trois directions caractéristique et trois seulement; correspondances analytiques de la deuxième espèce,* s'il y a, au point géométrique considéré et dans un certain voisinage de ce point, *deux directions caractéristiques et deux seulement; correspondances analytiques de la troisième espèce,* s'il y a,

---

* Annales scientifiques de l'école normale supérieure, sér. 3., t. XXXVII (1920).

au point géométrique considéré et dans un certain voisinage de ce point, *une direction caractéristique et une seule; correspondances analytiques de la quatrième espèce,* si au point géométrique considéré et dans un certain voisinage de ce point, *toute direction est une direction caractéristique.*

Les correspondances analytiques de la deuxième et de la troisième espèce se partagent elles mêmes en plusieurs types.

Après avoir formé les équations différentielles on est amené à plusieurs problèmes qui, quand ils se rattachent aux correspondances de la première et de la deuxième espèce ne sont pas résolus ici. Je reviendrai dans un autre Mémoire sur ces questions spéciales. Quant aux correspondances *de la troisième espèce,* on voit presqu' immédiatement qu'il y en a deux types: Les correspondances *du type général* dépendent dans un cas d'une fonction arbitraire d'un argument *et ses courbes caractéristiques* (c'est-à-dire les courbes, dont la direction à chaque point est une direction caractéristique) *sont projectivement identiques.* Les correspondances *de deuxième type* dépendent de deux constantes arbitraires *et ses courbes caractéristiques ne sont pas en général projectivement identiques. Les correspondances de la quatrième espèce ne sont que des correspondances projectives.*

J'adresse à M. le professeur E. Čech mes affectueux remercîments pour ses conseils et pour l'intérêt avec lequel il suivit mon travail.

Brno, février 1926.

1. Considérons, dans un espace projectif à deux dimensions, un système de coordonnées projectives fixe. Nous désignerons par une lettre majuscule telle que A l'ensemble de trois coordonnées $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$. Quand il n'y aura pas de confusion à craindre, nous parlerons, pour abréger, du point A, entendant par là le point dont les coordonnées *homogènes* sont les trois nombres représentés par la lettre A.

Cela posé, considérons deux systèmes mobiles formés de 2. 3 points*

$$A, A_1, A_2; \quad B, B_1, B_2$$

assujettis aux conditions**

$$(AA_1A_2) = 1; \quad (BB_1B_2) = 1. \tag{1}$$

Chacun d'eux peut être regardé comme un système de référence mobile d'un plan, en ce sens que tout point M peut d'une manière et d'une seule, être mis par exemple sous la forme

$$M = xA + x_1A_1 + x_2A_2,$$

x, x_1, x_2 étant les coordonnées du point M.

On a en particulier

$$\begin{aligned}
dA &= \omega_{00}A + \omega_{01}A_1 + \omega_{02}A_2, & dB &= \tau_{00}B + \tau_{01}B_1 + \tau_{02}B_2,\\
dA_1 &= \omega_{10}A + \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2, & dB_1 &= \tau_{10}B + \tau_{11}B_1 + \tau_{12}B_2,\\
dA_2 &= \omega_{20}A + \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2, & dB_2 &= \tau_{20}B + \tau_{21}B_1 + \tau_{22}B_2,
\end{aligned} \tag{2}$$

où les ω_{jk}, τ_{jk} sont des expressions linéaires par rapport aux différentielles des paramètres; *elles sont indépendantes entre eux pour toutes les valeurs des paramètres qui satisfont aux conditions* (1). Grâce à ces conditions, tout système des différentielles des paramètres $\{T\}$ satisfait aux équations linéaires

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} = 0, \qquad \tau_{00} + \tau_{11} + \tau_{22} = 0 \tag{3}$$

et si l'on exprime que les covariants bilinéaires des seconds membres des équations (2) sont identiquement nuls, on obtient que chaque couple de systèmes des différentielles des paramètres remplit les relations quadratiques fondamentales***

---

* Ce sont donc en réalité 18 paramètres. Je désignerai dorénavant l'ensemble de ces paramètres par le symbole $\{T\}$.

** Je désigne par (AA_1A_2) le déterminant $\Sigma \pm A^{(1)} A_1^{(2)} A_2^{(3)}$.

*** *E. Cartan*, Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien (Bull. Soc. math. de France t. XLVII, 1919, pp. 125—160 et t. XLVIII, 1920, pp. 132—208). J'écrirai dorénavant $\omega_1, \omega_2, \tau_1, \tau_2$ au lieu de $\omega_{01}, \omega_{02}, \tau_{01}, \tau_{02}$.

$$\begin{aligned} \omega'_{kj} &= [\omega_{k0}\omega_{0j}] + [\omega_{k1}\omega_{1j}] + [\omega_{k2}\omega_{2j}], \\ \tau'_{kj} &= [\tau_{k0}\tau_{0j}] + [\tau_{k1}\tau_{1j}] + [\tau_{k2}\tau_{2j}] \qquad (k, j = 0, 1, 2). \end{aligned} \tag{4}$$

2. Soient maintenant x, y les coordonnées d'un point géométrique d'un plan (A) et ξ, η celles d'un point géométrique d'un plan (B). Faisons correspondre à chaque point géométrique x, y du plan (A) un système de référence mobile dont le premier point A coïncide en position avec x, y et de la même manière faisons correspondre à chaque point géométrique ξ, η du plan (B) un système de référence mobile dont le premier point B coïncide en position avec ξ, η. Cela revient à lier les parametrès par les relations

$$\begin{gathered} A^{(1)} = xA^{(3)}, \; A^{(2)} = yA^{(3)}; \; B^{(1)} = \xi B^{(3)}, \; B^{(2)} = \eta B^{(3)}, \\ (A^{(3)} \neq 0, \; B^{(3)} \neq 0) \end{gathered} \tag{5}$$

les x, y; ξ, η étant les variables nouvelles.

On en déduit facilement que *les expressions de Pfaff* ω_1, ω_2 *sont linéairement distinctes par rapport aux* dx, dy *et que les expressions* τ_1, τ_2 *sont linéairement distinctes par rapport aux* $d\xi$, $d\eta$.

Cela posé, considérons une correspondance analytique entre deux plans (A) et (B) qui est définie dans les voisinages des points géométriques x_0, y_0; ξ_0, η_0 par des formules

$$\xi = f(x, y), \quad \eta = g(x, y), \tag{6}$$

les f *et* g *étant des fonctions des variables* x, y *holomorphes et indépendantes au point* x_0, y_0.

Les formules (6) définissent deux nouvelles relations entre les variables et ces relations entraînent à leur tour deux relations entre les différentielles des variables qui, comme on s'assure facilement, ont la forme

$$\begin{aligned} \tau_1 &= f_{11}\omega_1 + f_{12}\omega_2, \\ \tau_2 &= f_{21}\omega_1 + f_{22}\omega_2, \end{aligned} \tag{7}$$

les $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ étant, au facteur $[A^{(3)}]^{-2}$ près, des polynômes aux paramètres $\{T\}$, dont les coefficients dépendent de x, y. Le point géométrique x, y étant x_0, y_0 ou suffisamment voisin à celui-ci, le déterminant $\Sigma \pm f_{11} f_{12}$ est différent de zéro pour toutes les valeurs des paramètres $\{T\}$ qui satisfont aux liaisons faites.

3. Il résulte de huit liaisons (1), (5), (6) établies entre les variables que tout système des différentielles admissible remplit huit équations linéaires indépendantes. Celles-ci définissent inversement pour tout système admissible des variables (c'est-à-dire pour tout système des variables satisfaisant aux liaisons faites) l'élément plan E_{14} à *14* dimensions*. Les relations nouvelles $x = Const$, $y = Const$ entre les variables

---

* Voir p. ex. *E. Goursat*, Leçons sur le Problème de Pfaff (Paris, 1922), spécialement le Chapitre VIII, p. 343.

ont comme conséquence les équations $dx = dy = 0$ entre les différentielles; celles-ci définissent inversement avec les équations qui définissent l'élément plan E_{14}, l'élément plan $\mathcal{E}_{12}$ à *12* dimensions. En ajoutant de proche en proche des relations nouvelles entre les variables, nous abaisserons les dimensions des éléments plans E_{14}, $\mathcal{E}_{12}$ et nous désignerons par le symbole δ chaque élément linéaire de l'élément plan $\mathcal{E}_\nu$ $(\nu = 12, 11 \ldots)$ en question, et par des symboles e_{jk}, t_{jk} les formes ω_{jk}, τ_{jk}, quand nous les considérons comme lieu de ces éléments linéaires. S'il s'agit de l'élément plan $E_{\nu+2}$, nous employons les symboles resp. d, ω_{jk}, τ_{jk}.

On a donc par ex. pour $\nu = 12$

$$\begin{gathered} e_{00} + e_{11} + e_{22} = 0, \quad t_{00} + t_{11} + t_{22} = 0, \\ e_1 = e_2 = t_1 = t_2 = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

4. Nous allons maintenant établir un lemme de M. E. Cartan* sur lequel nous nous appuierons dans la suite.

Soient $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_r$; $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_r$ *un système des formes linéaires en* $n\,(> r)$ *variables aux coefficients numériques, les formes* $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_r$ *étant indépendantes. Soit* E *l'élément plan à* n-m $(\geqq r)$ *dimensions qui est défini par un système de* m *équations* $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_m = 0$, *linéaires et homogènes en* n *variables, faisant avec les équations* $\varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = \varrho_r = 0$ *un système des équations distinctes.*

Si chaque couple d'éléments linéaires de l'élément plan E *satisfait à la relation quadratique extérieure*

$$[\varrho_1 \sigma_1] + [\sigma_2 \varrho_2] + \ldots + [\varrho_r \sigma_r] = 0,$$

il existe un élément plan $\mathcal{E}$, *renfermant l'élément plan* E, *défini par un système des équations linéaires homogènes de la forme*

$$\sigma_i - \sum_{k-1}^{r} a_{ik} \varrho_k = 0;$$

les a_{ik} *ont la forme* $p^{-1}_{\cdot} p_{ik}$, p *et* p_{ik} *désignant des polynômes aux coefficients des formes* ϱ_i, σ_i, ε_i *et ils forment un tableau symétrique.*

En effet, les formes ϱ_i étant indépendantes et $n > r$, on peut, d'une infinité de manières, trouver n-r nouvelles formes $\tau_1, \tau_2, \ldots$ aux mêmes variables, formant avec $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_r$ un système de n formes linéairement distinctes, et toute forme est une combinaison linéaire de ces n formes. On a donc en particulier identiquement

$$\sigma_i = \sum_k a_{ik} \varrho_k + \sum_j b_{ij} \tau_j$$

où a_{ik}, b_{ij} $(i, k = 1, 2, \ldots r;\ j = 1, 2, \ldots n\text{-}r)$ ont la forme $p^{-1}.p_{ik}$, $p^{-1}.\gamma_{ij}$, les p, p_{ik}, γ_{ij} désignant des polynômes aux coefficients des formes σ_i, ϱ_i, τ_j.

---

* Voir E. Cartan: Sur les variétés de courbure constante etc. Bull. de la Société Mathématique, t. XLVII., 1919, p. 151.

Supposons, d'après l'hypothèse, que chaque couple d'éléments linéaires de cet élément plan satisfait à la relation quadratique extérieure

$$\sum_{i,k} a_{ik}\,[\varrho_i\varrho_k] + \sum_{i,j} b_{ij}\,[\varrho_i\tau_j] = 0.$$

Les formes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$ formant d'après l'hypothèse avec les formes $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_r$ un système de formes linéairement distinctes, on peut les choisir pour formes $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_m$ et on peut supposer que tous les coefficients des formes $\tau_{m+1}, \tau_{m+2}, \ldots \tau_{n-r}$ soient égaux soit à 1 soit à 0 de sorte que p, p_{ik}, γ_{ij} seront des polynômes en coefficients des formes ϱ_i, σ_i, ε_l seulement.

Cela posé, considérons deux éléments linéaires arbitraires de l'élément plan E et désignons pour eux les formes ϱ_i, τ_j par des symboles ϱ_i, τ_j resp. r_i, t_j. Puis nous avons manifestement

$$\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_m = t_1 = t_2 = \ldots = t_m = 0$$

et on peut mettre la dernière relation sous la forme

$$\sum_i r_i \Big\{\sum_k (a_{ik} - a_{ki})\,\varrho_k + \sum_{j=m+1}^{n-r} b_{ij}\tau_j\Big\} - \sum_{j=m+1}^{n-r} t_j \sum_i b_{ij}\varrho_i = 0.$$

Cette relation étant valable pour chaque couple d'éléments linéaires de l'élément plan E, on a donc nécessairement pour tout élément linéaire de l'élément plan E

$$\sum_k (a_{ik} - a_{ki})\,\varrho_k + \sum_{j=m+1}^{n-r} b_{ij}\tau_j = 0$$

d'où on tire facilement

$$a_{ik} - a_{ki} = 0;\; b_{ij} = 0, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots r;\; j = m+1, \ldots n-r)$$

ce qu'il fallait démontrer.

5. Nous allons montrer qu'on peut lier les variables par les relations nouvelles

$$f_{11} = 1,\; f_{12} = 0,\; f_{21} = 0,\; f_{22} = 1. \tag{9}$$

A ce but il suffit évidemment de démontrer que, x, y étant le point géométrique fixe x_0, y_0 ou un point géométrique fixe suffisamment voisin à celui-ci, les équations linéaires $\delta f_{11} = \delta f_{12} = \delta f_{21} = \delta f_{22} = 0$ constituent avec les équations qui définissent l'élément plan $\mathcal{E}_{12}$ un système d'équations linéairement distinctes, quellesque soient les valeurs admissibles des paramètres $\{T\}$.

Chaque couple d'éléments linéaires de l'élément plan E_{14} remplit les relations quadratiques extérieures dérivées de relations (7)

$$\begin{aligned}
&[\omega_1(df_{11} + f_{11}\overline{\omega_{00} - \tau_{00} - \omega_{11} + \tau_{11}} + f_{21}\,\tau_{21} - f_{12}\,\omega_{12})] + \\
&+ [\omega_2(df_{12} + f_{12}\overline{\omega_{00} - \tau_{00} - \omega_{22} + \tau_{11}} + f_{22}\tau_{21} - f_{11}\omega_{21})] = 0, \\
&[\omega_1(df_{21} + f_{21}\overline{\omega_{00} - \tau_{00} - \omega_{11} + \tau_{22}} + f_{11}\tau_{12} - f_{22}\,\omega_{12})] + \\
&+ [\omega_2(df_{22} + f_{22}\overline{\omega_{00} - \tau_{00} - \omega_{22} + \tau_{22}} + f_{12}\tau_{12} - f_{21}\omega_{21})] = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Les formes ω_1, ω_2 constituent avec les formes qui définissent l'élément plan E_{14} un système d'équations linéairement distinctes. D'après le lemme de M. E. Cartan ils existent donc les éléments plans $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ qui renferment l'élément plan E_{14} et qui sont définis par les systèmes d'équations linéaires de la forme

$$
\begin{array}{ll}
(E^{1)}) & \begin{array}{l} df_{11}+f_{11}\overline{\omega_{00}-\tau_{00}-\omega_{11}+\tau_{11}}+f_{21}\tau_{21}-f_{12}\omega_{12}=a_{11}^{(1)}\omega_1+a_{12}^{(1)}\omega_2, \\ df_{12}+f_{12}\overline{\omega_{00}-\tau_{00}-\omega_{22}+\tau_{11}}+f_{22}\tau_{21}-f_{11}\omega_{21}=a_{12}^{(1)}\omega_1+a_{22}^{(1)}\omega_2, \end{array} \\
(E^{(2)}) & \begin{array}{l} df_{22}+f_{22}\overline{\omega_{00}-\tau_{00}-\omega_{22}+\tau_{22}}+f_{12}\tau_{12}-f_{21}\omega_{21}=a_{21}^{(2)}\omega_1+a_{22}^{(2)}\omega_2, \\ df_{21}+f_{21}\overline{\omega_{00}-\tau_{00}-\omega_{11}+\tau_{22}}+f_{11}\tau_{12}-f_{22}\omega_{12}=a_{11}^{2)}\omega_1+a_{21}^{(2)}\omega_2. \end{array}
\end{array}
\tag{11}
$$

Les $a_{11}^{(1)}, \ldots a_{22}^{(2)}$ sont les fonctions rationnelles des coefficients des équations qui définissent l'élément plan E_{14} et des formes qui se trouvent dans ces équations; ce sont donc des fonctions rationnelles des paramètres $\{T\}$ qui n'ont pas des points singuliers.

Un élément linéaire quelconque de l'élément plan $\mathcal{E}_{12}$ remplit donc le système d'équations linéaires

$$
\begin{aligned}
&\delta f_{11}+f_{11}\overline{e_{00}-t_{00}-e_{11}+t_{11}}+f_{21}t_{21}-f_{12}e_{12}=0, \\
&\delta f_{12}+f_{12}\overline{e_{00}-t_{00}-e_{22}+t_{11}}+f_{22}t_{21}-f_{11}e_{21}=0, \\
&\delta f_{22}+f_{22}\overline{e_{00}-t_{00}-e_{22}+t_{22}}+f_{12}t_{12}-f_{21}e_{21}=0, \\
&\delta f_{21}+f_{21}\overline{e_{00}-t_{00}-e_{11}+t_{22}}+f_{11}t_{12}-f_{22}e_{12}=0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

On en conclut que l'élément plan qui est défini pour tout système admissible de paramètres $\{T\}$ par l'élément plan $\mathcal{E}_{12}$ et par les équations $\delta f_{11}=\delta f_{12}=\delta f_{21}=\delta f_{22}=0$ se confond avec l'élément plan qui est défini pour le même système des paramètres par l'élément plan $\mathcal{E}_{12}$ et par les équations

$$
\begin{aligned}
&f_{11}\overline{e_{00}-t_{00}-e_{11}+t_{11}}+f_{21}t_{21}-f_{12}e_{12}=f_{12}\overline{e_{00}-t_{00}-e_{22}+t_{11}}+f_{22}t_{21}-f_{11}e_{21}= \\
&=f_{22}\overline{e_{00}-t_{00}-e_{22}+t_{22}}+f_{12}t_{12}-f_{21}e_{21}=f_{21}\overline{e_{00}-t_{00}-e_{11}+t_{22}}+f_{11}t_{12}-f_{22}e_{12}=0.
\end{aligned}
$$

Cet élément plan a huit dimensions, car les équations qui le définissent sont linéairement distinctes. En effet, on s'assure facilement que, si ces équations étaient dépendantes on aurait necéssairement $f_{11}f_{22}-f_{12}f_{21}=0$, ce qui n'est pas vrai, le point géométrique x, y étant le point x_0, y_0 ou un point géométrique quelconque suffisamment voisin à celui-ci.

On voit donc que l'élément plan défini par l'élément plan $\mathcal{E}_{12}$ et par les équations $\delta f_{11}=\delta f_{12}=\delta f_{21}=\delta f_{22}=0$ a huit dimensions; les équations qui le définissent sont donc linéairement distinctes.

En ne considérant ici que les points géométriques x, y suffisamment voisins au point géométrique x_0, y_0 ou celui-ci, lions alors les variables par les relations nouvelles (9). Les équations (7) auront la forme

$$
\tau_1=\omega_1;\ \tau_2=\omega_2. \tag{13}
$$

6. La liaison des variables par les relations (9) a comme conséquence que chacun des éléments linéaires de l'élément plan E_{10} remplit les équations linéaires, d'après (11),

$$\begin{aligned} \omega_{00} - \tau_{00} - \omega_{11} + \tau_{11} &= a_{11}^{(1)} \omega_1 + a_{12}^{(1)} \omega_2, \\ \tau_{21} - \omega_{21} &= a_{12}^{(1)} \omega_1 + a_{22}^{(1)} \omega_2, \\ \omega_{00} - \tau_{00} - \omega_{22} + \tau_{22} &= a_{21}^{(2)} \omega_1 + a_{22}^{(2)} \omega_2, \\ \tau_{12} - \omega_{12} &= a_{11}^{(2)} \omega_1 + a_{21}^{(2)} \omega_2, \end{aligned} \tag{14}$$

quellesque soient les valeurs admissibles des variables. On en tire en se servant des équations (3) et en posant pour abréger $a_1 = a_{11}^{(1)} + a_{21}^{(2)}$, $a_2 = a_{12}^{(1)} + a_{22}^{(2)}$ que les mêmes éléments linéaires verifient aussi l'équation

$$\omega_{00} - \tau_{00} = \tfrac{1}{3} a_1 \omega_1 + \tfrac{1}{3} a_2 \omega_2. \tag{15}$$

Tout élément linéaire de l'élément plan $\mathcal{E}_8$ satisfait aux équations linéaires, d'après (8), (14), (15),

$$e_{00} - t_{00} = e_1 - t_1 = e_2 - t_2 = e_{11} - t_{11} = e_{12} - t_{12} = e_{21} - t_{21} = e_{22} - t_{22} = 0. \tag{16}$$

7. Nous allons montrer qu'il est permis de lier les variables par les relations nouvelles

$$a_1 = a_2 = 0. \tag{17}$$

Pour cela, nous suivrons exactement la même marche qu'au N° 5. Il suffit manifestement de montrer que, x, y étant un point géométrique fixe, les équations $\delta a_1 = \delta a_2 = 0$ constituent avec les équations qui définissent l'élément plan $\mathcal{E}_8$ un système d'équations linéairement distinctes, quellesque soient les valeurs admissibles des paramètres $\{T\}$.

Chaque couple d'éléments linéaires de l'élément plan E_{10} remplit pour un système admissible quelconque de variables la relation quadratique extérieure qui est dérivée de la relation (15)

$$\begin{aligned} &[\omega_1 (\omega_{10} - \tau_{10} + \tfrac{1}{3}\, \overline{d a_1 - a_1 \overline{\omega_{11}} - \omega_{00} - a_2 \omega_{12}})] + \\ &+ [\omega_2 (\omega_{20} - \tau_{20} + \tfrac{1}{3}\, \underline{d a_2 - a_2 \overline{\omega_{22} - \omega_{00}} - a_1 \omega_{21}})] = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Les formes ω_1, ω_2 constituent avec les formes qui définissent l'élément plan E_{10} un système de formes linéairement distinctes. Il existe donc, d'après le lemme de M. E. Cartan un élément plan $E^{(1)}$ qui renferme l'élément plan E_{10} et qui est défini par un système de deux équations linéaires homogènes de la forme

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3} d a_1 + \omega_{10} - \tau_{10} - \tfrac{1}{3} a_1 (\omega_{11} - \omega_{00}) - \tfrac{1}{3} a_2 \omega_{12} &= b_{11} \omega_1 + b_{12} \omega_2, \\ \tfrac{1}{3} d a_2 + \omega_{20} - \tau_{20} - \tfrac{1}{3} a_2 (\omega_{22} - \omega_{00}) - \tfrac{1}{3} a_1 \omega_{21} &= b_{12} \omega_1 + b_{22} \omega_2. \end{aligned} \tag{19}$$

Les b_{11}, b_{12}, b_{22} sont des fonctions rationnelles des coefficients des formes qui définissent l'élément plan E_{10} et de celles qui se trouvent dans ces équations; ce sont donc des fonctions rationnelles des paramètres $\{T\}$ qui n'ont pas des points singuliers.

Un élément linéaire quelconque de l'élément plan $\mathcal{E}_8$ remplit donc le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{3}\,\delta a_1+e_{10}-t_{10}-\tfrac{1}{3}\,a_1\,(e_{11}-e_{00})-\tfrac{1}{3}\,a_2\,e_{12}=0,\\&\tfrac{1}{3}\,\delta a_2+e_{20}-t_{20}-\tfrac{1}{3}\,a_2\,(e_{22}-e_{00})-\tfrac{1}{3}\,a_1\,e_{21}=0.\end{aligned}\tag{20}$$

L'élément plan qui est défini par l'élément plan $\mathcal{E}_8$ et par les équations $\delta a_1=\delta a_2=0$ se confond donc avec l'élément plan qui est défini par le même système de variables par l'élément plan $\mathcal{E}_8$ et par les équations

$$e_{10}-t_{10}-\tfrac{1}{3}\,a_1\,(e_{11}-e_{00})-\tfrac{1}{3}\,a_2 e_{12}=e_{20}-t_{20}-\tfrac{1}{3}\,a_2\,(e_{22}-e_{00})-\tfrac{1}{3}\,a_1\,e_2=0.$$

Cet élément plan a six dimensions, car les équations qui le définissent sont manifestement linéairement distinctes. On voit donc que l'élément plan qui est défini par l'élément plan $\mathcal{E}_8$ et par les équations $\delta a_1=\delta a_2=0$ a six dimensions; les équations qui le définissent sont donc linéairement distinctes.

Lions alors les variables par les relations nouvelles (17). L'équation (15) aura la forme

$$\tau_{00}=\omega_{00}.\tag{21}$$

Quant aux équations (14), on les écrira, en posant pour abréger $a_{11}^{(1)}=c_1$, $-a_{11}^{(2)}=c_0$, $a_{12}^{(1)}=c_2$, $a_{22}^{(1)}=c_3$,

$$\begin{aligned}&\omega_{11}-\tau_{11}=-c_1\,\omega_1-c_2\,\omega_2, &&\omega_{22}-\tau_{22}=c_1\,\omega_1+c_2\,\omega_2,\\&\omega_{21}-\tau_{21}=-c_2\,\omega_1-c_3\,\omega_2, &&\omega_{12}-\tau_{12}=c_0\,\omega_1+c_1\,\omega_2,\end{aligned}\tag{22}$$

ou, en introduisant la forme cubique binaire

$$\begin{gathered}\Psi=c_0\omega_1^3+3c_1\omega_1^2\omega_2+3c_2\omega_1\omega_2^2+c_3\omega_2^3,\\ \omega_{12}-\tau_{12}-\frac{1}{6}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\omega_1^2},\quad \omega_{11}-\tau_{11}=-\frac{1}{6}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\omega_1\partial\omega_2},\quad \omega_{21}-\tau_{21}=-\frac{1}{6}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\omega_2^2}.\end{gathered}\tag{23}$$

8. La liaison des variables par les relations (17) a comme conséquence que, en posant pour abréger $g_1=b_{11}$, $g=b_{12}$, $g_2=b_{22}$, un élément linéaire quelconque de l'élément plan E_8 remplit les équations linéaires, d'après (19),

$$\begin{aligned}\omega_{10}-\tau_{10}&=g_1\,\omega_1+g\omega_2,\\\omega_{20}-\tau_{20}&=g\omega_1+g_2\,\omega_2.\end{aligned}\tag{24}$$

Chacun des éléments linéaires de l'élément plan $\mathcal{E}_6$ satisfait donc aux équations linéaires, d'après (16), (24),

$$\begin{aligned}e_{00}-t_{00}=e_1-t_1=e_2-t_2=e_{10}-t_{10}=e_{11}-t_{11}=e_{12}-t_{12}=\\=e_{20}-t_{20}=e_{21}-t_{21}=e_{22}-t_{22}=0.\end{aligned}\tag{25}$$

9. Nous allos montrer qu'il est permis de lier les variables par les relations nouvelles

$$g_1=g_2=0.\tag{26}$$

A ce but, il suffit évidemment de montrer que, x, y étant un point géométrique fixe, les équations $\delta g_1=\delta g_2=0$ constituent avec les équations qui définissent l'élément plan $\mathcal{E}_6$, un système d'équations linéairement distinctes, quellesque soient les valeurs admissibles des paramètres $\{T\}$.

Chaque couple d'éléments linéaires de l'élément plan E_8 remplit les relations quadratiques extérieures dérivées des relations (24)

$$\begin{gathered}[\omega_1(dg_1-4g_1\omega_{11}-2g\omega_{12}-2g_1\omega_{22}+\omega_{20})]+\\+[\omega_2(dg-3g\omega_{11}-g_2\omega_{12}-g_1\omega_{21}-3g\omega_{22})]-g_2[\omega_1\omega_2]=0,\\ [\omega_1(dg-3g\omega_{11}-g_2\omega_{12}-g_1\omega_{21}-3g\omega_{22})]+\\+[\omega_2(dg_2-2g_2\omega_{11}-2g\omega_{21}-4g_2\omega_{22}+\omega_{10})]+g_1[\omega_1\omega_2]=0.\end{gathered}\tag{27}$$

Ils existent donc d'après le lemme de M. E. Cartan des éléments plans $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ qui renferment l'élément plan E_8 et qui sont définis par des systèmes d'équations linéaires de la forme

$$\begin{aligned}&dg_1-4g_1\omega_{11}-2g\omega_{12}-2g_1\omega_{22}+\omega_{20}=v_1\omega_1+(w_2+g_2)\,\omega_2,\\&dg-3g\omega_{11}-g_2\omega_{12}-g_1\omega_{21}-3g\omega_{22}=w_2\omega_1+w_1\omega_2,\\&dg_2-2g_2\omega_{11}-2g\omega_{21}-4g_2\omega_{22}+\omega_{10}=(w_1+g_1)\,\omega_1+v_2\omega_2.\end{aligned}\tag{28}$$

Un élément linéaire quelconque de l'élément plan $\mathcal{E}_6$ remplit donc le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned}\delta g_1&=4g_1e_{11}+2ge_{12}+2g_1e_{22}-e_{20},\\\delta g&=3ge_{11}+g_2e_{12}+g_1e_{21}+3ge_{22},\\\delta g_2&=2g_2e_{11}+2ge_{21}+4g_2e_{22}-e_{10}.\end{aligned}\tag{29}$$

L'élément plan qui est défini par l'élément plan $\mathcal{E}_6$ et par les équations $\delta g_1=\delta g_2=0$ se confond donc avec l'élément plan qui est défini pour le même système de paramètres par l'élément plan $\mathcal{E}_6$ et par les équations

$$4g_1e_{11}+2ge_{12}+2g_1e_{22}-e_{20}=2g_2e_{11}+2ge_{21}+4g_2e_{22}-e_{10}=0.$$

Cet élément plan a quatre dimensions, car les équations qui le définissent sont manifestement linéairement distinctes. On voit donc que l'élément plan qui est défini par l'élément plan $\mathcal{E}_6$ et par les équations $\delta g_1=\delta g_2=0$ a quatre dimensions; les équations qui le définissent sont donc linéairement distinctes.

Lions alors les variables par les relations nouvelles (26). Les équations (24) s'écriront

$$\begin{aligned}\omega_{10}-\tau_{10}&=g\omega_2,\\\omega_{20}-\tau_{20}&=g\omega_1.\end{aligned}\tag{30}$$

10. La liaison des variables par les relations (26) a comme conséquence qu'un élément linéaire quelconque de l'élément plan correspondant E_6 remplit les équations linéaires, d'après (28),

$$\begin{aligned}-2g\omega_{12}+\omega_{20}&=v_1\omega_1+w_2\omega_2,\\-2g\omega_{21}+\omega_{10}&=w_1\omega_1+v_2\omega_2,\\dg+3g\omega_{00}&=w_2\omega_1+w_1\omega_2;\end{aligned}\tag{31}$$

on déduit facilement, en les différentiant, que chaque couple d'éléments linéaires de cet élément plan satisfait aux relations quadratiques extérieures

$$
\begin{aligned}
&[\omega_1(dv_1-3v_1\omega_{11}-3w_2\omega_{12}-w_1\omega_{21}-3v_1\omega_{22})]+\\
&+[\omega_2(dw_2-2w_2\omega_{11}-2w_1\omega_{12}-\overline{v_1+v_2-4g^2}\,\omega_{21}-4w_2\omega_{22})]+\\
&+6g[\omega_{12}\omega_{11}]-2gw_1[\omega_1\omega_2]=0,\\
&[\omega_1(dw_1-4w_1\omega_{11}-\overline{v_1+v_2-4g^2}\,\omega_{12}-2w_2\omega_{21}-2w_1\omega_{22})]+\\
&+[\omega_2(dv_2-3v_2\omega_{11}-w_2\omega_{12}-3w_1\omega_{21}-3v_2\omega_{22})]+\\
&+6g[\omega_{21}\omega_{22}]-2gw_2[\omega_2\omega_1]=0,\\
&[\omega_1(dw_2-5w_2\omega_{11}-w_1\omega_{12}+6g^2\omega_{21}-4w_2\omega_{22})]+\\
&+[\omega_2(dw_1-4w_1\omega_{11}+6g^2\omega_{12}-w_2\omega_{21}-5w_1\omega_{22})]+3g\overline{v_2-v_1}\,[\omega_1\omega_2]=0.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

De ces relations et de (31) on tire immédiatement que chaque élément linéaire de l'élément plan $\mathcal{E}_4$ remplit outre (25) les équations

$$
\begin{aligned}
\delta g &= 3ge_{11} + 3ge_{22},\\
\delta w_1 &= 4w_1e_{11}-6g^2e_{12}+w_2e_{21}+5w_1e_{22},\\
\delta w_2 &= 5w_2e_{11}+w_1e_{12}-6g^2e_{21}+4w_2e_{22},\\
2ge_{12}&-e_{20}=0,\\
2ge_{21}&-e_{10}=0.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

11. Chacun des éléments linéaires de l'élément plan E_6 remplit les relations linéaires, d'après (22),

$$
\begin{aligned}
\omega_{12}-\tau_{12} &= c_0\omega_1+c_1\omega_2,\\
\omega_{11}-\tau_{11} &= -c_1\omega_1-c_2\omega_2,\\
\omega_{21}-\tau_{21} &= -c_2\omega_1-c_3\omega_2;
\end{aligned}
$$

on en déduit facilement, que chaque couple d'éléments linéaires de l'élément plan E_6 satisfait aux relations quadratiques extérieures

$$
\begin{aligned}
&[\omega_1(dc_0-3c_0\omega_{11}-3c_1\omega_{12})]+\\
&+[\omega_2(dc_1-2c_1\omega_{11}-2c_2\omega_{12}-c_0\omega_{21}-c_1\omega_{22})]-2(c_0c_2-c_1^2)[\omega_1\omega_2]=0,\\
&[\omega_1(dc_1-2c_1\omega_{11}-2c_2\omega_{12}-c_0\omega_{21}-c_1\omega_{22})]+\\
&+[\omega_2(dc_2-c_2\omega_{11}-c_3\omega_{12}-2c_1\omega_{21}\quad 2c_2\omega_{22})]+(g-\overline{c_0c_3-c_1c_2})[\omega_1\omega_2]=0,\\
&[\omega_1(dc_2-c_2\omega_{11}-c_3\omega_{12}-2c_1\omega_{21}-2c_2\omega_{22})]+\\
&+[\omega_2(dc_3-3c_2\omega_{21}-3c_3\omega_{22})]-2(c_1c_3-c_2^2)[\omega_1\omega_2]=0.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

On voit donc, d'après le lemme de M. Cartan, que chacun des éléments linéaires de l'élément plan E_6 remplit, outre les équations écrites plus haut, les équations suivantes

$$
\begin{aligned}
&dc_0-3c_0\omega_{11}-3c_1\omega_{12} = -3p_1\omega_1-(3q_2-2\overline{c_0c_2-c_1^2})\,\omega_2,\\
&dc_1-2c_1\omega_{11}-2c_2\omega_{12}-c_0\omega_{21}-c_1\omega_{22} = -3q_2\omega_1+(p-\tfrac{1}{2}g-\overline{c_0c_3-c_1c_2})\,\omega_2,\\
&dc_2-c_2\omega_{11}-c_3\omega_{12}-2c_1\omega_{21}-2c_2\omega_{22} = (p+\tfrac{1}{2}g-\overline{c_0c_3-c_1c_2})\,\omega_1+3q_1\omega_2,\\
&dc_3-3c_2\omega_{21}-3c_3\omega_{22} = (3q_1-2\overline{c_1c_3-c_2^2})\,\omega_1+3p_2\omega_2
\end{aligned}
\tag{35}
$$

et par suite que chacun des éléments linéaires de l'élément plan correspondant $\mathcal{E}_4$ satisfait aussi aux équations linéaires

$$
\left.\begin{aligned}
\delta c_0 &= 3c_0 e_{11} + 3c_1 e_{12}, \\
\delta c_1 &= 2c_1 e_{11} + 2c_2 e_{12} + c_0 e_{21} + c_1 e_{22}, \\
\delta c_2 &= c_2 e_{11} + c_3 e_{12} + 2c_1 e_{21} + 2c_2 e_{22}, \\
\delta c_3 &= \phantom{2c_2 e_{11} + c_3 e_{12} + {}} 3c_2 e_{21} + 3c_3 e_{22}.
\end{aligned}\right\} \tag{36}
$$

En tenant compte de (23), on trouve à l'aide de ces équations d'abord

$$\delta\Psi = 3e_{00}\Psi \tag{37}$$

et puis, en posant

$$
D \equiv \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & 0 & 0 \\ 2c_1 & 2c_2 & c_0 & c_1 \\ c_2 & c_3 & 2c_1 & 2c_2 \\ 0 & 0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 4(c_0c_2 - c_1^2)(c_1c_3 - c_2^2) - (c_0c_3 - c_1c_2)^2
$$

et
$$J_1 = c_0c_2 - c_1^2,\quad J_2 = c_1c_3 - c_2^2,\quad J = c_0c_3 - c_1c_2, \tag{38}$$

les équations bien simples

$$
\left.\begin{aligned}
\delta D &= -6e_{00}D, \\
\delta J_1 &= 2(e_{11} - e_{00})J_1 + e_{12}J, \\
\delta J_2 &- 2(e_{22} - e_{00})J_2 + e_{21}J, \\
\delta J \; &= -3e_{00}J + 2e_{12}J_2 + 2e_{21}J_1.
\end{aligned}\right\} \tag{39}
$$

12. Soit $F(x, y)$ une fonction des variables x, y, holomorphe au point x_0, y_0, dont les dérivées partielles ne s'annulent pas toutes deux en ce point. L'équation $F(x_0, y_0) = 0$ étant remplie, j'appelle la multiplicité des couples x, y, qui satisfont à l'équation $F(x, y) = 0$ la *courbe* F du plan (A) et tout couple x, y de cette multiplicité le *point* x, y *de la courbe* F.

En tenant compte des relations (6) on peut mettre l'équation $F(x, y) = 0$ sous la forme $\Phi(\xi, \eta) = 0$, Φ étant une fonction des variables ξ, η, holomorphe au point ξ_0, η_0 dont les dérivées partielles ne s'annulent pas toutes deux en ce point; on a de plus $\Phi(\xi, \eta) = 0$. La multiplicité des valeurs ξ, η qui satisfont à l'équation $\Phi(\xi, \eta) = 0$ est donc une courbe Φ du plan (B); je dis que la *courbe* Φ *correspond à la courbe* F *dans la correspondance considérée.*

x, y étant un point de la courbe F, j'appelle la multiplicité des couples dx, dy qui satisfont à l'équation

$$F'_x dx + F'_y dy = 0 \tag{40}$$

la *direction de la courbe* F *au point* x, y.

x, y étant un point de la courbe F, je l'appelle *point d'inflexion* alors et alors seulement si chacun des couples dx, dy remplíant en ce point l'équation (40) satisfait aussi à l'équation

$$d^2x\,dy - d^2y\,dx = 0. \tag{41}$$

13. La forme cubique Ψ est une forme binaire en dx, dy dont les coefficients dépendent de x, y et des paramètres $\{T\}$. Mais en tenant

compte de la formule (37), on voit facilement que, grâce aux liaisons faites entre les variables, la forme Ψ est invariante pour un changement quelconque des paramètres. *L'équation $\Psi = 0$ définit donc en tout point géométrique x, y suffisamment voisin au point géométrique x_0, y_0, ou trois ou deux ou une ou enfin une infinité des valeurs du rapport des nombres dx, dy.*

Envisageons la multiplicité de tous les couples dx, dy qui ont à un point géométrique x, y le même rapport défini par l'équation $\Psi = 0$; je l'appelle la *direction caractéristique de la correspondance considerée* (6) *au point géométrique x, y.*

Une courbe dont la direction dans tous ses points est caractéristique sera appelée une *courbe caractéristique de la correspondance considerée* (6).

14. *L'interprétation géométrique de l'équation $\Psi = 0$**. Soit x_0, y_0 un point d'inflexion d'une courbe F du plan (A). Alors d'après (41) et (2) chacun des éléments linéaires de l'élément plan E_6 remplit outre (40) l'équation

$$\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1 + \omega_1^2 \omega_{12} - \omega_1 \omega_2 (\omega_{11} - \omega_{22}) - \omega_2^2 \omega_{21} = 0.$$

Le point géométrique ξ_0, η_0 correspondant au point géométrique x_0, y_0 est un point d'inflexion alors et alors seulement si chacun des éléments linéaires de l'élément plan E_6 y satisfait à l'équation

$$\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1 + \omega_1^2 \tau_{12} - \omega_1 \omega_2 (\tau_{11} - \tau_{22}) - \omega_2^2 \tau_{21} = 0,$$

ou, en tenant compte de (3), (22), (23), à l'équation

$$\Psi = 0.$$

La direction de la courbe F au point x_0, y_0 doit donc être caractéristique. Inversement, si la direction de la courbe F au point x_0, y_0 est caractéristique et que x_0, y_0 soit un point d'inflexion de cette courbe, le point ξ_0, η_0 de la courbe Φ est même un point d'inflexion.

Pour qu'à un point d'inflexion d'une courbe quelconque F du plan (A) corresponde dans la correspondance donnée un point d'inflexion de la courbe correspondante du plan (B) il faut et il suffit que la direction de cette courbe à ce point soit une direction caractéristique.

15. **Classification des correspondances analytiques à un point géométrique x_0, y_0.** Une correspondance analytique étant donnée, considérons un point géométrique x_0, y_0. En laissant à côté quelques cas que l'on peut regarder comme singuliers, un et un seul des quatre cas suivants se présentera:

1. Il y a au point géométrique x_0, y_0 et à tous les points géométriques suffisament voisins à celui-ci *trois directions caractéristiques et trois seulement*. Une telle correspondance sera nommée une *correspondance de la première espèce.*

* L'interprétation géométrique de cette équation m'a communiqué *M. le prof. E. Čech.*

2. Il y a au point géométrique x_0, y_0 et à tous les points géométriques suffisament voisins à celui-ci *deux directions caractéristiques et deux seulement.* Une telle correspondance sera nommée une *correspondance de la deuxième espèce.*
3. Il y a au point géométrique x_0, y_0 et à tous les points géométriques suffisament voisins à celui-ci *une direction caractéristique et une seule.* Une telle correspondance sera nommée une *correspondance de la troisième espèce.*
4. Au point géométrique x_0, y_0 et à tous les points géométriques suffisament voisins à celui-ci il existe *une infinité de directions caractéristiques.* Une telle correspondance sera nommée une correspondance de la quatrième espèce.

16. **Correspondances analytiques de la première espèce.** D'après ce qui précède, le discriminant de la forme Ψ au point géométriques x_0, y_0 et par suite dans un voisinage de celui-ci est dans ce cas différent de zéro, quellesque soient les valeurs admissibles des paramètres $\{T\}$.

Nous allons montrer qu'il est permis de lier les variables par les relations nouvelles

$$c_0 = 1, \; c_1 = 0, \; c_2 = 0, \; c_3 = -1. \tag{42}$$

A ce but, il suffit de montrer que, x, y étant un point géométrique fixe suffisament voisin au point géométrique x_0, y_0 ou celui-ci, les équations $\delta c_0 = \delta c_1 = \delta c_2 = \delta c_3 = 0$ constituent avec les équations qui definissent l'élément plan $\mathcal{E}_4$ un système d'équations linéairement distinctes, pour tout système de paramètres $\{T\}$. On conclut immédiatement des équations (36) que l'élément plan défini par l'élément plan $\mathcal{E}_4$ et par les équations $\delta c_0 = \delta c_1 = \delta c_2 = \delta c_3 = 0$ se confond avec l'élément plan, défini pour le même système de paramètres par l'élémentplan $\mathcal{E}_4$ et par les équations

$$e_{11} = e_{12} = e_{21} = e_{22} = 0.$$

Cet élément plan est à *0* dimensions car les équations qui le définissent sont manifestement linéairement distinctes. On voit donc que l'élément plan qui est défini par l'élément plan $\mathcal{E}_4$ et par les équations $\delta c_0 = \delta c_1 = \delta c_2 = \delta c_3 = 0$ est à *0* dimensions; les équations qui le définissent sont donc linéairement distinctes.

Lions alors les variables par les relations nouvelles (42). Les équations (22) et (30) seront de la forme

$$\begin{gathered} \omega_{12} - \tau_{12} = \omega_1, \; \omega_{11} - \tau_{11} = 0, \; \omega_{21} - \tau_{21} = \omega_2, \; \omega_{10} - \tau_{10} = g\omega_2, \\ \omega_{20} - \tau_{20} = g\omega_1. \end{gathered} \tag{43}$$

17. La liaison des variables par les relations (40) a comme conséquence que, en posant pour abréger w_1 au lieu de $w_1 + 6gq_2$, v_2 au lieu de $v_2 - 2g\left(p - \frac{1}{2}g + 1\right)$ et de la même manière pour w_2, v_1, chacun

des éléments linéaires de l'élément plan E_2 satisfait aux équations, d'après (31), (35),

$$
\begin{aligned}
\omega_{11} &= p_1\omega_1 + q_2\omega_2, \\
\omega_{12} &= (p + \tfrac{1}{2}\overline{g + 1})\,\omega_1 + 3q_1\omega_2, \\
\omega_{21} &= 3q_2\omega_1 - (p - \tfrac{1}{2}\overline{g + 1})\,\omega_2, \\
\omega_{22} &= q_1\omega_1 + p_2\omega_2, \\
\omega_{10} &= w_1\omega_1 + v_2\omega_2, \\
\omega_{20} &= v_1\omega_1 + w_2\omega_2, \\
dg &= (w_2 + 3g\overline{p_1 - q_1})\,\omega_1 + (w_1 + 3g\overline{p_2 - q_2})\,\omega_2 .
\end{aligned}
\tag{44}
$$

On déduit facilement de ces équations que chaque couple d'éléments linéaires de l'élément plan E_2 remplit les relations quadratiques extérieures

$$
\begin{aligned}
&[dp_1\omega_1] + [dq_2\omega_2] + (v_2 + 10q_1q_2 + p_1\overline{p_2 - 2q_2} + p^2 - \tfrac{1}{4}\overline{g + 1}^2)[\omega_1\omega_2] = 0, \\
&[dq_1\omega_1] + [dp_2\omega_2] - (v_1 + 10q_1q_2 + p_2\overline{p_1 - 2q_1} + p^2 - \tfrac{1}{4}\overline{g + 1}^2)[\omega_1\omega_2] = 0, \\
&[dp\omega_1] + 3[dq_1\omega_2] - \tfrac{3}{2}(w_1 + g\overline{p_2 - q_2} - 4q_1\overline{q_1 - p_1})[\omega_1\omega_2] = 0, \\
&3[dq_2\omega_1] - [dp\omega_2] + \tfrac{3}{2}(w_2 + g\overline{p_1 - q_1} - 4q_2\overline{q_2 - p_2})[\omega_1\omega_2] = 0, \\
&[dw_1\omega_1] + [dv_2\omega_2] + (w_1\overline{q_2 + 2p_2} + 3\overline{q_1v_1 - p_1v_2} - w_2\overline{p + \tfrac{1}{2}g + 1})[\omega_1\omega_2] = 0, \\
&[dv_1\omega_1] + [dw_2\omega_2] - (w_2\overline{q_1 + 2p_1} + 3\overline{q_2v_2 - p_2v_1} + w_1\overline{p - \tfrac{1}{2}g + 1})[\omega_1\omega_2] = 0, \\
&\quad [dw_2\omega_1] + [dw_1\omega_2] + 3g\{[d(p_1 - q_1)\,\omega_1] + [d(p_2 - q_2)\,\omega_2]\} + \\
&\qquad + 3(p_2w_2 - p_1w_1 + 3g\,\overline{q_2p_1 - q_1p_2})[\omega_1\omega_2] = 0.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Les systèmes de référence sont donc parfaitement déterminés. Les vingt-deux variables ont été liées par vingt relations indépendantes de telle manière qu'on peut regarder les paramètres $\{T\}$ comme fonctions des variables indépendantes x, y analytiques au point considéré x_0, y_0.

Pour cette espèce des correspondances analytiques entre deux plans projectifs (A), (B) dix fonctions analytiques qui remplissent les conditions d'intégrabilité (45) *ont été définies par la particularisation des systèmes de référence. Ce sont les invariants fondamentaux des correspondances analytiques de la première espèce par rapport au groupe projectif.*

18. **Correspondances analytiques de la deuxième espèce.** D'après ce qui précède (v. N° 15), le discriminant de la forme Ψ s'annule dans ce cas identiquement mais au moins une des expressions J_1, J_2 (v. les formules (38)) est, au point x_0, y_0 et dans un certain voisinage de celui-ci, différent de zéro, quellesque soient les valeurs admissibles des paramètres $\{T\}$.

Nous allons montrer tout d'abord qu'il est permis de lier les variables par les relations nouvelles

$$c_1 = 1, \ \ c_2 = 0. \tag{46}$$

A ce but, il suffit de montrer que, x, y étant un point géométrique fixe suffisamment voisin au point géométrique x_0, y_0 ou celui-ci, les équations $\delta c_1 = \delta c_2 = 0$ constituent avec les équations qui définissent l'élément plan $\mathcal{E}_4$ un système d'équations linéairement distinctes. Or, des équations (36) on conclut immédiatement que l'élément plan qui est défini par l'élément plan $\mathcal{E}_4$ et par les équations $\delta c_1 = \delta c_2 = 0$ se confond avec l'élément plan qui est défini pour le même système de paramètres par l'élément plan $\mathcal{E}_4$ et par les équations.

$$\begin{aligned} 2\,c_1 e_{11} + 2\,c_2 e_{12} + c_0 e_{21} + c_1 e_{22} &= 0 \\ c_2 e_{11} + c_3 e_{12} + 2\,c_1 e_{21} + 2\,c_2 e_{22} &= 0. \end{aligned}$$

En se servant de l'hypothèse qu'au moins une des expressions J_1, J_2 soit différente de zéro, on voit immédiatement que ces équations sont linéairement distinctes et par suite que l'élément plan considéré a deux dimensions. On voit donc que l'élément plan, qui est défini par l'élément plan $\mathcal{E}_4$ et par les équations $\delta c_1 - \delta c_2 = 0$ a deux dimensions; les équations qui le définissent sont donc linéairement distinctes.

Lions alors les variables par les relations nouvelles (46). Les équations (22) s'écriront

$$\omega_{12} - \tau_{12} - c_0\omega_1 + \omega_2, \quad \omega_{11} - \tau_{11} = -\omega_1, \quad \omega_{21} - \tau_{21} = -c_3\omega_2. \tag{47}$$

19. La liaison des variables par les relations (46) entraîne comme conséquence ce que chacun des éléments linéaires de l'élément plan E_4 satisfait aux équations, d'après (35),

$$\left.\begin{aligned} dc_0 - 3\,c_0\omega_{11} - 3\,\omega_{12} \qquad\qquad &= -3p_1\omega_1 - (3\,q_2 + 2)\omega_2, \\ 2\,\omega_{11} \qquad + c_0\omega_{21} + \omega_{22} &= 3q_2\omega_1 - (p - \tfrac{1}{2}g - c_0c_3)\omega_2, \\ c_3\omega_{12} + 2\omega_{21} \qquad &= -(p + \tfrac{1}{2}g - c_0c_3)\omega_1 - 3q_1\omega_2, \\ dc_3 \qquad\qquad - 3c_3\omega_{22} &= (3\,q_1 - 2\,c_3)\,\omega_1 + 3p_2\omega_2. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

On voit donc que chacun des éléments linéaires de l'élément plan $\mathcal{E}_2$ remplit les équations

$$\left.\begin{aligned} \delta c_0 - 3\,c_0\,e_{11} - 3\,e_{12} \qquad\qquad &= 0, \\ 2\,e_{11} \qquad + c_0\,e_{21} + e_{22} &= 0, \\ c_3\,e_{12} + 2\,e_{21} \qquad &= 0, \\ \delta c_3 \qquad\qquad - 3\,c_3\,e_{22} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

20. Nous allons montrer qu'il est permis de lier les variables par la relation nouvelle

$$c_0 = 0. \tag{50}$$

Pour cela il suffit de montrer que, x, y étant un point géométrique fixe suffisamment voisin au point géométrique x_0, y_0 ou celui-ci, l'équation $\delta c_0 = 0$ constitue avec les équations qui définissent l'élément plan $\mathcal{E}_2$ un système d'équations linéairement distinctes, quellesque soient les valeurs admissibles des paramètres $\{T\}$. Or, de la première des équations (49) on conclut immédiatement que l'élément plan qui est défini par l'élément plan $\mathcal{E}_2$ et par l'équation $\delta c_0 = 0$ se confond avec l'élément plan, qui est défini pour le même système de paramètres par l'élément plan $\mathcal{E}_2$ et par l'équation

$$c_0 e_{11} + e_{12} = 0.$$

Cet élément plan a une dimension, les équations qui le définissent étant manifestement linéairement distinctes. On voit donc que l'élément plan qui est défini par l'élément plan $\mathcal{E}_2$ et par l'équation $\delta c_0 = 0$ a une dimension; les équations qui le définissent sont donc linéairement distinctes.

Lions alors les variables par la relation (50). Les équations (47) auront la forme, d'après l'hypothèse $D = 0$,

$$\omega_{12} - \tau_{12} = \omega_2, \quad \omega_{11} - \tau_{11} = -\omega_1, \quad \omega_{21} - \tau_{21} = 0. \tag{51}$$

21. La liaison des variables par la relation (50) a comme conséquence qu'en changeant pour abréger les notations d'une manière facile à comprendre, chacun des éléments linéaires d'élément plan E_3 remplit d'après (31) et (48) les équations

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= h_1 \omega_1 + k_2 \omega_2, \\ \omega_{21} &= k_1 \omega_1, \\ \omega_{10} &= w_1 \omega_1 + v_2 \omega_2, \\ \omega_{20} &= v_1 \omega_1 + w_2 \omega_2, \\ \omega_{11} - \omega_{00} &= (3 k_2 - 2) \omega_1 + (2 k_1 + g) \omega_2, \\ dg + 3 g \omega_{00} &= (w_2 - 2 g k_2) \omega_1 + (w_1 - 2 g k_1) \omega_2. \end{aligned} \tag{52}$$

et de la même manière chacun des éléments linéaires de l'élément plan $\mathcal{E}_1$ remplit les équations

$$\begin{gathered} e_{11} - e_{00} = e_{12} = e_{21} = e_{10} = e_{20} = 0 \\ \delta g = -3 e_{00} g. \end{gathered} \tag{53}$$

En appliquant les formules (32), on déduit facilement des équations (52) que chaque couple d'éléments linéaires de l'élément plan E_3 remplit les relations quadratiques extérieures

$$\begin{aligned} &[\omega_1(dh_1 - 3h_1\omega_{00})] + [\omega_2 dk_2] + (2k_2\overline{k_2-1} - h_1\overline{5k_1+3g} + w_1)[\omega_1\omega_2] = 0, \\ &\qquad [\omega_1(dk_1 + 3k_1\omega_{00})] + (k_1\overline{3k_1+g} - w_2)[\omega_1\omega_2] = 0, \\ &[\omega_1 dw_1] + [\omega_2(dv_2 + 3v_2\omega_{00})] - (w_1\overline{3k_1+2g} + k_2\overline{v_1+v_2} - h_1 w_2)[\omega_1\omega_2] = 0, \\ &[\omega_1(dv_1 + 3v_1\omega_{00})] + [\omega_2(dw_2 + 6w_2\omega_{00})] - (w_2\overline{7k_2-4} - k_1\overline{v_1+v_2})[\omega_1\omega_2] = 0, \\ &3[\omega_1 dk_2] + 2[\omega_2(dk_1 + 3k_1\omega_{00})] - (6k_1\overline{2k_2-1} + g\overline{5k_2-4} + 2v_2 - v_1 + w_2)[\omega_1\omega_2] = 0, \\ &[\omega_1(dw_2 + 3w_2\omega_{00})] + [\omega_2(dw_1 + 6w_1\omega_{00})] - 2g[\omega_1 dk_2] - 2g[\omega_2(dk_1 + 3k_1\omega_{00})] + \\ &+ (g\overline{2k_2\overline{5k_1+g} - 4k_1 - w_2 + 3\overline{v_2-v_1}} - 2w_1\overline{3k_2-1} + k_1 w_2)[\omega_1\omega_2] - 0. \end{aligned} \tag{54}$$

On en déduit facilement tout d'abord que chacun des éléments linéaires de l'élément plan $\mathcal{E}_1$ satisfait aux équations

$$\begin{gathered} \delta h_1 = 3 h_1 e_{00}, \quad \delta k_2 = 0, \quad \delta k_1 = -3 k_1 e_{00}, \quad \delta w_1 = 0, \quad \delta v_2 = -3 v_2 e_{00} \\ \delta v_1 = -3 v_1 e_{00}, \quad \delta w_2 = -6 w_2 e_{00} \end{gathered} \tag{55}$$

et la dernière des équations (54) donne

$$\begin{aligned} 2\,g\delta k_2 - \delta w_2 &= 3\,w_2 e_{00}, \\ 2\,g\delta k_1 - \delta w_1 &= 6\,\overline{w_1 - gk_1}\,e_{00}. \end{aligned} \tag{56}$$

En comparant les formules (55) et (56) on obtient les identités

$$w_1 = w_2 = 0, \tag{57}$$

de sorte que les équations (52) auront la forme

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= h_1\omega_1 + k_2\omega_2, \\ \omega_{21} &= k_1\omega_1, \\ \omega_{10} &= v_2\omega_2, \\ \omega_{20} &= v_1\omega_1, \\ \omega_{11} - \omega_{00} &= (3k_2 - 2)\,\omega_1 + (2k_1 + g)\,\omega_2, \\ dg + 3g\omega_{00} &= -2gk_2\omega_1 - 2gk_1\omega_2 \end{aligned} \tag{58}$$

et les relations (54) s'écriront

$$\begin{aligned} [\omega_1(dh_1 - 3h_1\omega_{00})] + [\omega_2 dk_2] + (2k_2\overline{k_2 - 1} - h_1\overline{5k_1 + 3g})\,[\omega_1\omega_2] &= 0, \\ [\omega_1(dk_1 + 3k_1\omega_{00})] + k_1\overline{3k_1 + g}\,[\omega_1\omega_2] &= 0, \\ [\omega_2(dv_2 + 3v_2\omega_{00})] - k_2\overline{v_1 + v_2}\,[\omega_1\omega_2] &= 0, \\ [\omega_1(dv_1 + 3v_1\omega_{00})] + k_1\overline{v_1 + v_2}\,[\omega_1\omega_2] &= 0, \\ 3\,[\omega_1 dk_2] + 2\,[\omega_2(dk_1 + 3k_1\omega_{00})] - \\ -(6k_1\overline{2k_2 - 1} + g\,\overline{5k_2 - 4} + 2v_2 - v_1)\,[\omega_1\omega_2] &= 0, \\ 2g\,[\omega_1 dk_2] + 2g\,[\omega_2(dk_1 + 3k_1\omega_{00})] - \\ -g\,(2k_2\overline{5k_1 + g} - 4k_1 + 3\overline{v_2 - v_1})\,[\omega_1\omega_2] &= 0. \end{aligned} \tag{59}$$

22. Chacun des éléments linéaires de l'élément plan $\mathcal{E}_1$ satisfait aux équations linéaires, d'après (53), (55),

$$\begin{gathered} \delta g = -3g\,e_{00}, \quad \delta h_1 = 3h_1 e_{00}, \quad \delta k_1 = -3k_1 e_{00}, \quad \delta k_2 = 0, \\ \delta v_1 = -3v_1 e_{00}, \quad \delta v_2 = -3v_2 e_{00} \end{gathered} \tag{60}$$

de sorte qu'on a tout d'abord trois cas à distinguer:

Au point x_0, y_0 et par suite dans un voisinage de ce point g ne s'annule pas.

g s'annule identiquement.

Au point x_0, y_0, g s'annule, mais il existe dans un voisinage quelconque de ce point au moins un point x, y où est g différent de zéro.

En regardant dans le troisième cas le point géométrique considéré x_0, y_0 comme un point géométrique singulier de la correspondance qui est caractérisée par l'hypothèse $g \neq 0$, nous excluerons un tel cas de nos raisonnements *.

23. *Cas général* $g \neq 0$. Nous allons montrer qu'il est permis de lier les variables par la relation nouvelle

$$g = 1. \tag{61}$$

* Dans la suite, s'il s'agira des cas analogues à celui-ci, nous les excluerons de même de nos raisonnements.

A ce but, il suffit manifestement de montrer que, x, y étant un point géométrique fixe suffisamment voisin au point géométrique x_0, y_0 ou celui-ci, l'équation $\delta g = 0$ constitue avec les équations qui définissent l'élément plan $\mathcal{E}_1$ un système d'équations linéairement distinctes. Or, cela résulte immédiatement de la première des équations (60).

Lions alors les variables par la relation (61). Les équations (51) et (30) s'écriront

$$\begin{gathered}\omega_{12} - \tau_{12} = \omega_2, \quad \omega_{11} - \tau_{11} = -\omega_1, \quad \omega_{21} - \tau_{21} = 0,\\ \omega_{10} - \tau_{10} = \omega_2, \quad \omega_{20} - \tau_{20} = \omega_1.\end{gathered} \tag{62}$$

24. La liaison des variables par les relations (61) a comme conséquence que chacun des éléments linéaires de l'élément plan E_2 remplit, d'après (58), les équations

$$\begin{aligned} &\omega_{00} = -\tfrac{2}{3}k_2\omega_1 - \tfrac{2}{3}k_1\omega_2,\\ &\omega_{10} - v_2\omega_2,\\ &\omega_{11} - (\tfrac{7}{3}k_2 - 2)\,\omega_1 + (\tfrac{4}{3}k_1 + 1)\,\omega_2,\\ &\omega_{12} \quad h_1\omega_1 + k_2\omega_2,\\ &\omega_{20} - v_1\omega_1,\\ &\omega_{21} - k_1\omega_1.\end{aligned} \tag{63}$$

On en déduit facilement que chaque couple d'éléments linéaires de l'élément plan E_2 satisfait pour toutes les valeurs admissibles des variables, aux relations quadratiques extérieures

$$\begin{gathered}[\omega_1 dk_1] + k_1\overline{k_1 + 1}\,[\omega_1\omega_2] - 0,\\ [\omega_2 dk_1] - (k_2\overline{k_1 - 2} - \tfrac{7}{2}v_1 + \tfrac{5}{2}v_2 + 4)\,[\omega_1\omega_2] = 0,\\ [\omega_1 dk_2] - (k_2\overline{2k_1 + 3} - 2k_1 + 2v_1 - v_2 - 4)\,[\omega_1\omega_2] = 0,\\ [\omega_1 dh_1] + [\omega_2 dk_2] + (2k_2\overline{k_2 - 1} - 3h_1\overline{k_1 + 1})\,[\omega_1\omega_2) = 0,\\ [\omega_1 dv_1] + k_1\overline{v_2 - v_1}\,[\omega_1\omega_2] = 0,\\ [\omega_2 dv_2] + k_2\overline{v_2 - v_1}\,[\omega_1\omega_2] = 0.\end{gathered} \tag{64}$$

Les systèmes de référence sont donc parfaitement déterminés; *pour cette espèce des correspondances analytiques, cinq fonctions analytiques qui remplissent les conditions d'intégrabilité (64) ont été définies par la particularisation des systèmes de référence. Ce sont les invariants projectifs fondamentaux des correspondances analytiques de cette espèce.*

25. *Cas* $g = 0$. Dans ce cas, chacun des éléments linéaires de l'élément plan E_3 remplit, d'après (30), (51), les équations linéaires

$$\begin{gathered}\omega_{12} - \tau_{12} = \omega_2, \quad \omega_{11} - \tau_{11} = -\omega_1, \quad \omega_{21} - \tau_{21} = 0,\\ \omega_{10} - \tau_{10} - 0, \quad \omega_{20} - \tau_{20} = 0,\end{gathered}$$

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= h_1\omega_1 + k_2\omega_2,\\ \omega_{21} &= k_1\omega_1,\\ \omega_{10} &= v_2\omega_2,\\ \omega_{20} &= v_1\omega_1,\\ \omega_{11} - \omega_{00} &= (3k_2 - 2)\,\omega_1 + 3k_1\omega_2,\end{aligned} \tag{65}$$

et chaque couple d'éléments linéaires, d'après (59), les relations quadratiques extérieures

$$
\begin{aligned}
[\omega_1(dh_1 - 3h_1\omega_{00})] + [\omega_2 dk_2] + (2k_2\overline{k_2 - 1} - 5h_1k_1)[\omega_1\omega_2] &= 0,\\
[\omega_1(dk_1 + 3k_1\omega_{00})] + 3k_1^2[\omega_1\omega_2] &= 0,\\
[\omega_2(dv_2 + 3v_2\omega_{00})] - k_2\overline{v_1 + v_2}\,[\omega_1\omega_2] &= 0, \qquad (66)\\
[\omega_1(dv_1 + 3v_1\omega_{00})] + k_1\overline{v_1 + v_2}\,[\omega_1\omega_2] &= 0,\\
3[\omega_1 dk_2] + 2[\omega_2(dk_1 + 3k_1\omega_{00})] - (6k_1\overline{2k_2 - 1} + 2v_2 - v_1)[\omega_1\omega_2] &= 0.
\end{aligned}
$$

26. Chacun des éléments linéaires de l'élément plan $\mathcal{E}_1$ satisfait aux équations linéaires, d'après (53), (60),

$$
\begin{gathered}
e_{11} - e_{00} = e_{12} = e_{21} = e_{10} = e_{20} = 0,\\
\delta h_1 = 3h_1e_{00},\ \ \delta k_1 - -3k_1e_{00},\ \ \delta k_2 = 0,\ \ \delta v_1 = -3v_1e_{00},\\
\delta v_2 = -3v_2e_{00}
\end{gathered}
\qquad (67)
$$

de sorte qu'on a deux cas à distinguer:

Au point x_0, y_0 et par suite dans un voisinage de ce point, h_1 ne s'annule pas.

h_1 s'annule identiquement.

27. *Cas* $h_1 \neq 0$. Nous allons montrer qu'il est permis de lier les variables par la relation nouvelle

$$h_1 - 1. \qquad (68)$$

Pour cela il suffit de montrer que, x, y étant un point géométrique fixe suffisamment voisin au point géométrique x_0, y_0, ou celui-ci, l'équation $\delta h_1 = 0$ constitue avec les équations qui définissent l'élément plan $\mathcal{E}_1$ un système d'équations linéairement distinctes, quellesque soient les valeurs admissibles des paramètres $\{T\}$. Or, on voit cela immédiatement de la première des équations (67).

Lions alors les variables par la relation (68). La sixième des équations (65) aura la forme

$$\omega_{12} = \omega_1 + k_2\omega_2. \qquad (69)$$

28. La liaison des variables par la relation (68) a comme conséquence que chacun des éléments linéaires de l'élément plan $\mathcal{E}_2$ remplit les équations linéaires, d'après (65) et (66),

$$\omega_{12} - \tau_{12} = \omega_2,\ \omega_{11} - \tau_{11} - -\omega_1,\ \omega_{21} - \tau_{21} = 0,\ \omega_{10} - \tau_{10} = 0,\ \omega_{20} - \tau_{20} = 0$$

$$
\begin{aligned}
\omega_{00} &= w\omega_1 + z\omega_2,\\
\omega_{10} &= v_2\omega_2,\\
\omega_{11} &= (3k_2 + w - 2)\omega_1 + (2k_1 + z)\omega_2, \qquad (70)\\
\omega_{12} &= \omega_1 + k_2\omega_2,\\
\omega_{20} &= v_1\omega_1,\\
\omega_{21} &= k_1\omega_1.
\end{aligned}
$$

et par suite chaque couple d'éléments linéaires de cet élément plan remplit les relations quadratiques extérieures qui en résultent

$$
\begin{gathered}
[\omega_1 dw] + [\omega_2 dz] - (2z\overline{2k_2 + w - 1} + wk_1 + v_1 - v_2)[\omega_1\omega_2] = 0, \\
[\omega_1 dk_1] + 3k_1\overline{k_1 + z}[\omega_1\omega_2] = 0, \\
3[\omega_1 dk_2] + 2[\omega_2 dk_1] - (6k_1\overline{2k_2 + w - 1} + 2v_2 - v_1)[\omega_1\omega_2] = 0, \\
[\omega_2 dk_2] + (2k_2\overline{k_2 - 1} - 5k_1 - 3z)[\omega_1\omega_2] = 0, \\
[\omega_1 dv_1] + (k_1\overline{v_1 + v_2} + 3v_1 z)[\omega_1\omega_2] = 0, \\
[\omega_2 dv_2] - (k_2\overline{v_1 + v_2} + 3v_2 w)[\omega_1\omega_2] = 0.
\end{gathered} \tag{71}
$$

Les systèmes de référence sont donc parfaitement déterminés; *pour cette espèce des correspondances analytiques, six fonctions analytiques qui remplissent les conditions d'intégrabilité (71) ont été définies par la particularisation des systèmes de référence. Ce sont les invariants projectifs fondamentaux des correspondances analytiques de cette espèce.*

29. *Cas* $h_1 = 0$. Dans ce cas chacun des éléments linéaires de l'élément plan E_3 satisfait aux équations linéaires, d'après (65),

$$
\begin{gathered}
\omega_{12} - \tau_{12} = \omega_2, \quad \omega_{11} - \tau_{11} = -\omega_1, \quad \omega_{21} - \tau_{21} = 0, \quad \omega_{10} - \tau_{10} = 0, \quad \omega_{20} - \tau_{20} = 0, \\
\omega_{12} = k_2 w_2, \\
\omega_{21} = k_1\omega_1, \\
\omega_{10} = v_2\omega_2, \\
\omega_{20} = v_1\omega_1, \\
\omega_{11} - \omega_{00} = (3k_2 - 2)\omega_1 + 2k_1\omega_2,
\end{gathered} \tag{72}
$$

et par suite chaque couple d'éléments linéaires de cet élément plan remplit les relations quadratiques extérieures

$$
\begin{gathered}
[\omega_2 dk_2] + 2k_2\overline{k_2 - 1}[\omega_1\omega_2] = 0, \\
[\omega_1(dk_1 + 3k_1\omega_{00})] + 3k_1^2[\omega_1\omega_2] = 0, \\
[\omega_2(dv_2 + 3v_2\omega_{00})] - k_2\overline{v_1 + v_2}[\omega_1\omega_2] = 0, \\
[\omega_1(dv_1 + 3v_1\omega_{00})] + k_1\overline{v_1 + v_2}[\omega_1\omega_2] = 0, \\
3[\omega_1 dk_2] + 2[\omega_2(dk_1 + 3k_1\omega_{00})] - (6k_1\overline{2k_2 - 1} + 2v_2 - v_1)[\omega_1\omega_2] = 0.
\end{gathered} \tag{73}
$$

30. Chacun des éléments linéaires de l'élément plan $\mathcal{E}_1$ satisfait aux équations linéaires, d'après (67),

$$
\delta k_1 = -3k_1 e_{00}, \quad \delta k_2 = 0, \quad \delta v_1 = -3v_1 e_{00}, \quad \delta v_2 = -3v_2 e_{00} \tag{74}
$$

de sorte qu'on a deux cas à distinguer:

Au point x_0, y_0 et par suite dans un certain voisinage de ce point, k_1 ne s'annule pas.

k_1 s'annule identiquement.

31. *Cas* $k_1 \neq 0$. Nous allons montrer qu'il est permis de lier les variables par la relation nouvelle

$$
k_1 = 1. \tag{75}
$$

A ce but, il suffit de montrer que, x, y étant un point géométrique fixe suffisamment voisin au point géométrique x_0, y_0, ou celui-ci, l'équation $\delta k_1 = 0$ constitue avec les équations qui définissent l'élément plan $\mathcal{E}_1$

un système d'équations linéairement distinctes. Or, cela résulte immédiatement de la première des équations (74).

Lions alors les variables par la relation (75). La septième et la dernière des équations (72) auront la forme

$$\begin{aligned} \omega_{21} &= \omega_1, \\ \omega_{11} - \omega_{00} &= (3k_2 - 2)\,\omega_1 + 2\,\omega_2. \end{aligned} \tag{76}$$

32. La liaison des variables par la relation (75) a comme conséquence que chacun des éléments linéaires de l'élément plan E_2 remplit les équations, d'après (72), (73),

$$\begin{gathered} \omega_{12} - \tau_{12} = \omega_2,\ \omega_{11} - \tau_{11} = -\omega_1,\ \omega_{21} - \tau_{21} = 0,\ \omega_{10} - \tau_{10} = 0,\ \omega_{20} - \tau_{20} = 0, \\ \begin{aligned} \omega_{00} &= w\,\omega_1 - \omega_2, \\ \omega_{10} &= v_2\,\omega_2, \\ \omega_{11} &= (3k + w - 2)\,\omega_1 + \omega_2, \\ \omega_{12} &= k\,\omega_2, \\ \omega_{20} &= v_1\,\omega_1, \\ \omega_{21} &= \omega_1. \end{aligned} \end{gathered} \tag{77}$$

et par suite chaque couple d'éléments linéaires de cet élément plan remplit les équations quadratiques qui en résultent

$$\begin{aligned} [\omega_1 dw] + (2\,\overline{2k + w - 1} + v_2 - v_1)\,[\omega_1\omega_2] &= 0, \\ 3\,[\omega_1 dk] - (6\,\overline{2k + w - 1} + 2v_2 - v_1)\,[\omega_1\omega_2] &= 0, \\ [\omega_2 dk] + 2k\,\overline{k - 1}\,[\omega_1\omega_2] &= 0, \\ [\omega_1 dv_1] + \overline{v_2 - 2v_1}\,[\omega_1\omega_2] &= 0, \\ [\omega_2 dv_2] - (k\,\overline{v_1 + v_2} + 3\,v_2 w)\,[\omega_1\omega_2] &= 0. \end{aligned} \tag{78}$$

Les systèmes de référence sont donc parfaitement déterminés; *pour cette espèce des correspondances analytiques quatre fonctions holomorphes qui remplissent les conditions d'intégrabilité (78) ont été définies par la particularisation des systèmes de référence. Ce sont les invariants projectifs fondamentaux des correspondances analytiques de cette espèce.*

33. *Cas* $k_1 = 0$. Dans ce cas chacun des éléments linéaires de l'élément plan E_3 remplit d'après (72) les équations linéaires

$$\begin{gathered} \omega_{12} - \tau_{12} = \omega_2,\ \omega_{11} - \tau_{11} = -\omega_1,\ \omega_{21} - \tau_{21} = 0,\ \omega_{10} - \tau_{10} = 0,\ \omega_{20} - \tau_{20} = 0, \\ \begin{aligned} \omega_{12} &= k\,\omega_2, \\ \omega_{21} &= 0, \\ \omega_{10} &= v_2\,\omega_2, \\ \omega_{20} &= v_1\,\omega_1, \\ \omega_{11} - \omega_{00} &= (3k - 2)\,\omega_1. \end{aligned} \end{gathered} \tag{79}$$

et chaque couple d'éléments linéaires de cet élément plan remplit les équations quadratiques extérieures qui en dérivent, d'après (73),

$$\begin{aligned} 3\,[\omega_1 dk] + \overline{v_1 - 2v_2}\,[\omega_1\omega_2] &= 0, \\ [\omega_2 dk] + 2k\,\overline{k - 1}\,[\omega_1\omega_2] &= 0, \end{aligned} \tag{80}$$

$$\begin{aligned}&[\omega_2(dv_2+3v_2\omega_{00})]-k\overline{v_1+v_2}[\omega_1\omega_2]=0,\\&[\omega_1(dv_1+3v_1\omega_{00})]=0.\end{aligned}\tag{80}$$

On en tire tout d'abord que chacun des éléments linéaires de l'élément plan correspondant E_3 satisfait lui même à l'équation linéaire

$$dk=2k\overline{k-1}\,\omega_1-\tfrac{1}{3}\overline{v_1-2v_2}\,\omega_2\tag{81}$$

et par suite chaque couple des éléments linéaires de cet élément plan remplit l'équation quadratique extérieure

$$[\omega_2(dv_1+3v_1\omega_{00})]-2[\omega_2(dv_2+3v_2\omega_{00})]=0\tag{82}$$

qui peut être mis sous la forme, d'après la troisième des relations (80),

$$[\omega_2(dv_1+3v_1\omega_{00})]-2k\overline{v_1+v_2}[\omega_1\omega_2]=0.\tag{83}$$

On en déduit, en tenant compte de la relation (80) que chacun des éléments linéaires de l'élément plan E_3 satisfait aussi à l'équation

$$dv_1+3v_1\omega_{00}=-2k\overline{v_1+v_2}\,\omega_1\tag{84}$$

et chaque couple d'éléments linéaires de cet élément plan satisfait lui même à la relation quadratique extérieure

$$2k[\omega_1(dv_2+3v_2\omega_{00})]+\tfrac{1}{3}(7v_1^2-7v_1v_2+4v_2^2)[\omega_1\omega_2]=0.\tag{85}$$

Grâce aux liaisons faites entre les variables, la fonction k, d'après (74), dépend des variables x, y seulement. En regardant le cas où la fonction k s'annule au point considéré x_0, y_0 mais non identiquement, comme cas singulier, nous l'exluerons de nos raisonnements.

On peut alors facilement démontrer que l'on a identiquement

$$v_1=v_2=0.\tag{86}$$

En effet, deux cas sont alors possibles:

k s'annule identiquement.

Au point x_0, y_0 et par suite dans un voisinage de ce point k est différent de zéro.

Dans le premier cas l'èquation (81) donne l'identité $v_1=2v_2$ et la relation (85) l'identité $v_2=0$; on a donc (86).

Dans le deuxième cas, la troisième des relations (80) et la relation (85) montrent que chacun des éléments linéaires de l'élément plan E_3 satisfait à l'équation

$$dv_2+3v_2\omega_{00}=-k\overline{v_1+v_2}\,\omega_1-\frac{1}{6k}(7v_1^2-7v_1v_2+4v_2^2)\,\omega_2.\tag{87}$$

En tenant compte de (81), (84), (85) on en déduit l'identité

$$v_1^2-28v_1^2v_2+16v_2^2=0\tag{88}$$

et de celle-ci, en la différentiant et comparant avec (84) et (87), l'identité

$$v_1+v_2=0;\tag{89}$$

on a donc (86).

Les équations (79) ont la forme

$$\omega_{12} = k\omega_2, \ \omega_{21} = 0, \ \omega_{10} - 0, \ \omega_{20} = 0, \ \omega_{11} - \omega_{00} = (3k-2)\omega_1, \tag{90}$$

de sorte qu'on a $\omega'_{00} = 0$. Il existe donc une fonction f telle que chacun des éléments linéaires de l'élément plan E_3 remplit l'équation linéaire $df = \omega_{00}$ et par suite chacun des éléments linéaires de l'élément plan $\mathcal{E}_1$ l'équation $\delta f = e_{00}$, quellesque soient les valeurs admissibles des variables. En appliquant le raisonnement que nous avons déjà expliqué à plusieurs reprises, on en conclut qu'il est permis de lier les variables par la relation nouvelle

$$f = 0. \tag{91}$$

Lions alors les variables par cette relation. Les équations (79), (81) s'écriront

$$\begin{gathered} \omega_{12} \quad \tau_{12} \quad \omega_2, \ \omega_{11} \quad \tau_{11} = \quad \omega_1, \ \omega_{21} \quad \tau_{21} - 0, \\ \omega_{10} - \tau_{10} = 0, \ \omega_{20} - \tau_{20} \quad 0, \ \omega_{00} = 0, \ \dot{\omega}_{10} = 0, \ \omega_{11} = (3k-2)\omega_1, \\ \omega_{12} \quad k\omega_2, \ \omega_{20} \quad 0, \ \omega_{21} \quad 0, \ dk = 2k\overline{k-1}\,\omega_1. \end{gathered} \tag{92}$$

34. *Équations finies des correspondances analytiques dans ce cas.* Soient x, y les variables indépendantes. On s'assure tout d'abord facilement qu'on a $\omega'_1 = 0$. Il existe donc une fonction u des variables indépendantes x, y, qui est définie au point x_0, y_0 et dans son voisinage de telle sorte, que l'équation

$$\omega_1 = du \tag{93}$$

a lieu identiquement. En prenant la fonction u comme une variable indépendante nouvelle, on tire de l'équation (92) que k ne dépend que de la variable indépendante u et on démontre par un calcul facile que la fonction

$$\mu = e^{-2\int(2k-1)\,du} \tag{94}$$

est un facteur intégrant pour la forme ω_2. On peut donc écrire

$$e^{-2\int(2k-1)\,du}\,\omega_2 = dv \tag{95}$$

et on peut regarder la fonction v comme une variable indépendante nouvelle.

Cela posé, deux cas sont à distinguer:

α) k s'annule identiquement. Dans ce cas on trouve que les fonctions $A_k^{(i)}, B_k^{(i)}$ satisfont aux systèmes d'équations aux dérivées partielles, d'après (2), (13), (21), (92), (93), (95),

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial u} &= A_1 & \frac{\partial A}{\partial v} &= e^{-2u} A_2 \\ \frac{\partial A_1}{\partial u} &= -2A_1 & \frac{\partial A_1}{\partial v} &= 0 \\ \frac{\partial A_2}{\partial u} &= 2A_2 & \frac{\partial A_2}{\partial v} &= 0, \end{aligned} \tag{96}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B}{\partial u} &= B_1 & \frac{\partial B}{\partial v} &= e^{-2u} B_2 \\
\frac{\partial B_1}{\partial u} &= -B_1 & \frac{\partial B_1}{\partial v} &= -e^{-2u} B_2 \\
\frac{\partial B_2}{\partial u} &= B_2 & \frac{\partial B_2}{\partial v} &= 0.
\end{aligned} \tag{96}$$

En les intégrant, on obtient les équations finies des correspondances analytiques considérées. En posant u au lieu de e^{-u}, on peut écrire ces équations

$$\begin{aligned}
x &= u^2 & \xi &= u \\
y &= v & \eta &= uv
\end{aligned} \qquad (u \neq 0) \tag{97}$$

β) $k \neq 0$. Dans ce cas, on trouve facilement que les fonctions $A_k^{(i)}, B_k^{(i)}$ satisfont aux systèmes des équations aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial u} &= A_1 & \frac{\partial A}{\partial v} &= \frac{1}{(e^u - e^{-u})^2} A_2 \\
\frac{\partial A_1}{\partial u} &= -\frac{2e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}} A_1 \cdot & \frac{\partial A_1}{\partial v} &= -\frac{1}{(e^u - e^{-u})^3} A_2 \\
\frac{\partial A_2}{\partial u} &= \frac{2e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}} A_2 & \frac{\partial A_2}{\partial v} &= 0, \\
\frac{\partial B}{\partial u} &= B_1 & \frac{\partial B}{\partial v} &= \frac{1}{(e^u - e^{-u})^2} B_2 \\
\frac{\partial B_1}{\partial u} &= -\frac{e^u + 2e^{-u}}{e^u - e^{-u}} B_1 & \frac{\partial B_1}{\partial v} &= -\frac{e^u}{(e^u - e^{-u})^3} B_2 \\
\frac{\partial B_2}{\partial u} &= \frac{e^u + 2e^{-u}}{e^u - e^{-u}} B_2 & \frac{\partial B_2}{\partial v} &= 0.
\end{aligned} \tag{98}$$

En les intégrant et en changeant la notation d'une manière facile à comprendre, on obtient les équations des correspondances analytiques considérés sous la forme

$$\begin{aligned}
x &= v\frac{u^2+1}{u^2-1} & \xi &= v\frac{u}{u^2+1} \\
y &= \frac{u^2+1}{u^2-1} & \eta &= \frac{u}{u^2-1}
\end{aligned} \qquad (u^2 \pm 1 \neq 0) \tag{99}$$

35. Correspondances analytiques de la troisième espèce. Dans ce cas, la forme Ψ se réduit au point géométrique x_0, y_0 et dans un certain voisinage de celui-ci à un cube. On peut donc écrire

$$c_0 = \lambda_1^3,\ c_1 = \lambda_1^2 \lambda_2,\ c_2 = \lambda_1 \lambda_2^2,\ c_3 = \lambda_2^3, \tag{100}$$

les fonctions λ_1, λ_2 ne s'annulant pas toutes deux simultanément. Elles satisfont aux équations, d'après (36),

$$\begin{aligned}
\delta\lambda_1 &= \lambda_1 e_{11} + \lambda_2 e_{12} \\
\delta\lambda_2 &= \lambda_1 e_{21} + \lambda_2 e_{22}.
\end{aligned} \tag{101}$$

Nous allons montrer qu'il est permis de lier les variables par les relations nouvelles

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 0. \tag{102}$$

Pour cela il suffit de montrer que, x, y étant un point géométrique fixe suffisamment voisin au point géométrique x_0, y_0, ou celui-ci, les équations $\delta\lambda_1 = \delta\lambda_2 = 0$ constituent avec les équations qui définissent l'élément plan $\mathcal{E}_4$ un système d'équations linéairement distinctes, quellesque soient les valeurs admissibles des variables. Or, cela résulte immédiatement des équations (101).

Lions alors les variables par les relations (102). Les équations (22) s'écriront

$$\omega_{12} - \tau_{12} = \omega_1, \ \omega_{11} - \tau_{11} = 0, \ \omega_{21} - \tau_{21} = 0. \tag{103}$$

36. La liaison des variables par les relations (102) a comme conséquence que chacun des éléments linéaires de l'élément plan correspondant E_4 satisfait aux équations linéaires, d'après (35), (31),

$$\begin{aligned}
\omega_{11} &= h\omega_1 + k\omega_2, \\
\omega_{21} &= 3\,k\omega_1 + g\omega_2, \\
-2\,g\omega_{12} + \omega_{20} &= v_1\omega_1 + w_2\omega_2, \\
-2\,g\omega_{21} + \omega_{10} &= w_1\omega_1 + v_2\omega_2, \\
dg + 3\,g\omega_{00} &= w_2\omega_1 + w_1\omega_2.
\end{aligned} \tag{104}$$

et chacun des éléments linéaires de l'élément plan $\mathcal{E}_2$ remplit les équations, d'après (36), (33),

$$\begin{aligned}
e_{10} = e_{11} = e_{21} = e_{20} - 2ge_{12} &= 0, \\
\delta g &= 3\,g e_{22}, \\
\delta w_1 &= -6\,g^2 e_{12} + 5\,w_1 e_{22}, \\
\delta w_2 &= \quad w_1 e_{12} + 4\,w_2 e_{22}.
\end{aligned} \tag{105}$$

En tenant compte de (32), on déduit des équations (104), en les différentiant

$$\begin{aligned}
&[\omega_1(dh - 4k\omega_{12} - h\omega_{22})] + [\omega_2(dk - g\omega_{12} - 2k\omega_{22})] + (2hk - v_2 - 2g^2)[\omega_1\omega_2] = 0, \\
&\qquad [\omega_1(dk - g\omega_{12} - 2k\omega_{22})] + (2k^2 - gh - \tfrac{2}{3}w_2)[\omega_1\omega_2] = 0, \\
&[\omega_1(dv_1 - 3\,\overline{w_2 + 2gh}\,\omega_{12} - 3v_1\omega_{22})] + [\omega_2(dw_2 - 2\,\overline{w_1 + 3gk}\,\omega_{12} - 4w_2\omega_{22})] + \\
&\qquad + (2w_2h + 3v_2k - 3g\,\overline{w_1 + 4gk})\,[\omega_1\omega_2] = 0, \\
&\qquad [\omega_1(dw_1 - \overline{v_1 + v_2 - 4g^2}\,\omega_{12} - 2\,\overline{w_1 - 9gk}\,\omega_{22})] + \\
&\qquad + [\omega_2(dv_2 - w_2\omega_{12} - 3\,\overline{v_2 - 2g^2}\,\omega_{22})] + (5w_1k + 3v_2h)\,[\omega_1\omega_2] = 0, \\
&[\omega_1(dw_2 - w_1\omega_{12} - 4w_2\omega_{22})] + [\omega_2(dw_1 + 6g^2\omega_{12} - 5w_1\omega_{22})] + \\
&\qquad + (4w_1h - 2w_2k + 3g\,\overline{v_2 - v_1 + 2g^2})\,[\omega_1\omega_2] = 0.
\end{aligned} \tag{106}$$

Les premières quatre de ces relations donnent

$$\begin{aligned}
\delta h &= 4k e_{12} + h e_{22}, \\
\delta k &= g e_{12} + 2k e_{22}, \\
\delta v_1 &= 3\,\overline{w_2 + 2gh}\, e_{12} + 3 v_1 e_{22},
\end{aligned} \tag{107}$$

$$\begin{aligned}
\delta w_2 &= 2\overline{w_1 + 3gk}\, e_{12} + 4 w_2 e_{22},\\
\delta w_1 &= \overline{v_1 + v_2 - 4g^2}\, e_{12} + 2\overline{w_1 - 9gk}\, e_{22},\\
\delta v_2 &= w_2 e_{12} + 3\overline{v_2 - 2g^2}\, e_{22};
\end{aligned} \tag{107}$$

ces équations comparées avec les dernières deux des équations (105) et les relations ainsi obtenues différentiées, conduisent aux identités

$$w_1 + 6gk = 0, \quad v_1 + v_2 + 2g^2 = 0, \quad 2w_2 + 3gh = 0 \tag{108}$$

de sorte que, en posant pour abréger v au lieu de v_1, les équations (104) s'écriront

$$\begin{aligned}
\omega_{11} &= h\omega_1 + k\omega_2,\\
\omega_{21} &= 3k\omega_1 + g\omega_2,\\
\omega_{20} - 2g\omega_{12} &= v\omega_1 - \tfrac{3}{2} gh\,\omega_2,\\
\omega_{10} - 2g\omega_{21} &= -6gk\,\omega_1 - \overline{v + 2g^2}\,\omega_2,\\
dg + 3g\omega_{00} &= -\tfrac{3}{2} gh\,\omega_1 - 6gk\,\omega_2,
\end{aligned} \tag{109}$$

et les relations (106) s'écriront pour $g \neq 0$

$$\begin{aligned}
&[\omega_1 (dh - 4k\omega_{12} - h\omega_{22})] + hk\,[\omega_1\omega_2] = 0,\\
&[\omega_2 (dk - g\omega_{12} - 2k\omega_{22})] + (hk + v)\,[\omega_1\omega_2] = 0,\\
&[\omega_1 (dk - g\omega_{12} - 2k\omega_{22})] + 2k^2\,[\omega_1\omega_2] = 0,\\
&[\omega_1 (dv - \tfrac{3}{2} gh\omega_{12} - 3v\omega_{22})] - \tfrac{3}{2} g\,[\omega_2 (dh - 4k\omega_{12} - h\omega_{22})] -\\
&\qquad - 3\,(kv + \tfrac{1}{4} gh^2)\,[\omega_1\omega_2] = 0,\\
&[\omega_2 (dv - \tfrac{3}{2} gh\omega_{12} - 3v\,\omega_{22})] + 3hv\,[\omega_1\omega_2] = 0;
\end{aligned} \tag{110}$$

pour $g = 0$ on y a à écrire au lieu de premières deux l'équation unique

$$[\omega_1 (dh - 4k\omega_{12} - h\omega_{22})] + [\omega_2 (dk - g\omega_{12} - 2k\omega_{22})] + (2hk + v)\,[\omega_1\omega_2] = 0.$$

37. Chacun des éléments linéaires de l'élément plan $\mathcal{E}_2$ remplit les équations, d'après (105), (107),

$$\begin{aligned}
\delta g &= 3g\, e_{22},\\
\delta h &= 4k\, e_{12} + h e_{22},\\
\delta k &= g\, e_{12} + 2k\, e_{22},\\
\delta v &= \tfrac{3}{2} gh\, e_{12} + 3v\, e_{22},
\end{aligned} \tag{111}$$

de sorte qu'on a deux cas à distinguer:

Au point x_0, y_0 et par suite dans un certain voisinage de ce point, g ne s'annule pas.

g s'annule identiquement.

38. *Cas* $g \neq 0$. Nous allons montrer qu'il est permis de lier les variables par la relation nouvelle

$$g = 1. \tag{112}$$

Pour cela il suffit de montrer que, x, y étant un point géométrique fixe, l'équation $\delta g = 0$ constitue avec les équations qui définissent l'élément plan $\mathcal{E}_2$ un système d'équations linéairement distinctes. Or, cela résulte immédiatement de la première des équations (111).

Lions alors les variables par la relation (112). Les équations (103), (30) s'écriront

$$\begin{gathered}\omega_{12}-\varpi_{12}=\omega_1,\quad \omega_{11}-\varpi_{11}=0,\quad \omega_{21}-\varpi_{21}=0,\\ \omega_{10}-\varpi_{10}=\omega_2,\quad \omega_{20}-\varpi_{20}=\omega_1.\end{gathered}\tag{113}$$

39. La liaison des variables par la relation (112) a comme conséquence que chacun des éléments linéaires de l'élément plan E_3 remplit les équations linéaires, d'après (109),

$$\begin{aligned}\omega_{11}&=\ h\omega_1+k\omega_2,\\ \omega_{21}&=3k\omega_1+\omega_2,\\ \omega_{20}-2\omega_{12}&=\ v\omega_1-\tfrac{3}{2}h\omega_2,\\ \omega_{10}&=-v\omega_2,\\ \omega_{00}&=-\tfrac{1}{2}h\omega_1-2k\omega_2,\end{aligned}\tag{114}$$

et chaque couple d'éléments linéaires de cet élément plan remplit les relations quadratiques extérieures, d'après (110),

$$\begin{aligned}&[\omega_1(dh-4k\omega_{12})]=0,\\ &[\omega_2(dk-\omega_{12})]+v[\omega_1\omega_2]=0,\\ &[\omega_1(dk-\omega_{12})]=0,\\ &[\omega_1(dv-\tfrac{3}{2}h\omega_{12})]-\tfrac{3}{2}[\omega_2(dh-4k\omega_{12})]-6kv[\omega_1\omega_2]=0,\\ &[\omega_2(dv-\tfrac{3}{2}h\omega_{12})]+\tfrac{3}{2}hv[\omega_1\omega_2]=0.\end{aligned}\tag{115}$$

Chacun des éléments linéaires de l'élément plan correspondant $\mathcal{E}_1$ satisfait aux équations, d'après (105), (111),

$$\begin{gathered}e_{00}=e_{10}=e_{11}=e_{21}-e_{22}=2e_{12}-e_{20}=0,\\ \delta h=4ke_{12},\quad \delta k=e_{12},\quad \delta v=\tfrac{3}{2}he_{12}.\end{gathered}\tag{116}$$

40. On voit donc qu'il est permis de lier les variables par la relation nouvelle

$$k=0.\tag{117}$$

Lions alors les variables par cette relation. La première, la deuxième et la dernière des équations (114) s'écriront

$$\omega_{11}=h\omega_1,\ \omega_{21}=\omega_2,\ \omega_{00}=-\tfrac{1}{2}h\omega_1.\tag{118}$$

41. Il résulte de la liaison des variables, exprimée par la relation (117), que chacun des éléments linéaires de l'élément plan correspondant E_2 remplit les équations linéaires, d'après (113), (114), (115),

$$\begin{gathered}\omega_{12}-\varpi_{12}=\omega_1,\ \omega_{11}-\varpi_{11}=0,\ \omega_{21}-\varpi_{21}=0,\ \omega_{10}-\varpi_{10}=\omega_2,\ \omega_{20}-\varpi_{20}=\omega_1;\\ \begin{aligned}\omega_{00}&=-\tfrac{1}{2}h\omega_1,\\ \omega_{10}&=-v\omega_2,\\ \omega_{11}&=h\omega_1,\\ \omega_{12}&=-v\omega_1,\\ \omega_{20}&=-v\omega_1-\tfrac{3}{2}h\omega_2,\\ \omega_{21}&=\omega_2,\end{aligned}\end{gathered}\tag{119}$$

et par suite chaque couple d'éléments linéaires de cet élément plan remplit les relations quadratiques extérieures qui en résultent

$$[\omega_1 dh] = [\omega_2 dh] = [\omega_1 dv] = [\omega_2 dv] = 0. \tag{120}$$

On voit donc immédiatement que h, v sont des constantes; nous les désignerons dorénavant α, β. *Les correspondances analytiques dépendent dans ce cas de deux constantes arbitraires.*

42. *Équations finies des correspondances analytiques dans ce cas.* Soient x, y les variables indépendantes. On trouve tout d'abord par un calcul facile

$$\omega'_1 = \omega'_2 = 0. \tag{121}$$

Ils éxistent donc les fonctions u, v des variables x, y qui sont définies au point x_0, y_0 et dans son voisinage, de telle sorte qu'on a identiquement

$$\omega_1 = du, \quad \omega_2 = dv. \tag{122}$$

Prenons u et v pour variables indépendantes. Les $A_k^{(i)}$, $B_k^{(i)}$ sont fonctions de u et v seulement qui satisfont aux systèmes d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial u} = -\frac{\alpha}{2}A + A_1 & &\frac{\partial A}{\partial v} = A_2\\
&\frac{\partial A_1}{\partial u} = \alpha A_1 - \beta A_2 & &\frac{\partial A_1}{\partial v} = -\beta A\\
&\frac{\partial A_2}{\partial u} = -\beta A - \frac{\alpha}{2}A_2 & &\frac{\partial A_2}{\partial v} = -\frac{3}{2}\alpha A + A_1,
\end{aligned} \tag{123}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial B}{\partial u} = -\frac{\alpha}{2}B + B_1 & &\frac{\partial B}{\partial v} = B_2\\
&\frac{\partial B_1}{\partial u} = \alpha B_1 - (\beta+1) B_2 & &\frac{\partial B_1}{\partial v} = -(\beta+1) B\\
&\frac{\partial B_2}{\partial u} = -(\beta+1) B - \frac{\alpha}{2}B_2 & &\frac{\partial B_2}{\partial v} = -\frac{3}{2}\alpha B + B_1,
\end{aligned} \tag{124}$$

de sorte qu'un système se transforme dans l'autre par la substitution $\begin{pmatrix} u\,\alpha \\ v\,\beta \end{pmatrix}$.

$F_1(\varrho, \alpha, \beta)$ resp. $F_2(\lambda, \alpha, \beta)$ étant la fonction caractéristique du premier resp. du deuxième groupe des équations différentielles (123)*, soient $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ les racines de l'équation $F_1(\varrho, \alpha, \beta) = 0$ et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

---

* C'est-à-dire

$$F_1(\rho, \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha}{2} - \rho & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - \rho & -\beta \\ -\beta & 0 & -\frac{\alpha}{2} - \rho \end{vmatrix}, \quad F_2(\lambda, \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -\beta & -\lambda & 0 \\ -\frac{3}{2}\alpha & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

celles de l'équation $F_2(\lambda, \alpha, \beta)=0$. Δ étant le discriminant de l'équation $F_2(\lambda, \alpha, \beta)=0$, on obtient par un calcul facile

$$-F_1(\varrho, \alpha, \beta)=\varrho^3-\frac{3\alpha^2}{2}\varrho-\frac{\alpha^3}{4}-\beta^2, \tag{125}$$

$$-F_2(\lambda, \alpha, \beta)=\lambda^3+\frac{3\alpha}{2}\lambda+\beta, \tag{126}$$

$$-\frac{1}{27}\Delta=\frac{\alpha^3}{2}+\beta^3. \tag{127}$$

Cela posé, plusieurs cas sont à distinguer:

a) $\Delta \neq 0$. Dans ce cas on obtient tout d'abord du deuxième groupe des équations différentielles du système (125) la solution de ce système dans la forme

$$\begin{aligned} A &= C_1 e^{\lambda_1 v} + C_2 e^{\lambda_2 v} + C_3 e^{\lambda_3 v} \\ A_1 &= C_1\left(\lambda_1^2+\frac{3\alpha}{2}\right)e^{\lambda_1 v}+C_2\left(\lambda_2^2+\frac{3\alpha}{2}\right)e^{\lambda_2 v}+C_3\left(\lambda^2_3+\frac{3\alpha}{2}\right)e^{\lambda_3 v} \\ A_2 &= C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 v}+C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 v}+C_3\lambda_3 e^{\lambda_3 v} \end{aligned} \tag{128}$$

les C_1, C_2, C_3 dépendant de la variable u seulement. Nous les déterminerons en comparant les seconds membres des équations (128) avec la solution du système (123) que l'on trouve du premier groupe des équations différentielles (123). Cette solution a la forme, β *étant différent de zéro,*

$$\begin{aligned} A &= k_1 e^{\varrho_1 u} + k_2 e^{\varrho_2 u} + k_3 e^{\varrho_3 u}, \\ A_1 &= k_1\left(\varrho_1+\frac{\alpha}{2}\right)e^{\varrho_1 u}+k_2\left(\varrho_2+\frac{\alpha}{2}\right)e^{\varrho_2 u}+k_3\left(\varrho_3+\frac{\alpha}{2}\right)e^{\varrho_3 u}, \\ A_2 &= k_1\left(\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha\varrho_1}{2}-\varrho_1^2\right)e^{\varrho_1 u}+k_2\left(\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha\varrho_2}{2}-\varrho_2^2\right)e^{\varrho_2 u}+, \\ &\quad +k_3\left(\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha\varrho_3}{2}-\varrho_3^2\right)e^{\varrho_3 u}, \end{aligned} \tag{129}$$

les k_1, k_2, k_3 dépendant de la variable v seulement. En posant $v=0$ on aura donc

$$\beta C_k = \Delta^{-\frac{1}{2}}\sum_{i\;1}^{3} k_i^0\, U_k^{(i)}\, e^{\varrho_i u}, \tag{130}$$

où k_i^0 désignent des constantes arbitraires et

$$\begin{aligned} U_k^{(i)} &= (\lambda_{k+1}-\lambda_{k+2})\Big\{\beta(\lambda_{k+1}\lambda_{k+2}+\varrho_i-\alpha)- \\ &-(\lambda_{k+1}+\lambda_{k+2})\left(\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha\varrho_i}{2}-\varrho_i^2\right)\Big\}. \qquad \left(\begin{matrix} k=1,\ 2,\ 3 \\ \lambda_4=\lambda_1,\ \lambda_5=\lambda_2 \end{matrix}\right) \end{aligned} \tag{131}$$

Puis, en posant

$$\lambda_1=a+b,\ \lambda_2=\varepsilon a+\varepsilon^2 b,\ \lambda_3=\varepsilon^2 a+\varepsilon b \qquad (\varepsilon^3=1,\ \varepsilon\neq 1) \tag{132}$$

on déduira tout d'abord de l'équation $F_2(\lambda, \alpha, \beta)=0$

$$-\beta=a^3+b^3,\ \alpha=-2ab \tag{133}$$

et on s'assure par un calcul facile

$$\varrho_1 = a^2 + b^2,\ \varrho_2 = \varepsilon^2 a^2 + \varepsilon b^2,\ \varrho_3 = \varepsilon a^2 + \varepsilon^2 b^2. \tag{134}$$

On trouve ensuite à l'aide des formules (131), (132), (133), (134)

$$U_k^{(i} = \begin{cases} 3\beta\varepsilon(1-\varepsilon)(a^3 - b^3) & \textit{pour } i = k \\ 0 & \textit{pour } i \neq k, \end{cases}$$

d'où résulte, en faisant un changement des notations des constantes k_i^0 facile à comprendre,

$$C_k = k_k^0\, e^{\rho_k u}$$

et puis

$$A = k_1^0 e^{\lambda_1 v + \rho_1 u} + k_2^0 e^{\lambda_2 v + \rho_2 u} + k_3^0 e^{\lambda_3 v + \rho_3 u}. \tag{135}$$

On peut donc écrire les équations finies des correspondances analytiques considérées dans la forme, en supposant $\beta \neq 0$, $\beta \neq -1$,

$$\begin{aligned} x &= e^{(\rho_1 - \rho_3)u + (\lambda_1 - \lambda_3)v} & \xi &= e^{(\rho_1' - \rho_3')u + (\lambda_1' - \lambda_3')v} \\ y &= e^{(\rho_2 - \rho_3)u + (\lambda_2 - \lambda_3)v} & \eta &= e^{(\rho_2' - \rho_3')u + (\lambda_2' - \lambda_3')v} \end{aligned} \tag{136}$$

où ϱ_1', ϱ_2', ϱ_3' désignent les racines de l'équation $F_1(\varrho, \alpha, \beta + 1) = 0$, λ_1', λ_2', λ_3' celles de l'équation $F_2(\lambda, \alpha, \beta + 1) = 0$.

On trouve par un calcul analogue, *en supposant* $\beta = -1$, $\alpha \neq 0$,

$$\begin{aligned} x &= e^{(\rho_1 - \rho_3)u + (\lambda_1 - \lambda_3)v} & \xi &= e^{\frac{3\alpha}{2}u + \sqrt{-\frac{3\alpha}{2}}\,v} \\ y &= e^{(\rho_2 - \rho_3)u + (\lambda_2 - \lambda_3)v} & \eta &= e^{\sqrt{-6\alpha}\,v}, \end{aligned} \tag{137}$$

ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 désignant les racines de l'équation $F_1\,(\varrho, \alpha, -1) = 0$, λ_1, λ_2, λ_3 celles de l'équation $F_2\,(\lambda, \alpha, -1) = 0$.

On trouve, *en supposant* $\beta = -1$, $\alpha = 0$,

$$\begin{aligned} x &= e^{(1-\varepsilon)u + (1-\varepsilon^2)v} & \xi &= 2u + v^2 \\ y &= e^{-\varepsilon(1-\varepsilon)(u-v)} & \eta &= v; \end{aligned} \tag{138}$$

on trouve, *en supposant* $\beta = 0$,

$$\begin{aligned} x &= e^{\frac{3\alpha}{2}u + \sqrt{-\frac{3\alpha}{2}}\,v} & \xi &= e^{(\rho_1 - \rho_3)u + (\lambda_1 - \lambda_3)v} \\ y &= e^{\sqrt{-6\alpha}\,v} & \eta &= e^{(\rho_2 - \rho_3)u + (\lambda_2 - \lambda_3)v}, \end{aligned} \tag{139}$$

ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 désignant les racines de l'équation $F_1\,(\varrho, \alpha, -1) = 0$, λ_1, λ_2, λ_3 celles de l'équation $F_2\,(\lambda, \alpha, -1) = 0$.

b) $\varDelta = 0$, $\beta \neq 0$. Dans ce cas on trouve, *en supposant* $\beta \neq -1$,

$$\begin{aligned} x &= e^{\sigma^2 u} - (10 + \tfrac{3}{2}\sigma)e^{\sigma^2 u + \sigma v} & \xi &= c^{\sigma'^2 u} - (10 + \tfrac{3}{2}\sigma')e^{\sigma'^2 u + \sigma' v} \\ y &= xu - \frac{27}{2\sigma}\,e^{\sigma^2 u + \sigma v} & \eta &= \xi u - \frac{27}{2\sigma'}\,e^{\sigma'^2 u + \sigma' v}, \end{aligned} \tag{140}$$

où l'on à posé pour abréger $\sqrt[3]{\frac{\beta}{2}} = \sigma$, $\sqrt[3]{\frac{\beta + 1}{2}} = \sigma'$; on trouve, *en supposant* $\beta = -1$,

$$
\begin{aligned}
x &= e^u - \left(10 - \frac{3}{2\sqrt[3]{2}}\right) e^{u + v\sqrt{3}} & \xi &= e^{u+v} \\
y &= xu + \frac{27}{2\sqrt[3]{2}} e^{u+v\sqrt{3}} & \eta &= e^{3v}
\end{aligned}
\tag{141}
$$

c) $\Delta = 0$, $\beta = 0$. Dans ce cas, on trouve

$$
\begin{aligned}
x &= 2u + v^2 & \xi &= e^{(1-\varepsilon)u + (1-\varepsilon^2)v} \\
y &= v & \eta &— e^{-\varepsilon(1-\varepsilon)(u-v)}
\end{aligned}
\tag{142}
$$

43. *Les courbes caractéristiques de ces correspondances ne sont pas en général projectivement identiques.* Considérons, en effet, les équations génerales de ces correspondances qui sont données par les formules (136). Les courbes caractéristiques de ces correspondances des plans (A), (B) étant données par des formules

$$x^{\lambda_2 - \lambda_3} . y^{-(\lambda_1 - \lambda_3)} = k, \quad \xi^{\lambda'_2 - \lambda'_3} . \eta^{-(\lambda'_1 - \lambda'_3)} = k'$$

où k, k' désignent des constantes on voit que ce sont des courbes W de Klein et Lie dont les invariants projectifs $\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}$, $\frac{\lambda_1' - \lambda_3'}{\lambda_2' - \lambda_3'}$ sont distincts.

44. *Cas* $g = 0$. Dans ce cas chacun des éléments linéaires de l'élément plan E_4 remplit les équations linéaires, d'après (103), (30), (109),

$$
\begin{gathered}
\omega_{12} - \tau_{12} = \omega_1, \ \omega_{11} - \tau_{11} \quad 0, \ \omega_{21} - \tau_{21} = 0, \ \omega_{10} - \tau_{10} = 0, \ \omega_{20} - \tau_{20} = 0, \\
\omega_{11} = h\omega_1 + k\omega_2, \\
\omega_{21} = 3\,k\omega_1, \\
\omega_{20} = v\omega_1, \\
\omega_{10} = -v\omega_2,
\end{gathered}
\tag{143}
$$

et chaque couple d'éléments linéaires remplit les relations quadratiques extérieures, d'après (110),

$$
\begin{gathered}
[\omega_1 (dh \quad 4k\omega_{12} - h\omega_{22})] + [\omega_2 (dk - 2\,k\,\omega_{22})] + (2\,kh + v)\,[\omega_1\,\omega_2] = 0, \\
[\omega_1 (dk - 2\,k\omega_{22})] + 2\,k^2\,[\omega_1\,\omega_2] = 0, \\
[\omega_1 (dv - 3\,v\omega_{22})] - 3\,kv\,[\omega_1\,\omega_2] = 0, \\
[\omega_2 (dv - 3\,v\omega_{22})] + 3\,hv\,[\omega_1\,\omega_2] = 0.
\end{gathered}
\tag{144}
$$

On déduit des deux dernières relations que chacun des éléments linéaires de l'élément plan E_4 satisfait aussi à l'équation linéaire

$$dv - 3\,v\omega_{22} = -3\,hv\omega_1 + 3\,kv\omega_2 \tag{145}$$

laquelle équation entraîne à son tour la relation quadratique extérieure

$$
\begin{gathered}
v\,[\omega_1 (dh - 4\,k\omega_{12} - h\omega_{22})] + v\,[\omega_2 (dk - 2\,k\omega_{22})] + \\
+ v\,(2\,kh - v)\,[\omega_1\,\omega_2] = 0.
\end{gathered}
\tag{146}
$$

On voit donc qu'il est identiquement

$$v = 0,$$

de sorte que les équations (143) s'écriront

$$\omega_{12} - \tau_{12} = \omega_1, \ \omega_{11} - \tau_{11} = 0, \ \omega_{21} - \tau_{21} = 0, \ \omega_{10} - \tau_{10} = 0, \ \omega_{20} - \tau_{20} = 0,$$

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= h\omega_1 + k\omega_2, \\ \omega_{21} &= 3\,k\omega_1, \\ \omega_{20} &= 0, \\ \omega_{10} &= 0, \end{aligned} \tag{147}$$

et les relations quadratiques (144) auront la forme

$$\begin{aligned} [\omega_1 (dh - 4\,k\omega_{12} - h\omega_{22})] + [\omega_2 (dk - 2\,k\omega_{22})] + 2\,hk\,[\omega_1\,\omega_2] = 0, \\ [\omega_1 (dk - 2\,k\omega_{22})] + 2\,k^2\,[\omega_1\,\omega_2] = 0. \end{aligned} \tag{148}$$

45. Chacun des éléments linéaires de l'élément plan $\mathcal{E}_2$ satisfait aux équations linéaires

$$\begin{aligned} e_{00} = e_{11} = e_{20} = e_{21} - 0, \\ \delta k = 2\,ke_{22}, \ \ \delta h = 4\,ke_{12} + he_{22}, \end{aligned} \tag{149}$$

de sorte que l'on a deux cas à distinguer:

Au point x_0, y_0 et par suite dans un certain voisinage de ce point, k ne s'annule pas.

k s'annule identiquement.

46. *Cas* $k \neq 0$. Dans ce cas on peut lier les variables par la relation nouvelle

$$k = 1. \tag{150}$$

Faisons alors cette liaison. Les premières deux des équations (147) auront la forme

$$\omega_{11} = h\omega_1 + \omega_2, \ \ \omega_{21} = 3\,\omega_1. \tag{151}$$

47. La liaison des variables par la relation (150) a comme conséquence que chacun des éléments linéaires de l'élément plan E_3 satisfait aux équations linéaires, d'après (147), (148),

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= h\omega_1 + \omega_2, \\ \omega_{21} &= 3\,\omega_1, \\ \omega_{20} &= 0, \\ \omega_{10} &= 0, \\ \omega_{00} &= -w\omega_1 - 2\,\omega_2. \end{aligned} \tag{152}$$

et chaque couple d'éléments linéaires de cet élément plan remplit les relations quadratiques extérieures, qui en résultent

$$\begin{aligned} [\omega_1 (dh - 4\,\omega_{12})] + w\,[\omega_1\,\omega_2] = 0, \\ [\omega_1 (dw - 2\,\omega_{12})] + 2\,(2\,w - h)\,[\omega_1\,\omega_2] = 0. \end{aligned} \tag{153}$$

Chacun des éléments linéaires de l'élément plan $\mathcal{E}_1$ vérifie les équations, d'après (149),

$$\begin{aligned} e_{00} = e_{10} - e_{11} = e_{20} = e_{21} = e_{22} = 0 \\ \delta h = 4\,e_{12}. \end{aligned} \tag{154}$$

48. On voit donc qu'il est permis de lier les variables par la relation nouvelle

$$h = 0. \tag{155}$$

Lions alors les variables par cette relation. La première des équations (152) aura la forme

$$\omega_{11} = \omega_2. \tag{156}$$

49. La liaison des variables par la relation (156) entraîne comme conséquence ce que chacun des éléments linéaires de l'élément plan E_2 remplit les équations linéaires, d'après (143), (152), (153),

$$\omega_{12} - \tau_{12} = \omega_1,\ \omega_{11} - \tau_{11} = 0,\ \omega_{21} - \tau_{21} = 0,\ \omega_{10} - \tau_{10} = 0,\ \omega_{20} - \tau_{20} = 0,$$

$$\begin{aligned} \omega_{00} &= -w\omega_1 - 2\,\omega_2, \\ \omega_{10} &= 0, \\ \omega_{11} &= \omega_2, \\ \omega_{12} &= z\omega_1 + \tfrac{1}{2} w\omega_2, \\ \omega_{20} &= 0, \\ \omega_{21} &= 3\,\omega_1, \end{aligned} \tag{157}$$

et par suite chaque couple d'éléments linéaires de cet élément plan remplit les relations quadratiques extérieures qui en résultent

$$\begin{aligned} [dw\omega_1] - 3\,w\,[\omega_1\,\omega_2] &= 0, \\ [dw\omega_2] + 2\,[dz\omega_1] - \frac{w^2}{2}[\omega_1\,\omega_2] &= 0. \end{aligned} \tag{158}$$

Les systèmes de référence sont donc parfaitement déterminés; *pour cette espèce des correspondances analytiques deux fonctions holomorphes qui remplissent les conditions d'intégrabilité (158) ont été définies par la particularisation des systèmes de référence. Ce sont les invariants projectifs fondamentaux des correspondances analytiques de cette espèce.*

50. *Cas* $k = 0$. Dans ce cas chacun des éléments linéaires de l'élément plan correspondant E_4 remplit les équations linéaires, d'après (147),

$$\omega_{12} - \tau_{12} = \omega_1,\ \omega_{11} - \tau_{11} = 0,\ \omega_{21} - \tau_{21} = 0,\ \omega_{10} - \tau_{10} = 0,\ \omega_{20} - \tau_{20} = 0,$$

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= h\omega_1, \\ \omega_{21} &= 0, \\ \omega_{20} &= 0, \\ \omega_{10} &= 0, \end{aligned} \tag{159}$$

et chaque couple de ses éléments linéaires remplit la relation quadratique extérieure, d'après (148),

$$[\omega_1\,(dh - h\omega_{22})] = 0. \tag{160}$$

51. Chacun des éléments linéaires de l'élément plan $\mathcal{E}_2$ remplit les équations linéaires, d'après (149),

$$\begin{aligned} e_{10} = e_{11} = e_{20} = e_{21} &= 0 \\ \delta h &= he_{22} \end{aligned} \tag{161}$$

de sorte qu'on a deux cas à distinguer:

Au point x_0, y_0 et par suite dans un voisinage de ce point, h ne s'annule pas.

h s'annule identiquement.

52. *Cas* $h \neq 0$. Dans ce cas, on voit immédiatement qu'il est permis de lier les variables par la relation nouvelle

$$h = 1. \tag{162}$$

Lions alors les variables par cette relation. On aura, d'après (159),

$$\omega_{11} = \omega_1. \tag{163}$$

53. Il résulte de la liaison des variables, exprimée par la relation (162), que chacun des éléments linéaires de l'élément plan correspondant E_3 remplit les relations linéaires, d'après (159), (160),

$$\omega_{11} = \omega_1, \ \omega_{21} = 0, \ \omega_{20} = 0, \ \omega_{10} \quad 0, \ \omega_{00} = w\omega_1, \tag{164}$$

et par suite chaque couple de ses éléments linéaires remplit la relation quadratique extérieure qui en résulte

$$[dw\omega_1] = 0. \tag{165}$$

Chacun des éléments linéaires de l'élément plan $\mathcal{E}_1$ remplit alors les équations linéaires, d'après (161),

$$e_{00} = e_{10} - e_{11} - e_{20} = e_{21} - e_{22} = 0, \tag{166}$$

quellesque soient les valeurs admissibles des paramètres.

54. On trouve maintenant par un calcul facile que $\omega_1{}' = 0$; on peut donc poser $\omega_1 - du$ et on peut prendre la fonction u comme une variable nouvelle. Alors il résulte immédiatement de la relation (165) que w est une fonction de cette variable seule et on s'assure facilement en appliquant les formules (164) que la fonction $e^{-\int(w+2)du}$ est un facteur intégrant de la forme ω_{12}. Chacun des éléments linéaires de l'élément plan E_3 satisfait donc à l'équation linéaire

$$df = e^{-\int(w+2)du}\,\omega_{12} \tag{167}$$

et par suite chacun des éléments linéaires de l'élément plan $\mathcal{E}_1$ à l'équation

$$\delta f = e^{-\int(w+2)du} \,.\, e_{12}\,. \tag{168}$$

On voit donc qu'il est permis de lier les variables par la relation nouvelle

$$f = 0. \tag{169}$$

55. Il résulte de la relation (169) que chacun des éléments linéaires de l'élément plan E_2 en question, satisfait aux équations, d'après (159), (164), (167),

$$\omega_{12} - \tau_{12} = \omega_1, \ \ \omega_{11} - \tau_{11} = 0, \ \ \omega_{21} - \tau_{21} = 0, \ \ \omega_{10} - \tau_{10} = 0, \ \ \omega_{20} - \tau_{20} = 0$$

$$\begin{aligned} \omega_{00} &= w\omega_1, & \omega_{12} &= 0, \\ \omega_{10} &= 0, & \omega_{20} &- 0, \\ \omega_{11} &= \omega_1, & \omega_{21} &= 0. \end{aligned} \tag{170}$$

On en déduit que la fonction $e^{-\int(2w+1)du}$ est un facteur intégrant de la forme ω_2 de sorte que l'on peut écrire

$$e^{-\int(2w+1)\,du}\omega_2 = dv \tag{171}$$

et on peut prendre la fonction v comme une variable indépendante.

Les correspondances considérées dépendent donc d'une fonction arbitraire d'un argument.

56. Il est facile de trouver les équations finies de ces correspondances. En effet, en posant φ au lieu de $e^{\int w\,du}$, on obtient par un calcul facile que les fonctions A_k, B_k satisfont aux systèmes d'équations différentielles

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial u} = \frac{\varphi'}{\varphi} A + A_1 && \frac{\partial A}{\partial v} = \varphi^2 e^u A_2 \\
&\frac{\partial A_1}{\partial u} = A_1 && \frac{\partial A_1}{\partial v} = 0 \\
&\frac{\partial A_2}{\partial u} = -\left(\frac{\varphi'}{\varphi}+1\right) A_2 && \frac{\partial A_2}{\partial v} = 0, \\
&\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\varphi'}{\varphi} B + B_1 && \frac{\partial B}{\partial v} = \varphi^2 e^u B_2 \\
&\frac{\partial B_1}{\partial u} = B_1 - B_2 && \frac{\partial B_1}{\partial v} = 0 \\
&\frac{\partial B_2}{\partial u} = -\left(\frac{\varphi'}{\varphi}+1\right) B_2 && \frac{\partial B_2}{\partial v} = 0.
\end{aligned} \tag{172}$$

En les intégrant on obtient tout d'abord les équations finies des correspondances considérées sous la forme

$$\begin{aligned}
&x = v && \xi = v - \int e^{u-\int w\,du}\left(\int e^{-2u-\int w\,du}du\right)du \\
&y = \int e^{u-\int w\,du}du && \eta = \int e^{u-\int w\,du}du.
\end{aligned}$$

Soit $\psi(t)$ *une fonction arbitraire de la variable indépendante* t *analytique au point* t_0, *dont la deuxième et la troisième dérivée ne s'annule pas à ce point.* Soit

$$u = -\tfrac{1}{3}\log \psi''(t)$$

une fonction de la variable indépendante t dont la valeur au point t_0 est u_0. La dérivée de la fonction u au point t_0 étant différente de zéro, on peut prendre la fonction u pour variable indépendante et t pour sa fonction dont t_0 est la valeur au point u_0 et dont la dérivée y est différente de zéro.

En posant

$$w = 1 - \frac{t''}{t'},$$

on peut mettre dans le voisinage du point t_0 les équations des correspondances considérées sous la forme

$$\begin{aligned}
&x = v && \xi = v - \psi(t) \\
&y - t && \eta = t.
\end{aligned} \tag{173}$$

Ces correspondances analytiques ne contiennent donc pas les correspondances quadratiques, $\psi(t)$ y étant t^2 (ou $\psi(t) = at^2 + bt + c$).

57. *Cas* $h=0$. Dans ce cas très particulier, on s'assure facilement en appliquant les raisonnements exposés plus haut, qu'il est permis de lier les variables par des relations convenablement choisies, de sorte que chacun des éléments linéaires de l'élément plan correspondant E_2 remplisse les équations linéaires

$$\begin{gathered}\omega_{12}-\tau_{12}=\omega_1,\quad \omega_{11}-\tau_{11}=0,\quad \omega_{21}-\tau_{21}=0,\quad \omega_{10}-\tau_{10}=0,\\ \omega_{20}-\tau_{20}-0;\\ \omega_{00}=\omega_{10}=\omega_{11}=\omega_{12}=\omega_{20}-\omega_{21}=\omega_{22}=0.\end{gathered} \tag{174}$$

En intégrant les systèmes d'équations différentielles correspondantes on obtient les équations finies de ces correspondances

$$\begin{array}{ll} x-v & \xi-v-t^2 \\ y=t & \eta=t. \end{array} \tag{175}$$

58. *Les courbes caractéristiques des correspondances analytiques dans le cas* $g=0$ *sont projectivement identiques.* En effet, cette propriété des courbes caractéristiques de ces correspondances analytiques résulte immédiatement de la remarque que, $\omega_1=0$ étant l'équation différentielle des courbes caractéristiques, on a identiquement,

$$\begin{gathered}\tau_{00}=\omega_{00},\ \tau_1=\omega_1,\ \tau_2=\omega_2,\ \tau_{10}-\omega_{10},\ \tau_{11}=\omega_{11},\ \tau_{12}=\omega_{12},\\ \tau_{20}=\omega_{20},\ \tau_{21}-\omega_{21},\ \tau_{22}=\omega_{22},\end{gathered}$$

si l'on se déplace sur une courbe caractéristique quelconque.

59. **Correspondances analytiques de la quatrième espèce.** D'après ce qui précède (v. N° 15) les fonctions c_0, c_1, c_2, c_3 s'annulent dans ce cas identiquement.

Chacun des éléments linéaires de l'élément plan E_6 remplit donc pour toutes les valeurs admissibles des variables les équations linéaires

$$\begin{gathered}\omega_{12}-\tau_{12}=0,\quad \omega_{11}-\tau_{11}=0,\quad \omega_{21}-\tau_{21}=0,\quad \omega_{10}-\tau_{10}=g\omega_2,\\ \omega_{20}-\tau_{20}-g\omega_1.\end{gathered} \tag{176}$$

Différentions la deuxième de ces équations; nous déduirons ainsi que chaque couple d'éléments linéaires du même élément plan E_6 satisfait à la relation quadratique extérieure

$$g\,[\omega_1\omega_2]=0, \tag{177}$$

quellesque soient les valeurs des variables.

On voit donc que g s'annule identiquement, de sorte que les équations (176) s'écriront

$$\begin{gathered}\omega_{12}-\tau_{12}=0,\quad \omega_{11}-\tau_{11}=0,\quad \omega_{21}-\tau_{21}=0,\quad \omega_{10}-\tau_{10}=0,\\ \omega_{20}-\tau_{20}=0.\end{gathered} \tag{178}$$

Or, on conclut immédiatement des formules (13), (21), (3), (178) que *toute correspondance analytique de la quatrième espèce n'est qu'une correspondance projective,* résultat évident *a priori.*