Otakar Borůvka

Teoria analytică şi constructivă a transformărilor diferentiale liniare de ordinul doi

Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. R. 1 (49), 1957, Nr. 2, 125-130

BUL. MAT. al Soc. Şt. Mat. Fiz. din R.P.R.
Tomul 1 (49), nr. 2, 1957.

TEORIA ANALITICĂ ŞI CONSTRUCTIVĂ A TRANSFORMĂRILOR DIFERENŢIALE LINIARE DE ORDINUL DOI

DE

O. BORŮVKA (Brno)

(Comunicare făcută Congresului matematicienilor romîni, Bucureşti, mai-iunie 1956)

1. Introducere

Obiectul conferinţei de faţă îl constituie o teorie a transformărilor ecuaţiilor diferenţiale liniare ordinare de ordinul doi.

Vom considera două ecuaţii diferenţiale de tip I a c o b i

$$(a) \qquad y'' \quad q(t)\, y, \qquad\qquad Y'' = Q(T)\, Y, \qquad (A)$$

presupunînd funcţiile q, Q continue în intervalele deschise j, J.

Origina teoriei noastre o constituie problema următoare:

Fie $U(T)$ o integrală a ecuaţiei (A). Se caută două funcţii $w(t)$, $X(t)$ astfel încît funcţia compusă

$$u(t) = w(t)\, U[X(t)]$$

să fie o integrală a celeilalte ecuaţii (a). Cu alte cuvinte, căutăm să transformăm unele în altele în felul arătat mai sus, integralele ecuaţiilor (a), (A).

Problema noastră o găsim pusă şi de ilustrul geometru german E. E. K u m m e r care s-a ocupat de ea într-un articol publicat în 1834 în programul de liceu, la Liegnitz. Acest articol a fost republicat în *Journal de Crelle* în 1887, vol. 100. Raţionamentele originale ale lui K u m m e r n-au fost, după cît ştim, adîncite în aşa fel încît să formeze o teorie satisfăcătoare din punctul de vedere al teoriilor moderne. Totuşi, natura numeroaselor probleme clasice şi moderne ale teoriei ecuaţiilor diferenţiale lineare de ordinul doi, de exemplu teoria clasică a lui F l o q u e t, criteriile privind caracterul oscilatoriu al soluţiilor, comportarea asimptotică a integralelor, problemele la limită etc. lasă să se prevadă că metoda transformării integralelor unei ecuaţii date în integralele unor ecuaţii mult mai simple, chiar în integralele unor ecuaţii ca $y'' = 0$ sau $y'' - - y$ poate să prezinte mari avantaje.

Am fost condus la teoria de faţă de cercetările mele asupra dispersiilor ecuaţiilor diferenţiale lineare ordinare de ordinul doi. Memoriul meu apărut în *Czech.*

Math. Journ. **3** (78), 1953 este consacrat acestor studii. Teoria dispersiilor se ocupă în fond, de transformarea integralelor unei ecuaţii diferenţiale lineare ordinare de ordinul doi în integralele aceleiaşi ecuaţii diferenţiale, în condiţii particulare. Este vorba, bine înţeles, de chestiuni privind domeniul real şi de caracter global.

Teoria transformărilor diferenţiale lineare de ordinul doi, pe care o voi prezenta aici în mod succint, se compune dintr-o parte analitică şi dintr-o parte constructivă. Partea analitică constituie obiectul Memoriului care a apărut de curînd în *Annali di Matematica p. ed appl.*, vol. **41** (1956). Îm voi permite să reamintesc rezultatele fundamentale care sînt indispensabile pentru o bună înţelegere a celor ce urmează. După aceasta însă mă voi ocupa pe scurt, de partea constructivă şi voi indica cîteva aplicaţii ale teoriei de faţă.

2. Partea analitică

Pe lîngă ecuaţiile diferenţiale lineare (a), (A) vom asocia două ecuaţii diferenţiale nelineare de ordinul doi, în jurul cărora gravitează toată teoria considerată:

$$(b) \qquad -\{X, t\} + Q(X)\,X'^2 = q(t), \qquad -\{x, T\} + q(x)\,\dot{x}^2 = Q(T); \qquad (B)$$

X, x sînt funcţii necunoscute şi simbolurile $\{X, t\}$, $\{x, T\}$ reprezintă derivatele schwartziene în raport cu variabilele independente t, T:

$$\{X, t\} = \frac{1}{2}\frac{X'''}{X'} - \frac{3}{4}\frac{X''^2}{X'^2}\,; \quad \{x, T\} = \frac{1}{2}\frac{\dddot{x}}{\dot{x}} - \frac{3}{4}\frac{\ddot{x}^2}{\dot{x}^2}.$$

Vom considera de asemenea şi cazuri particulare ale ecuaţiilor (b), (B) şi anume:

$$(\overline{b}) \qquad -\{X, t\} + q(X)\,X'^2 = q(t), \qquad -\{x, T\} + Q(x)\,\dot{x}^2 = Q(T). \qquad (\overline{B})$$

Fundamentele teoriei sînt date de rezultatele următoare:

1. Relaţii între soluţiile ecuaţiilor (b), (B).

Pentru fiecare soluţie a ecuaţiei (b), $X(t)$, *funcţia inversă* $x(T)$, *reprezintă o soluţie a ecuaţiei* (B); *reciproc, pentru fiecare soluţie a ecuaţiei* (B), $x(T)$, *funcţia inversă* $X(t)$, *este o soluţie a ecuaţiei* (b).

2. Relaţii între soluţiile ecuaţiilor (A), (b); (a), (B).

Pentru fiecare integrală a ecuaţiei (A), $U(T)$ şi fiecare soluţie a ecuaţiei (b), $X(t)$, funcţia compusă

$$u(t) = \frac{U[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}}$$

reprezintă o integrală a ecuaţiei (a); în acelaşi timp avem şi formula inversă:

$$U(T) = \frac{u[x(T)]}{\sqrt{|\dot{x}(T)|}},$$

$x(T)$ fiind funcţia inversă lui $X(t)$.

Se găsesc rezultate analoge pentru fiecare integrală a ecuaţiei (a), $u(t)$, şi fiecare soluţie a ecuaţiei (B), $x(T)$.

3. Teoremă asupra existenţei şi unicităţii soluţiilor ecuaţiei (b).

Fie $t_0 \in j$, $X_0 \in J$, X_0' $(\neq 0)$, X_0'' numere arbitrare Există o integrală $X(t)$ a ecuaţiei (b) definită într-un interval deschis, i, care satisface datelor lui Cauchy:

$$X(t_0) \quad X_0, \; X'(t_0) - X_0', \; X''(t_0) \quad X_0'',$$

şi care este în acelaşi timp, cea mai cuprinzătoare în sensul că orice integrală a ecuaţiei (b), verificînd aceleaşi condiţii iniţiale, coincide cu ea pe intervalul în care este definită.

Dacă se cunosc integralele generale ale ecuaţiilor lineare (a), (A), soluţia $X(t)$ se obţine prin integrarea unei ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întîi cu variabile separate.

4. Grupurile de soluţii ale ecuaţiilor (b), ($\overline{B}$).

Să presupunem că integralele ecuaţiilor (a), (A) sînt oscilante, adică au spre cele două extremităţi ale intervalelor j şi J o infinitate de rădăcini. Atunci cele mai cuprinzătoare soluţii ale fiecărei ecuaţii ($\overline{b}$), ($\overline{B}$) există şi sînt definite în tot intervalul corespunzător j, J şi ele formează un grup continuu depinzînd de 3 parametri.

Grupul acesta al soluţiilor ecuaţiei (b), de exemplu, se împarte în două clase, după cum este vorba de soluţii crescătoare sau descrescătoare. Clasa formată din soluţiile crescătoare formează în acest grup un subgrup normal care posedă la rîndul său, un centru numărabil format tocmai din dispersiile centrale de prima speţă $\varphi_n(t)$, n $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ în raport cu ecuaţia (a).

Reamintim că valoarea celei de-a n-a dispersii centrale de prima speţă în punctul $t \in j$, $\varphi_n(t)$ coincide cu al n-lea număr conjugat valorii t în raport cu ecuaţia (a) situat la dreapta sau la stînga acestei valori, după cum n este pozitiv sau negativ; pentru $n - 0$ punem $\varphi_0(t) = t$.

3. Partea constructivă

Partea constructivă a teoriei de faţă constă în raţionamentele conducînd la construirea tuturor soluţiilor cele mai cuprinzătoare ale ecuaţiilor neliniare de ordinul trei (b), (B). Din cauza relaţiilor pe care le-am arătat, care subsistă între soluţiile celor două ecuaţii (b), (B), este suficient în mod evident, de a considera numai una din aceste ecuaţii, de exemplu ecuaţia (b).

Pentru a evita complicaţiile, de altfel neesenţiale, legate de determinarea intervalelor de definiţie a celor mai largi (cuprinzătoare) soluţii ale ecuaţiei (b), *vom presupune că intervalele ecuaţiilor lineare* (a), (A) *sînt oscilatorii*, adică au spre ambele extremităţi ale intervalului j, respectiv J, o infinitate de rădăcini.

Fie date două numere arbitrare $t_0 \in j$, $X_0 \in J$.

Vom începe cu observaţia următoare. Să considerăm două integrale (neidentic nule), y, Y, a ecuaţiilor (a), (A) (definite pe tot intervalul j, respectiv J); vom presupune că aceste integrale sau se anulează simultan în t_0, X_0 sau nu se anulează niciuna în t_0, X_0; avem astfel $y(t_0) - 0 = Y(X_0)$ sau $y(t_0) \neq 0 \neq Y(X_0)$.

Integralele acestea au, după cum am presupus, o infinitate de rădăcini către cele două extremităţi ale intervalelor j, J.

Definim între rădăcinile integralelor y, Y o corespondenţă biunivocă, numită directă, care face să corespundă celei de-a n-a ($n \geqslant 1$) rădăcină a integralei y, situată la dreapta (la stînga) lui t_0 a n-a rădăcină a integralei Y, situată de asemenea la dreapta (la stînga) lui X_0; dacă integralele y, Y se anulează în t_0, X_0, vom face să corespundă rădăcinei t_0 a integralei y rădăcina X_0 a integralei Y.

În afară de această corespondență definim și o corespondență analogă numită indirectă punînd în corespondență a n-a ($n \geqslant 1$) rădăcină a integralei y situată la dreapta (la stînga) lui t_0 cu a n-a rădăcină a integralei Y situată la stînga (la dreapta) lui X_0 și eventual asociind rădăcinii t_0 a integralei y, rădăcina X_0 a integralei Y.

Succesul raționamentului părții constructive a teoriei considerate constă în considerarea corespondențelor omografice între integralele celor două ecuații (a), (A). Avem în vedere bine înțeles, integralele ecuațiilor (a), (A) neindentic nule și definite în intervalele întregi j, J.

Vom considera totalitatea integralelor ecuațiilor (a), (A), σ, Σ.

Să alegem două perechi ordonate de integrale liniar independente ale ecuațiilor (a), (A): u, $v \in \sigma$, U, $V \in \Sigma$; vom însemna cu w, W constantele de arie corespunzătoare, $w = uv' - u'v$, $W = UV' - U'V$.

Prin această alegere am determinat o corespondență omografică, p, între sistemele σ, Σ, corespondență definită în modul următor: la fiecare integrală $y \in \sigma$, $y = \lambda u + \mu v$ asociem integrala $py = Y \in \Sigma$, $Y = \lambda U + \mu V$ formată cu aceleași constante, λ, μ. Numărul $\tau = \operatorname{sgn}(w\colon W) = \pm 1$, se numește *caracteristica omografiei* p.

Vom considera în cele ce urmează, omografiile p *«regulate» în raport cu numerele* t_0, X_0 prin proprietatea că fac să corespundă fiecărei integrale y care se anulează în t_0 o integrală care se anulează în X_0. Se vede că omografia p este regulată în raport cu t_0, X_0 dacă, și numai dacă, are loc relația: $u(t_0)\, V(X_0) - v(t_0)\, U(X_0) = 0$. Omografiile regulate în raport cu t_0, X_0 depind de 3 parametri arbitrari.

Vom defini acum, în intervalul j, două funcții D, $\bar{D}$ numite ***dispersii asociate ecuațiilor*** (a), (A) care joacă un rol fundamental în teoria de față.

Fie p o omografie regulată în raport cu t_0, X_0. Fie $t \in j$ un număr arbitrar și $y \in \sigma$ o integrală care se anulează în t. Definiția anunțată revine la aceea că valoarea funcției D ($\bar{D}$) în t coincide cu rădăcina integralei py asociată rădăcinii t a lui y în corespondență directă (indirectă) existînd între rădăcinile integralelor y, py. Vom numi funcția D ($\bar{D}$) *dispersie directă* (indirectă) determinată de numerele t_0, X_0 și de omografia p.

Această definiție pune în evidență cîteva proprietăți imediate ale funcțiilor D, $\bar{D}$. Vom indica numai acelea care sînt exprimate prin formulele

$$D[\varphi_n(t)] = \Phi_n[D(t)]\,;\ \bar{D}[\varphi_n(t)] = \Phi_{-n}[\bar{D}(t)],\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

φ_n, Φ_n fiind dispersiile centrale de prima speță ale ecuațiilor (a), (A).

Rezultatul central al acestei părți constructive a teoriei transformărilor pe care o prezentăm, este dat de următoarea teoremă:

Cele mai cuprinzătoare soluții ale ecuației diferențiale (b) *există în intervalul* j *întreg și coincid tocmai cu dispersiile directe determinate de diversele omografii regulate cu caracteristice pozitive și cu dispersiile indirecte determinate de omografiile regulate cu caracteristica negativă. Dispersiile directe reprezintă toate soluțiile cele mai cuprinzătoare crescătoare pe cînd dispersiile indirecte reprezintă pe cele descrescătoare.*

4. Aplicaţii

Există numeroase aplicaţii ale teoriei precedente. Ne vom mulţumi să indicăm cîteva rezultate particulare privind structura tuturor funcţiilor q pentru care integralele ecuaţiei (a) posedă un caracter oscilatoriu dat. Aceste rezultate se obţin prin aplicarea teoriei precedente cazurilor particulare $Q = 0$, $Q = -1$.

Iată rezultatele:

1. *Pentru ca orice integrală a ecuaţiei* (a) *să posede în intervalul* j *cel mult o rădăcină este necesar şi suficient ca funcţia* q *să fie derivata schwartziană, cu semnul schimbat, a unei funcţii crescătoare* X, *verificînd pentru un număr dat* $t_0 \in j$ *condiţiile* $X(t_0) = 0$, $X'(t_0) = 1$:

$$q(t) = -\{X, t\}.$$

2. *Pentru ca orice integrală a ecuaţiei* (a) *să aibă în intervalul* j, m ($\geqslant 0$) *sau* $m + 1$ *rădăcini situate la stînga unui punct dat* $t_0 \in j$, *în acelaş timp,* n ($\geqslant 0$) *sau* $n + 1$ *rădăcini situate la dreapta lui* t_0, *este necesar şi suficient ca funcţia* q *să fie de forma:*

$$q(t) = -\{X, t\} - X'^2(t),$$

X fiind o funcţie crescătoare care se anulează în t_0 şi verifică relaţiile următoare:

$$-(m+1)\pi < \inf_{t \in j} X(t) < -m\pi; \quad n\pi < \sup_{t \in j} X(t) < (n+1)\pi.$$

3. *Pentru ca integralele ecuaţiei* (a) *să fie oscilatorii, adică să aibă către cele două extremităţi ale intervalului* j *o infinitate de rădăcini, este necesar şi suficient ca funcţia* q *să fie de forma*

$$q(t) = -\{X, t\} - X'^2(t),$$

X fiind o funcţie crescătoare, nemărginită atît inferior cît şi superior.

Alte aplicaţii care sînt în legătură cu teoria precedentă şi care privesc diferite chestiuni ale teoriei ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinul doi şi de ordine superioare, au fost publicate (mai ales în *Czech. Math. Journ.*) în ultimii ani de colaboratorii mei, M. Greguš, M. Laitoch, Marko Švec.