

Borůvka, Otakar: Scholarly works

Otakar Borůvka

O pomyslných kořenech rovnice $\Gamma(z) = a$

Spisy přír. fak. MU, č. 26, 1923, 27 s.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/500003>

Terms of use:

© Masarykova univerzita, 1923

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

S P I S Y
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVOY UNIVERZITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

Rok 1923

Čís. 26

O POMYSLNÝCH KOŘENECH
ROVNICE $\Gamma(z) = a$.

(SUR LES RACINES IMAGINAIRES
DE L'ÉQUATION $\Gamma(z) = a$)

NAPSAL

OTAKAR BORŮVKA.

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDÁVÁ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 59.

NA SKLADĚ MÁ

EN VENTE CHEZ

KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

TISKEM POLYGRAFIE, BRNO.

Svému učiteli

Ě prof. dru M. Lerchovi.

O POMYSLNÝCH KOŘENECH ROVNICE $\Gamma(z) = a$.

(AVEC UN RÉSUMÉ EN FRANÇAIS.)

Úkolem této práce jest jednak přispěti k theorii funkce gamma číselnými hodnotami, jednak vyšetřiti podrobně povahu funkce $\Gamma(z)$ pro komplexní argument a umožniti v prvním přiblížení snadné vyhledání kořenů rovnice $\Gamma(z) = a$, je-li obecně a číslo komplexní, dané v oboru předem zvoleném.

Rozdělil jsem tuto práci na tři části; v části první odvozeny jsou nejdůležitější vztahy, jichž jest pro další vývody zapotřebí; pro úplnost připojeny jsou některé tabulky číselných hodnot, sloužící k výpočtu hodnot funkce $\Gamma(z)$.

V části druhé jest rozvinut celkový obraz přiřazení hodnot $\Gamma(z)$ bodům z , pro jistý obor roviny (z).

V části třetí vyložena jest metoda pro řešení rovnice $\Gamma(z) = |\Gamma(z)|e^{iB}$ pro $B = 0$, když kořeny její jsou pomyslné a jest provedeno řešení pro $|\Gamma(z)|$ v intervalu $0.1 \dots 0.8$ (pozn. str. 11). Uvedenou metodu možno aplikovati za určitých předpokladů také na rovnice jiné.

Číselné výsledky v části druhé a třetí nahrazují částečně tabulku hodnot funkce $\Gamma(z)$ pro komplexní argument, pro určitý obor tohoto; tabulka taková, pokud jest mi známo, posud neexistuje. Potřeba její byla vlastním podnětem k této práci.

I.

¹ Z Weierstrassova kanonického součinu, definujícího funkci $\Gamma(z)$, obdržíme logaritmováním

$$\log \Gamma(1+z) = -Ez + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{z}{\nu} - l \left(1 + \frac{z}{\nu} \right) \right],$$

kdež E jest Eulerova konstanta $0.5772 \ 1566 \ 4901 \dots$

Z toho vzorce plyne

$$\log \Gamma(1-z) = Ez + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[-\frac{z}{\nu} - l \left(1 - \frac{z}{\nu} \right) \right]$$

¹ Důsledně jest psáno $z = x + iy$; $-\pi < \text{ampl. } z \leq \pi$; $l z$ značí hlavní větev logaritmu z .

a pak

$$\log \frac{\Gamma(1+z)}{\Gamma(1-z)} = -2Ez + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{2z}{\nu} - l \frac{1+\frac{z}{\nu}}{1-\frac{z}{\nu}} \right];$$

za předpokladu $|z| < 1$ platí

$$\log \frac{\Gamma(1+z)}{\Gamma(1-z)} = -2Ez - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\lambda=3,5,7,\dots} \left(\frac{z}{\nu} \right)^{\lambda} \frac{1}{\lambda},$$

a dvojnásobná řada na straně pravé konverguje absolutně;

klademe-li
$$\zeta(\lambda) = 1 + \frac{1}{2^{\lambda}} + \frac{1}{3^{\lambda}} + \dots = 1 + S_{\lambda},$$

jest

$$\log \frac{\Gamma(1+z)}{\Gamma(1-z)} = -2Ez - 2 \sum_{\lambda=3,5,7,\dots} \frac{z^{\lambda}}{\lambda} - 2 \sum_{\lambda=3,5,7,\dots} \frac{z^{\lambda} S_{\lambda}}{\lambda}$$

a také

$$\log \frac{z \Gamma(z)^2}{\Gamma(z) \Gamma(1-z)} = -2Ez - l \frac{1+z}{1-z} + 2z - 2 \sum_{\lambda=3,5,7,\dots} \frac{z^{\lambda} S_{\lambda}}{\lambda}.$$

Klademe-li $\frac{S_{\lambda}}{\lambda} = \sigma_{\lambda}$, vychází z tohoto vztahu, s ohledem na Eulerovu

doplňkovou větu $\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin z\pi}$, vzorec

$$\log \Gamma(z) = \frac{1}{2} \left[l\pi - lz - l \sin z\pi - l \frac{1+z}{1-z} \right] + z(1-E) - \sum_{\lambda=3,5,7,\dots} \sigma_{\lambda} z^{\lambda}, \quad (1)$$

platný pro z uvnitř jednotkového kruhu¹.

Pro úplnost uvedeny jsou hodnoty σ_{λ} ($\lambda = 3, 5, \dots, 31$)².

λ	σ_{λ}		
3	0·06735	23010	53198 ₀
5	0·00738	55510	28673 ₉
7	0·00119	27539	11703 ₁
9	0·00022	31547	58453 ₅

¹ Srov. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, p. 38, form. 16. Tamtéž historické poznámky o numerických hodnotách $\zeta(s)$. — Hořejší odvození uvedeného vzorce a vzorce (3) podáno dle přednášek prof. M. Lercha. Srov. Serret-Scheffers, Lehrbuch der Diff. u. Integralrechnung, 7. vyd. II. p. 211. form. 7.

² Hodnoty σ_{λ} nahoře uvedené vypočteny jsou ze Stieltjesovy tabulky hodnot $\zeta(s)$ o 32. des. místech.

λ	σ_λ		
11	0.00004	49262	36738 ₁
13	0.00000	94394	88275 ₂
15	0.00000	20392	15753 ₃
17	0.00000	04492	46919 ₃
19	0.00000	01004	32248 ₂
21	0.00000	00227	11094 ₆
23	0.00000	00051	83475 ₀
25	0.00000	00011	92140 ₁
27	0.00000	00002	75952 ₂
29	0.00000	00000	64229 ₆
31	0.00000	00000	15021 ₃

Jak z tabulky koeficientů σ_λ patrně, jest konvergence řady $\sum \sigma_\lambda z^\lambda$ rychlá a zejména pro $|z|$ malé stačí několik málo členů k do-
 $\lambda=3, 5, 7, \dots$
 cílení značné přesnosti.

Speciálně plyne ze vzorce (1) pro $-1 \leq y \leq 1$

$$\text{Reál. č. } \log \Gamma(iy) = \frac{1}{2} l \frac{\pi}{y \sin y\pi} \quad (2)$$

vztah, na nějž jest v dalším poukázáno.

Pro další výpočty jest výhodné odvoditi vzorec jiný, jehož obor platnosti jest větší než obor platnosti vzorce (1).

Řadu, vyskytující se v logaritmovaném Weierstrassově součinu

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{z}{\nu} - l \left(1 + \frac{z}{\nu} \right) \right]$$

rozdělíme na dvě části $\sum_{\nu=1}^{\infty} = \sum_{\nu=1}^{p-1} + \sum_{\nu=p}^{\infty}$.

Jest pak

$$\log \Gamma(1+z) = -Ez + \sum_{\nu=1}^{p-1} \left[\frac{z}{\nu} - l \left(1 + \frac{z}{\nu} \right) \right] + L^*(z),$$

kdež

$$L^*(z) = \sum_{\nu=p}^{\infty} \left[\frac{z}{\nu} - l \left(1 + \frac{z}{\nu} \right) \right];$$

volíme $|z| < p$. Pak jest

$$L^*(z) = \sum_{\nu=p}^{\infty} \sum_{\mu=2}^{\infty} (-1)^\mu \frac{z^\mu}{\mu \nu^\mu}$$

a také

$$L^*(z) = \sum_{\mu=2}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{z^{\mu}}{\mu} R(p, \mu),$$

kdež

$$R(p, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+p)^{\mu}}.$$

Zavedeme-li pro stručnost $\frac{R(p, \mu)}{\mu} = k_{\mu}^{(p)}$, jest výsledný vzorec

$$\log \Gamma(z) = -lz - Ez + \sum_{\nu=1}^{p-1} \left[\frac{z}{\nu} - l \left(1 + \frac{z}{\nu} \right) \right] + \sum_{\mu=2}^{\infty} (-1)^{\mu} k_{\mu}^{(p)} z^{\mu} \quad (3)$$

jehož obor platnosti možno volbou p libovolně měniti.

Není-li z blízko obvodu konvergenčního kruhu, jest konvergence řady $\sum_{\mu=2}^{\infty} (-1)^{\mu} k_{\mu}^{(p)} z^{\mu}$ dosti rychlá¹.

Pro úplnost uvedeny jsou tabulky hodnot funkcí $\Gamma(x+1)$ a $\psi(x+1) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}$.

x	$\Gamma(x+1)$		$\psi(x+1)$	
0·00	1·00	00	—0·57	72
0·05	0·97	35	—0·49	78
0·10	0·95	14	—0·42	38
0·15	0·93	30	—0·35	43
0·20	0·91	82	—0·28	90
0·25	0·90	64	—0·22	75
0·30	0·89	75	—0·16	92
0·35	0·89	11	—0·11	39
0·40	0·88	73	—0·06	14
0·45	0·88	57	—0·01	13
0·50	0·88	62	0·03	65
0·55	0·88	89	0·08	22
0·60	0·89	35	0·12	60

¹ V následující tabulce uvedeny jsou hodnoty $R(s, \mu)$ a $k_{\mu}^{(s)}$, jak jest jich v dalším použito k výpočtu imaginárních kořenů rovnice $\Gamma(z) = a$.

μ	$R(s, \mu)$		$k_{\mu}^{(s)}$	
2	0·133	1371	0·066	5685
3	0·008	8499	0·002	9499
4	0·000	7834	0·000	1958
5	0·000	0781	0·000	0156
6	0·000	0083	0·000	0014
7	0·000	0009	0·000	0001
8	0·000	0001	0·000	0000

² Jahnke a Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven.

x	$\Gamma(x+1)$		$\psi(x+1)$	
0.65	0.90	01	0.16	81
0.70	0.90	86	0.20	85
0.75	0.91	91	0.24	75
0.80	0.93	14	0.28	50
0.85	0.94	56	0.32	12
0.90	0.96	18	0.35	62
0.95	0.97	99	0.39	00
1.00	1.00	00	0.42	28

II.

Minimum funkce $\Gamma(x)$ pro $x > 0$ přísluší k úsečce $x_0 = 1.461\ 6321\dots$ a má hodnotu $g = \min_{x>0} \Gamma(x) = 0.885\ 602\dots^1$. Nulová místa funkce $\Gamma'(z)$ ztotožňují se s nulovými místy funkce $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$; tato jsou, jak známo, jenom reálná a udávají úsečky maxim a minim funkce $\Gamma(x)$. Ze vztahu

$$\Gamma(-x) = \frac{\pi}{\Gamma(1+x) \sin(-x\pi)} \quad (0)$$

plyne podmínka pro úsečku maxima nebo minima funkce $\Gamma(-x)$ pro $x > 0$

$$\begin{aligned} \Gamma'(1+x) \sin x\pi + \pi \Gamma(1+x) \cos x\pi &= 0 \\ \psi(x+1) &= -\pi \cotg x\pi. \end{aligned}$$

První sblížené hodnoty kořenů této rovnice najdou se snadno graficky jako úsečky průsečíků příslušných křivek. Z obr. 1. jest přímo patrné, že úsečka extrémní hodnoty funkce $\Gamma(x)$, ležící mezi $-(k+1)$ a $-k$ pro $k=0, 1, 2, \dots$, blíží se tím více hodnotě $-(k+1)$, čím jest k větší; na tuto okolnost poukázal již p. Hermite² a Bourguet³.

Píšeme-li

$$\log \Gamma(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y),$$

plyne ze vzorce I₃

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= a_1 x + a_2 - \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{p-1} l[(x+\nu)^2 + y^2] + \sum_{\mu=2}^{\infty} (-1)^{\mu} k_{\mu}^{(p)} (x^2 + y^2)^{\frac{\mu}{2}} \cos \mu \varphi \quad \text{a)} \\ \Psi(x, y) &= b_1 y - \sum_{\nu=0}^{p-1} \varphi_{\nu}(x, y) + \sum_{\mu=2}^{\infty} (-1)^{\mu} k_{\mu}^{(p)} (x^2 + y^2)^{\frac{\mu}{2}} \sin \mu \varphi, \quad \text{b)} \end{aligned} \quad (1)$$

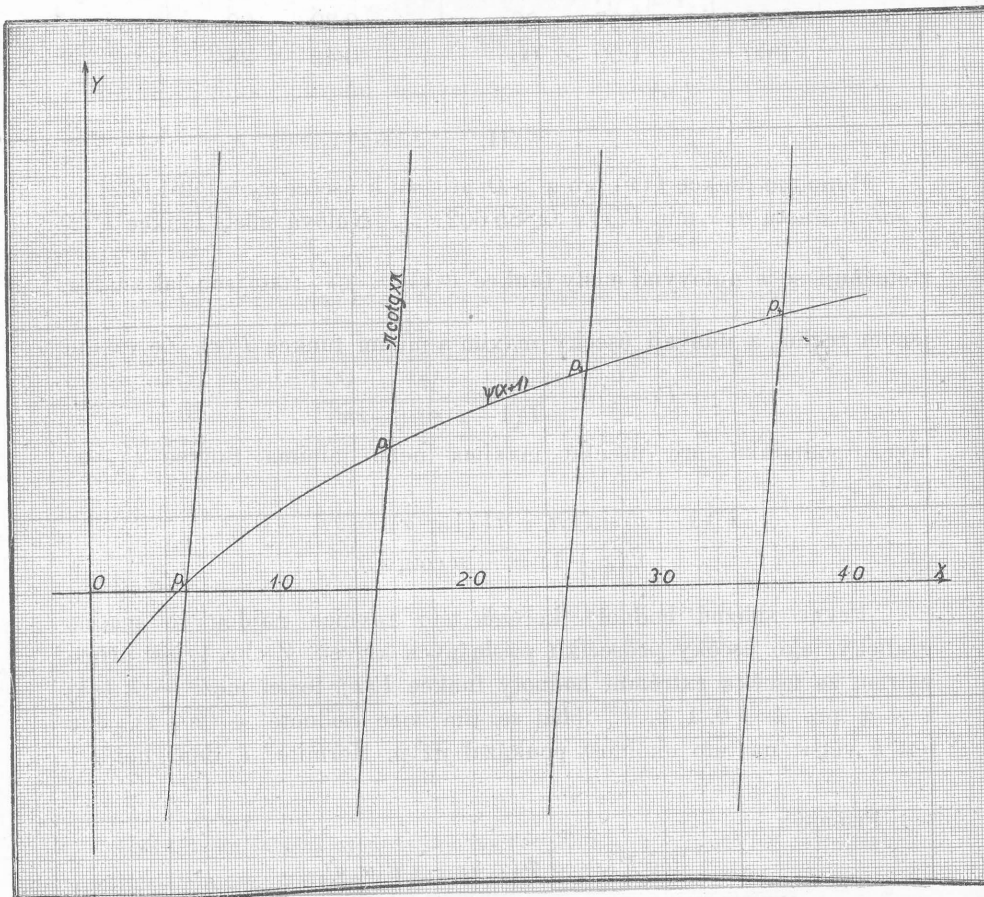
¹ V dalším jest význam x_0, g všude důsledně podržen.

² Hermite, Journal f. Mathematik, Bd. 90., p. 332—333, 1881.

³ Bourguet, Atti di Torino, Bd. 16; tato práce není mi známa.

při čemž a_1, a_2, b_1 jsou reálné konstanty, φ jest ampl. z a

$$\varphi_\nu(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x + \nu}, & \text{pro } x + \nu > 0, \\ \pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x + \nu}, & \text{pro } x + \nu < 0, y > 0, \\ -\pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x + \nu}, & \text{pro } x + \nu < 0, y < 0; \end{cases}$$



Obr. 1.

pro $x + \nu < 0, y = 0$ klademe $\varphi_\nu(x, y) = \pi$; pro $x + \nu < 0$ jest
 $\lim_{y \rightarrow 0} \varphi_\nu(x, y) = -\pi$.

Je-li tedy $y = 0, -(k+1) < x < -k$, jest pro tato a jenom pro
 tato x

$$\log \Gamma(x) = \Phi(x, 0) - (k+1)\pi i.$$

¹ Má-li rovnice $\Gamma(z) = e^{A-(k+1)\pi i}$ kořeny reálné, pak leží tyto v intervalu $-(k+1) < x < -k$. ($k = 0, 1, 2, \dots$).

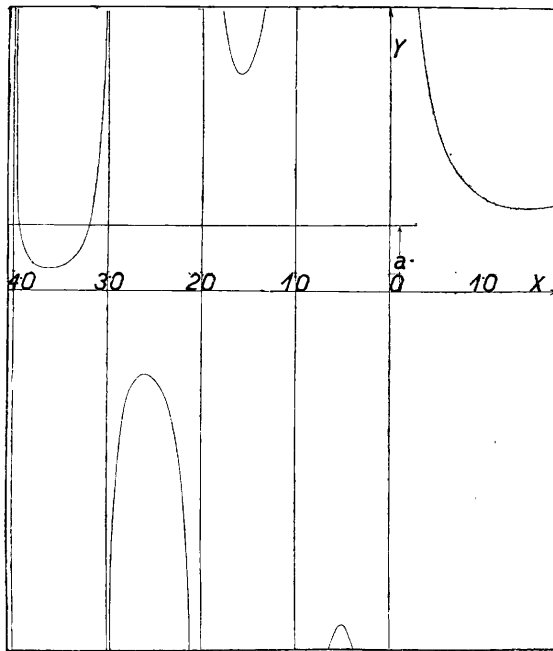
Čím jest k větší, tím menší může býti A , aby kořeny této rovnice byly reálné; poznámka tato plyne ze vzorce (0) a jest zřejma z grafického znázornění funkce $\Gamma(x)$ pro záporná x ; toto jest na obr. 2. provedeno.

Hlavní větev funkce $\log \Gamma(z)$ určena jest podmínkou

$$-\pi < \Psi(x, y) \leq \pi,$$

jež jest splněna pro jistý obor roviny (z); speciálně hová této podmínce body kladné osy reálné. k -tá vedlejší větev funkce $\log \Gamma(z)$ určena jest podmínkou

$$(2k-1)\pi < \Psi(x, y) \leq (2k+1)\pi \quad (k = \dots, 2, 1, -1, -2, \dots).$$



Obr. 2.

K podrobnému vyšetření přiřazení oborů roviny (z) příslušných k jednotlivým větvím funkce $\log \Gamma(z)$ uijeme vzorec

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) l z - z + l \sqrt{2\pi} + \tilde{\omega}(z),$$

¹ Mluvíme-li v dalším stručně o kořenech rovnice $\Gamma(z) = e^{A+ib}$ (A, B reálné), máme na mysli pouze ony hodnoty z , pro něž $\Phi(x, y) = A$, $\Psi(x, y) = B$.

Reálnými kořeny rovnice $\Gamma(z) = e^{A+(k+1)\pi i}$ rozumíme v dalším ona x , pro něž $\Phi(x, 0) = A$, $\lim_{y \rightarrow 0} \Psi(x, y) = (k+1)\pi$; jsou to též x , jež hová rovnici $\Gamma(x) = e^{A-(k+1)\pi i}$

$$\text{kdež} \quad \tilde{\omega}(z) = \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} \frac{B_{\nu}}{(2\nu-1)2\nu} \cdot \frac{1}{z^{2\nu-1}} + \tilde{\omega}_k(z);^1$$

klademe-li $z = re^{i\varphi}$, jest dle Stieltjesova ocenění zbytku $\tilde{\omega}_k(z)$

$$|\tilde{\omega}_k(z)| < \left(\frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}} \right)^{2k+2} \frac{B_{k+1}}{(2k+1)(2k+2)} \cdot \frac{1}{r^{2k+1}} \quad \text{pro } -\pi < \varphi < \pi.$$

V dalším bereme pro jednoduchost ze Stirlingovy řady $\tilde{\omega}(z)$ pouze první člen; tím činíme chybu pro určité r a φ absolutně menší než

$$\frac{1}{360} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \left(\frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}} \right)^4.$$

Klademe tedy

$$\log \Gamma(z) = A(r, \varphi) + iB(r, \varphi),$$

kdež

$$\Phi \equiv A(r, \varphi) \doteq \cos \varphi \left(rlr - r + \frac{1}{12r} \right) - \frac{1}{2}lr - r\varphi \sin \varphi + l\sqrt{2\pi},$$

$$\Psi \equiv B(r, \varphi) \doteq \sin \varphi \left(rlr - r - \frac{1}{12r} \right) - \frac{1}{2}\varphi + r\varphi \cos \varphi.$$

Křivky

$$\sin \varphi \left(rlr - r - \frac{1}{12r} \right) - \frac{1}{2}\varphi + r\varphi \cos \varphi = \pm \pi$$

vymezuji v rovině (z) obor příslušný k hlavní větvi funkce $\log \Gamma(z)$; obecně jest obor roviny (z) příslušný ku k té vedlejší větvi funkce $\log \Gamma(z)$ vymezen křivkami

$$\sin \varphi \left(rlr - r - \frac{1}{12r} \right) - \frac{1}{2}\varphi + r\varphi \cos \varphi = (2k \pm 1)\pi.$$

Píšeme-li $2k + 1 = \lambda$ ($\lambda = \dots 3, 1, -1, -3, \dots$), možno dáti této rovnici tvar

$$rlr - r - \frac{1}{12r} = \lambda \frac{\pi}{\sin \varphi} + \frac{1}{2} \frac{\varphi}{\sin \varphi} - r\varphi \cotg \varphi; \quad (2)$$

levá strana této rovnice nezávisí na φ ; strana pravá jest lineární vůči r . Jest tedy snadné, pro zvolené φ , λ uvedenou rovnicí řešiti graficky; nalezne se hledané r jako úsečka průsečíku křivky

$$(S \equiv) \quad y = rlr - r - \frac{1}{12r}$$

¹ B_{ν} značí ν -té Bernoulliské číslo.

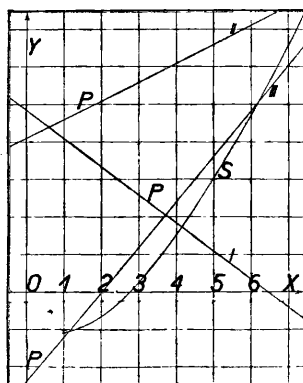
a přímky

$$(P \equiv) \quad y = \lambda \frac{\pi}{\sin \varphi} + \frac{1}{2} \frac{\varphi}{\sin \varphi} - r \varphi \cotg \varphi.$$

Křivka S nakreslena jest na obr. 3.; se změnou λ , φ souvisí změna polohy přímky P a to jak na obr. 3. naznačeno:

Je-li $\lambda > 0$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, jest směrnice přímky záporná, úsek na ose Y kladný (poloha I.).

Je-li $\lambda > 0$, $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, jest směrnice kladná, úsek na ose Y kladný (poloha II.).



Obr. 3.

Je-li $\lambda > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$, jest směrnice záporná, úsek na ose Y záporný.

Je-li $\lambda > 0$, $-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$, jest směrnice kladná, úsek na ose Y záporný (poloha III.).

Poloha přímky P pro záporná λ a záporná φ jest též jako pro příslušná kladná λ a kladná φ ; poloha pro záporná λ a kladná φ jest též jako pro příslušná kladná λ a záporná φ .

Kořeny rovnice (2), graficky vyhledané, pro určitá λ a φ uvedeny jsou v následující tabulce¹.

¹ Z obr. 3. jest patrné, že rovnice (2) má pro určitá λ a φ dva splývající kořeny; tak na př. pro $\lambda = 1$ jest příslušné $\varphi = -112^{\circ} 55' 48''$.

φ	$\lambda = 1$	$\lambda = 3$	$\lambda = 5$	$\lambda = 7$
$\pi/12$	6·72 ₄	14·08 ₃	20·43 ₆	—
$\pi/6$	4·69 ₇	9·14 ₁	12·94 ₆	16·44 ₄
$\pi/4$	4·15 ₂	7·63 ₉	10·60 ₈	13·32 ₆
$\pi/3$	4·14 ₇	7·25 ₁	9·89 ₀	12·30 ₁
$5\pi/12$	4·55 ₆	7·58 ₆	10·15 ₇	12·50 ₀
$\pi/2$	5·53 ₈	8·74 ₆	11·46 ₄	13·93 ₉
$7\pi/12$	7·68 ₈	11·38 ₃	14·52 ₇	17·38 ₃
$5\pi/8$	9·71 ₅	13·84 ₄	17·35 ₉	20·55 ₅
$2\pi/3$	13·15 ₅	17·89 ₉	21·97 ₆	25·67 ₁
$17\pi/24$	19·24 ₂	24·20 ₃	—	—

φ	$\lambda = -1$	$\lambda = -3$	$\lambda = -5$	$\lambda = -7$
$11\pi/12$	—	—	5·48 ₉	8·23 ₆
$\pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$	—	—	14·60 ₉	—
$5\pi/6$	—	3·88 ₀	8·47 ₄	14·43 ₃
$2\pi/3$	6·17 ₉	—	—	—
$3\pi/4$	25·75 ₈	—	—	—

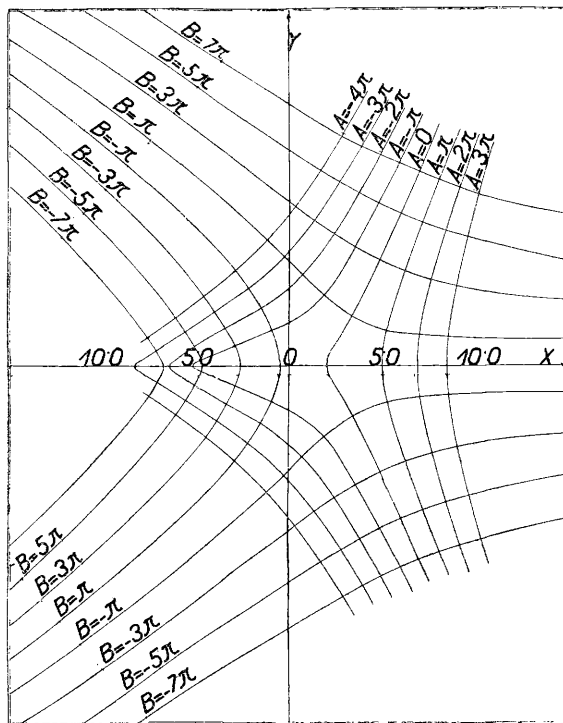
Tyto číselné hodnoty dostačí k vykreslení hledaných křivek. Jejich průběh jest patrný z obr. 4. Křivka v horní polovině roviny (z) na níž $B(r, \varphi) = -k\pi$, nebo v dolní polovině roviny, na níž $B(r, \varphi) = k\pi$ končí na záporné ose reálné v bodě, jehož úsečka jest záporným kořenem rovnice $\psi(x) = 0$, ležícím v intervalu $(-k+1) \dots -k$ (úsečka extrémní hodnoty příslušné reálné větve; $k = 1, 2, 3, \dots$).

Obor roviny (z), v němž $\log I(z)$ nabývá hlavní hodnoty, rozložen jest souměrně nad a pod osou reálnou, omezen jsa křivkami $B = \pi$, $B = -\pi$ a částí záporné osy reálné v horní polovici roviny, analogickými křivkami v polovici dolní; při tom křivky k reálné ose souměrné v polovici horní a dolní nejsou označeny stejně. Obory, příslušné k vedlejším větvím funkce $\log I(z)$, řadí se postupně po obou stranách oboru hlavního, jak na obrazci 4. vykresleno¹.

Soustava křivek $A(r, \varphi) = R$, kdež R jest proměnný parametr, jest obecně soustavou orthogonálních trajektorií k soustavě $B(r, \varphi) = L$; jistou výjimku tvoří body z , jež hovějí rovnici $I'(z) = 0$; na to bude v dalším poukázáno. Na křivce $A(r, \varphi) = R_1$ nabývá reálná část funkce $\log I(z)$ hodnoty R_1 ; jest tedy na této křivce $|I(z)| = e^{R_1}$.

¹ Na obr. 5. vykreslena jest ve větším měřítku horní polovina obr. 4.

Ke každé větvi funkce $\log \Gamma(z)$ jest možno přiřaditi podle principu Riemannovy plochy určitý list (rovinu) funkce $\Gamma(z)$; tím se přiřadí k -tý obor roviny (z) k -tému listu funkce $\Gamma(z)$. V tabulce na str. 16 uvedeny jsou kořeny rovnic $A(r, \varphi) = R$ pro určitá zvolená R a φ , vyhledané Newtonovou metodou; jejich znalost umožňuje dostatečně přesné vykreslení druhé soustavy čar; v rovině (z) vznikne křivočará síť, tvořená soustavami křivek (A), (B), jež ukazuje přibližnou polohu kořenů rovnice $\Gamma(z) = e^{A+iB}$, jsou-li A , B v rozsahu vypočtené sítě (obr. 4., 5.).



Obr. 4.

Z výrazu pro $A(r, \varphi)$ plyne $A(r, \varphi) = A(r, -\varphi)$; jsou tedy všechny křivky A souměrné k ose reálné.

Zvláště zajímavý jest průběh obou soustav v blízkosti záporné osy reálné¹. Na př. průběh křivky, na níž reálná část funkce $\log \Gamma(z)$ rovná se nule. (Obr. 6.) Křivka tato sestává ze dvou hlavních větví; jedna z nich protíná kladnou osu reálnou v bodě $x = 2$, stoupá od tohoto bodu nad reálnou osou s rostoucím kladným x a jest k ose reálné souměrná.

¹ Počítají-li se zde křivky A , B pomocí Stirlingova vzorce, nutno užití vztahu

$$\Gamma(-x + iy) = \frac{\pi}{\Gamma(1 + x - iy) \sin(-x + iy)\pi}$$

a přikládati jim obecně význam reálné resp. pomyslné části $\log \Gamma(z)$. Průběh některých křivek A , B v blízkosti záporné reálné osy, naznačený na obr. 6 zjištěn byl interpolací; příslušné numerické výpočty nejsou uváděny.

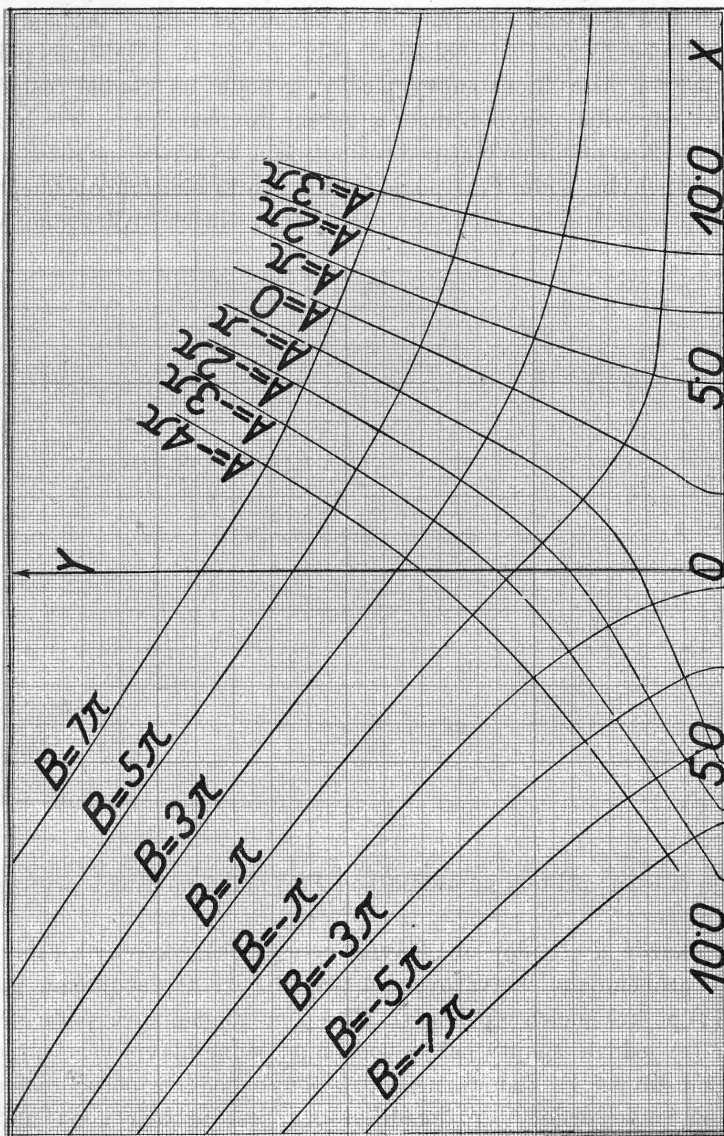
φ	A	r	φ	A	r
$\pi/6$	0	$3 \cdot 24_3$	$\pi/2$	$-\pi$	$2 \cdot 31_7$
$\pi/4$	0	$5 \cdot 90_3$	$3\pi/4$	$-\pi$	$2 \cdot 32_4$
$\pi/3$	0	$17 \cdot 67_5$	$11\pi/12$	$-\pi$	$3 \cdot 47_5$
0	π	$4 \cdot 97_6$	$\text{arc tg } 17/7$	-2π	$10 \cdot 39_2$
$\pi/12$	π	$5 \cdot 28_8$	$5\pi/12$	-2π	$5 \cdot 94_7$
$\pi/6$	π	$6 \cdot 45_4$	$\pi/2$	-2π	$4 \cdot 13_3$
$\pi/4$	π	$9 \cdot 71_4$	$2\pi/3$	-2π	$3 \cdot 41_2$
$\text{arc tg } 5/4$	π	$12 \cdot 87_0$	$11\pi/12$	-2π	$4 \cdot 87_9$
0	2π	$6 \cdot 84_0$	$5\pi/12$	-3π	$9 \cdot 89_2$
$\pi/12$	2π	$7 \cdot 23_0$	$\pi/2$	-3π	$6 \cdot 01_4$
$\pi/6$	2π	$8 \cdot 66_8$	$2\pi/3$	-3π	$4 \cdot 60_7$
$\pi/4$	2π	$12 \cdot 56_6$	$5\pi/6$	-3π	$5 \cdot 12_1$
$\text{arc tg } 5/4$	2π	$16 \cdot 22_4$	$11\pi/12$	-3π	$6 \cdot 14_5$
0	3π	$8 \cdot 44_0$	$\pi - \text{arc tg } 1/14$	-3π	$7 \cdot 54_0$
$\pi/12$	3π	$8 \cdot 89_9$	$5\pi/12$	-4π	$14 \cdot 66_4$
$\pi/6$	3π	$10 \cdot 57_8$	$\pi/2$	-4π	$7 \cdot 92_6$
$\pi/4$	3π	$15 \cdot 05_2$	$2\pi/3$	-4π	$5 \cdot 75_7$
$\text{arc tg } 5/4$	3π	$19 \cdot 17_1$	$5\pi/6$	-4π	$6 \cdot 20_6$
$\text{arc tg } 17/7$	$-\pi$	$3 \cdot 44_8$	$11\pi/12$	-4π	$7 \cdot 32_7$
$5\pi/12$	$-\pi$	$2 \cdot 82_9$	$\pi - \text{arc tg } 1/14$	-4π	$8 \cdot 86_2$

Druhá hlavní větev skládá se z řady vln probíhajících nespojitě podél záporné osy reálné. Jejimi body jsou na př. oba reálné kořeny rovnice $\Gamma(x) = e^{4\pi i}$; z kořene bližšího pólu $x = -3$ vychází vlna uvažované větve, obíhá spojitě pod osou reálnou pól $x = -3$ a končí na ose reálné v bodě, jehož úsečka jest reálným kořenem rovnice $\Gamma(x) = e^{3\pi i}$, bližším pólu $x = -3$; jiná vlna téže větve, jež vychází a končí v těchže bodech záporné reálné osy, probíhá symetricky (vzhledem k reálné ose) s prvou, nad osou reálnou. Podobně probíhají kolem každého pólu $x = -4, -5, \dots$ funkce $\Gamma(z)$ dvě vlny uvažované větve; s rostoucím $|x|$ jsou stále menší. Rovnice $\Gamma(z) = e^{2\pi i}$ nemá reálných kořenů; tedy vlna, vycházející z bodu na reálné ose, jehož úsečka jest kořenem rovnice $\Gamma(x) = e^{3\pi i}$, bližším pólu $x = -2$, probíhá pod reálnou osou kolem počátku, protíná tuto v bodě $x = 1$ a vrací se nad osou reálnou k bodu, z něhož vyšla.¹

Průběh soustavy (B) v blízkosti reálné osy záporné jest také patrný z obr. 6., v němž jest čárkovane vyznačen průběh některých čar (B) pro $+\pi \leq B \leq +3\pi$. Křivka, na níž $B = 0$, obíhá kolem počátku protínajíc reálnou osu ve vzdálenosti x_0 ; na ní leží kořeny rovnice $\Gamma(z) = e^A$ pro $A < \lg$.

¹ K výpočtu hodnot reál. č. $\log \Gamma(iy)$ možno pro $-1 \leq y \leq 1$ použití vzorce I,

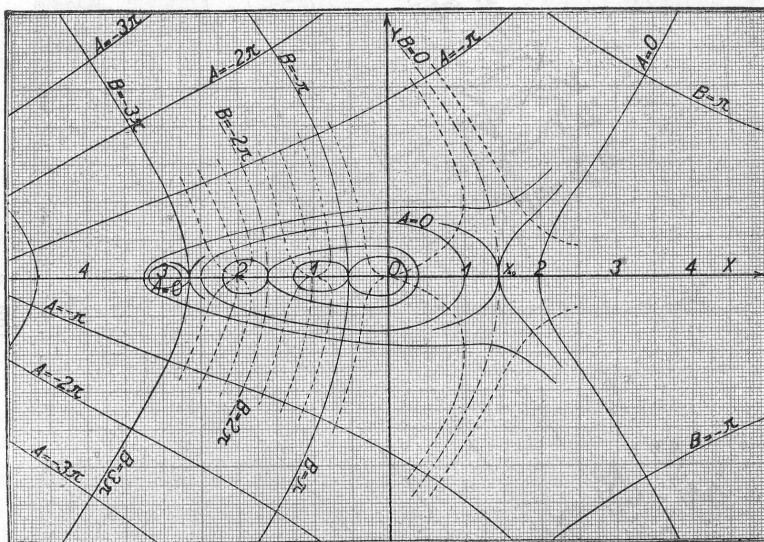
Spojitému pohybu bodu $\Gamma(z)$, který po kružnicích o poloměru $R^*=1$ opsaných kolem počátku na své Riemannově ploše přechází s listu $(k+1)$ ho na list k -tý ($k = \dots, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \dots$), odpovídá v rovině (z) jednak spojitý pohyb bodu z po první z uvažovaných větví a to ve



Obr. 5.

směru od shora dolů postupně přes obory přiřazené příslušným listům funkce $\Gamma(z)$; pohyb bodu z po druhé z uvažovaných větví není ovšem spojitý, neboť jednotlivé vlny nesouvisí spolu spojitě. Je-li na př. bod $\Gamma(z)$ na Riemannově ploše ve druhém kladném listu na reálné ose (tedy $B = 4\pi$)

na jednotkové kružnici, odpovídají jeho poloze v rovině (z) dva body na záporné ose reálné, pro něž $\Gamma(x) = e^{4\pi i}$, tedy body v intervalu $-4 < x < -3$. Spojitému pohybu uvažovaného bodu $\Gamma(z)$ po jednotkové kružnici ve směru k záporné ose pomyslné, odpovídá spojitý pohyb bodu z po vlně, obepínající pól $x = -3$ a ležící pod reálnou zápornou osou. Dospěje-li bod $\Gamma(z)$ na zápornou osu reálnou ($B = 3\pi$), dospěje bod z kořene rovnice $\Gamma(x) = e^{3\pi i}$, bližšího pólu $x = -3$. Dalšímu pohybu $\Gamma(z)$ v prvním listu Riemannovy plochy, k bodu na kladné reálné ose ($B = 2\pi$) odpovídá pohyb bodu z z kořene rovnice $\Gamma(x) = e^{3\pi i}$ bližšího pólu $x = -2$ po příslušné vlně pod reálnou osou ke křivce, na níž $B = 2\pi$; při dalším pohybu bodu $\Gamma(z)$ po jednotkových kružnicích oběhne bod z v rovině (z) počátek a obíhá analogicky po vlnách uvažované větve



Obr. 6.

nad reálnou osou; při tom již ovšem bod $\Gamma(z)$ obíhá po listech přiřazených záporným k .

Pro každé $A > lg$ mají obě hlavní větve příslušné křivky soustavy (A) podobný průběh jako v uvažovaném případě $A = 0$; spojitému pohybu bodu $\Gamma(z)$ po kružnicích o poloměru $R^* > g$ na Riemannově ploše přísluší v rovině (z) jednak spojitý pohyb bodu z po jedné hlavní větvi příslušné křivky soustavy (A), jednak nespojitý pohyb podél záporné reálné osy po vlnách větve druhé. Pro každé $A < lg$ jest průběh obou hlavních větví příslušné křivky soustavy (A) poněkud změněný; ke každé z obou hlavních větví přísluší podél záporné osy reálné řada vln; není tedy v tomto případě při pohybu bodu $\Gamma(z)$ po příslušných kružnicích na Riemannově ploše pohyb bodu z po žádné z obou větví stále spojitý; přece však i v tomto případě, pohybuje-li se jeden bod podél záporné

reálné osy po vlnách své křivky, koná bod druhý spojitý pohyb, blíže se nebo vzdaluje se po své křivce reálné ose.

Z obr. 6. patrný jest rovněž význam kořenů rovnice $\Gamma'(z) = 0$, jež tvoří jistou výjimku v konformním zobrazení roviny (z) na rovinu $\log \Gamma(z)$.

Z předchozích úvah vychází obecný výsledek:

Není-li B celistvým násobkem čísla π , má rovnice $\Gamma(z) = e^{A+iz}$ pro každé konečné A a B (reálné) dva a jenom dva pomyslné kořeny (ve smyslu poznámky na str. 11.). Je-li B celistvým násobkem čísla π a má-li při určitém A uvažovaná rovnice jeden kořen reálný záporný, existují tři kořeny této rovnice; jeden z nich jest pomyslný, druhé dva reálné záporné, jež mohou eventuelně splývati. Je-li B celistvým násobkem čísla π a nemá-li uvažovaná rovnice záporného reálného kořene, existují kořeny dva, jež eventuelně mohou splýnouti.

III.

Rovnice

$$\Gamma(z) = e^A \quad (1)$$

má pro $A < lg$ dva kořeny komplexně sdružené, plynoucí z řešení rovnic

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= A \\ \Psi(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

při čemž $\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$ jsou dány výrazy II₁.

Je-li v tomto případě

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

kořenem uvažované rovnice (1), pak jest jejím kořenem také $z_2 = x_1 - iy_1$ a platí

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 2x_1 \\ z_1 z_2 &= x_1^2 + y_1^2, \end{aligned}$$

dosadíme-li tedy $x_1 = p$, $x_1^2 + y_1^2 = q^2$, jsou z_1, z_2 kořeny kvadratické rovnice

$$z^2 - 2pz + q^2 = 0, \quad (3)$$

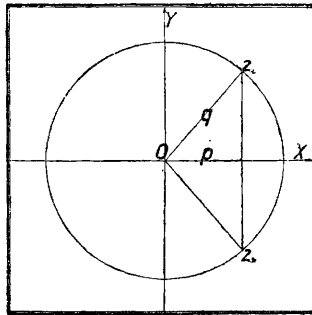
jež řešením dá

$$z_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - q^2}; \quad (3a)$$

najdou se tedy pomyslné kořeny z_1, z_2 jako průsečíky kružnice, jež má střed v počátku a poloměr q s přímkou rovnoběžnou s osou pomyslnou, vzdálenou od této o $x_1 = p$, jak z obr. 7. patrné; při tom jest ovšem $q > p$.

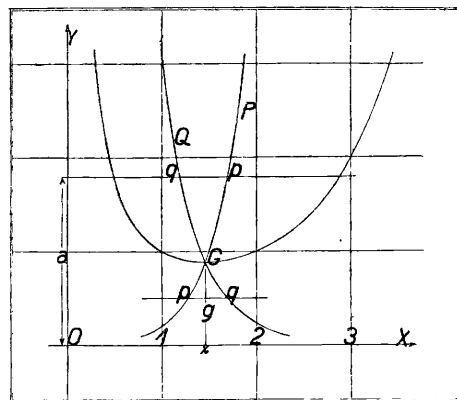
Pro každé $A > lg$ jest možno snadně nalézt příslušné p i q jako arithmetický, resp. geometrický střed průsečíků x_1, x_2 křivky $y = \Gamma(x)$ ($x > 0$) a přímky $y = e^A$. Křivka P , geometrické místo bodů p a křivka Q , geometrické místo bodů q , procházejí bodem $G(x_c, g)$. Tyto křivky jsou

dle definice reálné i pro $A < lg$ a mají tvar vyznačený na obr. 8.; rovnice $F(z) = 0$ nemá, jak známo, řešení. Reálných křivek P, Q , je-li jejich průběh přesně znám, jest možno výhodně užítí k vyhledání kořenů rovnice $F(z) = e^A$ (pro $A < lg$). Neboť stačí pro dané A nakreslití přímku $y = e^A$; úsečky její průsečíků s křivkami P, Q dávají příslušné hod-



Obr. 7.

noty p, q, z nichž možno podle rovnice (3a) snadně vypočísti hledané kořeny, s přesností, odpovídající odměřeným hodnotám p, q ; kořeny z_1, z_2 , tímto způsobem vypočtené (nebo dle obr. 7. graficky vyhledané) možno pak buď považovati za dostatečně přesné, anebo jich užítí jako prvních sblížených kořenů k numerickému řešení příslušné rovnice.



Obr. 8.

V následujícím vypočteny jsou hodnoty p, q , příslušné k $e^A = 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1$; na konci tohoto odstavce připojena jest přehledná tabulka, v níž naznačen postup výpočtů; použito bylo vzorce I_3 , při čemž z různých důvodů volen obor platnosti uvedeného vzorce značně velký, $p = 8$; užito bylo Newtonovy metody.

Byla řešena rovnice

$$A = 2 \cdot 01564z - l(z^8 + 28z^7 + 322z^6 + 1960z^5 + 6769z^4 + 13132z^3 + 13068z^2 + 5040z) + 8 \cdot 52516 + \sum_{\mu=2}^8 (-1)^\mu k_\mu^{(8)} z^\mu \quad (4)$$

Nazveme-li logaritmus polynomu v poslední rovnici přicházející krátce $L(z)$, vychází pro Newtonovu metodu potřebná derivace ve tvaru

$$Y = -M(z) + \sum_{\mu=2}^8 (-1)^\mu R(8, \mu) z^{\mu-1} + 2 \cdot 01564,$$

kde

$$M(z) = D_z L(z) = \frac{8z^7 + 196z^6 + 1932z^5 + 9800z^4 + 27076z^3 + 39396z^2 + 26136z + 5040}{z^8 + 28z^7 + 322z^6 + 1960z^5 + 6769z^4 + 13132z^3 + 13068z^2 + 5040z}$$

Výsledek výpočtů uveden jest v následující tabulce:

$T(z)$	z	p	q
0·8	$1 \cdot 4296_4 + i 0 \cdot 4591_6$	$1 \cdot 4296_4$	$1 \cdot 5015_6$
0·7	$1 \cdot 3877_7 + i 0 \cdot 7001_0$	$1 \cdot 3877_7$	$1 \cdot 5543_6$
0·6	$1 \cdot 3396_6 + i 0 \cdot 9032_1$	$1 \cdot 3396_6$	$1 \cdot 6156_9$
0·5	$1 \cdot 2830_7 + i 1 \cdot 0978_7$	$1 \cdot 2830_7$	$1 \cdot 6886_6$
0·4	$1 \cdot 2142_7 + i 1 \cdot 2994_1$	$1 \cdot 2142_7$	$1 \cdot 7784_5$
0·3	$1 \cdot 1263_1 + i 1 \cdot 5236_1$	$1 \cdot 1263_1$	$1 \cdot 8947_2$
0·2	$1 \cdot 0037_0 + i 1 \cdot 7977_7$	$1 \cdot 0037_0$	$2 \cdot 0589_5$
0·1	$0 \cdot 7975_3 + i 2 \cdot 1990_6$	$0 \cdot 7975_3$	$2 \cdot 3392_1$

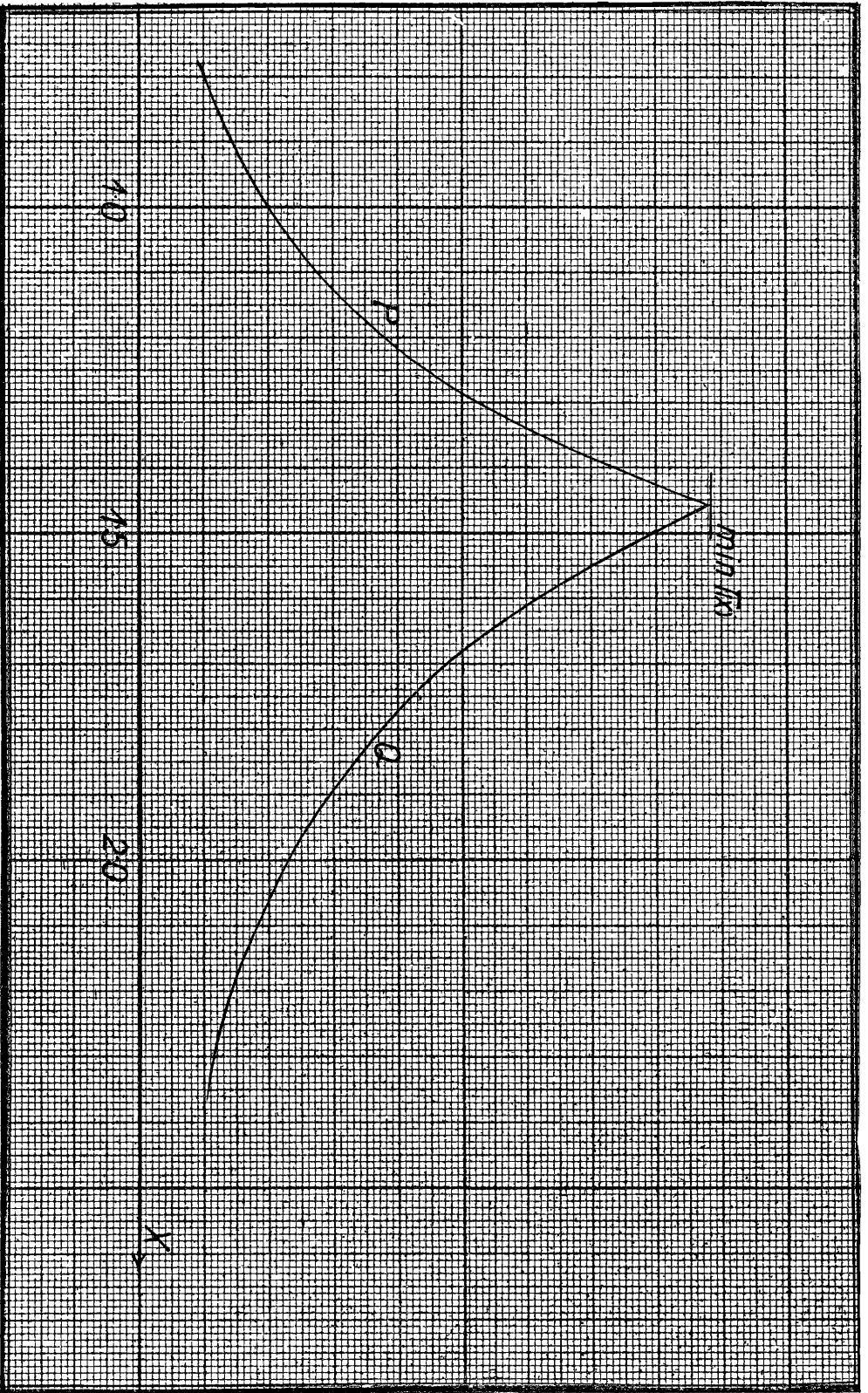
Dle těchto hodnot naryšovány jsou na obr. 9. hledané křivky P a Q .

Kořeny uvažovaných rovnic leží na křivce, která protíná osu reálnou ve vzdálenosti x_0 (srovn. str. 16. $B(r, \varphi) = 0$) a na níž splývají pomyslné části výrazů $L(z)$ a $2 \cdot 01564z + \sum_{\mu=2}^8 (-1)^\mu k_\mu^{(8)} z^\mu$.

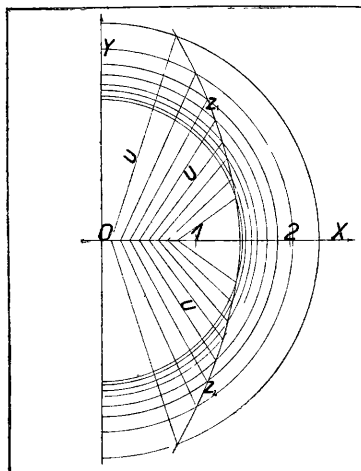
Na obr. 10. vyznačena jest poloha pomyslných kořenů; přímky U spojují kořeny uvažované rovnice s příslušnými e^4 , nanesenými na reálnou osu.

Uvedené metody k vyhledání pomyslných kořenů dané rovnice možno patrně použít i v případech jiných.

¹ Označíme-li pravou stranu této rovnice $N(z)$, má Y , v tabulce výpočtů uváděné, význam $N(z) - A$.



Obt. 9.



Obr. 10.

Poznámka. Mám za to, že cena této práce tkví v podrobném vyšetření povahy funkce $\Gamma(z)$ pro komplexní argument a v přesném rozlišení oborů roviny (z) příslušných k jednotlivým větím funkce $\log \Gamma(z)$. O tom není posud v odborné literatuře, pokud jest mi známa, zmínky; ba naopak i v učebnicích nejnovějších nacházíme v úvahách, týkajících se funkce $\log \Gamma(z)$, omyly. Tak čteme na př. ve známé učebnici Serret-Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, 6. a 7. vydání (1921), II. díl, str. 220, následující větu:

„Für jedes von 0, -1 , -2 , -3 , .. verschiedene reelle oder imaginäre x ist der Grenzwert

$$\Gamma(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m! m^{x-1}}{x(x+1)\dots(x+m-1)},$$

worin m eine ganze positive Zahl bedeutet, bestimmt und endlich. Außerdem ist in jedem solchen endlichen Bereiche der Zahlenebene, der frei von den Stellen 0, -1 , -2 , -3 , .. ist, der Hauptwert des Logarithmus dieses Grenzwertes durch die gleichmäßig konvergente Reihe darstellbar:

$$\ln \Gamma(x) = \sum_1^{\infty} \left[(x-1) \ln \left(1 + \frac{1}{m} \right) - \ln \left(1 + \frac{x-1}{m} \right) \right].$$

Že tato věta ve své druhé části není správná, vysvítá z předchozích úvah. Její neplatnost se však dá snadně dokázat i přímo, uvažuje-li se imaginární část řady na pravé straně a záporná reálná, nikoliv celistvá x .

Tabulka výpočtů.

e^A	Voleno z	$z^2 \cdot 01564 + 8 \cdot 52516 - A$	$L(z)$	$\sum_{\mu=2}^8 (-1)^\mu h_{\mu}^{(8)} z^\mu$	Y
0.8	$1.4296_2 + i0.4592_0$	$11.6299_1 + i0.9255_8$	$11.7462_8 + i1.0058_1$	$0.1163_6 + i0.0802_1$	$-0.0000_1 - i0.0000_1$
0.7	$1.3900_0 + i0.7000_0$	$11.6835_8 + i1.4109_5$	$11.7770_6 + i1.5291_3$	$0.0938_5 + i0.1195_9$	$0.0003_7 + i0.0014_1$
	$1.3877_0 + i0.7001_0$	$11.6789_4 + i1.4111_5$	$11.7723_9 + i1.5306_2$	$0.0934_5 + i0.1194_2$	$-0.0000_0 - i0.0000_4$
0.6	$1.3350_0 + i0.9070_0$	$11.7268_7 + i1.8281_9$	$11.7966_3 + i1.9810_8$	$0.0657_6 + i0.1499_8$	$-0.0040_0 - i0.0029_2$
	$1.3396_0 + i0.9032_0$	$11.7361_4 + i1.8205_3$	$11.8030_7 + i1.9703_8$	$0.0669_2 + i0.1498_0$	$0.0000_0 - i0.0000_5$
0.5	$1.2760_0 + i1.0950_0$	$11.7902_6 + i2.2071_3$	$11.8243_2 + i2.3891_9$	$0.0346_6 + i0.1746_4$	$0.0006_1 - i0.0074_1$
	$1.2830_0 + i1.0978_0$	$11.8043_8 + i2.2127_7$	$11.8398_0 + i2.3888_4$	$0.0354_7 + i0.1759_7$	$0.0000_5 - i0.0000_9$
0.4	$1.2160_0 + i1.2970_0$	$11.8924_7 + i2.6142_9$	$11.8867_6 + i2.8127_7$	$-0.0025_2 + i0.1993_7$	$0.0031_9 + i0.0008_9$
	$1.2142_5 + i1.2994_0$	$11.8889_4 + i2.6191_2$	$11.8857_9 + i2.8186_3$	$-0.0031_6 + i0.1995_0$	$0.0000_0 - i0.0000_3$
0.3	$1.1265_1 + i1.5237_2$	$11.9997_7 + i3.0712_7$	$11.9466_3 + i3.2917_6$	$-0.0531_8 + i0.2207_7$	$-0.0000_3 + i0.0002_8$
0.2	$0.9750_0 + i1.8327_0$	$12.0998_5 + i3.6940_7$	$12.0274_0 + i3.9474_6$	$-0.1357_1 + i0.2377_4$	$-0.0632_6 - i0.0156_5$
	$1.0037_0 + i1.7978_0$	$12.1576_9 + i3.6237_2$	$12.0335_6 + i3.8623_9$	$-0.1241_7 + i0.2386_8$	$-0.0000_4 + i0.0000_1$
0.1	$0.7710_0 + i2.1720_0$	$12.3818_0 + i4.3779_7$	$12.1202_1 + i4.6739_5$	$-0.2433_9 + i0.2366_4$	$0.0182_0 - i0.0593_4$
	$0.7979_0 + i2.1991_0$	$12.4360_2 + i4.4325_9$	$12.1839_9 + i4.6792_1$	$-0.2467_9 + i0.2471_7$	$0.0002_3 + i0.0005_5$

e^A	$M(z)$	$\sum_{\mu=2}^8 (-1)^\mu R(8, \mu) z^{\mu-1}$	Y'	$-A$ (oprava)	Definitivní z
0.8	$2.1312_2 - i0.3814_5$	$0.1755_4 + i0.0513_1$	$0.0599_8 + i0.4327_6$	$-0.0000_2 + i0.0000_3$	$1.4296_4 + i0.4591_6$
0.7	$2.0538_7 - i0.5589_2$	$0.1728_6 + i0.0784_3$	$0.1346_3 + i0.6374_0$	$0.0022_3 - i0.0001_0$	
	$2.0551_8 - i0.5601_0$	$0.1726_1 + i0.0785_1$	$0.1330_6 + i0.6386_2$	$-0.0000_6 - i0.0000_0$	$1.3877_7 + i0.7001_0$
0.6	$1.9745_8 - i0.6975_3$	$0.1688_1 + i0.1021_8$	$0.2099_2 + i0.7997_1$	$-0.0046_4 + i0.0037_8$	
	$1.9744_8 - i0.6932_2$	$0.1692_3 + i0.1017_0$	$0.2104_4 + i0.7949_2$	$-0.0000_5 - i0.0000_1$	$1.3396_6 + i0.9032_1$
0.5	$1.8916_4 - i0.8075_6$	$0.1645_9 + i0.1239_3$	$0.2885_3 + i0.9315_5$	$-0.0070_7 - i0.0028_5$	
	$1.8875_3 - i0.8045_1$	$0.1654_1 + i0.1242_0$	$0.2934_7 + i0.9287_1$	$-0.0000_7 - i0.0000_7$	$1.2830_7 + i1.0978_7$
0.4	$1.7926_7 - i0.9015_1$	$0.1609_5 + i0.1475_4$	$0.3839_2 + i1.0490_6$	$0.0017_2 - i0.0024_0$	
	$1.7917_1 - i0.9030_9$	$0.1607_9 + i0.1478_4$	$0.3847_1 + i1.0509_4$	$-0.0000_2 - i0.0000_0$	$1.2142_7 + i1.2994_1$
0.3	$1.6821_8 - i0.9941_7$	$0.1550_5 + i0.1746_2$	$0.4885_2 + i1.1688_0$	$0.0001_9 + i0.0001_0$	$1.1263_1 + i1.5236_1$
0.2	$1.5326_1 - i1.0982_2$	$0.1448_1 + i0.2127_2$	$0.6278_4 + i1.3109_5$	$-0.0285_1 + i0.0346_0$	
	$1.5489_6 - i1.0826_5$	$0.1471_9 + i0.2080_8$	$0.6138_6 + i1.2907_3$	$0.0000_0 + i0.0000_2$	$1.0037_0 + i1.7977_7$
0.1	$1.3719_6 - i1.1878_1$	$0.1309_3 + i0.2564_3$	$0.7746_1 + i1.4443_0$	$-0.0266_5 - i0.0268_9$	
	$1.3617_2 - i1.1749_2$	$0.1347_7 + i0.2587_4$	$0.7886_8 + i1.4336_7$	$0.0003_6 + i0.0000_3$	$0.7975_3 + i2.1990_6$

SUR LES RACINES IMAGINAIRES DE L'ÉQUATION

$$\Gamma(z) = a.$$

PAR

O. BORŮVKA.

(RÉSUMÉ DE L'ARTICLE PRÉCÉDENT.)

Si l'on pose $\log \Gamma(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ et si l'on appelle les racines de l'équation $\Gamma(z) = e^{A+iB}$ (A, B réels) les valeurs de z , pour lesquelles $\Phi(x, y) = A$, $\Psi(x, y) = B$, il résulte des relations II₁: Si l'équation $\Gamma(z) = e^{A-i(k+1)\pi}$ a de racines réelles, ces racines sont contenues dans l'intervalle $-(k+1) < x < k$ ($k=0, 1, 2, \dots$). La valeur principale de la fonction $\log \Gamma(z)$ est déterminée par la condition $-\pi < \Psi(x, y) \leq \pi$; la $k^{\text{ième}}$ valeur de cette fonction est déterminée par la condition $\pi(2k-1) < \Psi(x, y) \leq \pi(2k+1)$ ($k = \dots, 2, 1, -1, -2, \dots$); pour certains k cette condition est vérifiée par les points d'un certain domaine du plan (z); on trouve facilement ce domaine en appliquant la formule de Stirling et en résolvant l'équation II₂. Les courbes B , qui définissent dans le plan (z) les domaines appartenant aux valeurs particulières de la fonction $\log \Gamma(z)$ sont dessinées sur le tableau 4 et 5; sur le même tableau sont dessinées les courbes A , pour lesquelles $\Phi(x, y) = A$ ($A = -4\pi, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi$); celles-ci forment avec les courbes B un système des trajectoires orthogonales. La forme de ces courbes au voisinage de l'axe négatif réel, où l'on ne peut pas appliquer la formule de Stirling est dessinée sur le tableau 6. On peut coordonner à la $k^{\text{ième}}$ valeur de la fonction $\log \Gamma(z)$ $k^{\text{ième}}$ plan de la fonction $\Gamma(z)$ d'après le principe de la surface de Riemann.

De ces résultats on déduit facilement les valeurs approchées des racines de l'équation $\Gamma(z) = e^{A+iB}$ (et leur nombre) pour certains A, B ; on voit, que le résultat cité dans le livre Serret-Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, éd. 6 et 7, 1921, T. II., p. 220, n'est pas exact.

*

En posant $\min_{x > 0} \Gamma(x) = g$, l'équation $\Gamma(z) = e^{A+iB}$ a pour $B = 0$ et $A > lg$ deux racines réelles, pour $-\infty < A < lg$ deux racines imaginaires. Soit dans cet cas $z_1 = x_1 + iy_1$ une racine de l'équation proposée; alors $z_2 = x_1 - iy_1$ est la deuxième racine de cette équation. On a

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 2x_1 \\ z_1 z_2 &= x_1^2 + y_1^2 \end{aligned}$$

et si l'on pose $x_1 = p$, $x_1^2 + y_1^2 = q^2$, on voit, que z_1, z_2 sont les racines de l'équation quadratique III₃. Si l'on trouve pour quelques A les valeurs p, q , on peut dessiner les courbes réelles P, Q (fig. 9.) et à l'aide de celles-ci on peut trouver en appliquant la formule III₃, ou la méthode graphique (fig. 7.) les racines de l'équation donnée $\Gamma(z) = e^A$ pour $-\infty < A < \lg$.

J'ai trouvé les racines de l'équation $\Gamma(z) = e^A$ pour $e^A = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ et les valeurs correspondant de p, q à quatre décimales (table p. 22, fig. 9.) en appliquant la formule III₄ et la méthode Newtonienne.

Brno, le 2. février 1923.

O p r a v a.

Str. 6., řádek 13. místo $|\sin z\pi$ má býti $\log \sin z\pi$