

Tibor Neubrunn (1929 – 1990)

1 Beloslav Riečan: Problematika teórie miery

In: Anatolij Dvurečenskij (author); Ľubica Holá (author); Katarína Janková (author); Beloslav Riečan (author); Tibor Neubrunn (1929 – 1990). (Slovak). Praha, 2016. pp. 40–52.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404303>

Terms of use:

© MatfyzPress, Nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Vedecký prínos Tibora Neubrunna

1 Beloslav Riečan: Problematika teórie miery

Práce z teórie miery a integrálu patria medzi prvé vedecké články Tibora Neubrunna. Je to dosť pochopiteľné, keď vezmeme do úvahy, že v r. 1950 vyšla prelomová monografia Paula R. Halmosa *Measure theory*. Ale už v r. 1952 vyšiel jej ruský preklad, ktorý nám bol všeobecne dostupný. Stal sa okrem iného základom prednášky Ladislava Mišíka pre tretiakov na vtedajšej Prírodovedeckej fakulte UK v školskom roku 1955/1956. Prof. Mišík prednášal na Univerzite Komenského ako externista, keď kmeňovo pôsobil na Strojníckej fakulte Slovenskej vysokej školy technickej (SVŠT). Keď si Univerzita Komenského zrušila externistov, premiestnili sme sa na čele s Tiborom na SVŠT na v tom čase vzniknutejší Mišíkov seminár z teórie miery. Tento sa pravidelne konal v knižnici Štefana Schwarza. Zúčastňovali sa ho popri Tiborovi a šiestich vysokoškolákoch z PFUK aj pracovníci SVŠT na čele s legendárnou trojicou Ladislav Mišík, Igor Kluvánek, Marko Švec.

1.1 Konštrukcia miery

Konštrukcia miery z objemu je veľmi populárna, pravdepodobne po Halmosovej expozícii v spomínanej monografii. Objem je tam definovaný ako nezáporná funkcia na systéme všetkých kompaktných množín. Druhou motiváciou je systém kompaktných intervalov na reálnej osi. To je problematika zaujímavá tak z hľadiska vedeckého (napr. teória pravdepodobnosti) ako aj z hľadiska didaktického.

Tibor Neubrunn vo svojej práci [5] zaujal stanovisko abstraktné. Jeho objem je definovaný na danom systéme podmnožín abstraktného priestoru. Svoje výsledky prezentoval potom v trochu rozšírenej forme v monografiách [12, 13, 14].

Daná je teda množina X . Objemom budeme rozumieť nezápornú funkciu

$$\lambda : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty),$$

kde \mathcal{E} je systém podmnožín množiny X uzavretý k zjednoteniam, t.j.

$$A, B \in \mathcal{E} \implies A \cup B \in \mathcal{E},$$

a obsahujúci prázdnu množinu \emptyset . Pritom predpokladáme, že

$$E \subset F \implies \lambda(E) \leq \lambda(F),$$

$$\lambda(E \cup F) \leq \lambda(E) + \lambda(F),$$

$$E \cap F = \emptyset \implies \lambda(E \cup F) = \lambda(E) + \lambda(F).$$

V Neubrunnovej teórii je daná dvojica systémov $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ podmnožín množiny X spĺňajúca nasledujúce podmienky:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A} \cap \mathcal{V}$,

(ii) $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \implies A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$,

$$V_n \in \mathcal{V} \ (n = 1, 2, \dots) \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \in \mathcal{V},$$

(iii) $A \in \mathcal{A}, V_1, V_2 \in \mathcal{V}, A \subset V_1 \cup V_2$,

$$\implies \text{existujú } A_1, A_2 \in \mathcal{A}, A_1 \subset V_1, A_2 \subset V_2, A = A_1 \cup A_2,$$

(iv) $A \in \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i, V_i \in \mathcal{V} \ (i = 1, 2, \dots)$

$$\implies A \subset \bigcup_{i=1}^n V_i \text{ pre nejaké } n,$$

$$(v) A \in \mathcal{A}, V \in \mathcal{V} \implies V \cap A' \in \mathcal{V},$$

$$(vi) A \in \mathcal{A}, V \in \mathcal{V} \implies V' \cap A \in \mathcal{A}.$$

Príkladom takej dvojice je systém \mathcal{A} všetkých kompaktných, resp. systém \mathcal{V} všetkých otvorených podmnožín daného Hausdorffovho topologického priestoru X . Hlavný výsledok článku je nasledujúca veta.

Veta 1.1. *Existuje miera $\bar{\mu}$ na $\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{V})$, ktorá je rozšírením objemu $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow R$. Pritom platí*

- $\bar{\mu}(F) = \sup\{\mu(E \cap F); E \in \sigma(\mathcal{A})\}$,
- μ je zúžením na $\sigma(\mathcal{A})$ vonkajšej miery μ^* ,
- $\mu^*(E) = \inf\{\lambda^*(V); E \subset V \in \mathcal{V}\}$,
- $\lambda^*(V) = \sup\{\lambda(A); V \supset A \in \mathcal{A}\}$.

Dôsledok 1.1. Nech X je Hausdorffov topologický priestor, \mathcal{A} je systém všetkých kompaktných množín, λ je objem na \mathcal{A} . Potom $\mu : \sigma(\mathcal{A}) \rightarrow R$ je regulárna Borelova miera.

Pritom regulárnosť znamená

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U); A \subset U \in \mathcal{V}\} = \sup\{\mu(C); A \supset C \in \mathcal{A}\}.$$

Regulárnosťou sa zaoberá aj práca [2]. Tu sa uvažuje miera $\mu : (X, \mathcal{S}) \rightarrow [0, \infty)$ a miera $\nu(f) = \int_E f d\mu$, kde $f \geq 0$ a X je topologický priestor.

Veta 1.2. *Ak*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(C); E \supset C, C \text{ kompaktná}\},$$

tak aj

$$\nu(E) = \sup\{\nu(C); E \supset C, C \text{ kompaktná}\}.$$

Podmienka $\nu(E) = \int_E f d\mu$ súvisí s pojmom absolútnej spojitosti miery ν vzhľadom na mieru μ (označenie $\nu \ll \mu$), t.j. s implikáciou $\mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$). V článku [11] sa využíva pojem (CCC) (countable chain condition).

Definícia 1.1. Funkcia $\nu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ spĺňa podmienku (CCC), ak neexistuje nespočítateľný systém $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$ navzájom disjunktných množín taký, že

$$\nu(E) > 0, \quad E \in \mathcal{E}.$$

Veta 1.3. Nech (X, \mathcal{S}, μ) je priestor so σ -konečnou mierou μ spĺňajúcou podmienku (CCC). Potom miera $\nu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ je absolútne spojitá vzhľadom na μ vtedy a len vtedy, keď existuje taká merateľná funkcia f , že

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

pre všetky $E \in \mathcal{S}$.

Veta 1.4. Nech (X, \mathcal{S}, μ) je priestor so σ -konečnou mierou. Nech $\nu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ spĺňa podmienku (CCC). Potom $\nu \ll \mu$ vtedy a len vtedy, keď existuje taká merateľná funkcia f na X , že

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

pre všetky $E \in \mathcal{S}$.

1.2 Ideály

Slovo ideál má svoju symboliku. Ale v našej teórii má aj matematický význam. Mimochodom, T. Neubrunn ho pôvodne nepoužíval (pozri [7]), hovoril o systéme nulových množín.

Definícia 1.2. *Nech (X, \mathcal{S}) je merateľný priestor, $\mathcal{N} \subset \mathcal{S}$. Systém \mathcal{N} nazveme ideálom, ak*

$$(i) \ E, F \in \mathcal{N} \implies E \cup F \in \mathcal{N},$$

$$(ii) \ E \in \mathcal{N}, F \in \mathcal{S}, F \subset E \implies F \in \mathcal{N}.$$

Ideál \mathcal{N} sa nazýva σ -ideálom, ak platí

$$(iii) \ E_n \in \mathcal{N} \ (n = 1, 2, \dots) \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{N}.$$

Aj v tomto všeobecnejšom tvare sa uplatňuje vlastnosť (CCC). V [7] je dokázané okrem iného nasledujúce tvrdenie.

Veta 1.5. *Nech (X, \mathcal{S}) je merateľný priestor, $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}$ je σ -ideál a systém $\mathcal{S} \setminus \mathcal{M}$ neobsahuje nespočítateľne veľa navzájom disjunktných množín, $\mathcal{M}^* \subset \mathcal{S}$ je σ -ideál, ktorý nie je súčasťou systému \mathcal{M} . Potom existuje taká množina $A \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{M}$, že $A \in \mathcal{M}^*$ a*

$$E \subset X \setminus A, E \in \mathcal{M}^* \implies E \in \mathcal{M}.$$

Pravdaže, tvrdenia uvedeného typu sa dajú bezprostredne aplikovať na tvrdenia z teórie miery.

Veta 1.6. *Nech (X, \mathcal{S}, m) je priestor s úplnou mierou (t.j. $E \in \mathcal{S}, m(E) = 0, F \subset E \implies F \in \mathcal{S}$). Nech m^* je miera na \mathcal{S} , ktorá nie je absolútne spojitá podľa m . Potom existuje $A \in \mathcal{S}, m^*(A) = 0, m(A) > 0$ a*

$$E \subset X \setminus A, m^*(E) = 0 \implies m(E) = 0.$$

Je pozoruhodné, že niektoré tvrdenia zo [7] sa dajú použiť v teórii P. R. Halmosa a L. J. Savagea aplikujúcej Radonovu-Nikodymovu vetu v teórii postačujúcich štatistík.

Ďalšie výsledky transformujúce tvrdenia teórie miery do teórie množín sú v monografiách [12, 13, 14]. Pre jednoduchosť predpokladajme, že $X \in \mathcal{S}$. Vezmime napr. Lebesgueovu vetu, ktorá pracuje s dvoma mierami $\mu, \nu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$, z ktorých jedna je konečná. Potom existujú také miery $\nu_1, \nu_2 : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$, že

$$\nu = \nu_1 + \nu_2,$$

pričom $\nu_1 \ll \mu$ a $\nu_2 \perp \mu$, (t.j. existujú také $A, B \in \mathcal{S}$, že $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ a $\mu(E \cap A) = \nu_2(E \cap B)$ pre všetky $E \in \mathcal{S}$).

Definícia 1.3. *Nech $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathcal{S}$ sú σ -ideály. Hovoríme, že \mathcal{M}, \mathcal{N} sú singulárne (píšeme $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$), ak existujú také A, B , že*

$$X = A \cup B, \quad A \cap B = \emptyset$$

a

$$E \cap A \in \mathcal{M}, \quad E \cap B \in \mathcal{N}$$

pre všetky $E \in \mathcal{S}$.

Absolútnu spojitosť mier možno sformulovať inklúziou σ -ideálov $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$. Ak totiž μ, ν sú miery,

$$\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{S}; \mu(A) = 0\},$$

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{S}; \nu(A) = 0\},$$

potom $\nu \ll \mu$ práve vtedy, keď $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$.

Veta 1.7. *Nech (X, \mathcal{S}) je merateľný priestor, $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathcal{S}$ sú σ -ideály, pričom*

$$\mathcal{M} \setminus \mathcal{N} \text{ spĺňa (CCC),}$$

t.j. neobsahuje nespočítateľne veľa navzájom disjunktných prvkov. Potom existuje taká množina $F \in \mathcal{M}$, že pre σ -ideály

$$\mathcal{N}_1 = \{E \in \mathcal{S}; E \cap F \in \mathcal{M}\}, \quad \mathcal{N}_2 = \{E \in \mathcal{S}; E \setminus F \in \mathcal{M}\}$$

platí

$$\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{M}, \quad \mathcal{N}_2 \perp \mathcal{M}.$$

Klasickú Lebesgueovu vetu dostaneme pomocou vyššie uvedených volieb σ -ideálov \mathcal{N} , \mathcal{M} a definícií

$$\nu_1(E) = \nu(E \cap F), \quad \nu_2(E) = \nu(E \setminus F).$$

1.3 Malé množiny

Myšlienka nahradiť množiny nulovej miery daným σ -ideálom sa ukázala byť užitočnou, a preto aj populárnou. Ale nezahŕňa onú „ ε -ovú vojnu“. Vieme, že v konvergenčných otázkach potrebujeme vedieť, kedy má nejaká množina „malú“ mieru, teda kedy je malá.

Definícia 1.4. *Nech (X, \mathcal{S}) je merateľný priestor a $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť systémov množín $\mathcal{N}_n \subset \mathcal{S}$ ($n = 1, 2, \dots$). Budeme hovoriť, že $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty}$ je systém malých množín na \mathcal{S} (stručne malý systém), ak sú splnené nasledujúce podmienky:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{N}_n$ pre $n = 1, 2, \dots$,

(ii) pre každé n existuje taká postupnosť (k_i) prirodzených čísel, že

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{N}_n, \text{ ak } E_i \in \mathcal{N}_{k_i} \text{ pre } i = 1, 2, \dots,$$

(iii) ak $E \in \mathcal{N}_n, F \subset E, F \in \mathcal{S}$, tak $F \in \mathcal{N}_n$,

(iv) $\mathcal{N}_n \supset \mathcal{N}_{n+1}$ pre $n = 1, 2, \dots$,

(v) ak $E \in \mathcal{N}_n, F \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{N}_m$, tak $E \cup F \in \mathcal{N}_n$.

Príklad 1.1. Nech $m : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$ je miera, $\mathcal{N}_n = \{E \in \mathcal{S}; m(E) < \frac{1}{n}\}$. Potom $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty}$ je systém malých množín.

Je príznačné, že Tibor Neubrunn sa zasadil za teóriu systémov malých množín hneď po jej vzniku. Jeho obľúbenou témou bola absolútna spojitosť.

Ak μ, ν sú miery na \mathcal{S} , tak $\nu \ll \mu$, ak

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : E \in \mathcal{S}, \mu(E) < \delta \implies \nu(E) < \varepsilon.$$

Tento pojem možno transformovať do malých systémov.

Definícia 1.5. Nech $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty}, (\mathcal{M}_n)_{n=1}^{\infty}$ sú malé systémy. Píšeme

$$(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty} \ll_{\varepsilon} (\mathcal{M}_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \text{ak } \forall n \exists m : \mathcal{M}_m \subset \mathcal{N}_n.$$

Príklad 1.2. Nech $\mu, \nu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$ sú miery,

$$\mathcal{M}_n = \left\{ E \in \mathcal{S}; \mu(E) < \frac{1}{n} \right\}, \quad \mathcal{N}_n = \left\{ E \in \mathcal{S}; \nu(E) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Potom $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty} \ll_{\varepsilon} (\mathcal{M}_n)_{n=1}^{\infty}$ znamená, že

$$\forall n \exists m : \mu(E) < \frac{1}{m} \implies \nu(E) < \frac{1}{n}.$$

Inak formulované

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \mu(E) < \delta \implies \nu(E) < \varepsilon.$$

Veta 1.8. *Nech $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^\infty, (\mathcal{M}_n)_{n=1}^\infty$ sú malé systémy. Potom*

$$(\mathcal{N}_n)_{n=1}^\infty \ll (\mathcal{M}_n)_{n=1}^\infty \implies \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{N}_n \supset \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{M}_n.$$

Opačná implikácia platí pre tzv. spojité systém $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^\infty$.

Definícia 1.6. *Malý systém $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^\infty$ je polospojité zhora, ak*

$$(B_i \in \mathcal{S}, B_i \searrow B, \exists i_o, B_i \notin \mathcal{N}_{i_o}) \implies B \notin \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{N}_n.$$

Pojem spojitého malého systému odpovedá pojmu funkcie polospojitej zhora:

$$B_i \searrow B \implies \mu(B_i) \searrow 0.$$

A skutočne platí (pozri [9]):

Veta 1.9. *Nech $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^\infty, (\mathcal{M}_n)_{n=1}^\infty$ sú malé systémy na \mathcal{S} , pričom $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^\infty$ je polospojité zhora. Potom*

$$(\mathcal{N}_n)_{n=1}^\infty \ll (\mathcal{M}_n)_{n=1}^\infty \iff \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{N}_n \supset \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{M}_n.$$

Videli sme, že zatiaľ čo nulové množiny môžu byť definované jednoznačne, pojem množiny „malej“ miery má fuzzy charakter. Je zaujímavé, že pojem fuzzy množiny a pojem množiny malej miery (opísaný matematicky tzv. malými systémami) boli zavedené nezávisle na sebe a temer súčasne. Hoci axiomatické systémy sú v oboch teóriách dosť rôzne, pojem malého systému môže byť skúmaný z hľadiska fuzzy množín.

1.4 Submiery

Submiery sa k nám dostali najprv prostredníctvom prác I. Dobrakova (pozri [1]). Aj keď teóriu submier možno budovať na všeobecnejších štruktúrach, ostaneme v klasickom ponímaní.

Definícia 1.7. *Nech \mathcal{S} je σ -algebra podmnožín množiny X . Funkcia $m : \mathcal{S} \rightarrow R$ je submiera, ak spĺňa nasledujúce podmienky:*

1. $m(\emptyset) = 0$,
2. ak $A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$, tak $m(A) \leq \sum_{i=1}^n m(A_i)$,
3. ak $A_i \searrow \emptyset$, tak $\lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i) = 0$.

Definícia 1.8. *Postupnosť $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty}$ a submiera $m : \mathcal{S} \rightarrow R$ sú ekvivalentné, ak platí*

- (i) $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in N : A \in \mathcal{N}_n \implies m(A) < \varepsilon$,
- (ii) $\forall n \in N \exists \varepsilon > 0 : m(A) < \varepsilon \implies A \in \mathcal{N}_n$.

V [15] je dokázané nasledujúce tvrdenie.

Veta 1.10. *K ľubovoľnej submieri $m : \mathcal{S} \rightarrow R$ existuje malý systém $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty}$ ekvivalentný s tou submierou. A naopak, k ľubovoľnému malému systému $(\mathcal{N}_n)_{n=1}^{\infty}$ existuje submiera $m : \mathcal{S} \rightarrow R$ s ním ekvivalentná.*

Logickým vyústením slovenskej školy teórie integrálu je Šipošov integrál ([15, 16, 17]), ktorý skonštruoval Neubrunnov žiak Ján Šipoš. Tento integrál bol použitý v Kahnemanovej a Tverského ekonomickej koncepcii, za ktorú bol Kahneman odmenený Nobelovou cenou. Pritom Šipošov integrál je určitou alternatívou Choquetovho integrálu. Pravdaže, vznikli nezávisle na sebe a Šipošov integrál má svoje symetrické osobitosti.

Odteraz budeme predpokladať, že je daný priestor (X, \mathcal{S}) , kde \mathcal{S} je σ -algebra.

Definícia 1.9. Funkcia $\mu : \mathcal{S} \rightarrow R$ je kapacita, ak

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (ii) $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$.

Definícia 1.10. Nezáporná funkcia $f : X \rightarrow [0, \infty)$ je integrovateľná v zmysle Choqueta, ak existuje

$$(C) \int f d\mu = \int_0^\infty \mu(f^{-1}[0, t)) dt.$$

A teraz uvedieme Šipošovu konštrukciu. Nech F je konečná množina reálnych čísel,

$$F = \{b_k, b_{k-1}, \dots, b_1, b_0, a_0, a_1, \dots, a_n\},$$

pričom $b_k < b_{k-1} < \dots < b_1 < b_0 = 0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n$, a nech $f : X \rightarrow R$ je merateľná funkcia. Nech \mathcal{F} je systém všetkých takých množín F . Položme

$$S_F(f) = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})\mu(A_i) + \sum_{i=1}^k (b_i - b_{i-1})\mu(B_i),$$

kde

$$\begin{aligned} A_i &= \{x \in X; f(x) \geq a_i\}, & i &= 0, 1, \dots, n, \\ B_j &= \{x \in X; f(x) \leq b_j\}, & j &= 0, 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Definícia 1.11. Funkcia $f : X \rightarrow R$ je integrovateľná v zmysle Šipoša, ak existuje

$$(S) \int f d\mu = \lim_{F \in \mathcal{F}} S_F(f).$$

Pravdaže, ak je funkcia f nezáporná, tak je integrovateľná v zmysle Šipoša vtedy a len vtedy, keď je integrovateľná v zmysle Choqueta.

Literatúra

- [1] Dobrakov, I.: *On submeasures I*. Dissertationes Math. 112 (1974), 1–35.
- [2] Neubrunn, T.: *O jednej podmienke pre vnútornú regularitu niektorých mier*. Acta fac. rer. nat. Univ. Comen. 4 (1959), 283–286.
- [3] Neubrunn, T.: *Poznámka k merateľným transformáciám*. Acta fac. rer. nat. Univ. Comen. 4 (1959), 287–290.
- [4] Neubrunn, T.: *Merateľnosť niektorých funkcií na kartézskych súčinoch*. Mat.-fyz. čas. SAV 10 (1960), 216–231.
- [5] Neubrunn T.: *O konštrukcii miery z objemu*. Acta fac. rer. nat. Univ. Comen. 6 (1961), 51–60.
- [6] Neubrunn, T.: *O metrických priestoroch patriacich priestorom s mierou*. Acta fac. rer. nat. Univ. Comen. 7 (1963), 663–673.
- [7] Neubrunn, T.: *Zamečanie ob absolútnej nepreryvnosti mier*. Mat.-fyz. čas. SAV 16 (1966), 21–30.
- [8] Neubrunn, T.: *On the absolute continuity of product measures*. Acta fac. rer. nat. Univ. Comen. 21 (1968), 378–386.
- [9] Neubrunn, T.: *A remark on the product of measures*. Acta fac. rer. nat. Univ. Comen. 22 (1969), 31–37.
- [10] Neubrunn, T.: *On abstract formulation of absolute continuity and dominancy*. Mat. čas. SAV 19 (1969), 202–216.
- [11] Neubrunn, T.: *On some conditions of absolute continuity of measures*. Acta fac. rer. nat. Univ. Comen. 39 (1980), 89–95.
- [12] Neubrunn T., Riečan B.: *Miera a integrál*. VEDA, Bratislava, 1981.
- [13] Riečan, B., Neubrunn, T.: *Teória miery*. VEDA, Bratislava, 1992.

- [14] Riečan B., Neubrunn T.: *Integral, Measure, and Ordering*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, Ister Science, Bratislava, 1997.
- [15] Šipoš J.: *Integral with respect to a pre-measure*. Math. Slovaca 29 (1979), 257–270.
- [16] Šipoš, J.: *Non linear integrals*. Math. Slovaca 29 (1979), 333–346.
- [17] Šipoš, J.: *Integral representation of nonlinear functionals*. Math. Slovaca 31 (1981), 39–51.