9. Geometrie

In: Irena Sýkorová (author): Matematika ve staré Indii. (Czech). Praha: Matfyzpress, Vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, 2016. pp. 277–308.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404214

9 GEOMETRIE

Geometrii bylo v indické matematice věnováno mnohem méně pozornosti než aritmetice a algebře. Neexistovaly samostatné geometrické práce, základní poznatky z geometrie jsou obsaženy v šesti z osmi určení;[1] ta byla ovšem zpravidla součástí aritmetiky. Tato určení se týkala rovinné geometrie (zejména měření obvodu a obsahu základních rovinných útvarů), prostorové geometrie (výpočty objemů výkopů, hromad cihel, hromad písku) a měření pomocí stínů.

Geometrie se původně nazývala *šulba* nebo *radždžu*.[2] Později se geometrii říkalo *kšétraganita* (*kṣetra-gaṇita*) nebo *kšétravjavahára* (*kṣetra-vyavahāra*).[3]

9.1 Rovinné obrazce

Určení věnované rovinným obrazcům, tzv. *kšétra*, zahrnovalo měření trojúhelníku, čtyřúhelníku, kruhu, kruhového oblouku, mezikruží a elipsy. Termín *kšétra* se někdy používal i pro obsah daného rovinného obrazce. Později k označení obsahu sloužil název *kšétraphala* (*kṣetra-phala*).

V úlohách byla uvedena pravidla pro výpočet obsahu rovinných obrazců. Někteří autoři, například Mahávíra a Brahmagupta, rozlišovali přibližnou velikost plochy (postačující pro praktické účely) a přesnou velikost plochy. Základní vzorec pro přibližný výpočet obsahu čtyřúhelníku i trojúhelníku byl součin polovičních součtů protilehlých stran, kde u trojúhelníku byla strana protilehlá základně nulová.

9.1.1 Trojúhelník

Pro trojúhelník se va středověké Indii používal název *trjašra* (*try-aśra*) nebo *tribhudža* (*tri-bhuja*).[4] Indičtí matematikové rozlišovali trojúhelníky rovnostranné, nazývané *samatribhudža* (*sama-tri-bhuja*), rovnoramenné, označené jako *dvisamatribhudža* (*dvi-sama-tri-bhuja*), i obecné neboli *višamatribhudža* (*viṣama-tri-bhuja*). Základna trojúhelníku se nazývala *bhudžá* (*bhujā*) nebo *bhú* (*bhū*), stranám se říkalo *páršva* (*pārśva*), pod názvem *avalambaka* (*avalambaka*) nebo *lamba* (*lamba*) se vždy rozuměla výška k základně.[5] Podle toho,

[1] Dvacet operací a osm určení byly základními tématy aritmetiky, viz 7. kapitola. Určení představovala jakési návody, početní postupy, jak vyřešit daný problém.

[2] Oba termíny se používaly i pro provaz nebo šňůru, pomocí nichž se v nejstarších dobách prováděly geometrické konstrukce.

[3] *Kšétra* byl termín označující rovinné útvary, *kšétraganita* a *kšétravjavahára* lze přeložit jako počítání či zacházení s rovinnými útvary, přestože se geometrie zabývala i tělesy.

[4] Slovo *bhudža* (*bhuja*) označovalo rameno či stranu, *tribhudža* znamená „mající tři strany“, podobně čtyřúhelník – *čaturbhudža* (*catur-bhuja*), pětiúhelník – *paňčabhudža* (*pañca-bhuja*), šestiúhelník – *šadbhudža* (*ṣaḍ-bhuja*), podle [DS3]. Slovo *try-aśra* je složené z *tri*, tj. tři a *aśra*, tj. roh či hrana. Můžeme je tedy přeložit jako „mající tři rohy“, resp. „mající tři hrany“, podle [Ke1].

[5] Termíny *avalambaka* a *lamba* znamenají kolmice.

zda výška k základně ležela uvnitř či vně trojúhelníku, rozlišovaly se trojúhelníky ostroúhlé, tzv. *antarlamba* (*antar-lamba*) či tupoúhlé neboli *bahirlamba* (*bahir-lamba*).[6]

Bháskara II. stanovil podmínku existence trojúhelníku či mnohoúhelníku:[7] *když součet všech stran kromě jedné je menší nebo roven zbývající straně, není to žádný útvar.*

Pravoúhlý trojúhelník, Pýthagorova věta

Speciálním případem byly pravoúhlé trojúhelníky, pro které Brahmagupta i někteří další autoři používali termín *džátjatrjašra* (*jātya-try-aśra*). Nejdelší straně pravoúhlého trojúhelníku se říkalo *karna* (*karṇa*, tj. přepona), dvě odvěsny se nazývaly *bhudžá* (základna) a *kóti* (*koṭi*, tj. svislá strana).[8]

V indické literatuře se už ve védském období objevily některé formulace Pýthagorovy věty a příklady pýthagorejských trojic.[9] Středověcí učenci připojili ještě další vyjádření.

Pro konstrukci pravoúhlých trojúhelníků s celými nebo racionálními stranami uvedl Brahmagupta obecné vyjádření délek stran[10] $(m, n \in \mathbb{N})$

$$(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)\,, \qquad \left(m, \frac{1}{2}\Big(\frac{m^2}{n} - n\Big), \frac{1}{2}\Big(\frac{m^2}{n} + n\Big)\right).$$

Podobná tvrzení uvedli i další učenci, například Bháskara II. vyjádřil strany pravoúhlého trojúhelníku ve tvaru[11]

$$\left(m, \frac{2mn}{n^2-1}, \frac{n^2+1}{n^2-1}m\right)$$

a počítal i s iracionálními stranami. Indičtí učenci věděli, že celočíselné násobky stran dávají opět strany pravoúhlého trojúhelníku $(k, m, n \in \mathbb{N})$

$$\Big(k(m^2 - n^2),\ 2kmn,\ k(m^2 + n^2)\Big).$$

V jednom příkladu algebraické práce *Bídžaganita* vysvětlil Bháskara II. Pýthagorovu větu geometricky.[12] Ze čtyř stejných pravoúhlých trojúhelníků se stranami a, b a přeponou c sestrojil čtverec o straně c (viz obr. 9.1 vlevo),

---

[6] Klasifikace je uvedena např. v [DS3].
[7] Viz sloka Lila/vi.161, podle [Col], str. 69.
[8] Terminologie je uvedena např. v [Ke1].
[9] Viz 3. kapitola, odstavec 3.3.
[10] Viz sloky BrSpSi/xii.33, BrSpSi/xii.35, podle [Col], str. 306.
[11] Viz sloka Lila/vi.139, podle [Col], str. 61.
[12] Podle [Col], str. 221–222.

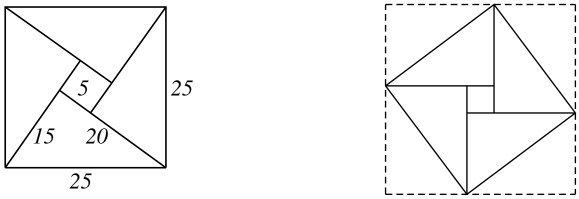
uprostřed zbyl ještě malý čtverec o straně $a - b$. Obsah velkého čtverce byl součtem obsahů čtyř trojúhelníků a malého čtverce

$$S = c^2 = 4\frac{ab}{2} + (a-b)^2 = a^2 + b^2 \,.$$

Poznamenejme ještě, že Bháskara II. uvažoval pravoúhlý trojúhelník se stranami 15, 20, 25.

Podobný důkaz se objevuje v čínské matematice, kde se doplnily ještě čtyři trojúhelníky (viz obr. 9.1 vpravo); to odpovídalo zdvojení čtverce nad přeponou s odečtením vnitřního čtverečku. Označíme-li odvěsny a, b, přeponu c, pak platí:[13]

$$(a+b)^2 = 2c^2 - (a-b)^2 \,.$$



Obr. 9.1: Důkaz Pýthagorovy věty – indický a čínský

Al-Chwárizmí předložil důkaz Pýthagorovy věty, známý z řecké matematiky, pouze pro rovnoramenný trojúhelník (viz [Ju]).

Mahávíra užíval termín *bídža* (*bīja*, tj. prvek) k označení konstant, zpravidla přirozených čísel, z nichž bylo možné odvodit prvky trojúhelníku, obdélníku či obecného čtyřúhelníku. Například A a B jsou *bídža* ve vztahu k pravoúhlému trojúhelníku, protože jeho strany lze vyjádřit pomocí vztahů $a = A^2 - B^2$, $b = 2AB$, $c = A^2 + B^2$. Operace *džanja* (*janya*) pak představovala algoritmus výpočtu těchto prvků, tj. stran, základen, výšek, úhlopříček a ramen. V obrácené operaci *džanja* bylo úkolem vypočítat konstanty *bídža* ze zadaných rozměrů geometrického útvaru.

Pomocí konstant *bídža* Mahávíra stanovil strany a úhlopříčku obdélníku,[14] nejde o nic jiného než o vyjádření pýthagorejské trojice

$$a = A^2 - B^2, \qquad b = 2AB\,, \qquad u = A^2 + B^2 \,.$$

Tento procesu nazýval Diofantos vytváření pravoúhlého trojúhelníku z A, B, Mahávíra mu říkal vytváření „podlouhlého čtyřúhelníku“ neboli obdélníku z A a B (viz [DS2]).

Obrácená operace *džanja* představovala opačný proces, v obdélníku byly dány délky stran a, b, úhlopříčky u a hledaly se konstanty A, B. Podle Mahá-

[13] Podle [Hu], str. 216.

[14] Viz sloka GaSaSa/vii.90$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 209.

vírova pravidla[15] se vypočítaly podle vztahů

$$B = \sqrt{\frac{1}{2}(u-a)}\,, \qquad A = \sqrt{u - \frac{1}{2}(u-a)}\,.$$

K určení dvou konstant byly k dispozici tři rovnice, z vyjádření je zřejmé, že autor použil jen první a třetí.

Už ve védských textech *šulbasútrách* byly popisovány konstrukce lichoběžníků, které vznikly z pravoúhlých trojúhelníků přiložených k sobě stranou stejné délky. Snaha o obecné vyjádření stran pravoúhlého trojúhelníku s předem danou délkou jedné strany se znovu objevuje ve středověkých dílech. Například podle Mahávírových pravidel[16] má-li jedna odvěsna délku a, pak jsou délky stran popsány trojicemi

$$\left(a,\ \frac{1}{2}\Big(\frac{a^2}{p^2}-p^2\Big),\ \frac{1}{2}\Big(\frac{a^2}{p^2}+p^2\Big)\right) \qquad \text{nebo} \qquad \left(\frac{a^2}{4p^2}-p^2,\ a,\ \frac{a^2}{4p^2}+p^2\right),$$

kde p, q jsou libovolně zvolená čísla. Byla tak provedena operace *džanja* s prvky $A = \frac{1}{2}(\frac{a}{p}+p)$, $B = \frac{1}{2}(\frac{a}{p}-p)$, resp. $A = \frac{a}{2p}$, $B = p$.

Stejný problém řešil rovněž Bháskara II. a dospěl k vyjádření[17]

$$\left(a,\ \frac{2ap}{p^2-1},\ p\frac{2ap}{p^2-1}-a\right) \qquad \text{nebo} \qquad \left(a,\ \frac{1}{2}\Big(\frac{a^2}{p}-p\Big),\ \frac{1}{2}\Big(\frac{a^2}{p}+p\Big)\right),$$

k tomu v příkladech určil strany čtyř pravoúhlých trojúhelníků s jednou odvěsnou $a = 12$, a to $(12, 16, 20)$, $(12, 9, 15)$, $(12, 5, 13)$ užitím prvního vztahu volbou $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, a $(12, 35, 37)$ podle druhého vzorce s parametrem $p = 2$.[18]

Podobná pravidla uváděla, jak vyjádřit strany pravoúhlého trojúhelníku, je-li dána délka přepony[19]

$$\Big(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}c,\ \frac{2mn}{m^2+n^2}c,\ c\Big), \qquad \text{resp.} \qquad \left(\frac{2cp}{p^2+1}p-c,\ \frac{2cp}{p^2+1},\ c\right).$$

Znalost Pýthagorovy věty byla procvičována v mnoha různých příkladech. Některé indické úlohy byly téměř shodné s čínskými. Uveďme na ukázku některé z nich. V indických textech se objevila mírně upravená úloha o zlomeném bambusu či sloupu.[20]

GaSaSa/vii.192$\frac{1}{2}$
Výška rostoucího bambusu je 49 *hasta. Je zlomen někde mezi* [horním a dolním koncem]. *Rozdíl mezi vrškem* [spadlým na zem] *a dolním koncem je* 21 *hasta. Jak vysoko od země je zlomen?*

---

[15] Viz sloka GaSaSa/vii.120$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 222.

[16] Viz sloky GaSaSa/vii.95$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 210, GaSaSa/vii.97$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 211.

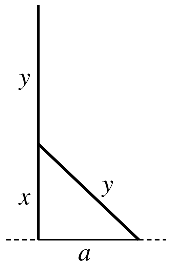
[17] Viz sloky Lila/vi.139 a Lila/vi.140, podle [Col], str. 61.

[18] Volil ještě $p = 4$ a $p = 6$, tím však získal znovu trojice $(12, 16, 20)$ a $(12, 9, 15)$.

[19] Viz sloky GaSaSa/vii.122$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 223, Lila/vi.123, podle [Col], str. 62.

[20] Podle [Ran], str. 247. Jednotka délky *hasta* je míra od lokte ke špičce prostředníku, tj. loket, asi 45 cm.

Mahávírovy úvahy vyjádříme současnou symbolikou. Označíme-li x, y jako dolní a horní část zlomeného bambusu, jejich součtem je výška bambusu b. Poté, co vršek dopadne na zem, stane se horní část y přeponou a dolní část x odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku, druhou odvěsnou je vzdálenost a spadlého vršku od paty bambusu (viz obr. 9.2).



Obr. 9.2: Úloha o zlomeném bambusu

Řešila se tedy soustava

$$y^2 - x^2 = a^2,$$
$$x + y = b\,,$$

kde $a = 21$, $b = 49$. Podle pravidla, které úloze předcházelo, se hledaná výška x vypočítala podle vztahu[21]

$$x = \frac{\frac{1}{2}(b^2 - a^2)}{b} = \frac{\frac{1}{2}(49^2 - 21^2)}{49} = \frac{980}{49} = 20\,.$$

Podobnou úlohu uvedl i Bháskara II., a dokonce dvakrát,[22] nalezneme ji s jinými numerickými hodnotami rovněž v komentáři k Brahmaguptově práci, kde byla řešena pomocí tětivy kružnice.[23] Téměř stejný problém byl řešen v čínské matematice,[24] výpočet se lišil od Mahávírova pouze pořadím prováděných operací $y = \frac{1}{2}\left(b - \frac{a^2}{b}\right)$.

Na stejném principu je založena i úloha o hadovi a pávovi, kterou předkládáme i s autorovým řešením:[25]

Lila/vi.150

U paty sloupu je hadí nora, na vrcholu sloupu sedí páv. Když ve vzdálenosti trojnásobku výšky sloupu uvidí hada, jak se plazí směrem ke své noře, vrhne se šikmo na něj. Řekni rychle kolik loktů od nory se potkají, když oba urazí stejnou vzdálenost.

---

[21] Pravidlo na výpočet je ve sloce GaSaSa/vii.190$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 246, postup odpovídá dosazení y z druhé rovnice do první.

[22] Viz sloky Lila/vi.148, podle [Col], str. 64–65, BiGa/iv.124, podle [Col], str. 203.

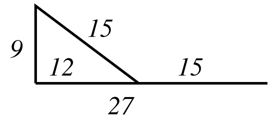
[23] Viz odstavec 9.1.3.

[24] V *Matematice v devíti kapitolách* je zařazen v deváté kapitole jako (9.11), podle [Hu], str. 218.

[25] Podle [Col], str. 65. V komentáři k práci *Bráhmasphutasiddhánta* je analogický příklad s kočkou a krysou, podle [Col], str 310.

Vyjádření: Sloup 9*. To je výška. Vzdálenost hada od nory je* 27*. To je součet přepony a strany. Doporučeným postupem je setkání nalezeno v loktech:* 12*.*

Viz obrázek.



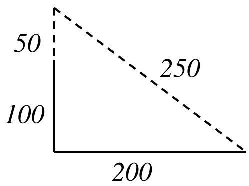
Známá je Bháskarova úloha o opicích; byla zařazena jak do aritmetické *Líláva-tí*, tak do algebraické *Bídžaganity*. Při řešení se opět využívala Pýthagorova věta.[26]

Lila/vi.155

Ze stromu vysokého sto loktů slezla opice a šla k rybníku vzdáleném dvě stě loktů; zatímco jiná opice vyskočila do nějaké výšky nad strom a s rychlostí pokračovala šikmo ke stejnému místu. Jestliže obě urazily stejný úsek, řekni mi rychle výšku skoku, vzdělaný muži, jestli jsi pilně studoval počítání.

Vyjádření: Strom 100 *loktů. Jeho vzdálenost od rybníka* 200*. Doporučeným postupem výška skoku vychází* 50*.*

Viz.



Bháskarův doporučený postup představoval výpočet, který bychom dnes vyjádřili vzorcem

$$x = \frac{vd}{2v + d}\,,$$

kde v je výška stromu, d je vzdálenost rybníka od stromu a x je hledaná výška skoku. K tomu se dá snadno dospět s využitím Pýthagorovy věty. V pravoúhlém trojúhelníku mají odvěsny délky d a $v + x$, tudíž přepona je $\sqrt{d^2 + (v + x)^2}$. Podle zadání se musí rovnat cesty obou opic, tj.

$$d + v = x + \sqrt{d^2 + (v + x)^2}\,.$$

Odtud umocněním a jednoduchou úpravou se vyjádří

$$x = \frac{vd}{2v + d}\,.$$

Bháskara II. žádné odvozování neprováděl, pouze uvedl pravidlo, které tento vzorec popisuje slovy.

[26] Podle [Col], str. 67. Stejná úloha je BiGa/iv.126, podle [Col], str. 204–205.

Komentátor Brahmaguptovy práce *Bráhmasphutasiddhánta* uvedl stejný problém s jinými numerickými hodnotami jako úlohu o asketech.[27]

Na obrázku 9.3 je ukázka rukopisu *Lílávatí* s ilustrovanou úlohou o hadovi a pávovi a problémem se dvěma opicemi; rukopis je uložen v Muzeu indologie v Džajpuru.[28]

Obr. 9.3: Rukopis *Lílávatí*[29]

Následující Bháskarův problém s lotosovým květem[30] má svůj ekvivalent v čínské úloze o rákosu na rybníku,[31] al-Karadží v knize *Dostatečná kniha o vědě aritmetické* (*al-Kāfī fi'l-hisāb*) rovněž uvedl podobný příklad (viz [Ju]).

BiGa/iv.125
Na jistém jezeře plném červených hus a jeřábů byla spatřena špička poupěte lotosového květu půl lokte nad hladinou vody. Vlivem větru se postupně pohybovala, až se ponořila ve vzdálenosti dvou loktů. Vypočítej rychle, matematiku, hloubku vody.

Autor využil Pýthagorovu větu (viz obr. 9.4), kde y je výška celé rostliny, x označuje část pod vodou, jejich rozdílem je výška nad hladinou b. Když se lotos odkloní, až květ zmizí pod hladinou, stane se výška rostliny y přeponou pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsnami jsou dolní část x a vzdálenost a, kde se květ potopil.

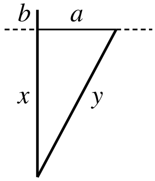
[27] Podle [Col], str 308.

[28] SRC Museum Of Indology, Jaipur.

[29] Převzato z [Kat].

[30] Podle [Col], str. 204, podobně i sloka Lila/vi.153, podle [Col], str. 66.

[31] V čínské *Matematice v devíti kapitolách* najdeme obdobný příklad s označením (9.5), podle [Hu], str. 213.



Obr. 9.4: Problém lotosového květu

Bháskara nejprve vyjádřil neznámou výšku rostliny $x + \frac{1}{2}(= y)$, pak podle Pýthagorovy věty sestavil rovnici $(x + \frac{1}{2})^2 = x^2 + 2^2$, po umocnění dostal $x + \frac{1}{4} = 4$, odkud určil hloubku vody $x = \frac{15}{4}$ a výšku rostliny $y = \frac{17}{4}$.

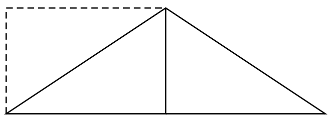
Pýthagorova věta a pýthagorejské trojice byly známé už v Mezopotámii, soupis několika z nich je doložen na tabulce Plimpton 322 (19. až 17. stol. př. n. l.). Čínský tvar obecných pýthagorejských trojic můžeme vyjádřit vztahem podobným tomu, který uvedl Brahmagupta $\left(\frac{m^2+n^2}{2}, mn, m^2 - \frac{m^2+n^2}{2}\right)$ pro $m, n \in \mathbb{N}$ (viz [Hu]).

Rovnoramenný trojúhelník

Indičtí učenci nehledali pouze pýthagorejské trojice, podobným způsobem vyjadřovali například strany rovnoramenného trojúhelníku $(m,\ n \in \mathbb{N})$[32]

$$\Big(m^2 + n^2, m^2 + n^2, 2(m^2 - n^2)\Big), \qquad \text{resp.} \qquad \Big(m^2 + n^2, m^2 + n^2, 4mn\Big).$$

Mahávíra rozdělil obdélník úhlopříčkou[33] a vzniklé pravoúhlé trojúhelníky přiložil k sobě stejnou odvěsnou (viz obr. 9.5).



Obr. 9.5: Rovnoramenný trojúhelník

Brahmagupta určil racionální strany rovnoramenného trojúhelníku s danou výškou v, $(p \in \mathbb{Q})$[34]

$$\left(\frac{1}{2}\Big(\frac{v^2}{p} + p\Big), \frac{1}{2}\Big(\frac{v^2}{p} + p\Big), \frac{v^2}{p} - p\right)$$

s komentářem, že pro výšku $v = 8$ a $p = 4$ mají odvěsny délku 10, základna 12.

[32] Viz sloky GaSaSa/vii.108$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 218, BrSpSi/xii.33, podle [Col], str. 306.
[33] Obecné délky stran a úhlopříčky obdélníku byly $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $u = m^2 + n^2$.
[34] Viz sloka BrSpSi/xviii.38, podle [Col], str. 340.

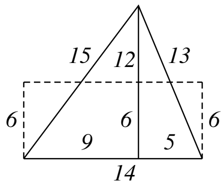
Taková odvození silně připomínají transformace prováděné při konstrukcích védských oltářů.

Obvod a obsah

Árjabhata I. věnoval geometrii několik slok, například popsal pravidlo na výpočet obsahu trojúhelníku: *součin výšky a poloviny základny*[35]

$$S = v\frac{c}{2}\,. \tag{9.1}$$

Stejné pravidlo uvedl Brahmagupta v *Līlávatí*,[36] komentátor Ganéša je dokázal pomocí tohoto obrázku:



Pro praktické potřeby mnohdy stačilo počítat s nepřesným obsahem trojúhelníku, který byl v pravidlech Brahmagupty, Mahávíry a dalších popsán jako[37]

$$S_p = \frac{a+b}{2}\cdot\frac{c}{2}\,.$$

Protože poloviční součet stran a a b je vždy větší než výška v_c, je takto vypočítaná hodnota pouze přibližná.

Pro přesný výpočet obsahu trojúhelníku existovaly dvě metody,[38] z nichž první odpovídá vzorci (9.1) a druhou můžeme vyjádřit vzorcem[39]

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,, \qquad \text{kde} \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c)\,.$$

Na konci geometrické kapitoly práce *Ganitasárasamgraha* přidal Mahávíra část nazvanou *Paišáčika* (*Paišācika*, tj. ďábelsky těžké úlohy), kde byla uvedena pravidla pro řešení různých geometrických problémů, přičemž se počítalo jak s přesnými, tak s přibližnými vzorci. Z této části je i následující příklad týkající se rovnoramenného trojúhelníku.[40]

GaSaSa/vii.172$\frac{1}{2}$
Zdůrazňuje se zde, že v tomto případě je přesná velikost plochy 60 *a přibližná velikost je* 65*. Řekni mi, ó příteli, po výpočtu numerickou velikost stran* [hledaného] *rovnoramenného trojúhelníku.*

---

[35] Viz sloka Ar/ii.6, podle [Cla], str. 26. Árjabhatova pravidla i s komentáři jsou podrobně uvedena například v [Gu2].

[36] Viz část sloky Lila/vi.164, podle [Col], str. 70.

[37] Viz sloky BrSpSi/xii.21, podle [Col], str. 295–296, GaSaSa/vii.7, podle [Ran], str. 187.

[38] Viz sloky BrSpSi/xii.21, podle [Col], str. 295–296, GaSaSa/vii.50, podle [Ran], str. 198.

[39] Autorem tohoto vzorce je Hérón z Alexandrie (1. stol. n. l.).

[40] Podle [Ran], str. 239, [Er], str. 109–110.

Označíme-li základnu hledaného trojúhelníku c, rameno a, výšku k základně v, pak

přesná velikost plochy:	$S = \frac{1}{2}cv = 60\,,$
přibližná velikost plochy:	$S_p = \frac{1}{2}c\,a = 65\,,$
Pýthagorova věta:	$\left(\frac{1}{2}c\right)^2 = a^2 - v^2.$

Dnes bychom patrně z prvních dvou rovnic vyjádřili a, v a dosazením do třetí bychom z rovnice $c^4 = 16(S_p^2 - S^2)$ dopočítali c.

Podle pravidla, které příkladu předchází, se dá usoudit, že Mahávíra postupoval jinak. Nejprve uvažoval trojúhelník $\left(\frac{c}{2} = \sqrt[4]{S_p^2 - S^2}\right)$-krát větší než hledaný. Protože

$$\sqrt{S_p^2 - S^2} = \sqrt{\frac{1}{4}c^2a^2 - \frac{1}{4}c^2v^2} = \frac{1}{2}c\sqrt{a^2 - v^2} = \frac{1}{2}c\frac{1}{2}c\,,$$

základna C a rameno A většího trojúhelníku měly délku

$$C = c\frac{1}{2}c = 2\sqrt{S_p^2 - S^2}\,, \qquad A = a\frac{1}{2}c = S_p\,.$$

Je-li $C = c\frac{1}{2}c$, pak $\frac{1}{2}C = \left(\frac{1}{2}c\right)^2$, a tedy $\frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1}{2}C}$. Odtud se pak snadno odvodily vztahy pro délku základny a strany hledaného trojúhelníku

$$c = \frac{C}{\frac{1}{2}c} = \frac{C}{\sqrt{\frac{1}{2}C}} = \frac{2\sqrt{S_p^2 - S^2}}{\sqrt{\sqrt{S_p^2 - S^2}}}\,, \qquad a = \frac{A}{\frac{1}{2}c} = \frac{A}{\sqrt{\frac{1}{2}C}} = \frac{S_p}{\sqrt{\sqrt{S_p^2 - S^2}}}\,.$$

V uvedeném příkladu tedy základna a strana hledaného trojúhelníku měly délku

$$c = \frac{2\sqrt{65^2 - 60^2}}{\sqrt{\sqrt{65^2 - 60^2}}} = \frac{2 \cdot 25}{5} = 10\,, \qquad a = \frac{65}{\sqrt{\sqrt{65^2 - 60^2}}} = \frac{65}{5} = 13\,.$$

Bháskara II. uvedl několik úloh, kde pro strany pravoúhlého trojúhelníku byla předepsána určitá svazující podmínka. Takové problémy nebyly určené jednoznačně, čehož si byl autor dobře vědom. Příklad byl zařazen do algebraické *Bídžaganity* a byl řešen algebraicky pomocí neznámé *jávat-távat*.[41]

BiGa/iv.120 část
Příklad: Řekni [strany] *trojúhelníku, jehož plochu lze měřit stejným číslem jako přeponu.*

[41] Podle [Col], str. 201.

Zadání vede na soustavu dvou rovnic o třech neznámých

$$a^2 + b^2 = c^2,$$
$$\frac{1}{2}ab = c\,.$$

Jako základ Bháskara II. zvolil pravoúhlý trojúhelník $(3, 4, 5)$ a předpokládal, že řešením je nějaký jeho násobek, tj. trojúhelník se stranami $(3p, 4p, 5p)$. Koeficient p představoval neznámou *jávat-távat*. Bháskara vypočítal obsah $\frac{1}{2} \cdot 3p \cdot 4p = 6p^2$, a protože měl být roven přeponě, muselo platit $6p^2 = 5p$. Rovnici vydělil p, doslova *snížením obou stran společnou mírou*, $6p = 5$, odkud už snadno dopočítal $p = \frac{5}{6}$, $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{10}{3}$, $c = \frac{25}{6}$. V závěru připomněl, že *podobně na základě jiných předpokladů mohou být nalezeny další hodnoty*.

Neurčité úlohy týkající se pravoúhlého trojúhelníku řešil Hérón (např. úloha 24.5 v práci *Geometrica*) i Diofantos v knize VI *Aritmetiky* (viz [Wa1]).

Výška

Pro stanovení výšky v k základně c uvedl Mahávíra:[42]

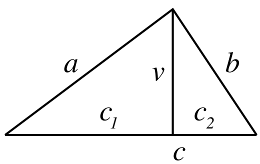
> **GaSaSa/vii.49**
> *Metoda samkramana provedená se základnou a rozdílem čtverců stran děleným základnou dává hodnoty dvou úseků* [základny] *trojúhelníku. Vzdělaní učitelé říkají, že čverec rozdílu čtverců strany a* [odpovídajícího] *úseku dává míru kolmice* [výšky].

Označíme-li c_1, c_2 úseky přepony rozdělené výškou, platí $v^2 = a^2 - c_1^2 = b^2 - c_2^2$, tedy $a^2 - b^2 = c_1^2 - c_2^2 = (c_1 + c_2)(c_1 - c_2)$. Metoda *samkramana* řešila soustavu dvou lineárních rovnic, kde je znám součet a rozdíl neznámých:

$$c_1 + c_2 = c\,, \qquad c_1 - c_2 = \frac{a^2 - b^2}{c}\,, \qquad \text{odtud} \qquad c_1 = \frac{1}{2}\left(c + \frac{a^2 - b^2}{c}\right), \qquad c_2 = \frac{1}{2}\left(c - \frac{a^2 - b^2}{c}\right).$$

Pro druhou část tvrzení stačilo užít Pýthagorovu větu (viz obr. 9.6)

$$v = \sqrt{a^2 - c_1^2} \qquad \text{nebo} \qquad v = \sqrt{b^2 - c_2^2}\,.$$

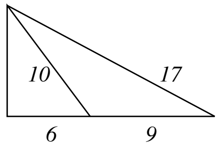


Obr. 9.6: Výška a úseky základny trojúhelníku

[42] Podle [Ran], str. 197. Podobné vztahy však popisovali i Bháskara I., Brahmagupta, Bháskara II. a další, viz např. sloky Lila/vi.163–164, podle [Col], str. 69–70.

K procvičení sloužil příklad trojúhelníku se základnou délky 14 a stranami 13 a 15, na stejném trojúhelníku demonstroval výpočet i Bháskara II.[43] Tentýž trojúhelník se objevil rovněž u al-Chwárizmího.

Bháskara II. připojil výpočet pro trojúhelník, jehož výška leží vně.[44] V takovém případě byl rozdíl $c - \frac{a^2-b^2}{c}$ záporný, a to znamenalo, že příslušný díl leží od vrcholu v opačném směru. Konkrétně počítal s délkami stran 10 a 17, základnou 9, vypočítané úseky měly délku 6 a 15. Výpočet doplnil obrázkem.



Bháskara II. dokonce počítal výšku tupoúhlého trojúhelníku s iracionálními délkami stran $a = \sqrt{10} - \sqrt{5}$, $b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{18} - 1$.[45] Příklad byl zařazen do algebraické práce *Bídžaganita*, hlavním důvodem patrně bylo procvičení výpočtů s iracionalitami.

Podobnost

Vlastnosti podobných trojúhelníků Indové znali, pojem podobnosti však nedefinovali. Bháskara II. podobnost využil při řešení příkladu:[46]

Lila/vi.160
Řekni mi kolmici táhnoucí se od průsečíku provazů natažených vzájemně od kořenů k vrcholům dvou bambusů patnáct a deset loktů vysokých stojících na zemi v neznámé vzdálenosti.

Úloze předcházelo pravidlo, kde Bháskara podal návod, jak počítat. Označíme-li výšky bambusů h_1, h_2, jejich vzdálenost n, pak *kolmice z uzlu nití vedoucích od kořenů* [jednoho] *ke špičce* [druhého] se určila podle vztahu

$$v = \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}$$

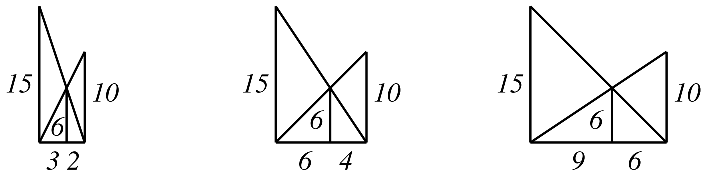
a rozdělila vzdálenost bambusů n na úseky délky

$$a_1 = \frac{h_1 n}{h_1 + h_2}, \qquad a_2 = \frac{h_2 n}{h_1 + h_2}.$$

[43] Viz sloka GaSaSa/vii.53, podle [Ran], str. 199, a sloka Lila/vi.165, podle [Col], str. 71.
[44] Viz sloka Lila/vi.166, podle [Col], str. 71–72.
[45] Viz sloka BiGa/iv.118, podle [Col], str. 199–200, komentář k úloze je též v [Er].
[46] Podle [Col], str. 68.

Na ukázku předložíme autorovo řešení.

> *Vyjádření: Bambus* 15, 10. *Kolmice je nalezena 6.* $\left[v = \frac{15\cdot 10}{15+10} = 6\right]$
> *Dále pro nalezení úseků na základně: nechť je vzdálenost předpokládána* 5*; úseky vyjdou* 3, 2. $\left[n = 5,\ a_1 = \frac{15\cdot 5}{15+10} = 3,\ a_2 = \frac{10\cdot 5}{15+10} = 2\right]$
> *Nebo položením* 10*, budou* 6 *a* 4. $\left[n = 10,\ a_1 = 6,\ a_2 = 4\right]$
> *Nebo uvažováním* 15*, budou* 9 *a* 6. $\left[n = 15,\ a_1 = 9,\ a_2 = 6\right]$
> *Viz obrázky.*



> *V každé situaci je kolmice stejná: totiž* 6. *Důkaz je v každém případě pomocí pravidla tří: jestliže je strana rovná základně, bambus je výška, potom jaká bude výška pro* [daný] *úsek na základně?*

Kružnice opsaná a vepsaná

S kružnicí opsanou a vepsanou trojúhelníku se v indických textech často nesetkáváme. Brahmagupta počítal poloměr kružnice opsané danému trojúhelníku podle vztahu[47]

$$r = \frac{ab}{2v}\,,$$

kde v je výška ke straně c. Není jasné, jakým způsobem byl vztah odvozen, důkaz založený na podobnosti trojúhelníků provedl až komentátor Prthúdakasvámin.[48]

Mahávíra uvedl pravidlo,[49] podle kterého bylo možné stanovit průměr kružnice vepsané danému trojúhelníku

$$d = \frac{S}{\frac{o}{4}}\,,$$

kde o byl obvod a S byl obsah trojúhelníku.

9.1.2 Čtyřúhelník

Staří Indové rozlišovali pět druhů čtyřúhelníků, kterým říkali *čaturašra* (*catur-aśra*):[50] čtverec nazývaný *samačaturašra* (*sama-catur-aśra*), obdélník

[47] Viz sloka BrSpSi/xii.27, podle [Col], str. 299–300, stejné pravidlo uvedl Mahávíra, viz sloka GaSaSa/vii.213$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 252.

[48] Důkaz je uveden např. v [DS3], str. 139.

[49] Viz sloka GaSaSa/vii.223$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 254.

[50] Někdy se pro čtyřúhelník užíval termín *čaturbhudža* (*catur-bhuja*), podle [DS3], [MA].

neboli *ájatačaturašra* (*āyata-catur-aśra*, tj. podlouhlý čtyřúhelník), rovnoramenný lichoběžník pojmenovaný *dvisamačaturašra* (*dvi-sama-catur-aśra*),[51] rovnoramenný lichoběžník se třemi stejnými stranami označený jako *trisamačaturašra* (*tri-sama-catur-aśra*) a obecný čtyřúhelník *višamačaturašra* (*viṣama-catur-aśra*). Úhlopříčka se jmenovala *karna* (*karṇa*). Strany obdélníku byly označeny jako *vistára* (*vistāra*, tj. šířka) a *ájáma* (*āyāma*, tj. délka). Delší základně lichoběžníku se říkalo *bhú* nebo *bhúmi* (*bhūmi*, tj. země), kratší byla *mukha* či *vadana* (obličej, ústa), ramena se nazývala *páršva* (strany). Pro výšku se užíval termín *avalambaka* (kolmice).[52]

V indických pravidlech se čtverec vyskytuje velmi zřídka, častěji se hovoří o obdélníku. Mahávíra obdélník nazýval „podlouhlý čtyřúhelník“; jeho strany a úhlopříčku určoval pomocí prvků *bídža* ($m, n \in \mathbb{N}$) jako pýthagorejskou trojici $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$. V tomto smyslu byly obdélník a pravoúhlý trojúhelník definovány stejně. Více pozornosti věnovali indičtí učenci lichoběžníkům. Připomeňme, že rovnoramenné lichoběžníky měly významné postavení při konstrukci védských oltářů.

Rovnoramenný lichoběžník

Jak už bylo řečeno, Brahmagupta uvažoval strany pravoúhlého trojúhelníku ve tvaru $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$. Podobným způsobem hledal vyjádření pro strany, úhlopříčky a výšku lichoběžníku, který vznikl připojením takových pravoúhlých trojúhelníků k obdélníku. Brahmagupta u rovnoramenného lichoběžníku stanovil (viz obr. 9.7):[53]

délku dolní základny $|AB| = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{p} - p\right) + a = \frac{1}{2}\left(\frac{4m^2n^2}{p} - p\right) + (m^2 - n^2)$,

délku horní základny $|CD| = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{p} - p\right) - a = \frac{1}{2}\left(\frac{4m^2n^2}{p} - p\right) - (m^2 - n^2)$,

délku ramen $|AD| = |BC| = c = m^2 + n^2$,

z konstrukce je zřejmé, že výška $|ED| = b = 2mn$.

Brahmagupta zřejmě jako základní uvažoval trojúhelník AED se stranami a, b, c, z něhož vytvořil obdélník $AEDH$ se stranami a, b. Jako druhý vzal obdélník $AFCH$ o stranách b, $d = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{p} - p\right)$ s libovolně zvolenou hodnotou p, a přesunutím trojúhelníku ADH do polohy CBF dostal rovnoramenný lichoběžník $ABCD$. Z tohoto odvození snadno stanovil ještě

délku úhlopříčky $|AC| = |BD| = \sqrt{d^2 + b^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{4m^2n^2}{p} + p\right)$,

úseky dolní základny $|AE| = a = m^2 - n^2$,

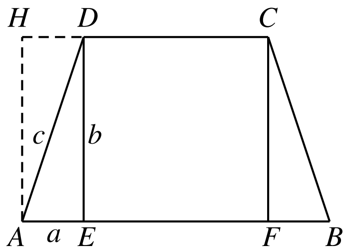
$|EB| = d = \frac{1}{2}\left(\frac{4m^2n^2}{p} - p\right)$,

obsah $bd = mn\left(\frac{4m^2n^2}{p} - p\right)$.

[51] Doslova čtyřúhelník se dvěma stranami stejnými.

[52] Terminologie je uvedena např. v [Ke1].

[53] Viz sloka BrSpSi/xii.36, podle [Col], str. 307.



Obr. 9.7: Rovnoramenný lichoběžník

Vhodnou volbou konstant m, n, p bylo možné takto nalézt rovnoramenné lichoběžníky s celočíselnými stranami. Komentátor Prthúdakasvámin ukázal, že pro trojici $(5, 12, 13)$ a zvolený parametr $p = 6$ má rovnoramenný lichoběžník delší základnu délky 14, kratší 4, strany 13 a výšku 12. Podobné pravidlo nalezneme také u Mahávíry.[54]

Brahmagupta zformuloval pravidlo,[55] jak z pravoúhlého trojúhelníku se stranami $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ odvodit délky stran rovnoramenného lichoběžníku se třemi stranami stejnými

$$\begin{aligned} |BC| = |CD| = |DA| &= c^2 = (m^2 + n^2)^2, \\ |AB| &= 3b^2 - a^2 = 3(2mn)^2 - (m^2 - n^2)^2 \\ \text{nebo} \qquad |AB| &= 3a^2 - b^2 = 3(m^2 - n^2)^2 - (2mn)^2, \end{aligned}$$

s tím, že čtvrtá strana může být jak delší základnou, tak kratší. V komentáři je uveden výpočet odvozený z trojúhelníku $(3, 4, 5)$, který vedl k hodnotám $(25, 25, 25, 39)$, resp. $(25, 25, 25, 11)$.

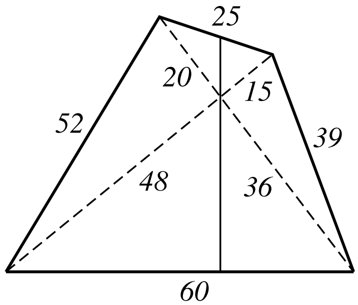
Brahmaguptovy čtyřúhelníky

Kromě lichoběžníků sestavoval Brahmagupta z pravoúhlých trojúhelníků s celočíselnými stranami ještě tětivové čtyřúhelníky s kolmými úhlopříčkami, tzv. „Brahmaguptovy" čtyřúhelníky.

Uvažoval dva pravoúhlé trojúhelníky, například se stranami $(a,\ b,\ c)$, resp. $(x,\ y,\ z)$, strany každého z nich vynásobil postupně odvěsnami druhého, tím získal čtyři pravoúhlé trojúhelníky (xa, xb, xc), (ya, yb, yc), (ax, ay, az) a (bx, by, bz). Stejně dlouhé odvěsny těchto trojúhelníků přiložil k sobě, a tak sestrojil čtyřúhelník, jehož stranami byly přepony čtyř výše zmíněných trojúhelníků; nejdelší tvořila základnu, nejkratší horní stranu, a prostřední byly bočními stranami. Takto sestrojený čtyřúhelník je tětivový a délky jeho úhlopříček jsou celočíselné. Brahmagupta uvedl příklad, kde vycházel z trojúhelníků $(3, 4, 5)$ a $(5, 12, 13)$, po vynásobení $(15, 20, 25)$, $(36, 48, 60)$, $(15, 36, 39)$ a $(20, 48, 52)$,

[54] Viz sloka BrSpSi/xiii.99$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 213–214.
[55] Viz sloka BrSpSi/xii.37, podle [Col], str. 307.

hledaný čtyřúhelník měl základnu délky 60, horní stranu 25 a boční strany měly délky 39 a 52 (viz obr. 9.8).[56]



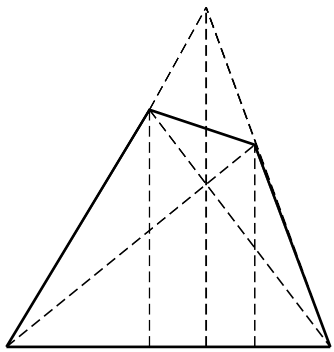
Obr. 9.8: Brahmaguptův čtyřúhelník

Pro tento typ čtyřúhelníků platí Brahmaguptova věta, i když ji autor vyslovil bez předpokladů:[57]

BrSpSi/xii.31
Dolní [části] *úhlopříček jsou dvě strany trojúhelníku, základna* [čtyřúhelníku je základnou trojúhelníku]. *Jeho kolmice* [výška] *je dolním úsekem* [střední] *kolmice; horní úsek* [střední] *kolmice je polovinou součtu* [bočních] *kolmic zmenšených o dolní úsek* [střední kolmice].

Brahmaguptova věta říká, že kolmice k libovolné straně Brahmaguptova čtyřúhelníku procházející průsečíkem úhlopříček půlí protilehlou stranu.

Brahmagupta počítal i s tzv. „jehlovým" útvarem – trojúhelníkem, který vznikl prodloužením bočních stran čtyřúhelníku až k jejich průsečíku;[58] pak využil podobnosti a pomocí pravidla tří určoval délky různých příček a výšek (viz obr. 9.9).



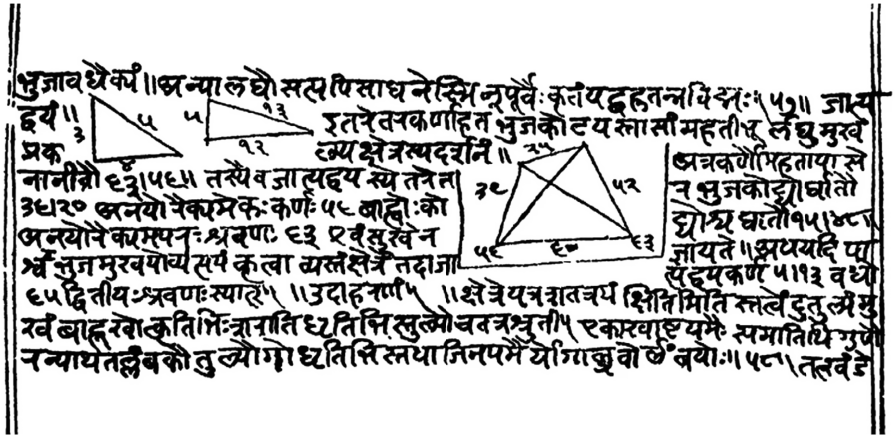
Obr. 9.9: „Jehlový" útvar

[56] Podle [Col], str. 300–301. Takové čtyřúhelníky později studovali Šrídhara a Bháskara II., kteří uvedli další příklady. Bháskara II. z trojúhelníků $(3, 4, 5)$ a $(15, 8, 17)$ vytvořil čtyřúhelník se stranami $(68, 51, 40, 75)$, jehož úhlopříčky měly délky 77 a 85.

[57] Podle [Col], str. 302–303.

[58] Takovému trojúhelníku říkal *súči* (*sūci*, tj. jehla, špička).

Bháskara II. z pravoúhlých trojúhelníků skládal i tětivové čtyřúhelníky, jejichž úhlopříčky nebyly kolmé.



Obr. 9.10: Rukopis *Lílávatí* (kolem roku 1600)[59]

Nárájana ve své práci *Ganitakaumudí* uvedl tvrzení, že čtyřúhelník se stranami daných délek vepsaný do kružnice může mít právě tři různé délky úhlopříček. Uvedl i pravidlo odpovídající Tháletově větě a větě o obvodovém úhlu.[60]

Obvod a obsah

Pro výpočet obvodu a obsahu čtyřúhelníku existovaly metody přesné a přibližné. Označíme-li strany čtyřúhelníku a, b, c a d, pak jeho přibližný obsah byl dán vztahem[61]

$$S_p = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}\,. \tag{9.2}$$

Pro čtverec a obdélník dává pravidlo přesný výsledek, pro ostatní čtyřúhelníky jen přibližný. Stejným způsobem se počítal obsah i ve starém Egyptě (viz např. [BBV]).

Za přesnou metodu považoval Brahmagupta výpočet obsahu čtyřúhelníku podle algoritmu,[62] který mohl vzniknout zobecněním Hérónova vzorce

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\,, \qquad \text{kde} \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)\,.$$

Vzorec dává přesný výsledek jen pro tětivové čtyřúhelníky. Bháskara II. uvedl, že čtyřúhelník není určen jen délkou stran, je třeba znát i diagonály. Přesné

[59] Převzato z [Sm1].

[60] Podle [SaTA], str. 67.

[61] Viz sloky BrSpSi/xii.21, podle [Col], str. 295–296, nebo GaSaSa/vii.50, podle [Ran], str. 187.

[62] Viz sloka BrSpSi/xii.21, podle [Col], str. 295–296.

i přibližné vzorce pro obsah trojúhelníku byly speciálním případem odpovídajících vzorců pro čtyřúhelník, kde $d = 0$.

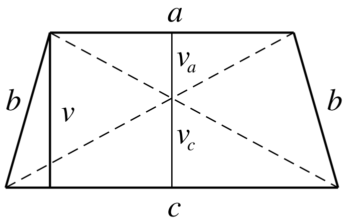
Pro obsah rovnoramenného lichoběžníku používal Árjabhata I. pravidlo, kde a, c byly základny, v výška:[63]

$$S = v\frac{a+c}{2}\,. \tag{9.3}$$

Bháskara II. upřesnil, že takto lze počítat obsah každého čtyřúhelníku se stejně dlouhými úhlopříčkami.[64]

Pro úseky výšky rozdělené průsečíkem úhlopříček platilo (viz obr. 9.11)[65]

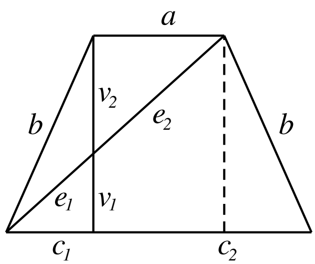
$$v_a = \frac{av}{a+c}\,, \qquad v_c = \frac{cv}{a+c}\,.$$



Obr. 9.11: Výška lichoběžníku

Árjabhatovo pravidlo o úsecích výšky zobecnil Brahmagupta; v rovnoramenném lichoběžníku průsečík výšky v a úhlopříčky e dělí tyto úsečky na díly v_1, v_2, e_1, e_2 (viz obr. 9.12), pro něž platí:[66]

$$v_1 = \frac{c_1}{c_1+a}v\,, \qquad v_2 = \frac{a}{c_1+a}v\,, \qquad e_1 = \frac{c_1}{c_1+a}e\,, \qquad e_2 = \frac{a}{c_1+a}e\,.$$



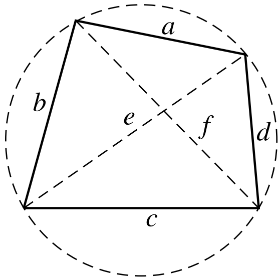
Obr. 9.12: Výška a úhlopříčka lichoběžníku

[63] Viz sloka Ar/ii.8, podle [Cla], str. 27.
[64] Viz sloka Lila/vi.175, podle [Col], str. 74.
[65] Viz sloka Ar/ii.8, podle [Cla], str. 27.
[66] Viz sloka BrSpSi/xii.25, podle [Col], str. 298.

Úhlopříčky obecného čtyřúhelníku vyjádřil Brahmagupta takto:[67]

$$e = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}} \qquad \text{nebo} \qquad f = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}\,.$$

Tyto vzorce jsou však správné pouze pro tětivové čtyřúhelníky (viz obr. 9.13).[68]



Obr. 9.13: Úhlopříčky obecného tětivového čtyřúhelníku

Z uvedených vztahů pro úhlopříčky plyne Ptolemaiova věta, tj.

$$ef = ac + bd\,.$$

K určení poloměru kružnice opsané čtyřúhelníku užíval Brahmagupta následující vztahy:[69]

pro rovnoramenný lichoběžník $\quad r = \dfrac{ae}{2v}$,

pro obecný čtyřúhelník $\quad r = \dfrac{\sqrt{a^2+c^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{b^2+d^2}}{2}$.

Poslední vzorec však platí pouze pro takové tětivové čtyřúhelníky, jejichž úhlopříčky jsou kolmé – Brahmaguptovy čtyřúhelníky.[70]

Mahávíra počítal s přesnými a přibližnými obsahy nejen u trojúhelníků, ale i u lichoběžníků; například u rovnoramenného lichoběžníku se základnami a, c, rameny b a výškou v znal přesný i přibližný obsah a hledal délky všech stran, přitom vycházel ze vztahů (9.2) a (9.3), tj.

$$S_p = \frac{a+c}{2}\cdot b\,, \qquad S = \frac{a+c}{2}\cdot v\,.$$

Podle pravidla[71] stanovil délky s *libovolně zvolenou hodnotou* p, ve skutečnosti volil takové p, aby $\sqrt{p} \in \mathbb{N}$

$$a = \frac{p + \sqrt{S_p^2 - S^2}}{\sqrt{p}}\,, \qquad c = \frac{p - \sqrt{S_p^2 - S^2}}{\sqrt{p}}\,, \qquad b = \frac{S_p}{\sqrt{p}}\,. \tag{9.4}$$

---

[67] Viz sloka BrSpSi/xii.28, podle [Col], str. 300.

[68] Vlastnostem tětivových čtyřúhelníků je věnován článek [MA].

[69] Viz sloka BrSpSi/xii.26, podle [Col], str. 299.

[70] Podle [Pl1], str. 146–147.

[71] Viz sloka GaSaSa/vii.165$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 237.

K tomuto vyjádření mohl dospět tak, že uvažoval rozdíl čtverců přibližného a přesného obsahu, kde rozdíl čtverců ramena a výšky nahradil podle Pýthagorovy věty

$$S_p^2 - S^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 (b^2 - v^2) = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 .$$

Rozdíl obsahů si mohl představit jako součin $p \cdot \frac{S_p^2 - S^2}{p}$, pak porovnáním činitelů dostal

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = p\,, \qquad \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = \frac{S_p^2 - S^2}{p}\,,$$

odkud odmocněním a jednoduchou úpravou s využitím oblíbené operace *samkramana* dostal vztahy pro strany lichoběžníku (9.4). V příkladu[72] volil hodnoty $S = 5$, $S_p = 13$, $p = 16$, které vedly k výsledku $a = 7$, $b = \frac{13}{4}$, $c = 1$.

Dvojice útvarů

Mahávíra řešil úlohy, kde hledal strany dvou obdélníků, jejichž obvody a obsahy byly v daném poměru, pravidlo se týkalo těchto případů:[73]

a) Obdélníky mají stejné obvody a obsah prvního je dvojnásobkem obsahu druhého, tj. $o_1 = o_2$, $S_1 = 2S_2$.
b) Obsahy obdélníků jsou si rovny a obvod druhého je dvojnásobkem obvodu prvního, tj. $2o_1 = o_2$, $S_1 = S_2$.
c) Obvod druhého obdélníku je dvojnásobkem obvodu prvního a obsah prvního je dvojnásobkem obsahu druhého, tj. $2o_1 = o_2$, $S_1 = 2S_2$.

Takové problémy vedly na soustavu dvou rovnic o čtyřech neznámých, v pravidle se mluví o *libovolně zvoleném násobiteli*, jehož hodnota byla volena tak, aby řešení vyšlo celočíselné.

Analogické pravidlo uvedl i pro rovnoramenné trojúhelníky, kde bylo třeba vyřešit soustavu čtyř rovnic o šesti neznámých – dvě rovnice se týkaly daných poměrů mezi obvody a obsahy, k nim byly přidány další dvě vyplývající z Pýthagorovy věty pro polovinu základny, výšku a rameno.[74] Podobné úlohy řešil Hérón v knize *Geometrica*.

Mnohoúhelníky

Kromě trojúhelníků a čtyřúhelníků se objevily i vztahy týkající se mnohoúhelníků. Bháskara II. zformuloval pravidlo na výpočet délky strany pravidelného mnohoúhelníku vepsaného do kružnice s poloměrem r.[75]

---

[72] Viz sloka GaSaSa/vii.166$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 238.
[73] Viz sloky GaSaSa/vii.131$\frac{1}{2}$–133, podle [Ran], str. 225–226.
[74] Viz sloka GaSaSa/vii.137, podle [Ran], str. 227.
[75] Viz sloky Lila/vi.209–211, podle [Col], str. 91.

Mahávíra počítal přibližný obsah konvexního n-úhelníku vepsaného do kružnice a došel k výsledku, který lze vyjádřit vzorcem[76]

$$S_p = (n-1)\frac{r^2}{3n}\,.$$

Poznamenejme, že v první knize *Metrica* se výpočtem obsahů pravidelných n-úhelníků (pro $n = 5, 6, \ldots, 12$) zabýval Hérón.

9.1.3 Kruh, kružnice

Nejstarší název pro kruh je *mandala* (*maṇḍala*) nebo *parimandala* (*parimaṇḍala*), obvodu kružnice se říkalo *parináha* (*pariṇāha*), průměr byl *viškambha* (*viṣkambha*) nebo *vjása* (*vyāsa*, tj. šířka), střed se nazýval *madhja* (*madhya*), poloměr byl označován slovem *viškambhárdha* (*viṣkambhārdha*).[77]

Pro výpočet obsahu kruhu uvedl Árjabhata I. pravidlo, které můžeme vyjádřit vzorcem[78]

$$S = \frac{o}{2}\cdot\frac{d}{2}\,, \qquad \text{kde } o \text{ byla délka kružnice, } d \text{ její průměr.}$$

Zajímavé je Árjabhatovo tvrzení, že kružnice o průměru 20 000 má délku 62 832,[79] odkud plyne velmi přesná hodnota $\pi = 3{,}1416$.

Pozdější autoři, například Brahmagupta, Mahávíra a Šrídhara, formulovali pravidla pro přibližný a přesný výpočet obvodu a obsahu kruhu[80] vyjádřená v závislosti na průměru d:[81]

$$o_p = 3d\,, \qquad S_p = 3\left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

$$o = \sqrt{10}d\,, \qquad S = o\frac{d}{4} = \sqrt{10}\,\frac{d^2}{4}\,.$$

Pro hrubé výpočty se zpravidla volila hodnota $\pi = 3$, „přesné“ vztahy počítaly s $\pi = \sqrt{10}$. Hodnota $\sqrt{10}$ pro π se používala v Číně a je možné, že odtud ji staří Indové převzali.

[76] Viz sloka GaSaSa/vii.39, podle [Ran], str. 194–195.

[77] Později byl termín *parimandala* určen pro elipsu, kružnice byla *vrtta* (*vṛtta*) a střed *kendra* (*kendra*), podle [DS3]. V [Ke1] jsou uvedeny termíny *samavrtta* (*samavṛtta*) pro kružnici a *ájatavrtta* (*āyatavṛtta*) pro elipsu, H. T. Colebrooke zmiňoval ještě názvy *vartula* (*vartula*, tj. kružnice), *vistára* (*vistāra*, tj. průměr), *paridhi*, *némi* (*paridhi*, *nemi*, tj. obvod), viz [Col].

[78] Viz sloka Ar/ii.7, podle [Cla], str. 27.

[79] Viz sloka Ar/ii.10, podle [Cla], str. 28.

[80] Přibližné vzorce se nazývaly *vjávahárikaphala* (*vyāvahārika-phala*), přesným se říkalo *súkšmaphala* (*sūkṣma-phala*), podle [DS3].

[81] Například sloky BrSpSi/xii.40, podle [Col], str. 308, GaSaSa/vii.19, podle [Ran], str. 189.

Bháskara II. pro přibližný a přesný obvod kruhu užíval vzorce[82]

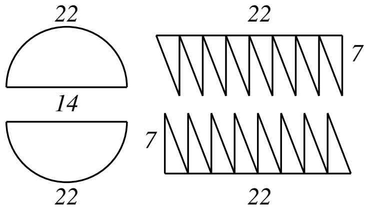
$$o_p = \frac{22}{7} d\,, \qquad\qquad o = \frac{3\,927}{1\,250} d\,.$$

Vztah pro přesný obvod kruhu je zkrácená podoba vyjádření Árjabhaty. B. L. van der Waerden se domníval (viz [Wa1]), že tyto hodnoty mohly být převzaty od Apollónia z Pergy (asi 262 až 190 př. n. l.).

Pomocí obvodu stanovil Bháskara II. obsah kruhu vzorcem[83]

$$S = \frac{d}{4} o\,.$$

Komentátor Ganéša vysvětlil, že číslo $\frac{3\,927}{1\,250}$ udávající poměr mezi obvodem kruhu a jeho průměrem bylo vypočítáno tak, že se do kružnice vepsal pravidelný šestiúhelník a postupně se zdvojnásoboval počet stran, až se získal pravidelný $6 \cdot 2^6 = 384$-úhelník. Vzorec pro výpočet obsahu kruhu zdůvodnil geometricky, obsah kruhu je stejný jako obsah obdélníku, jehož jedna strana je $\frac{d}{2}$ a druhá $\frac{o}{2}$ (viz obrázek):[84]



Podobné úvahy najdeme i v Archimédově spisu *Měření kruhu*.[85] Archimédés však nejen do kruhu vepisoval mnohoúhelníky, ale i opisoval, proto získal pro hodnotu π velmi přesný dolní i horní odhad $\frac{25\,344}{8\,069} < \pi < \frac{29\,376}{9\,347}$.

Komentátor čínského textu *Matematika v devíti kapitolách* Liu Hui rovněž vepisoval kruhu pravidelné n-úhelníky, na rozdíl od Archiméda však porovnával obsahy (viz [Hu]). Obsah kruhu S je totiž větší než obsah vepsaného n-úhelníku S_n a zároveň menší než obsah útvaru vytvořeného z n-úhelníku s připojenými obdélníky sestrojenými nad stranami a opsanými zbývajícím kruhovým úsečím $S_n < S < S_{n/2} + 2(S_n - S_{n/2})$. Pomocí 96-úhelníku tak dospěl k odhadu $314\frac{64}{625} < 100\pi < 314\frac{169}{625}$.

Mahávíra uvedl zajímavý příklad, kde byl znám součet k průměru kruhu, jeho obvodu a obsahu, a úkolem bylo stanovit hodnotu každé z těchto veličin.[86]

---

[82] Viz sloka Lila/vi.201, podle [Col], str. 87.

[83] Viz sloka Lila/vi.203, podle [Col], str. 88.

[84] Podle [Col], str. 88.

[85] Text přeložil Miloslav Valouch a byl publikován česky ve výroční zprávě gymnázia v Litomyšli z roku 1903, viz [BS].

[86] Viz sloka GaSaSa/vii.30, podle [Ran], str. 192, v příkladu uvažuje přibližné hodnoty obvodu a obsahu.

Pokud označíme obvod kruhu x, pak průměr je $\frac{x}{3}$ a obsah $\frac{x^2}{12}$. Bylo třeba nalézt řešení rovnice

$$\frac{x^2}{12} + \frac{x}{3} + x = k\,, \qquad \text{tj.} \qquad x^2 + 16x - 12k = 0\,.$$

Podle Mahávíry bylo řešením

$$x = \sqrt{12k + 64} - 8\,.$$

Výpočtem obsahu kruhu se zabývali už ve starém Egyptě, jejich postup můžeme dnes vyjádřit vzorcem $S = (d - \frac{1}{9}d)^2 = \frac{64}{81}d^2$, kde d je průměr. V Mezopotámii k výpočtu obsahu kruhu sloužil vztah $S = \frac{1}{12}o^2$, přičemž pro obvod kruhu platilo $o = \pi d$, kde za π byla nejčastěji brána hodnota 3, tedy $S = \frac{1}{12}(\pi d)^2 = \frac{3}{4}d^2$ (viz [BBV]). V první kapitole čínské *Matematiky v devíti kapitolách* jsou uvedena čtyři pravidla pro výpočet obsahu kruhu:[87]

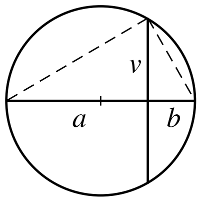
$$S = \frac{o}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{o \cdot d}{4} = 3\,\frac{d \cdot d}{4} = \frac{o \cdot o}{12}\,.$$

Kruhová úseč, tětiva

Indičtí učenci také studovali kruhovou úseč; její výšce říkali *šara* (*śara*, tj šíp) a tětivu, která tuto úseč vymezuje, nazývali *džjá* (*jyā*) nebo *džívá* (*jīvā*). Příslušný kruhový oblouk byl označen jako *dhanu* (*dhanu*, tj. luk).[88] Árjabhata I. uvedl, že *tětiva šestiny obvodu je rovna poloměru*.[89] Popsal také vztah mezi průměrem kružnice a tětivou na něj kolmou, dnes známý jako Eukleidova věta o výšce (viz obr. 9.14)[90]

$$v^2 = ab\,, \tag{9.5}$$

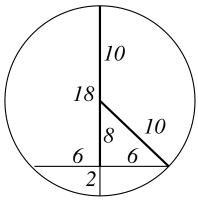
kde v je polovina tětivy, tzv. *ardhadžjá* (*ardha-jyā*), a, b jsou úseky průměru rozděleného tětivou.



Obr. 9.14: Eukleidova věta o výšce

[87] Pravidla (1.XIV), (1.XIVa), (1.XIVb), (1.XIVc), podle [Hu], str. 65–71.
[88] Podle [SA], podobnou terminologii používal al-Chwárizmí.
[89] Viz sloka Ar/ii.9, podle [Cla], str. 27.
[90] Viz sloka Ar/ii.17, podle [Cla], str. 34.

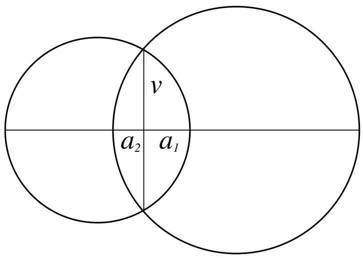
Prthúdakasvámin, komentátor Brahmaguptovy práce *Bráhmasphutasiddhánta*, vysvětloval příklad o zlomeném bambusu (viz odstavec 9.1.1). K řešení však přistupoval jinak než Mahávíra a Bháskara II., výšku počítal s využitím tětivy kružnice. Bambus byl vysoký $a = 18$ loktů, po zlomení dopadl vršek do vzdálenosti $v = 6$ loktů od kořenů, úkolem bylo určit délku obou dílů zlomeného bambusu.[91] Autor si při výpočtu uvědomil, že zlomená část opíše kružnici, pro niž je spojnice spadlého vrcholu s dolním koncem bambusu, tj. vzdálenost v, polovinou tětivy. Tato tětiva rozdělí průměr kružnice na dva úseky, z nichž jeden přestavuje výšku bambusu a a druhý výšku h kruhové úseče pod bambusem (viz obr. 9.15). Proto mohl využít vztah (9.5), v našem značení $v^2 = ah$, a vypočítat $h = \frac{v^2}{a} = \frac{6^2}{18} = 2$. Přičtením k výšce bambusu pak dostal průměr kružnice $d = a + h = 18 + 2 = 20$, polovinou byla zlomená část bambusu $y = \frac{1}{2}d = 10$, dolní část pak získal rozdílem $x = 18 - y = 8$. Komentátor výpočet doplnil obrázkem.



Obr. 9.15: Úloha o zlomeném bambusu

Árjabhata I. uvažoval dvě kružnice s různými průměry, které mají společnou tětivu, a počítal délky úseků, na něž tato tětiva rozdělí společnou část průměrů $a = a_1 + a_2$ (viz obr. 9.16). Bez jakéhokoliv odvození uvedl následující vztahy, kde d_1 je průměr menší kružnice, d_2 větší[92]

$$a_1 = \frac{(d_2 - a)a}{(d_1 - a) + (d_2 - a)}, \qquad a_2 = \frac{(d_1 - a)a}{(d_1 - a) + (d_2 - a)}.$$



Obr. 9.16: Tětiva společná dvěma kružnicím

Zřejmě využil předchozí vztah pro výšku

$$a_1(d_1 - a_1) = a_2(d_2 - a_2) = v^2,$$

[91] Podle [Col], str. 309.

[92] Viz sloka Ar/ii.18, podle [Cla], str. 34–35. Podobné vyjádření se vyskytuje i u Mahávíry, sloka GaSaSa/vii.231$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 256–257.

kde za a_2 dosadil $a_2 = a - a_1$,

$$a_1(d_1 - a_1) = (a - a_1)(d_2 - a + a_1)\,,$$

po úpravě

$$\begin{aligned} a_1d_1 - a_1^2 &= ad_2 - a^2 + aa_1 - a_1d_2 + a_1a - a_1^2\,, \\ a_1(d_1 - a + d_2 - a) &= ad_2 - a^2, \\ a_1 &= \frac{(d_2 - a)a}{(d_1 - a) + (d_2 - a)}\,. \end{aligned}$$

Mahávíra uvedl přesné i přibližné hodnoty k měření kruhové úseče.[93] Výška úseče je označena v, resp. v_p (přibližná hodnota), délka tětivy t, resp. t_p, délka oblouku l, resp. l_p. V dnešní symbolice odpovídají vzorcům:

$$S_p = (t_p + v_p)\frac{v_p}{2}\,, \quad t_p = \sqrt{l_p^2 - 5v_p^2}\,, \quad v_p = \sqrt{\frac{l_p^2 - t_p^2}{5}}\,, \quad l_p = \sqrt{5v_p^2 + t_p^2}\,,$$
$$S = t\frac{v}{4}\sqrt{10}\,, \qquad t = \sqrt{l^2 - 6v^2}\,, \quad v = \sqrt{\frac{l^2 - t^2}{6}}\,, \quad l = \sqrt{6v^2 + t^2}\,.$$

Vztah $S_p = (t_p + v_p)\frac{v_p}{2}$ zmiňoval už Hérón v *Metrice* a byl též uveden v čínské *Matematice v devíti kapitolách*. Výpočty týkající se kruhové úseče jsou rovněž zachovány na babylónské tabulce BM 85184 (viz [BBV], [Wa1]).

Podobné, o něco přesnější vztahy uvedli Šrídhara a Árjabhata II.:[94]

$$S = \frac{\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{t + v}{2}v\,, \qquad S = \frac{1}{3}\cdot\frac{22}{7}\cdot\frac{t + v}{2}v\,.$$

Mahávíra popsal i postupy, podle nichž se počítal obsah mezikruží s vnitřním průměrem d a vnějším D. Jeho pravidla můžeme dnes vyjádřit vzorci[95]

$$S_p = \frac{1}{2}(o + O)\frac{D - d}{2}\,, \qquad S = \frac{1}{6}(o + O)\frac{D - d}{2}\sqrt{10}\,,$$

kde o a O jsou obvody vnitřní a vnější kružnice. Stejný přibližný vzorec pro obsah mezikruží se používal i v čínské matematice.

Mahávíra ještě zkoumal obsahy útvarů ve tvaru čočky (konvexní i konkávní), ulity, tvaru sloního klu i různé kombinace kruhových a trojúhelníkových či čtyřúhelníkových útvarů. Ulitou rozuměl útvar složený ze dvou půlkruhů (viz obr. 9.17), z nichž menší průměr označíme d a větší D. Délku $m = D - d$

[93] Viz sloky GaSaSa/vii.43, GaSaSa/vii.45, GaSaSa/vii.73$\frac{1}{2}$, GaSaSa/vii.74$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 195–196, 203–204.

[94] Podle [Ju], str. 163.

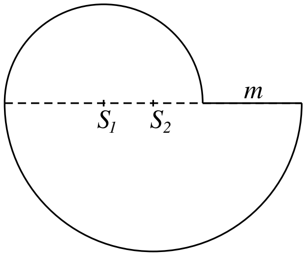
[95] Viz sloky GaSaSa/vii.28, GaSaSa/vii.80$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 191, 205.

Mahávíra nazýval „ústa", rozdíl $D - \frac{m}{2} = D - \frac{D-d}{2} = \frac{D+d}{2}$ pak představoval „průměrný" průměr. Pro výpočet obvodu a obsahu ulity uvedl přibližný a přesný vztah:[96]

$$o_p = 3\left(D - \frac{m}{2}\right), \qquad o = \sqrt{10}\left(D - \frac{m}{2}\right),$$

$$S_p = \frac{1}{3}\left(\frac{o_p}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\left(D - \frac{m}{2}\right)\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{m}{2}\right)^2,$$

$$S = \sqrt{10}\left[\left(\frac{1}{2}\left(D - \frac{m}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{m}{4}\right)^2\right].$$



Obr. 9.17: Ulita

9.1.4 Elipsa

Mahávíra popsal pravidla pro výpočet obvodu a obsahu elipsy. Dnes jsme zvyklí značit hlavní poloosu a a vedlejší b, Mahávíra však užíval termíny *delší* a *kratší průměr* ($D = 2a$, $d = 2b$). Obvod a obsah počítal podle přibližných nebo přesných vzorců[97]

$$o_p = 2\left(D + \frac{d}{2}\right), \qquad S_p = \frac{d}{4}o_p = \frac{d}{4}2\left(D + \frac{d}{2}\right),$$

$$o = \sqrt{6d^2 + 4D^2}, \qquad S = \frac{d}{4}o = \frac{d}{4}\sqrt{6d^2 + 4D^2}.$$

Vzorce, které Mahávíra pokládal za přesné, jsou však také jen přibližné.

9.1.5 Měření pomocí stínů

Stíny neboli *čhájá*, přesněji měření pomocí stínů gnómónu, bylo ve staré Indii užíváno k určení výšky, vzdálenosti nebo k měření času. Často bývalo popisováno v aritmetických dílech.

[96] Viz sloky GaSaSa/vii.23, GaSaSa/vii.65$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 190, 201.
[97] Viz sloky GaSaSa/vii.21, GaSaSa/vii.63$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 189, 201.

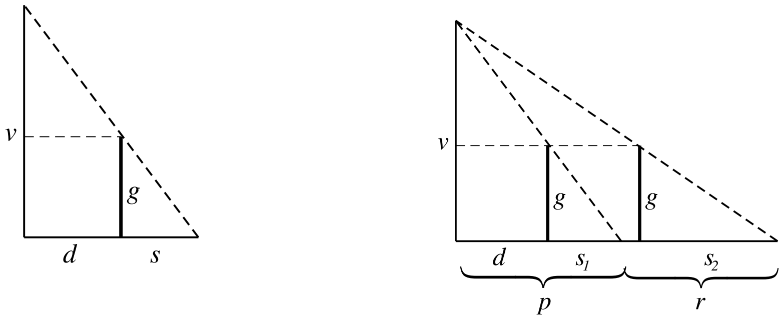
Árjabhata I. uvedl, jak vypočítat délku stínu gnómónu[98]

$$s = g\frac{d}{v-g}\,,$$

kde g byla výška gnómónu, v výška světelného zdroje, d vzdálenost gnómónu od světla (viz obr. 9.18 vlevo).[99]

K určení výšky a vzdálenosti velmi vzdáleného objektu (světelného zdroje) se používaly dva stejně vysoké gnómóny umístěné v různých vzdálenostech. Pak platily vztahy:[100]

$$p = \frac{s_1 r}{s_2 - s_1}\,, \qquad v = \frac{pg}{s_1}\,.$$



Obr. 9.18: Měření pomocí stínů gnómónu

Analogické vzorce uvedli i Brahmagupta a Bháskara II. Brahmagupta ukázal, jak se dá pomocí stínu přibližně určit denní čas. Jestliže v daný den je doba mezi východem a západem slunce d, výška gnómónu je g, délka stínu s, pak čas t uplynulý od východu Slunce (ráno) nebo zbývající do západu Slunce (odpoledne) je[101]

$$t = \frac{d}{2(\frac{s}{g}+1)}\,.$$

Metoda není příliš přesná, pokud jsou ráno a večer stíny hodně dlouhé, nebo když v poledne nestojí Slunce přímo nad hlavou.

Podobné problémy týkající se určování vzdáleností a výšky nepřístupných předmětů byly řešeny v čínské *Matematické klasice mořského ostrova.*[102]

[98] Viz sloka Ar/ii.15, podle [Cla], str. 31.

[99] Výšku světelného zdroje v nazýval *bhudžá* a vzdálenost $(d+s)$ *kóti*, tyto výrazy používal pro odvěsny pravoúhlého trojúhelníku.

[100] Viz sloka Ar/ii.16, podle [Cla], str. 32.

[101] Viz sloka BrSpSi/xii.52, podle [Col], str. 317.

[102] Komentátor *Matematiky v devíti kapitolách* Liu Hui ji původně zařadil jako desátou kapitolu, viz [Hu], [Ju].

9.2 Tělesa, objemy těles

V indických aritmetických textech byla rovněž obsažena část pojednávající o tělesech – byla to určení o výkopech, zásobách cihel a hromadách obilí. Výkopy byly zpravidla ve tvaru komolého jehlanu, hromady cihel měly tvar kvádru, jehlanu nebo komolého jehlanu; odlišnost byla v tom, že u výkopů se udávala hloubka, u zásob cihel výška. Hromady obilí měly tvar kužele. Uvedené vzorce byly často pouze přibližné, ale dostatečné pro praktické potřeby.

Pro objem hranolu a válce existoval už v *šulbasútrách* základní vzorec: *objem je roven součinu základny a výšky.* Staří Indové nerozlišovali jehlan a kužel, pro oba typy používali obecný název *súči* (*sūci*, tj. špička).[103]

Árjabhata I. dospěl k výpočtu objemu čtyřstěnu[104] zobecněním pravidla pro obsah trojúhelníku (9.1). Byl-li obsah podstavy S, pak objem jehlanu počítal analogicky jako u trojúhelníku: *poloviční součin plochy základny (trojúhelníku) a výšky*[105]

$$V = \frac{Sh}{2}\,, \quad \text{kde } h \text{ byla výška}\,.$$

Tento vzorec je chybný, Brahmagupta už uvedl správný vzorec:[106]

$$V = \frac{1}{3}Sh\,.$$

9.2.1 Výkopy

Část o výkopech neboli *kháta* se zabývala výpočtem objemu výkopů. Výkop býval ve tvaru hranolu nebo komolého jehlanu s obdélníkovou nebo čtvercovou podstavou, nahoře větší, směrem dolů se zužoval. Při výpočtu objemu byly zadány *dairghja* (*dairghya*, tj. délka), *vistára* (šířka obou podstav) a *védha* nebo *védhana* (*vedha*, *vedhana*, tj. hloubka). Různí autoři používali různé postupy, například pro objem komolého jehlanu s obdélníkovými podstavami $a\times b$ a $A\times B$ najdeme výpočty podle vzorců[107]

$$V_1 = h\left(\frac{a+A}{2}\right)\left(\frac{b+B}{2}\right), \qquad V_2 = h\frac{ab+AB}{2}\,, \qquad V = V_1 + \frac{1}{3}(V_2 - V_1)\,,$$

objem V_1 byl označován jako praktický, V_2 hrubý a V přesný.

Bháskara II. popsal přibližný výpočet objemu tak, že z dané délky a šířky v různých hloubkách vypočítal průměrnou délku, průměrnou šířku a průměrnou

---

[103] Stejný termín byl běžný i v Číně – *čtvercová špička* nebo *kruhová špička*, podle [Hu].

[104] Jehlan s trojúhelníkovou podstavou byl nazýván šestihranné těleso, tzv. *ghana šadašri* (*ghana ṣaḍaśri*) nebo jen *šadašri* (*ṣaḍaśri*), podle [DS3].

[105] Viz sloka Ar/ii.6, podle [Cla], str. 26.

[106] Viz sloka BrSpSi/xii.44, podle [Col], str. 312.

[107] Viz sloky BrSpSi/xii.45–46, podle [Col], str. 312–313. Brahmagupta však tvar podstavy nespecifikoval, uváděl jen *plocha základny* a *plocha čela*.

hloubku, hledaný objem pak byl součinem těchto průměrných rozměrů. Tedy jestliže v hloubkách $h_1, h_2, \dots, h_n$ byly naměřeny délky $a_1, a_2, \dots, a_n$ a šířky $b_1, b_2, \dots, b_n$, pak přibližný („průměrný“) objem byl

$$V = \frac{h_1 + h_2 + \cdots + h_n}{n} \cdot \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\,.$$

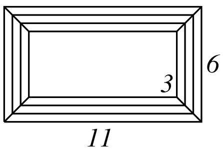
Za pravidlem uvedl tento příklad:[108]

Lila/vii.219–220
Příklad: dvě sloky. Kde délka dutiny mající zešikmené stěny je naměřená deset, jedenáct a dvanáct loktů na třech různých místech, její šířka je šest, pět a sedm a její hloubka dva, čtyři a tři. Řekni mi, příteli, kolik prostorových loktů je obsaženo v tomto výkopu.

Vyjádření:	12	11	10	*délka*
	7	5	6	*šířka*
	3	4	2	*hloubka*

Zde nalezení průměrné míry, šířka je 6 *loktů, délka* 11 *a hloubka* 3*,*

viz.



Odpověď: Počet prostorových loktů je nalezen 198*.*

K výpočtu přesného objemu komolého jehlanu formuloval jiné pravidlo,[109] které počítá s délkou A a šířkou B horní základny, délkou a a šířkou b dolní základny a hloubkou h. Objem se pak vypočítal postupem, který můžeme vyjádřit vzorcem

$$V = \frac{AB + ab + (A+a)(B+b)}{6} \cdot h\,.$$

Pro objem jehlanu uvedl: *třetina objemu pravidelného tělesa je objemem špičatého.*

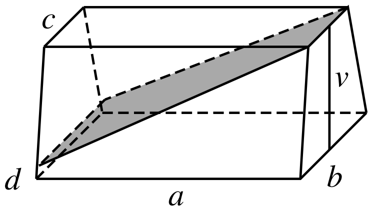
Přibližné „průměrné“ vzorce byly postačující k tomu, aby se podle objemu vykopané zeminy stanovil potřebný počet dělníků. Objemy pravidelných i nepravidelných hranolů se počítaly i v Mezopotámii, kde se pomocí přibližných vzorců určoval počet pracovníků nutný k vykopání koryta či postavení hráze (viz [BBV]).

[108] Podle [Col], str. 97–98.
[109] Viz sloka Lila/vii.221, podle [Col], str. 98.

9.2.2 Zásoby cihel

U výpočtů týkajících se zásob cihel, tzv. *čiti*, se kromě objemu určoval i celkový počet cihel nebo počet jejich vrstev. Často se musely ještě převádět jednotky, rozměry cihly byly totiž dány v menších jednotkách než rozměry hromady. Mahávíra předložil příklad, kdy horní část zdi pevnosti byla zbořená vichřicí a počítal objem stojící a zbořené části (viz obr. 9.19), kde a je délka zdi, b a c dolní a horní šířka, d výška nezbořené části a v výška celé zdi:[110]

$$V_s = \frac{av}{6}(2b + c + d)\,, \qquad V_z = \frac{av}{6}(2c + b - d)\,.$$



Obr. 9.19: Zeď zničená vichřicí

9.2.3 Hromady obilí

Určení týkající se hromad obilí se nazývalo *ráši*. Hromada obilí měla tvar kužele, pro výpočet jejího objemu se používaly většinou jen přibližné vzorce, kde se předpokládalo, že výška v je rovna obvodu kruhové základny dělenému 9, 10 nebo 11 podle toho, o jaký typ obilí se jednalo. Brahmagupta rozlišoval obilí „vousaté“, hrubé a jemné. Objem pak počítal jako[111]

$$V = v\left(\frac{o}{6}\right)^2,$$

což odpovídá vzorci $V = \frac{1}{3}v\pi r^2$, kde se uvažuje $\pi = 3$, neboť podle přibližného vzorce pro obvod kružnice platilo $o = 3d = 6r$.

Šrídhara uvedl pravidlo na výpočet objemu komolého kužele[112]

$$V = \frac{v}{24}\sqrt{10(d^2 + D^2 + (d+D)^2)^2} \quad \text{neboli} \quad V = \frac{\sqrt{10}}{3}(r^2 + R^2 + rR)v\,,$$

kde v je výška a d, D, r, R jsou průměry, resp. poloměry podstav. Zde je $\pi = \sqrt{10}$.

[110] Viz sloka GaSaSa/viii.54$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 271.
[111] Viz sloka BrSpSi/xii.50, podle [Col], str. 316.
[112] Podle [DS3], str. 175.

9.2.4 Koule

Nejstarší vzorec pro povrch koule byl uveden ve ztracené práci, jejímž autorem byl Lalla. Jeho vzorec $S = \pi r^2 \cdot 2\pi r = 2\pi^2 r^3$ byl velmi nepřesný a Bháskara II. jej s kritikou odmítl. Sám předložil správný vzorec: *čtyřnásobek obsahu největšího kruhu*, což můžeme vyjádřit vzorcem[113]

$$S = 4\frac{do}{4} = do\,.$$

Árjabhata I. počítal objem koule jako

$$V = S\sqrt{S}\,.$$

I v tomto případě se jednalo jen o přibližnou hodnotu.

Mahávíra později stanovil pro objem koule přibližný i „přesný" vztah:[114]

$$V_p = \left(\frac{d}{2}\right)^3 \frac{9}{2}\,, \qquad V = \left(\frac{d}{2}\right)^3 \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{10}\,.$$

Bháskara II. k objemu koule uvedl:[115]

$$V = \frac{1}{6}Sd\,, \qquad\qquad V = \left(1 + \frac{1}{21}\right)\frac{d^3}{2}\,.$$

Druhý vzorec se snadno odvodí z prvního, pokud se uvažuje $\pi = \frac{22}{7}$. Pak obvod hlavní kružnice je $o = \frac{22}{7}d$, povrch koule $S = 4 \cdot \frac{1}{4}od = od$, tedy

$$V = \frac{1}{6}Sd = \frac{1}{6}od^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{22}{7}d^3 = \frac{22}{42}d^3 = \left(1 + \frac{1}{21}\right)\frac{d^3}{2}\,.$$

Hodnotu $\pi = \frac{22}{7}$ doporučoval Bháskara II. pro praktické výpočty, zatímco pro přesnější volil $\pi = \frac{3\,927}{1\,250}$ (viz odstavec 9.1.3).

Vzorec pro objem koule $V = \frac{9}{16}d^3 = \frac{9}{2}r^3$ byl znám i ve staré Číně, dokonce byl chybně interpretován jako $V = \frac{\pi^2}{2}r^3$, protože pro praktické účely bylo zvykem počítat s hodnotou $\pi = 3$ (viz [Gu6]).

Shrnutí

Středověký indický přístup ke geometrii, podobně jako egyptský, mezopotámský a čínský, byl odlišný od řeckého. Zatímco ve starém Řecku byla geometrie brána jako základ myšlení, byla vybudována na základě axiomatické

---

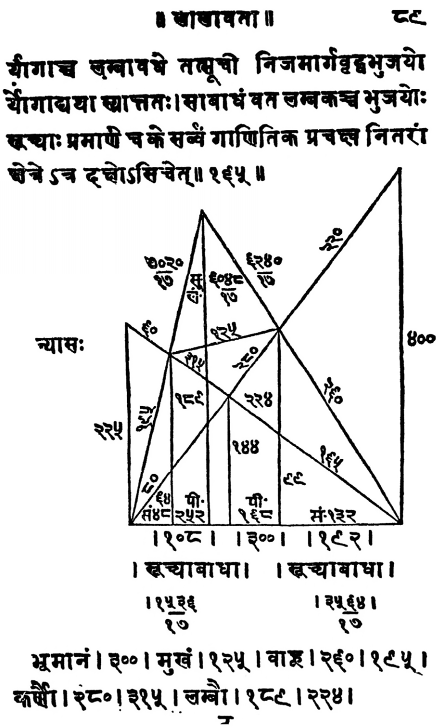
113 Viz sloka Lila/vi.203, podle [Col], str. 88.

114 Viz sloka GaSaSa/viii.28$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 265.

115 Viz sloky Lila/vi.203, Lila/vi.205–206, podle [Col], str. 88–89.

teorie pomocí základních prvků – bodů a základních principů – konstrukcí pravítkem a kružítkem (viz [Eu], [BeM1], [BeJ2]) popsaných v Eukleidových *Základech* (4. až 3. stol. př. n. l.), indický pohled byl více aritmetický. Není proto překvapivé, že geometrické úlohy byly řazeny k aritmetice. Geometrie často sloužila praktickým potřebám – výpočet velikosti pozemku, odměna za vykopaný příkop, a k tomu leckdy stačily jen přibližné hodnoty. O praktickém významu geometrie svědčí i fakt, že při řezání dřeva se uvažoval nejen počet a velikost řezů, ale také tvrdost. Například Brahmagupta podle druhu zpracovávaného dřeva násobil řezy různými koeficienty, aby lépe vystihl náročnost práce (viz [Col]).

Rovněž ve staré Číně byla geometrie zaměřená na potřeby běžného života, určovala se velikost pravoúhlých, kruhových i nepravidelných polí, „průměrné“ vzorce byly využívány při výpočtu nepravidelného hranolu (hradby, hráze, vodního příkopu apod.). Při ohodnocení práce na výkopu se přihlíželo k tomu, zda zemina je hutná nebo kyprá. Arabská geometrie byla silně ovlivněna Eukleidovými *Základy* a Hérónem. Al-Chwárizmí provedl klasifikaci trojúhelníků a čtyřúhelníků podle *Základů*. Některé al-Chwárizmího úlohy jsou shodné s Hérónovými včetně numerických hodnot, například výpočet obsahu rovnostranného trojúhelníku o straně délky 10 (viz [Ju]). Pravidla týkající se kruhové úseče včetně terminologie vznikla patrně podle indických.



Obr. 9.20: První tištěné vydání *Lílávatí* (z roku 1832)[116]

[116] Převzato z [Sm1].