5 Ohlasy na Weyrovu teorii v Brně

Nejvýraznější českou osobností, která se na počátku 20. století zabývala teorií matic, byl Bohumil Bydžovský, jehož práce byly představeny v předcházející kapitole. Ač byl žákem Eduarda Weyra, na jeho teorii však nenavázal. Reakce na ni přišly od české matematické komunity se značným zpožděním. Pozornost jí věnovali čeští matematikové pracující v Brně, a to až v padesátých letech 20. století. Snažili se ji zobecnit a aplikovat, především v matematické analýze. Jak uvidíme dále, vůdčí osobností a hybnou silou při rozpracování Weyrovy teorie byl Otakar Borůvka (1899–1995).

5.1 Otakar Borůvka

Otakar Borůvka byl žákem Matyáše Lercha[154] (1860–1922) a Eduarda Čecha[155] (1893–1960), mezi jeho učitele patřili též Elie Joseph Cartan (1869–1951, Paříž) a Wilhelm Blaschke (1885–1962, Hamburk). Borůvkův život je neodmyslitelně spjat s Masarykovou univerzitou a pobočkou Matematického ústavu ČSAV v Brně, kde se stal jednou z nejvýraznějších osobností vědeckého života. Soustředil kolem sebe skupinu vynikajících matematiků. Řadíme ho mezi ty, kteří se zasloužili o rozvoj matematiky v Československu.

Otakar Borůvka je příkladem matematika, který si vážil vzdělání a především těch, kteří ho k němu vedli. Z jeho vzpomínek lze vyčíst poděkování směřované k jeho učitelům, ale zároveň uvědomění si závazku tento dar šířit dále. Byl to především Matyáš Lerch, který mu ukázal cestu k metodám vědeckého výzkumu a o kterém poznamenal: *… byl nejdůležitějším stupínkem na mé cestě po matematickém žebříčku, … ve vědeckém životě Brna zanechal nejhlubší stopu, která zůstává v nás, jeho žácích, i v našich žácích do budoucna.* ([BKol], str. 50)

---

[154] Přáním Matyáše Lercha, českého matematika světového jména, bylo stát se středoškolským profesorem matematiky. Splnění tohoto snu však Lerchovi zabránilo postižení dolní končetiny v důsledku úrazu v dětství. Matyáš Lerch tak upnul své úsilí k matematice. Po tříletém studiu na české technice studoval matematiku na české univerzitě (u F. J. Studničky) a také v Berlíně (K. T. W. Weierstrass, L. Kronecker, I. L. Fuchs, C. D. T. Runge). V roce 1886 se habilitoval na české technice a zastával zde místo asistenta matematiky. V roce 1896 odešel na místo profesora na univerzitu ve švýcarském Freiburgu, kde zůstal deset let. Během této etapy vyvrcholila jeho odborná činnost, po operaci se zlepšil jeho zdravotní stav. Od roku 1906 působil na české brněnské technice, od roku 1920 na nově založené Masarykově univerzitě, kde se stal prvním profesorem její přírodovědecké fakulty. Podílel se rovněž na založení matematického ústavu. Sepsal řadu článků publikovaných v renomovaných časopisech; jeho práce výrazně ocenil známý francouzský matematik Charles Hermite.

[155] Eduard Čech vystudoval matematiku a deskriptivní geometrii na Filozofické fakultě Karlo-Ferdinandovy univerzity v Praze. Několik let učil na pražských reálkách. Jeho odborné zaměření zahrnovalo především diferenciální geometrii a topologii. Ve školním roce 1921/22 studoval v Itálii (v Turíně). Roku 1922 se habilitoval na pražské univerzitě. Od roku 1923 byl mimořádným, od roku 1928 řádným profesorem Masarykovy univerzity v Brně. Od roku 1946 byl řádným profesorem Přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy. Byl prvním ředitelem Badatelského ústavu matematického České akademie věd a umění (1947), jeho pokračovatele Ústředního ústavu matematického (1950), Matematického ústavu ČSAV (1952) i Matematického ústavu Univerzity Karlovy (1956).

Také já jsem brzy ztratil nit, …, a Lerchovy přednášky byly pro mne pravým opakem všech jiných přednášek, jimž jsem dokonale rozuměl. Tak se stalo, že chtěje porozumět Lerchovým přednáškám, studoval jsem hlavně matematiku, která mne nakonec tak poutala, že jsem jí věnoval celý život. Říkávám, že jsem se stal matematikem proto, že jsem matematiku neuměl. ([Bo9] str. 91–99)

O podněcujícím vztahu učitel-student napsal následující řádky:

… moji učitelé – Matyáš Lerch, Ladislav Seifert a Eduard Čech. Dali mi mnoho, a tak i já cítím povinnost co nejvíc z toho předat mladé nadané generaci. Oni vždycky stranili nadaným a pilným, to bylo jejich a posléze i moje krédo: na koně vás posadím, ale jet musíte sami! ([BKol], str. 162–163)

Otakar Borůvka studoval od roku 1918 na České vysoké škole technické v Brně, od roku 1920 pak současně na Přírodovědecké fakultě nově vzniklé Masarykovy univerzity, kam následoval svého učitele Matyáše Lercha. Nedlouho poté se na ústavu matematiky na univerzitě stal asistentem (a od roku 1921 již na technice nestudoval). V roce 1923 obhájil svou disertační práci, roku 1928 se na univerzitě habilitoval. O šest let později se stal mimořádným profesorem Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity. V roce 1939 byl po uzavření českých vysokých škol poslán na dovolenou s čekatelným, po válce byl roku 1946 (se zpětnou platností od roku 1940) jmenován řádným profesorem Masarykovy univerzity, na níž setrval do roku 1970. Téhož roku začal pracovat v nově vzniklém Matematickém ústavu ČSAV v Brně. V roce 1965 založil matematický časopis Archivum Mathematicum.[156]

Odborné zaměření Otakara Borůvky je široké. Zahrnuje především klasickou analýzu, diferenciální geometrii, algebru, teorii diferenciálních rovnic a topologii. Z jeho výsledků je nejznámější algoritmus pro nalezení minimální kostry grafu, který Borůvka publikoval v práci *O jistém problému minimálním* [Bo1] v roce 1926, v době, kdy ještě teorie grafů neexistovala.

Zbývající text této kapitoly pojednává o výsledcích, které publikoval buď Otakar Borůvka nebo jeho žáci, kteří se ve svých pracích na svého učitele odvolávají a zdůrazňují nejen Borůvkovu schopnost motivace k řešení problémů, ale i skutečnost, že to byl právě Otakar Borůvka, který je s problematikou Weyrovy teorie seznámil.

---

[156] O životě a práci Otakara Borůvky byla roku 1996 publikována monografie *Otakar Borůvka* [BKol], která byla sepsána kolektivem osmi autorů. Jedním z nich byla Petra Šarmanová, která napsala disertační práci na téma *Otakar Borůvka a diferenciální rovnice* [Sa1], kterou obhájila roku 1998 na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně.

Vedle těchto obsáhlých publikací existuje i značné množství článků, jmenujme alespoň tyto: Balada F., *Akademik korespond. univ. profesor RNDr. Otakar Borůvka, doktor fyzikálně-matematických věd, dožil se šedesáti let* [Bl1]; Holub M., *Šedesát let prof. O. Borůvky* [Hu1]; Koutský K., *Prof. Otakar Borůvka šedesátníkem a laureátem státní ceny* [Ky2]; Novotný M., Svoboda K., Zlámal M., *K šedesátinám Otakara Borůvky* [NSZ1]; Novotný M., *Borůvka laureátem státní ceny* [No3]; Sekanina M., *Šedesátiny profesora Otakara Borůvky* [Sn1]; Novotný M., *70 let akademika Borůvky* [No4]; Novotný M., *Akademik O. Borůvka sedmdesátiletý* [No5]; Ráb M., *Akademik Otakar Borůvka sedmdesátníkem* [Ra1]; Novotný M., *Otakar Borůvka – význačná osobnost brněnského vědeckého života* [No6]; Vejvodová Z., *75 let akademika Otakara Borůvky* [Ve1]; Greguš M., *Osemdesiat rokov akademika O. Borůvku* [Gr1]; Neuman F., *Akademik Otakar Borůvka pětaosmdesátníkem* [Nn1]; Neuman F., *95 years of Otakar Borůvka* [Nn2].

5.2 Maticový počet a Otakar Borůvka

- *Sur les matrices singulières* [Bo2], 1936
- *Matice* [Bo4], 1947, 1948, 1966
- *Poznámka o použití Weyrovy theorie matic k integraci systémů diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty* [Bo6], 1954
- *Základy teorie matic* [Bo8], 1971

Borůvkův zvýšený zájem o algebru lze zaznamenat od třicátých let 20. století. Nemáme tím však na mysli pouze algebru lineární.[157] Své zaujetí pro algebru mohl předávat dál, neboť ve třicátých a čtyřicátých letech vyučoval předměty *Determinanty*, *Lineární substituce a bilineární formy*, *Algebra*, *Matice*, *Matematický proseminář (odděl. algebraické)* či *Grupy*.[158]

V roce 1936 vyšla Borůvkova třístránková práce *Sur les matrices singulières*. Byla publikována ve dvou částech, z nichž druhá má pouze několik řádků. V první, stěžejní části není sice jméno Eduarda Weyra zmíněno, v jejím úvodu je však podán výklad jednoho z klíčových vztahů teorie charakteristických čísel.[159] Otakar Borůvka uvažoval nerostoucí posloupnost hodností čtvercových matic X^1, X^2, X^3, $\ldots$ řádu n a ukázal, že existuje matice X^t taková, že matice X^t, X^{t+1}, $\ldots$, mají stejnou hodnost r a zároveň všechny předcházející matice mají hodnost větší. Číslo t nazval *l'indice de la matrice X*. Vztah sice vyložil pomocí hodností matic, ale ve zbývajících odstavcích dával přednost pojmu *de genre*, přirozenému číslu $n - r$ (nulita matice).

Tato Borůvkova poznámka byla citována roku 1950 slovenským fyzikem, knězem a filozofem Michalem Kumorovitzem (1911–2007) v článku *Une solution du système linéaire homogène d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants* [Km1][160] a roku 1953 Günterem Pickertem v přehledovém článku *Normalformen von Matrizen* [Pg2] úspěšně započatého, ale nedokončeného díla *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* (viz str. 47).

Dva roky po skončení druhé světové války vydal Otakar Borůvka učební text *Matice*. Název těchto skript tak koresponduje se jménem předmětu, který tehdy vyučoval. V následujícím roce vyšlo jejich druhé a v roce 1966 třetí, doplněné vydání. Třetí vydání připravil k tisku Josef Škrášek[161] (1912–1986), který text

---

[157] Známé jsou Borůvkovy výsledky z abstraktní algebry. Viz například jeho monografie *Úvod do teorie grup* [Bo3] z roku 1944, stejnojmenná, ale svým rozsahem takřka dvojnásobná kniha *Úvod do teorie grup* [Bo5] z roku 1952 nebo monografie *Základy teorie grupoidů a grup* [Bo7], která vyšla roku 1962 (existují i vydání v němčině (1960) a v angličtině (1974, 1975, 1976)).

[158] Přehled pedagogické činnosti Otakary Borůvky (včetně roku, semestru a hodinového rozsahu výuky) je zpracován v disertační práci Petry Šarmanové *Otakar Borůvka a diferenciální rovnice*, str. 12–13 a 16–17. Uveďme alespoň, že předmět *Matice* Borůvka vyučoval v zimním semestru akademického roku 1946/47 v rozsahu pěti hodin týdně.

[159] Teprve v dodatečné krátké poznámce, tj. v druhé části práce ([Bo2], str. 762), se Borůvka zmínil o tom, že dokázal větu Eduarda Weyra. Patrně ho na to někdo upozornil.

[160] Další informace o článku [Km1] viz str. 203 této monografie.

[161] Josef Škrášek byl další osobností brněnského akademického života. Byl posluchačem České vysoké školy technické v Brně i teologické fakulty v Olomouci. Dále studoval matema-

doplnil řadou příkladů a cvičení. V prvním vydání se totiž vyskytují pouze příklady řešené v průběhu výkladu, třetí vydání obsahuje vždy po několika kapitolách soubor příkladů s uvedenými výsledky. Jedná se většinou o početní úkoly, občas též o důkazové úlohy.

Náplň skript není překvapující. Po definici číselného tělesa a matice nad tímto tělesem jsou postupně představeny některé důležité matice, vlastnosti operací maticového počtu, vektory, lineární substituce, funkce s maticovým argumentem, hodnost a nulita matice, charakteristická rovnice matice, charakteristický a minimální polynom. Jsou zavedena Weyrova charakteristická čísla matice a rovněž jeho *soustava normálních vektorů*.[162] Představena je rovněž Weierstrassova teorie elementárních dělitelů, na závěr jsou uvedeny některé aplikace studované problematiky.

Porovnáním prvního a třetího vydání skript můžeme nahlédnout, jak se vyvíjela symbolika a česká terminologie teorie matic. Matice jsou v prvním vydání z roku 1947 značeny pomocí schématu ohraničeného kulatými závorkami, ve třetím vydání z roku 1966 však, poněkud překvapivě, závorkami hranatými (včetně označení vektorů). Od Bydžovského monografie[163] z roku 1930 se pozměnila řada termínů; některé názvy se přiblížily k dnes používané terminologii. Příkladem je symetrická matice, která již není nazývána *souměrná*, či čtvercová matice, která pozbyla označení *čtverečná*. V prvním vydání je transponovaná matice nazývána pouze *sdružená*, ve třetím je však již používán současný termín, přívlastek sdružená je zmíněn pouze v definici pojmu jako alternativní možnost. Matice, kterou dnes nazýváme inverzní, je v prvním vydání nazývána pouze *reciproká*, ve třetím vydání se vyskytuje vedle tohoto názvu i dnešní termín. Matice transponovaná k matici, která je složená z algebraických doplňků prvků matice, se v obou vydání nazývá *adjungovaná* i *přidružená*. Rozkolísanost v označení toho pojmu přetrvává do dnešních dní, některá literatura tuto matici nazývá reciprokou.

Zajímavé je pojmenování vlastního čísla matice. V prvním vydání není nijak zvlášť nazýváno, mluví se o něm jako o kořenu charakteristické rovnice matice. Také ve třetím vydání jeho výslovný název chybí, až na jedinou výjimku[164] je do 65. strany, což je již za polovinou textu, stále nazýváno kořenem charakteristické rovnice. Na uvedené straně je v rámci příkladu, ne ve výkladové části skript, zaveden termín charakteristický (vlastní) vektor matice, který se však neshoduje s pojmem, který si pod termínem vlastní vektor představíme dnes, neboť je na něj kladen další požadavek:

Jednotkové vektory x, o nichž se mluví ve větě 9.3 a které tedy splňují vztahy

$$(A - \lambda E)x = 0, \qquad |x| = 1,$$

tiku a deskriptivní geometrii na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně. Na téže fakultě i pracoval, navíc byl výpomocným asistentem na druhém ústavu matematiky na brněnské technice, kde se roku 1961 habilitoval. Téhož roku však odešel na Vyšší vojenské učiliště do Vyškova, kde setrval do roku 1972.

[162] Připomeňme, že Eduard Weyr v práci *O theorii forem bilinearných* [We12] nazýval tyto vektory *normálnými soustavami matice.*

[163] Viz 4. kapitola.

[164] Na straně 30 je překvapivě nazváno *charakteristickým kořenem.*

se obvykle nazývají charakteristické, (popř. vlastní) vektory matice A. Určete je pro matici $A=$ … ([Bo4], 3. vydání, str. 65)

V dalších příkladech je vlastní číslo matice znenadání nazýváno charakteristickým kořenem matice, v následujícím textu potom jak kořenem charakteristické rovnice matice, tak i charakteristickým kořenem matice.

V současných skriptech, která obsahují teorii matic, se příliš často nesetkáme s pojmy *involuční matice* (matice A, pro kterou $A^2 = E$) a *periodická matice* (matice A, pro kterou existuje přirozené číslo k takové, že $A^k = E$), které jsou zmíněny ve třetím vydání Borůvkových skript.

Přibližně před polovinou století přešel Otakar Borůvka ke studiu diferenciálních rovnic, kde plně využil svých algebraických znalostí. Roku 1946/47 založil vědecký seminář věnovaný diferenciálním rovnicím, který vedl až do vysokého věku. Článek *Poznámka o použití Weyrovy theorie matic k integraci systémů diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty* publikoval roku 1954. Rozdělil jej do čtyř částí. V první uvedl principy jiných způsobů řešení daného problému, Weierstrassovu a Peano-Bakerovu metodu. V další části se pochvalně vyjádřil o Eduardu Weyrovi, o jeho výsledcích v teorii matic a poznamenal, že *… Weyrova práce nenalezla ve světové literatuře ono místo, které jí přináleží.* ([Bo6], str. 152).

O Weyrově teorii otištěné ve spise *O theorii forem bilinearných* Borůvka napsal:[165]

V ní vyvinul originálním a důmyslným způsobem novou theorii matic, která se co do obsažnosti vyrovná proslulé Weierstrassově theorii elementárních dělitelů a co do jednoduchosti a průhlednosti ji předčí. ([Bo6], str. 152)

Třetí, nejobsáhlejší část věnoval Borůvka vysvětlení samotné Weyrovy teorie. Zopakoval především partii věnovanou tzv. *normální soustavě vektorů příslušné ke kořenu* λ matice A řádu n. Vyjádřil ji schématem

$$\begin{array}{l}
a_{11},\ \ldots,\ a_{1,\eta_t},\\
a_{21},\ \ldots,\ a_{2,\eta_t},\ a_{2,\eta_t+1},\ \ldots,\ a_{2,\eta_{t-1}},\\
a_{31},\ \ldots,\ a_{3,\eta_t},\ a_{3,\eta_t+1},\ \ldots,\ a_{3,\eta_{t-1}},\ a_{3,\eta_{t-1}+1},\ \ldots,\ a_{3,\eta_{t-2}},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_{t1},\ \ldots,\ a_{t,\eta_t},\ a_{t,\eta_t+1},\ \ldots,\ a_{t,\eta_{t-1}},\ a_{t,\eta_{t-1}+1},\ \ldots,\ a_{t,\eta_{t-2}},\ \ldots,\ a_{t,\eta_1},
\end{array}$$

kde pro vektory platí vztahy

[165] Obdobný citát použil Otakar Borůvka rovněž v předmluvě ke své knize z roku 1971 (viz dále).

O Borůvkově snaze propagovat Weyrovu teorii jistě svědčí i citace z jeho recenze knihy *Calcolo delle matrici* [Che2], kterou roku 1957 publikoval italský matematik Salvatore Cherubino (1885–1970). V závěru svého vyjádření pro Mathematical Reviews (MR0095853) Borůvka napsal:

Der Ref. erlaubt sich bei dieser Gelegenheit das ältere Buch von P. Muth, …, sowie die anscheinend wenig bekannte und doch schöne und für Anwendungen fruchtbare Theorie von Eduard Weyr [Monatsh. Math. Phys. 1 (1890), 163–200, 201–236] in Erinnerung zu bringen.

$$\begin{array}{rl}(A-\lambda E)a_{km}^T = a_{k+1,m}^T & \text{pro} \;\; 1 \le k \le t-1, \;\; m = 1, \ldots, \eta_t, \\ & \text{pro} \;\; 2 \le k \le t-1, \;\; m = \eta_t + 1, \ldots, \eta_{t-1}, \\ & \text{pro} \;\; 3 \le k \le t-1, \;\; m = \eta_{t-1} + 1, \ldots, \eta_{t-2}, \\ & \text{atd.} \\ (A-\lambda E)a_{tm}^T = o^T & \text{pro} \;\; m = 1, \ldots, \eta_1.\end{array}$$

Použil tedy tzv. Ferrersův diagram.

Ve čtvrté, stěžejní části práce Borůvka dokázal, že *integrálem* (dnes bychom řekli *řešením*) soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty $y' = Ay$ jsou vektory tvaru

$$y_{km} = e^{\lambda x} \cdot \left(a_{km} + \frac{x}{1!}a_{k+1,m} + \ldots + \frac{x^{t-k}}{(t-k)!}a_{tm}\right),$$

$$\begin{array}{lll}\text{pro} & 1 \le k \le t, & m = 1, \ldots, \eta_t, \\ \text{pro} & 2 \le k \le t, & m = \eta_t + 1, \ldots, \eta_{t-1}, \\ \text{pro} & 3 \le k \le t, & m = \eta_{t-1} + 1, \ldots, \eta_{t-2}, \\ \text{atd.} & & \end{array}$$

Dále napsal, že sestrojíme-li tyto vektory pro každé vlastní číslo matice, obdržíme celkem n nezávislých řešení, tj. fundamentální systém řešení dané soustavy.

Tento Borůvkův text je citován (pod anglickým přepisem jeho názvu *Remark on the use of Weyr's theory of matrices for the integration of linear differential equations with constant coefficients*) v článku *Practical computation of matrix functions* [RP1], který roku 1983 publikovali Hans-Joachim Runckel a Uwe Pittelkow. Věnovali se studiu funkce $f(A)$, kde A je komplexní matice, a aplikacím jejích nově dokázaných vlastností při řešení soustav lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic.

Roku 1971 vyšla Borůvkova učebnice *Základy teorie matic*, v níž je Weyrova teorie poprvé zpracována v české verzi knižně. Vznikla přepracováním jeho vysokoškolského textu *Matice*. Hned v počátku podotkněme, že učebnici lze vzhledem k výběru témat doporučit i současným studentům lineární algebry k osvojení základů maticového počtu. Tomu příliš nebrání ani použitý jazyk. Termíny se ve většině případů shodují s těmi, které byly použity ve třetím vydání skript *Matice* z roku 1966 a které používáme i v dnešní době.[166] Stále však přetrvává preference používání termínu *reciproká matice* před názvem *inverzní matice*, nicméně možnost nazývat tuto matici moderním způsobem zde uvedena je. V definici transponované matice zůstal jako alternativní možnost termín

[166] Od prvního vydání skript z roku 1947 došlo samozřejmě ke změnám, které spíše než s odborným jazykem souvisí s vývojem českého jazyka. Vedle nuancí typu *orthogonální matice* a *ortogonální matice* se jedná o drobné změny v používání předložek (např. *matice v číselném tělese* v prvním i třetím vydání skript z let 1947 a 1966 versus *matice nad číselným tělesem* v učebnici z roku 1971).

sdružená matice. Rovněž u *rozměru vektorového prostoru* je uveden i současný termín *dimenze vektorového prostoru*.[167] Nejinak je tomu u *vzájemné* neboli *lineární nezávislosti vektorů*. Matice transponovaná k matici složené z algebraických doplňků je pojmenována *adjungovaná*, čtenáři je nabídnuta možnost ji nazývat i *maticí přidruženou k dané matici*. Upozorněme jen na několik málo termínů, které se dnes již příliš neužívají, které jsou však i tak snadno pochopitelné: *základní* (dnes kanonická, resp. standardní) *báze vektorového prostoru*, *přímý* (direktní) *součin podprostorů*, *(charakteristické) kořeny* neboli *vlastní hodnoty matice* (vlastní čísla matice). Ke kolizi s dnešní terminologií dochází stejně jako v předchozích skriptech u *adjungované/reciproké matice* a rovněž u opačného vektoru k danému vektoru, který je nazýván též *záporným*. Tímto termínem dnes označujeme vektor, jehož všechny složky jsou (reálná) záporná čísla.

Věnujme se nyní náplni učebnice. Jejím rozborem však současně popíšeme i obsah předchozích skript, neboť porovnáním obou uvažovaných publikací zjistíme, že v knižní verzi přibyly oproti třetímu vydání skript pouze dvě kapitoly. Jsou nazvány *Vektorové prostory* a *Použití normálních soustav vektorů k řešení systémů lineárních homogenních diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty*.[168] Ve většině případů se shodují i příklady k procvičení a symbolika (např. matice – včetně vektorů – jsou stále ohraničovány hranatými závorkami). Seznam literatury obsahující dvacet položek byl rozšířen o jedinou publikaci.[169]

Podstatnou změnou je tak především šíření povědomí o Eduardu Weyrovi. Ve skriptech je vedle uvedení Weyrovy knihy *O theorii forem bilinearných* v seznamu literatury (a to ve třetím, nikoliv v prvním vydání) Weyrovo jméno zmíněno v jediné vedlejší větě, čímž význam Eduarda Weyra poněkud zapadl. V učebnici je Weyrovi věnován (vedle předmluvy a referencí) samostatný odstavec s upozorněním, že celé následující čtyři kapitoly jsou založeny na jeho teorii.[170]

V učebnici je přehledně představena teorie matic nad číselným tělesem. Tato problematika je náplní stěžejní a v podstatě jedinou. Vektorové prostory jsou studovány v úzké souvislosti s maticemi, teorie determinantů se v knize takřka neobjevuje. Je použita v zásadě pouze k definici hodnosti matice (ihned za ní je však formulována souvislost mezi hodností matice a lineární nezávislostí řádků, resp. sloupců matice) a v některých důkazech.

V úvodu jsou představeny některé speciální typy matic. Zajímavé je, že nulová matice (*matice nula*) je definována zvlášť pro matici typu $m \times n$, navíc bez podmínky $m \neq n$, a zvlášť pro matici čtvercovou. Poté jsou zavedeny základní operace maticového počtu, oproti našim zvyklostem je samostatně definován *skalární součin matice A s číslem r* a *skalární součin čísla r s maticí A*. Pro

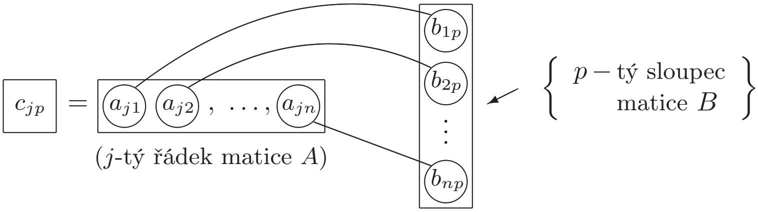
[167] Název *rozměr* (*dimenze*) se v knize vyskytuje v souvislosti s označením počtu prvků báze. Termín *vektorový prostor dimenze n* se neobjevuje, používá se pouze sousloví *n-rozměrný vektorový prostor*.

[168] Malá čast úvodu druhé z jmenovaných kapitol je navíc uvedena v jiné kapitole skript.

[169] Seznam literatury v prvním vydání skript obsahuje pouhé čtyři položky.

[170] V dataci smrti Eduarda Weyra se Otakar Borůvka dopustil v obou publikacích omylu, neboť uvedl rok 1894, který je rokem úmrtí Eduardova bratra Emila.

snazší zapamatování prvků matice $C = AB$ je čtenáři předložena vizuální pomůcka ve formě následujícího schématu:



Po uvedení základních vlastností operací s maticemi následuje samostatná kapitola věnovaná inverzním maticím k matici A. Odděleně jsou zavedeny *matice* $X = A^{-1}$ *reciproké zprava*, pro které platí $AX = E$, kde A je nenulová, ne nutně čtvercová matice, a *matice* $Y =^{-1}A$ *reciproké zleva*, které splňují vztah $YA = E$.[171] Pro regulární matici je následně definována matice A^{-1} reciproká neboli inverzní k matici A a ukázány její nejdůležitější vlastnosti. Pro komutující matice A a B, z nichž A je regulární, je zaveden *podíl* B/A *matice* A *maticí* B jako matice $A^{-1}B$, resp. BA^{-1}.

Následuje partie o vektorových prostorech, jejich lineárních zobrazeních[172] a transformacích vektorů. Tím si autor připravil podklad pro vymezení vektoru x, který se vynásobením maticí zleva transformuje na daný vektor λx, tedy na problematiku charakteristické rovnice matice, jejích vlastních čísel a vlastních vektorů. Poměrně značná pozornost je věnována ortogonálním a unitárním maticím, krátce je zmíněna čtvercová *matice* P *převádějící matici* A *v sebe* ($P^TAP = A$). Dále se studuje problematika funkcí s maticovým argumentem. V kapitole o minimálním polynomu matice je zaveden pojem *vzájemné nezávislosti množiny matic* téhož typu, který dnes většinou restringujeme pouze na lineární nezávislost vektorů, je zde formulována a dokázána Cayleyova-Hamiltonova věta.

Učivem o hodnosti a nulitě matice, včetně vět o hodnosti, resp. nulitě součinu dvou matic, připravil Otakar Borůvka čtenáře na následující čtyři kapitoly (17. až 20. z celkových dvaceti čtyř, celkem 31 stran) věnované Weyrově teorii.

Nejdříve uvažoval čtvercovou matici A stupně n, která má 0 za s-násobné vlastní číslo, přičemž $s \geq 1$. Poté dokázal, že 0 je současně s-násobným vlastním číslem matice A^k, $k \in \mathbb{N}$, a že pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí následující vztahy:

(i) $\operatorname{nul} A^k \leq s$,
(ii) $\operatorname{nul} A^k \leq \operatorname{nul} A^{k+1}$
(iii) *jestliže pro určité k platí* $\operatorname{nul} A^k = s$, *potom* $s = \operatorname{nul} A^k = \operatorname{nul} A^{k+1}$
(iv) *jestliže* $\operatorname{nul} A^k < s$, *potom* $\operatorname{nul} A^k < \operatorname{nul} A^{k+1}$
(v) $\operatorname{nul} A^{k+1} - \operatorname{nul} A^k \geq \operatorname{nul} A^{k+2} - \operatorname{nul} A^{k+1}$.

[171] Požadavek na nenulovost matice A byl doplněn až v erratech.
[172] Termín *homomorfismus* se v knize neobjevuje, je uvedena alternativa *lineární operátor*.

Odsud usoudil, že existuje mocnina t matice A taková, že

$$s = \text{nul } A^t = \text{nul } A^{t+1} = \dots,$$

zatímco nulity matic, které v posloupnosti A, A^2, A^3, …, A^t předcházejí matici A^t, postupně rostou.

Přehledným zápisem vyjádřil platné vztahy

$$0 < \text{nul } A < \text{nul } A^2 < \dots < \text{nul } A^t = s = \text{nul } A^{t+1},$$

které umožňují zavést přirozená čísla $\eta_1,\ \eta_2, \dots, \eta_t$ vztahy

$$\eta_1 = \text{nul } A, \quad \eta_2 = \text{nul } A^2 - \text{nul } A, \quad \dots, \quad \eta_t = \text{nul } A^t - \text{nul } A^{t-1}.$$

Tato čísla prozatím nijak nepojmenoval, uvedl však jejich uspořádání:

$$\eta_1 \geq \eta_2 \geq \ldots \geq \eta_t > 0.$$

Teprve nyní definoval charakteristická čísla libovolné čtvercové matice A příslušná obecnému vlastnímu číslu λ. Než tak učinil, připomněl ještě tvrzení, že jestliže λ je s-násobné vlastní číslo matice A, potom 0 je s-násobným vlastním číslem matice $A - \lambda E$. Pojmy, které se vztahují k matici A mající s-násobné vlastní číslo λ, odvodil z analogických pojmů definovaných pro matici $A - \lambda E$ mající vlastní číslo 0 násobnosti s. V příslušných termínech však používal matici A, nikoli matici $A - \lambda E$. Například rozdíly nulit matic $A - \lambda E$, $(A - \lambda E)^2$, … nazval *charakteristická čísla matice A příslušná k vlastnímu číslu* λ, což plně odpovídá přímému definování charakteristických čísel bez „přechodu“ od vlastního čísla 0.

Podotkněme, že v obdobném pořadí (od matice A mající s-násobné vlastní číslo 0, přes odvození některých vztahů pro nulity mocnin matice A až k definování charakteristických čísel příslušných obecnému vlastnímu číslu λ) vystavěl své výsledky i Eduard Weyr v knize *O theorii forem bilinearných* z roku 1889. Podal je však tak, že jsou pro dnešního čtenáře těžko pochopitelné. Naproti tomu výklad, který použil Otakar Borůvka je elegantní a prezentovaný v podstatě jazykem současné algebry. Ve svém krátkém článku *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* z roku 1885, který má formu předběžného oznámení výsledků, postupoval Weyr jinak; charakteristická čísla matice A příslušná obecnému vlastnímu číslu λ definoval, jak již bylo řečeno v 2. kapitole, přímo pomocí rozdílů nulit po sobě jdoucích mocnin matice $A - \lambda E$, a to ihned v úvodu svého článku.

Otakar Borůvka (stejně jako Eduard Weyr v roce 1889) v učebnici svým dalším odvozováním potvrdil, že polynom

$$(\lambda - \lambda_1)^{t_1} (\lambda - \lambda_2)^{t_2} \ \dots\ (\lambda - \lambda_u)^{t_u},$$

kde $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_u$ značí různá vlastní čísla matice A a $t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_u$ po řadě počty jejich charakteristických čísel, je minimálním polynomem matice A.

Na závěr kapitoly pojmenoval posloupnost čísel

$$[(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{t_1}),\ (\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_{t_2}),\ \ \ldots,\ (\upsilon_1,\ \upsilon_2,\ \ldots,\ \upsilon_{t_u})],$$

která je složená z uspořádaných posloupností charakteristických čísel příslušných všem navzájem různým vlastním číslům matice A řádu n, *Weyrovou charakteristikou matice* A. Poznamenal, že součet všech charakteristických čísel Weyrovy charakteristiky matice A je roven součtu násobností jednotlivých vlastních čísel.

V úvodu následující kapitoly Otakar Borůvka charakterizoval *vektor řádu* k matice A, $k \geq 1$. Jedná se o vektor, pro nějž platí

$$A^k x^T = o^T, \qquad A^{k-1} x^T \neq o^T.$$

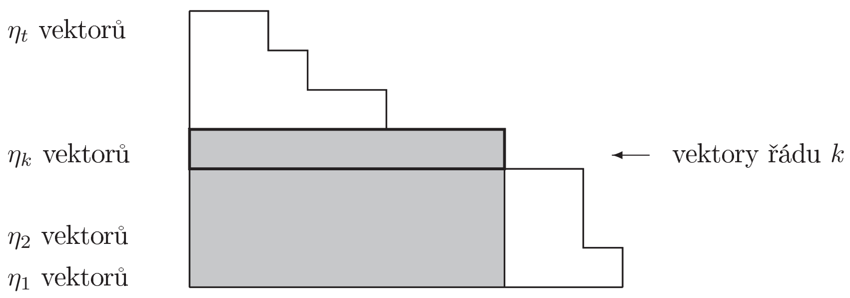
Jedná se tedy o pojem též nazývaný *vektor výše* k.

Další strany autor plně věnoval normální soustavě vektorů matice A. Uvažoval čtvercovou matici A řádu n, jež má s-násobné ($s \geq 1$) vlastní číslo 0 a jemu příslušná charakteristická čísla jsou $\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_t$. Tyto pojmy rozšířil pro obecná vlastní čísla matice až v druhé části kapitoly.

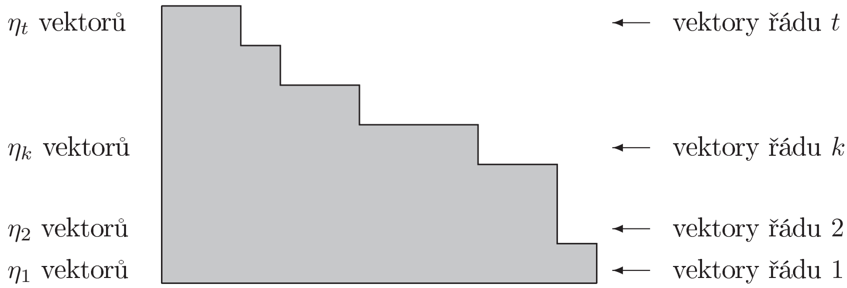
Začal pracovat s malou skupinou vektorů, k nimž postupně přidával další. Nejprve pro $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq t$, dokázal existenci η_k vektorů $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{\eta_k}$, pro něž platí

$$\begin{array}{llllll}
1) & x_1^T, & x_2^T, & \ldots, & x_{\eta_k}^T & \text{jsou řádu } k, \\
2) & Ax_1^T, & Ax_2^T, & \ldots, & Ax_{\eta_k}^T & \text{jsou řádu } k-1, \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\
k) & A^{k-1}x_1^T, & A^{k-1}x_2^T, & \ldots, & A^{k-1}x_{\eta_k}^T & \text{jsou řádu } 1
\end{array}$$

a všechny uvedené vektory jsou lineárně nezávislé. Dokázal tedy existenci $k \cdot \eta_k$ lineárně nezávislých vektorů $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{\eta_k}$ řádu k a jejich „obrazů“, násobíme-li vektory $x_1^T,\ x_2^T,\ \ldots,\ x_{\eta_k}^T$ zleva maticí A, a to celkem $(k-1)$-krát. Skupinu těchto vektorů lze v rámci schematicky znázorněného Ferrersova diagramu příslušného vlastnímu číslu 0 zaznamenat takto:



Dále množinu vektorů rozšířil na množinu všech s vektorů *normální soustavy vektorů příslušné k (s-násobnému) vlastnímu číslu* 0 *matice* A.



Poté přistoupil k definici stěžejního pojmu kapitoly, tj. pojmu *normální soustava vektorů* matice A, a to pro libovolnou čtvercovou matici řádu n. V tomto místě opět využil „posunu“ mezi nulovým vlastním číslem matice $A - \lambda_i E$ a obecným vlastním číslem λ_i matice A: nechť všechna navzájem různá vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$ a nechť $s_1, s_2, \ldots, s_u$ značí jejich násobnosti. Potom vlastní číslo 0 matice

$$\begin{array}{ll} A - \lambda_1 E & \text{je } s_1\text{-násobné}, \\ A - \lambda_2 E & \text{je } s_2\text{-násobné}, \\ \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ A - \lambda_u E & \text{je } s_u\text{-násobné}. \end{array}$$

Nechť normální soustava vektorů příslušných vlastnímu číslu 0 matice

$$\begin{array}{ll} A - \lambda_1 E & \text{je } a_1, a_2, \ldots, a_{s_1}, \\ A - \lambda_2 E & \text{je } b_1, b_2, \ldots, b_{s_2}, \\ \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ A - \lambda_u E & \text{je } u_1, u_2, \ldots, u_{s_u}, \end{array}$$

potom se soustava všech uvedených vektorů nazývá *normální soustava vektorů matice* A. Borůvka rovněž dokázal, že těchto n vektorů je lineárně nezávislých.

V další partii se blíže věnoval sloupcům Ferrersova diagramu příslušného danému vlastnímu číslu a podprostorům aritmetického vektorového prostoru dimenze n, které jsou generovány vektory v jednotlivých sloupcích schématu.

Protože jsou tyto podprostory invariantní vzhledem k homomorfismu f danému vztahem $f(x) = Ax^T$, mohl Borůvka využít dříve dokázaných výsledků pro podprostory této vlastnosti k odvození tvrzení, že ke každé[173] matici A lze nalézt čtvercovou matici B stupně n, pro kterou platí $B = Q^{-1}AQ$, přičemž sloupce matice Q jsou vektory *normální soustavy vektorů matice* A. Dále se Borůvka věnoval podobě matice B, a dokázal tak existenci Jordanova kanonického tvaru matice A, Jordanovo jméno však na tomto místě nezmínil. Na závěr kapitoly podotkl, že počet diagonálních bloků (dnes bychom řekli Jordanových

[173] Připomeňme raději, že uvažoval matice nad tělesem komplexních čísel.

buněk) příslušných k témuž vlastnímu číslu je roven největšímu z charakteristických čísel matice A patřících k tomuto vlastnímu číslu.

Tím se dostal k námětu kapitoly následující, kterým je podobnost matic. Stejně jako Eduard Weyr se zabýval otázkou invariantů podobnosti matic a popsal způsob, jak z normální soustavy vektorů matice B získat normální soustavu vektorů matice A, jsou-li matice A a B podobné. Představil rovněž problematiku současné transformace dvou párů matic, kterou studoval Eduard Weyr.

Poté následuje kapitola věnovaná soustavám lineárních diferenciálních rovnic, která je takřka kopií čtvrté části Borůvkova článku z roku 1954.[174] Dále je čtenáři předložena (bez důkazů) i Weierstrassova teorie elementárních dělitelů, na ní založený způsob řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a klasifikace regulárních párů matic.

Jedním ze studentů, kteří pod vedením Otakara Borůvky zpracovali své rigorózní práce, byl Miroslav Novotný (nar. 1922).

5.3 Weyrova teorie v pojetí Miroslava Novotného

- *O zobecnění Weyrovy theorie charakteristických čísel* [No1], 1950
- *Abstraktní jádro Weyrovy konstrukce charakteristických čísel matic* [No2], 1953
- *Zaměnitelnost endomorfismů lineárních prostorů* [No7], 1982
- *Mono-unary algebras in the work of Czechoslovak mathematicians* [No8], 1990

Miroslav Novotný byl jednou z vůdčích osobností poválečné brněnské i československé matematiky. Také Novotný spojil nemalou část života s brněnskou univerzitou. Řádným profesorem matematiky byl jmenován v roce 1963. V roce 1971 sice univerzitu opustil a stal se členem Matematického ústavu ČSAV v Brně, ale roku 1990 se vrátil zpět. V počátcích své kariéry pracoval rovněž na Vysoké škole technické v Brně a na Vojenské technické akademii v Brně.

Oblast zájmů Miroslava Novotného byla ovlivněna jeho učiteli. Řešil problémy, které přirozeně vyvstaly v kolektivu brněnských matematiků. Zabýval se topologií, zaměnitelnými homomorfismy, úplně i částečně uspořádanými množinami, teorií gramatických kategorií a monounárními algebrami.[175]

Roku 1950 vyšel Novotného článek *O zobecnění Weyrovy theorie charakteristických čísel*, který obsahuje hlavní myšlenky příspěvku předneseného v roce 1949 na společném 3. sjezdu československých a 7. sjezdu polských matematiků v Praze. Dvoustránková poznámka je věnována zobecnění pojmů nulita a charakteristické číslo. Jedná se o stručné nastínění možného, od Weyrova způsobu zcela odlišného přístupu k dané problematice. O Novotného uchopení dané otázky mnohé prozrazuje věta uvedená na začátku textu:

---

[174] Ponechána je struktura článku i značení. Příslušná část knihy je navíc obohacena o konkrétní příklad a jeho řešení.

[175] Více o životě a díle Miroslava Novotného viz jubilejní článek Vítězslava Nováka *Profesor Miroslav Novotný šedesátiletý* [Na1] z roku 1982 nebo práce Vítězslava Nováka a Bedřicha Půži *K sedmdesátinám prof. RNDr. Miroslava Novotného, DrSc.* [NP1] z roku 1992.

Matici můžeme chápati jako deformaci[176] *vektorového prostoru do sebe.* ([No1], str. 239)

Základní pojmy Weyrovy teorie, např. nulita a charakteristická čísla, jsou zavedeny pomocí pojmů *A-prostor* a *A-kolineace.*

Definici charakteristických čísel lze pak zobecnit tak, že místo vektorového prostoru vezmeme projektivní A-prostor … a místo jeho deformace do sebe vezmeme A-kolineaci projektivního A-prostoru. ([No1], str. 239)

Písmeno „A“ vyskytující se v názvech pojmů odkazuje na německý termín *Abhängigkeitsraum*, konkrétně na publikaci Otto Haupta (1887–1988), Georga Nöbelinga (1907–2008) a Christiana Pauce *Über Abhängigkeitsräume* [HNP1] z roku 1940.

Po krátkém úvodu Novotný přistoupil k definici pojmů. Nechť P je daná množina, v níž ke každé podmnožině N existuje její *uzávěr* $u(N)$, který má následující vlastnosti:[177]

(i) jestliže $N \subseteq P$, potom $N \subseteq u(N)$,
(ii) jestliže $N_1 \subseteq N_2 \subseteq P$, potom $u(N_1) \subseteq u(N_2)$,
(iii) jestliže $N \subseteq P$, potom $u[u(N)] \subseteq u(N)$,
(iv) jestliže $N \subseteq P$, $x_1, x_2 \in P$, $x_1 \notin u(N)$, $x_2 \notin u(N \cup \{x_1\})$, potom $x_1 \notin u(N \cup \{x_2\})$.

Podotkněme, že vzhledem k vlastnosti (i) lze u vlastnosti (iii) přesněji psát $u[u(N)] = u(N)$.

Množina, která se rovná svému uzávěru, se nazývá uzavřená; uzavřené podmnožiny se nazývají podprostory. *Bází* (v tehdejším jazyce *basí*) podmnožiny $N \subseteq P$ autor nazval libovolnou minimální podmnožinu $B \subseteq P$, pro kterou $u(N) = u(B)$.

Dále předpokládal, že

(v) každá podmnožina N množiny P má konečnou bázi.

Za této podmínky zavedl *hodnost* $r(N)$ množiny N jako počet prvků báze. Pomocí hodnosti zformuloval další podmínku:

(vi) pro každé dvě uzavřené množiny $N_1, N_2 \subset P$ je $r[u(N_1 \cup N_2)] = r(N_1) + r(N_2) - r(N_1 \cap N_2)$.

[176] V dnešní terminologii rozumíme deformací endomorfismus, resp. lineární zobrazení, resp. operátor.

[177] Uvedené vlastnosti zapsal Novotný pozměněnou symbolikou. V první řadě používal místo symbolu $\subseteq$ symbol $\subset$. K označení průniku a spojení používal znaky $\cdot$ a $+$. Námi používané symboly $\cap$ a $\cup$ byly ve světě přijaty po 2. světové válce, poprvé se zřejmě v dnešním smyslu objevily v knize *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva* [Pn2], kterou roku 1888 publikoval Giuseppe Peano. Více viz např. monografie Jindřicha Bečváře *Z historie lineární algebry* [Be6], str. 369.

Množinu P, která splňuje šest uvedených vlastností, nazval Novotný *projektivním A-prostorem*, uzavřené spojité zobrazení f tohoto prostoru do téhož prostoru jeho *endomorfismem. Jednoznačným rozkladem prostoru P příslušným k endomorfismu f* rozuměl dvojici podprostorů (neboli uzavřených podmnožin) P_1, P_2, pro které platí

(i) $r(P) = r(P_1) + r(P_2), \ P_1 \cap P_2 = u(\emptyset)$,

(ii) $f(P_1) \subset P_1, \ f(P_2) \subset P_2$,

(iii) pro každé dva prvky x_1, x_2, pro které
$x_1 \in P_1, \ x_2 \in P_2, \ x_1 \notin u(\emptyset), \ x_2 \notin u(\emptyset), f(x_1) \in u(x_1), \ f(x_2) \in u(x_2)$,
a každý prvek $x \in u(\{x_1\} \cup \{x_2\}), x \notin u(x_1), x \notin u(x_2)$,
platí $f(x) \notin u(x)$.

Endomorfismus jistých vlastností je nazýván *silný* a jiných daných vlastností *úplný*, silný a úplný endomorfismus potom *A-kolineace*. Systém všech jednoznačných rozkladů prostoru P příslušných k témuž silnému endomorfismu f určí jistý rozklad prostoru P na podprostory P_1, P_2, ..., P_q takové, že

$$r(P) = r(P_1) + r(P_2) + \ldots + r(P_q),$$

$$P_i \cap P_j = u(\emptyset) \qquad \text{pro} \qquad i \neq j,$$

$$f(P_1) \subset P_1, \quad f(P_2) \subset P_2, \quad \ldots, \quad f(P_q) \subset P_q.$$

Tyto podprostory jsou nazvány *charakteristické*.

Nechť f je A-kolineace projektivního A-prostoru P a N charakteristický podprostor patřící do rozkladu prostoru P, který přísluší A-kolineaci f. Úplnost A-kolineace zajistí existenci alespoň jednoho prvku $x \in N$, $x \notin u(\emptyset)$, takového, že $f(x) \in u(x)$. Množinu všech prvků této vlastnosti označme S_1, dále definujme rekurentně množinu S_k jako množinu všech $x \in N$, pro která

$$x \notin u(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{k-1}),$$

$$f(x) \in u(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{k-1} \cup \{x\}).$$

Označíme-li

$r(S_1) = \gamma_1$,
$r(S_1 \cup S_2) = \gamma_2$,
. . . . ,
$r(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k) = \gamma_k$,
. . . . ,
$r(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_t) = r(N) = \gamma_t$, ,

jsou čísla $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$ *nulitami* a čísla

$\eta_1 = \gamma_1$,
$\eta_2 = \gamma_2 - \gamma_1$,
. . . . ,
$\eta_t = \gamma_t - \gamma_{t-1}$

charakteristickými čísly patřícími k charakteristickému podprostoru N.

Tato problematika je podrobněji rozvinuta v Novotného práci z roku 1953 nesoucí jméno *Abstraktní jádro Weyrovy konstrukce charakteristických čísel matic.* V její předmluvě Novotný napsal:

Prof. Borůvka mi položil problém, jaká část Weyrovy theorie charakteristických čísel se dá vybudovat v abstraktním prostoru bez zavedení algebraických operací. V této práci se dokazuje, že lineární prostor se dá nahradit t. zv. A-projektivním prostorem a lineární zobrazení t. zv. A-deformací. Tyto dva pojmy postačí k definici charakteristických čísel a tato čísla podrží ty vlastnosti klasické theorie, jež jsou popsány ve větě 1. Na druhé straně se mi nepodařilo nalézti vhodný ekvivalent k pojmu kořen lineárního zobrazení ani zobecnit systémy normálních vektorů. ([No2], str. 41)

Zavedení základních pojmů (A-kolineace, projektivní A-prostor, uzávěr množiny apod.) je provedeno zcela jinou řečí než v článku z roku 1950, v němž se například vůbec nepracuje s pojmy závislost a nezávislost systémů, které patří v druhé práci mezi stěžejní.[178]

A-prostorem se rozumí každá množina P, jejíž každý konečný podsystém $x_1, x_2, \dots, x_p$ je buď *závislý*, nebo *nezávislý*. Závislý systém se přitom označuje $A[x_1, x_2, \dots, x_p]$, nezávislý $U[x_1, x_2, \dots, x_p]$ (volba písmen „A“ a „U“ zřejmě pochází opět z německých termínů *abhängig* a *unabhängig*), číslo p je nazváno *délkou systému* $x_1, x_2, \dots, x_p$. Uvedeny jsou následující axiomy závislosti:

(i) *Jestliže* $x_1 = x_2$, *potom* $A[x_1, x_2]$ (axiom K).
(ii) *Jestliže* $A[x_1, x_2, \dots, x_p]$, *potom* $A[x_1, x_2, \dots, x_p, y]$ *pro každé* $y \in P$ (axiom I).
(iii) *Jestliže* $U[x_1, x_2, \dots, x_p]$, $A[x_1, x_2, \dots, x_p, y]$, $A[x_1, x_2, \dots, x_p, z]$, *potom* $A[x_1, x_2, \dots, x_p, y, z]$ (axiom A).

A-prostorem *o konečné hodnosti* je nazván A-prostor, jehož nezávislé systémy mají ohraničené délky. Pro $T \subset P$ je definován pojem *hodnosti množiny* T jako maximum délek jejích nezávislých systémů (značí se $R(T)$). Pro nezávislý systém S skládající se z prvků $x_1, x_2, \dots, x_p$ je zavedena množina $L(S)$ všech prvků $y \in P$ takových, že $A[x_1, x_2, \dots, x_p, y]$ a je nazvána *podprostorem* (*uzavřenou množinou*) vytvořenou systémem S.

Symbolem $L(T)$ se značí *uzávěr množiny* $T \subset P$, který je tentokrát definován jako průnik všech podprostorů v P obsahující množinu T. *A-projektivním prostorem* se rozumí A-prostor o konečné hodnosti, pro jehož každé dva podprostory T_1, T_2 platí:

$$R(T_1) + R(T_2) = R(T_1 \cup T_2) + R(T_1 \cap T_2).$$

A-endomorfismem A-projektivního prostoru P se rozumí uzavřené, spojité zobrazení $F : P \to P$, tj. endomorfismus, v němž je obrazem uzavřené množiny opět uzavřená množina a platí $F[L(T)] \subset L[F(T)]$, *A-vlastním prvkem*

[178] Jedná se o přístup přejatý z již zmíněné publikace *Über Abhängigkeitsräume* z roku 1940, neboť Novotný napsal ([No2], str. 41):

HAUPT, NÖBELING a PAUC označují jako A-prostor množinu P, pro jejíž …
a poté vysvětlil základní pojmy.

vzhledem k F je prvek $x \in P$, pro který platí $R[\{x\}] = 1$ a $F(x) \in L[\{x\}]$. A-endomorfismus jistých vlastností je opět nazván *silným*, resp. *úplným*, silný a úplný endomorfismus A-*deformací*. Poznamenejme ještě, že se v práci objevil analogický termín pro nulitu, a to *defekt*.

Po uvedení potřebných definic přistoupil autor ke konstrukci pojmů, které jsou analogiemi pojmů Eduarda Weyra. Jak uvidíme, postupoval obdobně jako ve svém článku z roku 1950.

Je-li P A-projektivní prostor, F jeho A-deformace, N podprostor speciálních vlastností (tentokrát je nazván *kořenovým podprostorem*), S_1 množina všech A-vlastních prvků v N, potom lze rekurentně definovat množiny S_k jako množiny všech prvků

$$x \in N - L(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{k-1}),$$

pro které

$$F(x) \in L[S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{k-1} \cup \{x\}].$$

Označíme-li

$R(S_1) = \gamma_1,$
$R(S_1 \cup S_2) = \gamma_2,$
$\ldots\ldots\ldots\ldots,$
$R(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k) = \gamma_k,$
$\ldots\ldots\ldots\ldots,$
$R(N) = \gamma_t,$

potom čísla

$\eta_1 = \gamma_1,$
$\eta_2 = \gamma_2 - \gamma_1,$
$\ldots\ldots\ldots\ldots,$
$\eta_t = \gamma_t - \gamma_{t-1}$

nazveme A-*charakteristickými čísly patřícími k* A-*kořenovému podprostoru* N. A-charakteristická čísla, která patří ke všem A-kořenovým podprostorům uvažované A-deformace F, se nazývají A-*charakteristická čísla* A-*deformace* F. Dále jsou v článku zapsány příslušnou řečí vlastnosti čísel $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ dobře známé z Weyrovy teorie, konkrétněji, že součet všech A-charakteristických čísel A-kořenového podprostoru N je roven *hodnosti* tohoto *podprostoru* a celkový součet všech A-charakteristických čísel dané A-deformace F je roven *hodnosti prostoru* P. V závěru práce je dokázána věta, k níž Miroslav Novotný po celý text spěl: A-charakteristická čísla lineárního zobrazení n-rozměrného lineárního prostoru nad tělesem komplexních čísel jsou identická s Weyrovými charakteristickými čísly.

Odkaz na výsledky Eduarda Weyra (i Otakara Borůvky) nalezneme rovněž v Novotného článku *Zaměnitelnost endomorfismů lineárních prostorů* [No7] z roku 1982. Jedná se o převedení problému nalezení všech matic, které komutují s danou čtvercovou maticí, do řeči vektorových prostorů. Jsou zde však uvedeny výsledky úlohy obecnější, v níž se abstrahuje od linearity prostoru i zobrazení: je dána množina a její transformace, úkolem je nalézt všechny transformace, které s ní komutují. Jedná se tedy o problematiku úzce spojenou s monounární algebrou, která je definována jako uspořádaná dvojice $\mathcal{U} = (c_{\mathcal{U}}, o_{\mathcal{U}})$, kde $c_{\mathcal{U}}$ je množina a $o_{\mathcal{U}}$ její transformace. Nepřekvapí nás, že Weyrovy a Borůvkovy práce jsou zmíněny i v přehledové stati *Mono-unary algebras in the work of Czechoslovak mathematicians* [No8], kterou Miroslav Novotný publikoval v roce 1990. Konkrétně se jedná o Weyrův spis *O theorii forem bilinearných* a Borůvkovu knihu *Základy teorie matic*, obě byly uvedeny i v Novotného článku z roku 1982.

5.4 Weyrova teorie v pracích Jiřího Čermáka

- *O použití Weyrovy theorie matic k řešení homogenních systémů lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic* [Ce1], 1952
- *O použití Weyrovy theorie matic k řešení homogenních systémů lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic* [Ce2], 1953
- *On a new method of solving homogeneous systems of linear difference equations with constant coefficients* [Ce3], 1954
- *O systémech lineárních diferenčních rovnic s periodickými koeficienty* [Ce4], 1954
- *Poznámka o limitním přechodu diferenčních rovnic v rovnice diferenciální* [Ce5], 1956
- *Weyrovy soustavy normálních vektorů a jejich použití v matematické analyse* [Ce6], 1958

Rovněž Jiří Čermák (nar. 1928) patřil k brněnské matematické komunitě. Během studií na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity byl asistentem profesora Josefa Kauckého (1895–1982) na Vysoké škole technické Dr. E. Beneše, pracoval rovněž na Vojenské akademii v Brně.[179] Později přešel do Prahy do Ústavu jaderného výzkumu, kde pracoval (v oblasti reaktorové fyziky) až do svého penzionování v polovině devadesátých let. V rámci své práce působil rovněž ve Spojeném ústavě jaderných výzkumů v Dubně v tehdejším SSSR.

Weyrově teorii se věnoval ve své doktorské práci *O použití Weyrovy theorie matic k řešení homogenních systémů lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic*, kterou obhájil roku 1952, a také ve své disertační práci *Weyrovy soustavy normálních vektorů a jejich použití v matematické analyse* z roku 1958. Mezi obhajobami těchto prací, v letech 1953 až 1956, publikoval čtyři práce o diferenciálních a diferenčních rovnicích, v nichž Weyrovu teorii využil.

První ze svých článků Jiří Čermák nazval stejně jako svoji doktorskou práci, tj. *O použití Weyrovy theorie matic k řešení homogenních systémů lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic.* V úvodu zdůraznil, že ho k problematice

[179] Po vzniku Vojenské akademie v Brně roku 1951 přešla část katedry Vysoké školy technické Dr. E. Beneše na toto nové pracoviště. Zde byl vedoucím (*náčelníkem*) katedry matematiky Josef Kaucký, jeho zástupcem Miroslav Novotný. Po odchodu Novotného na Přírodovědeckou fakultu Masarykovy univerzity roku 1953 po něm převzal funkci zástupce právě Jiří Čermák.

Weyrovy teorie přivedl Otakar Borůvka. Jeho vliv je v práci snadno čitelný a jeho výsledky hojně využívány.

Idea této metody náleží p. prof. O. Borůvkovi, který ve svých přednáškách na Masarykově universitě podobným způsobem odvodil obecné řešení homogenního systému lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Prof. Borůvka mě také upozornil na Weyrovu theorii a možnosti jejího použití v různých částech matematické analysy. ([Ce2], str. 338)

Novinkou tohoto článku je využití Weyrovy teorie pro řešení soustavy lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty. Cesta Jiřího Čermáka k těmto rovnicím byla opět ovlivněna zkušenějším brněnským kolegou:

Prof. Kaucký obrátil moji pozornost na diferenční počet, což vedlo z mé strany k přenesení výsledků z diferenciálních rovnic na rovnice diferenční.[180]

V uvedeném článku autor nejprve zopakoval poněkud překvapivě i úvodní pojmy teorie matic a dále uvedl základy Weyrovy teorie nutné k dalšímu výkladu. Jako jeden z mála matematiků zaznamenal rovněž způsob sestrojení typického tvaru matice o předepsaných vlastních číslech a příslušných charakteristických číslech. Postupoval, až na mírně pozměněnou symboliku, stejně jako Eduard Weyr. Z použité terminologie podotkněme, že vlastní čísla matice nazýval *charakteristické kořeny matice*, stručněji *kořeny matice.*[181]

Pro s_p-násobné nenulové vlastní číslo λ_p matice A řádu n sestrojil matici

$$\frac{1}{\lambda_p}(A - \lambda_p E)$$

a uvedl, že má s_p-násobné vlastní číslo 0. Dle Weyrovy teorie dále platí, že Weyrova charakteristika příslušná k s_p-násobnému vlastnímu číslu 0 matice

$$\frac{1}{\lambda_p}(A - \lambda_p E)$$

je shodná s Weyrovou charakteristikou příslušnou k s_p-násobnému vlastnímu číslu λ_p matice A.

Jiří Čermák se dále zabýval otázkou, jakým způsobem lze z normální soustavy vektorů příslušné nenulovému s_p-násobnému vlastnímu číslu λ_p matice A (neboli k s_p-násobnému nulovému vlastnímu číslu matice $A - \lambda_p E$) získat normální soustavu vektorů příslušnou s_p-násobnému vlastnímu číslu 0 matice

$$\frac{1}{\lambda_p}(A - \lambda_p E).$$

[180] Z korespondence s autorkou této monografie (únor 2012).

[181] Jiří Čermák evidentně Weyrovu teorii studoval přímo z Weyrovy knížky *O theorii forem bilinearných.* Nejenže mnohdy použil stejné značení a postupy, ale na jednom místě poukazuje i na konkrétní stranu, kde se Eduard Weyr dopustil chyby. Jmenovanou publikaci spolu s Borůvkovými skripty *Matice* a MacDuffeeho monografií *The Theory of Matrices* doporučil čtenáři ke studiu Weyrovy teorie.

Připomeňme, že Eduard Weyr používal termín *kořen* matice.

Uvedl následující způsob: v normální soustavě vektorů

$a_{11},\ \dots,\ a_{1,\eta_{t_p}},$
$a_{21},\ \dots,\ a_{2,\eta_{t_p}},\ a_{2,\eta_{t_p}+1},\ \dots,\ a_{2,\eta_{t_p-1}},$
$a_{31},\ \dots,\ a_{3,\,\eta_{t_p}},\ a_{3,\eta_{t_p}+1},\ \dots,\ a_{3,\eta_{t_p-1}},\ a_{3,\eta_{t_p-1}+1},\ \dots,\ a_{3,\eta_{t_p-2}},$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$a_{t_p1},\ \dots,\ a_{t_p,\eta_{t_p}}, a_{t_p,\eta_{t_p}+1}, \dots, a_{t_p,\eta_{t_p-1}}, a_{t_p,\eta_{t_p-1}+1}, \dots, a_{t_p,\eta_{t_p-2}}, \dots, a_{t_p,\eta_1},$

příslušné nenulovému s_p-násobnému vlastnímu číslu λ_p matice A stačí ponechat první řádek beze změny, vektory ve druhém řádku vynásobit číslem $\frac{1}{\lambda_p}$, vektory ve třetím řádku vynásobit číslem $(\frac{1}{\lambda_p})^2$ atd. až konečně vektory v posledním řádku vynásobit číslem $(\frac{1}{\lambda_p})^{t_p-1}$. Obecně se k-tý řádek násobí číslem $(\frac{1}{\lambda_p})^{k-1}$. Autor tak zavedl nový pojem, *redukovanou normální soustavu vektorů příslušnou ke kořenu λ_p matice A*. Vektor redukované normální soustavy vektorů vyskytující se na stejném místě jako vektor a_{km} příslušné normální soustavy vektorů dále značme d_{km}.

Jiří Čermák opět považoval za zřejmé, že normální redukovaná soustava vektorů příslušná k s_p-násobnému vlastnímu číslu λ_p matice A je normální soustavou vektorů příslušnou k s_p-násobnému vlastnímu číslu 0 matice $\frac{1}{\lambda_p}(A-\lambda_p E)$, pouze konstatoval platnost příslušných vztahů a nezávislost nové soustavy vektorů. Nezávislost vektorů je vzhledem ke konstrukci redukované soustavy vektorů skutečně zřejmá, ukažme ještě, že vektory z prvních t_p-1 řádků se při násobení maticí $\frac{1}{\lambda_p}(A-\lambda_p E)$ zleva zobrazí na vektory, které se ve výše uvedeném schématu nacházejí ihned pod nimi, a při stejné operaci s vektory v posledním řádku získáme vždy nulový vektor:

Pro $1 \le k \le t_p-1,\ m = 1,\ 2,\ \dots,\ \eta_{t_p-k+1}$ platí

$$\frac{1}{\lambda_p}(A-\lambda_p E)d_{km}^T = \frac{1}{\lambda_p}(A-\lambda_p E)\left(\frac{1}{\lambda_p}\right)^{k-1} a_{km}^T =$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda_p}\right)^{k}(A-\lambda_p E)a_{km}^T = \left(\frac{1}{\lambda_p}\right)^{k} a_{k+1,\,m}^T = d_{k+1,\,m}^T.$$

Rovněž pro $k = t_p,\ m = 1,\ 2,\ \dots,\ \eta_1$ má redukovaná soustava vektorů požadované vlastnosti, neboť

$$\frac{1}{\lambda_p}(A-\lambda_p E)d_{km}^T = \frac{1}{\lambda_p}(A-\lambda_p E)\left(\frac{1}{\lambda_p}\right)^{k-1} a_{km}^T =$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda_p}\right)^{k}(A-\lambda_p E)a_{km}^T = \left(\frac{1}{\lambda_p}\right)^{k} o^T = o^T.$$

Pro matici, jejíž vlastní čísla jsou nenulová, utvořil očekávaným způsobem (tj. sestrojením redukované soustavy vektorů pro každé vlastní číslo) soustavu n vektorů, tzv. *redukovanou normální soustavu vektorů příslušnou k matici A.*

S ohledem na snadnější vyjadřování při aplikaci na systém diferenčních rovnic ... jest nově zaveden pojem redukované normální soustavy vektorů matice. ([Ce2], str. 337)

Jedná se o využití Weyrovy teorie při řešení homogenní soustavy lineárních diferenčních rovnic

$$u_i(x+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{$*$}$$

kde x je nezávisle proměnná, a_{ij} jsou konstanty.

Ukazuji, že obecné řešení zmíněného systému diferenčních rovnic je známo a dá se napsat, což je obzvláště pozoruhodné, explicitními vzorci, jsou-li známy charakteristické kořeny a redukovaná normální soustava vektorů matice koeficientů systému. ([Ce2], str. 338)

K libovolnému vlastnímu číslu λ_p násobnosti s_p stačí sestrojit s_p vektorových funkcí

$$u_{km} = \lambda_p^x \Big[d_{km} + \frac{x}{1!} d_{k+1,m} + \frac{x(x-1)}{2!} d_{k+2,m} + \ldots \\ \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-(t_p-k-1))}{(t_p-k)!} d_{t_p,m} \Big]$$

pro $k = 1, 2, \ldots, t_p - 1,\ m = 1, 2, \ldots, \eta_{t_p-k+1}$, a

$$u_{t_p m} = \lambda_p^x\, d_{t_p m} \quad \text{pro} \ \ m = 1, 2, \ldots, \eta_1.$$

Všechny tyto vektorové funkce jsou řešením dané soustavy diferenčních rovnic. Sestrojíme-li dle napsaného vzorce $s_1 + s_2 + \ldots + s_u$ vektorů příslušných vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$, dostaneme fundamentální systém řešení soustavy.

Jiří Čermák dále studoval otázku reálnosti řešení. Nechť koeficiety a_{ij} jsou reálné a nechť A je matice s prvky a_{ij}. Vlastní čísla matice A jsou buď reálná nebo po dvou komplexně sdružená. Jsou-li všechna vlastní čísla matice A reálná, lze k výpočtu řešení soustavy použít redukované normální soustavy reálných vektorů, a tedy i fundamentální systém řešení je reálný. Má-li matice A komplexně sdružená vlastní čísla, lze dokázat, že k nim existují (redukované) normální soustavy vektorů skládající se z vektorů komplexně sdružených. Odtud vyplývá, že ke každému řešení u_{km}, které je vyjádřené výše uvedenými vzorci a přísluší vlastnímu číslu λ_p, existuje komplexně sdružené řešení $\bar{u}_{km}$, které je sestaveno dle téhož vzorce k vlastnímu číslu $\bar{\lambda}_p$. Vektorové funkce

$${}^1u_{km} = \frac{1}{2}(u_{km} + \bar{u}_{km}),$$

$${}^2u_{km} = \frac{1}{2\mathrm{i}}(u_{km} - \bar{u}_{km})$$

jsou reálné, nezávislé a jsou řešeními uvažované homogenní soustavy lineárních diferenčních rovnic $(*)$. Celkově tak Čermák dospěl k následujícímu závěru: má-li reálná matice A komplexní vlastní čísla, existuje reálný fundamentální systém řešení soustavy rovnic $(*)$, jehož prvky u_{km} lze vyjádřit výše uvedenými explicitními vztahy nebo se skládají z dvojic vektorových funkcí ${}^1u_{km}$ a ${}^2u_{km}$.

Jedná se tedy o analogii Borůvkova způsobu řešení soustavy diferenciálních rovnic, tentokrát však v explicitních vzorcích nefigurují vektory normální soustavy vektorů, ale vektory její redukované verze.

Jiří Čermák se však soustavě diferenciálních rovnic v této práci také věnoval, pozornost soustředil na soustavu lineárních diferenciálních rovnic, jejíž koeficienty jsou periodické funkce, konkrétně na soustavu

$$x_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\ x_j(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

kde t je reálné a koeficienty $a_{ij}(t)$ jsou definovány na intervalu $(-\infty,\ \infty)$, jsou spojité a periodické s periodou $\omega > 0$.

Matici, jejíž sloupce tvoří fundamentální systém řešení soustavy, nazval jednoduše *fundamentální řešení systému* a označil ji $X(t)$. Ukázal, že je-li $X(t)$ fundamentální řešení dané soustavy, je také $X(t+\omega)$ fundamentální řešení téže soustavy. Musí proto existovat matice P s konstatními koeficienty, pro kterou platí

$$X(t+\omega) = X(t)P$$

a kterou autor nazval *determinující maticí příslušnou fundamentálnímu řešení* $X(t)$. Protože $\det X(t) \neq 0$, existuje $X^{-1}(t)$. Tedy $P = X^{-1}(t)X(t+\omega)$ a $\det P \neq 0$.

Dále uvažoval jiné fundamentální řešení $\tilde{X}(t)$ soustavy, které je dané rovnicí

$$\tilde{X}(t) = X(t)Q,$$

kde Q je libovolná regulární matice. Vynásobením obou stran vztahu

$$X(t+\omega) = X(t)P$$

maticí Q zprava dostaneme

$$X(t+\omega)Q = X(t)PQ,$$

neboli

$$\tilde{X}(t+\omega) = X(t)PQ.$$

Jelikož

$$X(t) = \tilde{X}(t)Q^{-1},$$

platí

$$\tilde{X}(t+\omega) = \tilde{X}(t)Q^{-1}PQ.$$

Autor tak ukázal, že změnou fundamentálního systému se determinující matice P přemění v matici $Q^{-1}PQ$, a proto jsou vlastní čísla a Weyrova charakteristika determinující matice invariantní vzhledem k libovolné změně fundamentálního řešení. Další autorovy ideje jsou založeny na skutečnosti, že lze nalézt takovou matici Q, že matice $W = Q^{-1}PQ$ bude mít Weyrův typický tvar. Uvažujme tedy dále takové fundamentální řešení $X(t)$, že k němu příslušná determinující matice má zmíněný tvar. Dále si uvědomme, že vzhledem k právě formulované větě a platnosti vztahu $\det P \neq 0$ nemá determinující matice W nulové vlastní číslo.

Jiří Čermák nejprve uvažoval speciální případ, v němž je $X(t)$ fundamentálním řešením soustavy, k němuž existuje determinující matice W mající n různých vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, a tedy W je diagonální matice. Vzhledem ke vztahu

$$X(t+\omega) = X(t)W$$

platí pro fundamentální systém

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

vztahy

$$x_i^T(t+\omega) = \lambda_i x_i^T(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Zobecněním tohoto tvrzení je případ, v němž má determinující matice vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$ o násobnostech $s_1, s_2, \ldots, s_u$ a všechny Weyrovy charakteristiky příslušné k těmto vlastním číslům mají pouze jediné charakteristické číslo. Potom

$$W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ldots & \lambda_2 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_u & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \lambda_u \end{pmatrix},$$

a proto vlastnímu číslu λ_1 přísluší s_1 nezávislých řešení

$$x_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, s_1,$$

pro která

$$x_i^T(t+\omega) = \lambda_1 x_i^T(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, s_1,$$

vlastnímu číslu λ_2 přísluší s_2 nezávislých řešení

$$x_{s_1+i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, s_2,$$

pro která

$$x^T_{s_1+i}(t+\omega) = \lambda_2 x^T_{s_1+i}(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, s_2,$$

a tak dále, až konečně vlastnímu číslu λ_u přísluší s_u nezávislých řešení

$$x_{s_1+s_2+\ldots+s_{u-1}+i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, s_u,$$

pro která

$$x^T_{s_1+s_2+\ldots+s_{u-1}+i}(t+\omega) = \lambda_u x^T_{s_1+s_2+\ldots+s_{u-1}+i}(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, s_u,$$

a všechna uvedená řešení tvoří fundamentální systém řešení dané soustavy diferenciálních rovnic.

Jiří Čermák studoval i nejobecnější případ matice W, v této souvislosti zmínil například problematiku tzv. *Hamburgerových podskupin* skupiny nezávislých řešení soustavy. Počet Hamburgerových podskupin, na něž se rozpadne skupina s_p řešení příslušných s_p-násobnému vlastnímu číslu λ_p, je vždy roven největšímu charakteristickému číslu, které patří uvažovanému vlastnímu číslu λ_p.

V článku tak prezentoval všechny hlavní výsledky tzv. *Floquetovy teorie*,[182] která je však většinou postavena nikoli na Weyrově teorii, ale na Weierstrassově teorii elementárních dělitelů.

Roku 1954 Čermák publikoval článek *On a new method of solving homogeneous systems of linear difference equations with constant coefficients*, jehož stěžejní část je v podstatě anglickou verzí části předchozího článku, která se věnuje řešení homogenní soustavy lineárních diferenčních rovnic. Ve zkrácené podobě je zde rovněž představena Weyrova teorie. Jediným zřetelným rozšířením české verze je tak několik historických poznámek v úvodu práce o řešení homogenních soustav lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty.

V pořadí další Čermákovou prací obdobného charakteru je článek *O systémech lineárních diferenčních rovnic s periodickými koeficienty*, který autor publikoval také v roce 1954. V něm rozšířil výsledky Tomlinsona Forta[183] pojednávající o převedení homogenní lineární diferenční rovnice 2. řádu s periodickými koeficienty na soustavu diferenčních rovnic stejného typu. K odvození výsledků opět použil Weyrovu teorii.

Na anglicky psanou práci [Ce3] a Borůvkovo pojednání [Bo6] úzce navázal poslední z článků Jiřího Čermáka týkající se řešení soustavy diferenciálních a diferenčních rovnic na podkladě Weyrovy teorie. Byl publikován roku 1956 pod názvem *Poznámka o limitním přechodu diferenčních rovnic v rovnice diferenciální*. Jak název napovídá, hlavní náplní je otázka, zda při jistém limitním přechodu od diferenčních rovnic k diferenciálním se také řešení soustavy diferenčních rovnic transformuje na řešení soustavy rovnic diferenciálních. Jiří

[182] Teorii „dal“ jméno francouzský matematik Achille Marie Gaston Floquet (1847–1920); viz jeho práce *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques* [Fq1] z roku 1883.

[183] Viz Fortův článek *Finite differences and difference equations in the real domain* [Fo1] z roku 1948.

Čermák se přitom omezil na homogenní lineární rovnice s konstantními koeficienty.[184] Vyšel ze soustavy diferenčních rovnic a ukázal, že za určitých předpokladů „jeho“ fundamentální řešení diferenčních rovnic při limitním přechodu přejde ve fundamentální řešení diferenciálních rovnic, které odvodil Otakar Borůvka.

Rozlučme se s brněnským kolektivem matematiků citací slov Otakara Borůvky:

Ze svých zkušeností soudím, že právě menší univerzity dávají dobré podmínky k vědeckému rozvoji pracovníků. Nejenom proto, že poměry obvykle na každém pracovníku vyžadují širší výběr přednášek, a tím překážejí přílišné specializaci, ale i tím, že pracovní ovzduší bývá klidnější a lidé si stojí blíže, než tomu bývá ve velkých kolektivech. Právě pro krásné prostředí, které vždycky mezi brněnskými matematiky bylo, jsem nikdy netoužil místo svého působení změnit. ([Bo9], str. 95)

[184] Podobný problém podrobněji studoval Alvin Walter (1898–1967) v práci *Zum Grenzübergange von Differenzengleichungen in Differentialgleichungen* [Wa1] z roku 1926.