4 Ojedinělé práce o maticích po roce 1900

Po zveřejnění významných výsledků Eduarda Weyra nastalo v českých zemích čtyřicet let trvající období, v němž nebyly podstatné texty z teorie matic psány. Publikovány byly jen práce psané stále řečí teorie determinantů, případně řečí teorie forem či substitucí.[134] Vzhledem k úzké propojenosti uvedených disciplín s teorií matic se poznatky maticového počtu v těchto pracích okrajově také vyskytují. Máme na mysli především články, které publikovali Karel Petr (1868–1950), Václav Simandl (1887–1918), Václav A. Hruška (1888–1954), Jaroslav Jarušek (1889–?) či Karel Rössler.

Dlouhou etapu, v níž u nás nebyly publikovány významnější texty, které by se podrobněji věnovaly teorii matic, ukončil ve třicátých letech 20. století Weyrův žák Bohumil Bydžovský.

4.1 Maticový počet v pracích Karla Petra

- *Několik poznámek o determinantech* [Pe4], 1906, maď. 1906, něm. 1908
- *Die symmetrischen Zahlensysteme und der Satz von Sturm* [Pe5], 1906
- *O definici determinantu* [Pe6], 1931
- *O racionálném kanonickém tvaru lineární substituce* [Pe7], 1940
- *O Weyrově činnosti v math. analysi a algebře* [Pe2], 1905

Po smrti Františka Josefa Studničky a Eduarda Weyra, dvou významných osobností české matematické komunity druhé poloviny 19. století, začal v roce 1903 vést přednášky z matematiky na filozofické fakultě české univerzity Karel Petr.[135]

Dvě jeho práce týkající se teorie determinantů nalezly odezvu v cizojazyčné literatuře. Jedná se o články z roku 1906 nazvané *Několik poznámek o determinantech* a *Die symmetrischen Zahlensysteme und der Satz von Sturm.* První z nich je zmíněn jak v rozsáhlé Wedderburnově bibliografii, která je

[134] Přechod matematické komunity od teorie determinantů, bilineárních forem a substitucí k teorii matic je popsán v 1. kapitole.

[135] Karel Petr byl posluchačem matematiky a fyziky na české univerzitě v Praze, deset let učil na středních školách. Roku 1902 se habilitoval na české vysoké škole technické v Brně, v roce 1903 byla jeho habilitace přenesena na českou univerzitu v Praze. Téhož roku se zde stal mimořádným a roku 1908 řádným profesorem.

Jeho odborná činnost zahrnuje teorii čísel, teorii algebraických forem, teorii determinantů, numerické metody i matematickou analýzu, kterou sepsal do rozsáhlých učebnic.

Karel Petr byl děkanem přírodovědecké fakulty, rektorem Univerzity Karlovy, aktivním členem Jednoty a redaktorem matematické části Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

Více informací o životě Karla Petra viz např. článek Františka Nušla (1867–1951) a Miloše Kösslera (1884–1961) *Karel Petr* [NK1] nebo diplomová práce Zdeňky Crkalové (nar. 1969) *Život a dílo Karla Petra* [Ck1], která byla obhájena v roce 2000 na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze.

Shnutí odborné práce Karla Petra z období přibližně dvaceti posledních let jeho činnosti, které bylo napsáno ještě v době jeho života, čtenář nalezne v článcích Vladimíra Kořínka (1899–1981) *Stručný přehled vědeckých prací profesora Karla Petra v desítiletí 1928–1938* [Ki1] a *Stručný přehled vědeckých prací profesora Karla Petra v desítiletí 1938–1948* [Ki2].

součástí jeho monografie *Lectures on Matrices* [Wd2] z roku 1934, tak v historickém přehledu Thomase Muira *Contributions to the History of Determinants 1900–1920* [Mu4] z roku 1930. Tato Petrova práce byla uveřejněna ještě téhož roku v maďarštině s titulem *Néhány megjegyzés a determinánsok elmeletéhez* a o dva roky později v němčině pod názvem *Einige Bemerkungen über die Determinanten.*[136] Podotkněme ještě, že Karel Petr v textu pojem matice na několika místech použil, ale nikde jej nedefinoval. Druhá z Petrových publikací, *Die symmetrischen Zahlensysteme und der Satz von Sturm*, je také zmíněna v knize Thomase Muira. Upoutala rovněž pozornost Georga Ferdinanda Frobenia, jednoho z nejvýznamnějších matematiků té doby, který na ni navázal v témže roce článkem *Über das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen II* [Fr10], v němž se na českého matematika několikrát odvolal.[137]

Slovo matice nalézáme rovněž v Petrově článku *O definici determinantu* z roku 1931. Z následující citace lze vyčíst, že i pro matematiky, kteří se v českých zemích zabývali spíše determinanty než maticemi, začalo „již“ být na začátku třicátých let 20. století přirozené definovat determinant pomocí matice, a kopírovali tak světový vývoj. K použité terminologii poznamenejme, že *kvadratickou maticí* Karel Petr rozuměl matici čtvercovou.

Nejběžnější definicí determinantu – jakožto funkce n^2 proměnných sestavených v kvadratickou matici – jest, že se podá jeho explicitní vyjádření pomocí těchto proměnných. ([Pe6], str. 14)

Touto zmínkou však výskyt termínu matice v uvažované práci končí, dále se v ní pracuje vedle determinantů pouze s formami.

Jinak je tomu u Petrova článku *O racionálném kanonickém tvaru lineární substituce* z roku 1940. V něm se současně vyskytují termíny determinant, lineární substituce, transformace, lineární forma, lineární vztah, soustava rovnic či matice. V práci je navíc specifikováno, že koeficienty (substituce, matice atd.) jsou z (číselného, komutativního) tělesa, což nebylo v dosud zmíněných pracích, včetně slavných publikací Eduarda Weyra, uvedeno.

Překvapivé je, že ještě v této práci z roku 1940 používal Karel Petr k označení matice (čtvercového schématu) složené závorky. Determinanty značil dle našich zvyklostí. Rovněž způsobem označení matice symbolem se nelišil od našeho, neboť používal velké písmeno bez závorek či indexů. Avšak v případě, kdy chtěl konkrétněji označit prvky matice, nepsal je do závorek, např. (a_{ik}), ale používal vyjádření *matice čísel* a_{ik}. K označení matice typu $n \times 1$, neboli sloupcového vektoru, používal písmeno značící název matice umístěné do hranatých závorek.

Posledně jmenovaná publikace Karla Petra je zmíněna v knížce *Vectors and Matrices* [Mc3], kterou roku 1943 publikoval Cyrus Colton MacDuffee.

O teorii matic se hovoří rovněž v Petrově textu, který není jeho odbornou prací, ale spíše historickým pojednáním. V roce 1905, dva roky po smrti Edu-

[136] Tyto dvě cizojazyčné verze jsou rovněž uvedeny ve Wedderburnově bibliografii i v Muirově přehledu.

[137] Thomas Muir ve své knize *Contributions to the History of Determinants 1900–1920* o tomto Frobeniově textu napsal:

… paper, known as his second paper on the Law of Inertia, … ([Mu4], str. 142)

arda Weyra, publikoval Karel Petr spolu s Janem Sobotkou (1862–1931) čtveřici článků, která je souhrnně nazvána *O životě a činnosti Eduarda Weyra* [PS1]. Jedním z nich je text nazvaný *O Weyrově činnosti v math. analysi a algebře*, v němž se Karel Petr velkou měrou zabýval maticovým aparátem ve Weyrových pracích.

Z následujícího úryvku je zřejmé, že ani v prvním desetiletí 20. století nebyla teorie matic mezi českou matematickou komunitou příliš rozšířena.

Chtěje ... vyložiti výsledky, jichž se v pracích svých v různých oborech dopracoval, započnu přirozeně s tím oborem jejím, jemuž nejvíce pojednání Weyr věnoval a v němž získal si nejvíce zásluh. Jest to nauka o maticích a s touto úzce související theorie systémů komplexních čísel. ... vzhledem k tomu, že názvosloví v nauce o maticích není ustáleno a článek tento jest psán pro širší kruh čtenářstva mathematického, vysvětlím v následujícím nejprve co nejstručněji základní definice a pojmy. ([Pe2], str. 468)

Z Petrova pojednání můžeme rovněž vytušit, že stejně jako ve světě[138] nebylo ani u nás násobení matic v prvním desetiletí 20. století triviálním pojmem. V jeho stati bylo zavedeno pomocí složení dvou substitucí a v zápisu jeho vlastností se objevují uvozovky, které naznačují, že násobení matic nebylo tehdy stále ještě zcela přijato:

Toto „násobení“ matic není úkonem záměnným, jest však úkonem associativním. ([Pe2], str. 469)

4.2 Matice a Václav Simandl

- *O zvláštních determinantech* [Si1], 1913
- *Vyčíslení zvláštního determinantu* [Si2], 1915

Václav Simandl[139] publikoval v roce 1913 článek *O zvláštních determinantech*. Vytvářel v něm čtvercové (v jeho terminologii *quadratické*) matice tvaru

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & p_0B_0 & * & * & \cdots & * & * \\ B_0 & A_0 & (p_0-1)B_0 & * & \cdots & * & * \\ * & 2B_0 & A_0 & (p_0-2)B_0 & \cdots & * & * \\ * & * & 3B_0 & A_0 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & \cdots & A_0 & B_0 \\ * & * & * & * & \cdots & p_0B_0 & A_0 \end{pmatrix},$$

[138] Viz 1. kapitola.

[139] Václav Simandl studoval na české technice a na české univerzitě v Praze. Tři semestry poslouchal významné německé matematiky na univerzitě v Göttingen. V roce 1912 se stal asistentem deskriptivní geometrie na české technice v Brně, v akademickém roce 1915/16 se habilitoval. Vedle studia algebry (především teorie determinantů) se zabýval hlavně projektivní a deskriptivní geometrií.

Více informací o jeho životě a díle viz článek *Za † Dr. Václavem Simandlem* [Ps1], který roku 1919 publikoval Miloslav Pelíšek (1855–1940).

kde p_0 je určité přirozené číslo, hvězdičky jsou čtvercové nulové matice a A_0, B_0 jsou opět čtvercové matice uvedeného typu, jejichž prvky jsou opět matice téhož typu, *a tak můžeme stále pokračovati, až přijdeme k maticím, jejichž prvky můžeme již pokládati za prosté prvky.* ([Si1], str. 535)

Upozornil, že speciálním případem determinantů matic uvedeného tvaru jsou tzv. *Cayleyovy-Sylvesterovy determinanty*,[140] které lze zapsat schématem

$$\begin{vmatrix} a & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & p-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & p-2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p & a \end{vmatrix},$$

a také *Puchtovy-Noetherovy determinanty*,[141] které mají tvar

$$C = \begin{vmatrix} A_0 & B_0 \\ B_0 & A_0 \end{vmatrix},$$

kde A_0, B_0 jsou čtvercové matice tvořené stejným způsobem jako matice C. Jejich řád je vždy 2^n, kde $n \in \mathbb{N}$; pro $n = 3$ se jedná o determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 & a_6 & a_5 & a_8 & a_7 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 & a_7 & a_8 & a_5 & a_6 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_6 & a_5 & a_8 & a_7 & a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \\ a_7 & a_8 & a_5 & a_6 & a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Puchtovy-Noetherovy determinanty jsou symetrické podle obou diagonál.

[140] Viz práci Arthura Cayleyho *On the determination of the value of a certain determinant* [Cy5] z roku 1858, str. 163, a poznámku Jamese Josepha Sylvestera *Théorème sur les déterminants* [Sy8] z roku 1854, str. 305.

[141] Viz německé vydání knihy Ernesta Pascala *I determinanti* z roku 1897, které vyšlo roku 1900 v překladu Hermanna Leitzmanna pod názvem *Die Determinanten*, str. 80.

Anton Puchta (1851–1903) byl od roku 1874 asistentem a docentem na pražské technice a univerzitě. Po rozdělení univerzity na německou a českou se v roce 1882 stal profesorem matematiky na německé univerzitě v Praze. V pozdějších letech působil na univerzitě v Černovicích. Příslušný výsledek o rozkladu symetrického determinantu na lineární faktory dokázal roku 1878 v práci *Ein Determinantensatz und seine Umkehrung* [Ph1].

Max Noether (1844–1921), otec známé matematičky Emmy Amalie Noether (1882–1935), studoval v Heidelbergu, kde se roku 1870 stal soukromým docentem, o čtyři roky později mimořádným profesorem a roku 1888 řádným profesorem. Patřil mezi nejvýraznější matematiky 19. století, kteří se zabývali algebraickou geometrií. Zmíněný výsledek o symetrických determinantech uvedl o dva roky později než Anton Puchta, a to v práci *Notiz über eine Classe symmetrischer Determinanten* [Nh1].

Václav Simandl se však nevěnoval těmto speciálním typům, ale maticím obecnějším (viz výše uvedená matice A), přičemž na každou nově složenou blokovou matici A_n kladl podmínku vyjádřenou rekurentním vztahem vzhledem k maticím z předchozího „vkládání matic do matice“, tj. každá nově vzniklá bloková matice A_n závisí na maticích A_{n-1} a B_{n-1}, které se vyskytují v blocích na diagonále a v linii bloků těsně nad diagonálou blokové matice A_n, přičemž matice A_0, B_0, A_1, B_1 stojící na počátku tohoto procesu jsou zadané. Dokázal, že takto vzniklé determinanty lze vždy rozložit na lineární faktory a tyto faktory určil.

Podotkněme, že Simandl ohraničoval determinant jednou svislou čarou a matici dvěma svislými čarami na každé straně schématu. Ač se hlavní výsledek práce týká determinantů, je při výkladu překvapivě dávána přednost maticím (ve formě čtvercového schématu je uvedeno dvacet matic a pouhé dva determinanty) a poté je o příslušném determinantu hovořeno jako o determinantu této matice.[142] Spojení *determinant matice* (od matice k determinantu) je dnes zcela běžné. O to více je pozoruhodná skutečnost, že Simandl o dva roky později použil ve svém článku *Vyčíslení zvláštního determinantu* opačný postup (od determinantu k matici). Článek je opět věnován určení hodnoty determinantu matice jistého speciálního tvaru, přesto se autor na řadě míst vyjadřoval, z dnešního pohledu zbytečně, pomocí matic, a to i na místech, v nichž by postačila řeč determinantů. Zcela běžný je zde pojem matice determinantu, v práci se vyskytují formulace následujícího typu:

Abychom dostali hodnotu tohoto determinantu, přeměníme jeho quadratickou matici v jinou matici určitými transformacemi ... ([Si2], str. 43)

Dostane potom náš determinant quadratickou matici tvaru ... ([Si2], str. 44)

Zatímco v článku *O zvláštních determinantech* psal Simandl především o *determinantu matice*, v práci *Vyčíslení zvláštního determinantu* hovořil naopak častěji o *matici determinantu.*

Práce *Vyčíslení zvláštního determinantu* se objevila v Muirově historickém přehledu *Contributions to the History of Determinants 1900–1920*, je v něm však uveden nesprávný rok jejího publikování (1914).

4.3 Zlomky maticového aparátu v dalších pracích

Při studiu Abelových funkcí tří proměnných využíval maticový počet Václav A. Hruška.[143] Objevil se v jeho pojednání *O systémech singulárních relací mezi periodami Abelových funkcí tří proměnných* [Hk1] z roku 1919 a v sérii článků *Redukce svazku bilineárních forem a systému relací mezi periodami nedegene-*

[142] Pouze na dvou místech se mluví o matici determinantu.

[143] Václav A. Hruška po studiu na české technice a univerzitě v Praze získal aprobaci pro výuku matematiky a deskriptivní geometrie na středních školách. Postupně se stal asistentem, soukromým docentem a profesorem české techniky v Praze. Zabýval se především numerickými metodami, stál u počátků Laboratoře matematických strojů, z níž se později stal Výzkumný ústav matematických strojů.

Bližší informace o Václavu Hruškovi viz například články Václava Pleskota (1907–1982) *Zemřel profesor Dr Václav Hruška* [Po1] a *Prof. Dr. Václav Hruška* [Po2].

rovaných singulárních Abelových funkcí tří proměnných [I.], [II.], [III.] ([Hk2], [Hk3], [Hk4]) z roku 1922.

S maticemi okrajově pracoval také Jaroslav Jarušek[144] v článku *O algebraických rovnicích s vícenásobnými kořeny* [Ja1] z roku 1923. Na jediném místě matici použil i o dva roky později v práci *O některých semiinvariantech vyjádřených determinanty* [Ja2].

V roce 1932 publikoval krátkou poznámku *Příspěvek k teorii determinantů* [Rl1] Karel Rössler. V ní zobecnil větu o hodnosti matice z knihy Bohumila Bydžovského *Základy teorie determinantů a matic a jich užití* [By1] (viz dále).[145] Své tvrzení Rössler vyslovil řečí matic, dokázal je pomocí nalezení nenulového subdeterminantu příslušného řádu.

Václav Simandl, Václav Hruška, Jaroslav Jarušek i Karel Rössler používali k ohraničení determinantu jednu svislou čáru a k omezení matice dvě svislé čáry podél každé strany uvažovaného schématu. Karel Petr byl svým zápisem matic do složených závorek v českých zemích v prvních desetiletích 20. století výjimkou, způsobem značení determinantu se však od ostatních nelišil.

Všichni zmínění matematikové používali termín *matice*, který zavedl Eduard Weyr roku 1889 ve svém spisu *O theorii forem bilinearných*. Termín *matrice* se v pozdější české literatuře již nepoužíval.

4.4 Teorie matic v publikacích Bohumila Bydžovského

- *Základy teorie determinantů a matic a jich užití* [By1], 1930, 1947
- *Sur les matrices orthogonales symétriques* [By2], 1936

Bohumil Bydžovský byl na univerzitě žákem Eduarda Weyra, při studiích se setkal rovněž s Františkem Josefem Studničkou a Karlem Petrem. Především Weyr měl na mladého Bohumila Bydžovského velký vliv a nasměroval jeho pozdější profesní dráhu. Zmínil se o tom Karel Koutský (1897–1964) v článku *Sedmdesátiny prof. Dr Bohumila Bydžovského* [Ky1] z roku 1950:

Po maturitě vstoupil na filosofickou fakultu Karlovy university v Praze (tehdy nazývané Karlo-Ferdinandovou), kde v létech 1898 až 1902 studoval matematiku a fysiku. Jak sám vzpomíná, zabýval se však v prvních dvou létech mnohem více filosofií a dějinami literatury nežli matematikou. Teprve Weyrovy a Koláčkovy přednášky připoutaly jej silněji k matematickému studiu. Zejména Ed. Weyr měl naň velký vliv a prý velmi litoval, že pro nemoc jej nezkoušel.
([Ky1], str. D350)

Bohumil Bydžovský působil sedm let jako středoškolský učitel v Kutné Hoře, Praze a Kladně, později se výrazně zapojil do školských reforem. Roku 1909 se habilitoval na české univerzitě v Praze, kde přednášel až do svých sedmdesáti

[144] Jaroslav Jarušek byl středoškolským pedagogem a od akademického roku 1915/16 neplaceným asistentem na *c. k. mathematicko-fysikálním semináři*, který fungoval při filozofické fakultě české univerzity.

[145] Karel Rössler se na knihu odvolává pouze pod názvem *Základy teorie determinantů*, což jsou slova uvedená na deskách 1. vydání Bydžovského knihy. Konkrétně odkazuje na její 52. odstavec, což je část s názvem *Subdeterminanty determinantu hodnosti p* (str. 95–96).

sedmi let. V letech 1911 až 1917 vyučoval i na české technice. V roce 1917 byl na univerzitě jmenován profesorem titulárním, o dva roky později mimořádným a následující rok řádným. Ve školním roce 1930/31 zastával funkci děkana Přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy, v roce 1946/47 a 1948 byl rektorem.

Svůj vědecký zájem soustřeďoval především na algebraickou geometrii (s důrazem na teorii rovinných algebraických křivek), analytickou a diferenciální geometrii, teorii nekonečných grup a teorii konfigurací. Je autorem či spoluautorem několika učebnic pro vysoké a střední školy.[146]

V roce 1930 publikoval Bohumil Bydžovský v edici Knihovna spisů matematických a fysikálních[147] knížku *Základy teorie determinantů a matic a jich užití*, jejíž druhé, mírně upravené vydání z roku 1947 nese název *Úvod do teorie determinantů a matic a jich užití*. Je první česky psanou knihou se slovem *matice* v názvu a jednou z nejstarších knih této vlastnosti na světě. První taková kniha vyšla roku 1913.[148] Na straně druhé však podotkněme, že uvedený název 1. vydání je v plném znění uveden až v knize (na titulním listu), na deskách je uveden zkrácený titul *Základy teorie determinantů* a na hřbetu pouze zjednodušený název *Determinanty*.

V předmluvě k prvnímu vydání Bohumil Bydžovský zdůraznil nedávné přijetí teorie matic světovou matematickou komunitou a poukázal na její nesporné výhody:

Od běžných učebnic jednajících o determinantech se liší tato tím, že obsahuje základy počtu maticového; je to odůvodněno velkou důležitostí, které nabyl tento počet v posledních letech svou účinnou a hospodárnou symbolikou. ([By1], předmluva)

Kniha je rozdělena na dvě části: *Teorie determinantů a jich užití* a *Teorie matic a jich užití*. Po nich následuje desetistránkový historický přehled, který je však věnován takřka výhradně teorii determinantů. Jeho součástí je seznam několika učebnic k danému tématu. V historické části se objevuje i jméno Eduarda Weyra, z jeho prací je zmíněn spis *O theorii forem bilinearných*.

Vraťme se však k rozdělení textu na dvě základní části. Přestože autor označil teorii matic za nadřazenou teorii determinantů, první části věnoval 140 stran, druhé pouze 56 stran.[149] Toto dělení však není striktní a dalo by se říci, že není příliš šťastné, jak pochopíme z rozboru obsahu publikace.

[146] O životě a díle Bohumila Bydžovského bylo publikováno mnoho (jubilejních) článků. Jmenujme alespoň některé z nich: Koutský K., *Sedmdesátiny prof. Dr Bohumila Bydžovského* [Ky1]; Metelka J., *K 80. narozeninám akademika Bohumila Bydžovského* [Mt1]; Bílek J., *Akademik Bohumil Bydžovský osmdesátníkem* [Bi1]; Havlíček K., *Osmdesát pět let akademika Bohumila Bydžovského* [Hv1]; Šindelář K., *Památce akademika Bohumila Bydžovského* [Sd1]; Drábek K., *Sto let od narození akademika Bohumila Bydžovského* [Dr1]. Bohumilu Bydžovskému byly rovněž věnovány disertační práce Ladislavy Francové-Provazníkové (nar. 1964) *Život a dílo Bohumila Bydžovského (1880–1969)* [Fc1] a Jany Hromadové-Olejníčkové (nar. 1977) *Vědecké dílo Bohumila Bydžovského* [Hd1]. Obě byly obhájeny na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze, první v roce 2001, druhá roku 2005.

[147] Konkrétně se jedná o 14. svazek.

[148] Viz 1. kapitola.

[149] Počet a čísla stran knihy jsou uvedeny vzhledem k prvnímu vydání.

Text je stavěn od úplných základů. Ihned na první stránce první části v poznámce pod čarou je například podrobně vysvětleno, jak zapisovat a číst pravé dolní indexy koeficientů soustavy rovnic (tedy posléze i koeficientů prvků determinantů a matic).[150]

Zajímavé je zavedení pojmu determinant. Nejprve je v partii věnované soustavě dvou lineárních rovnic o dvou neznámých definován determinant druhého řádu jako výraz $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, který se při řešení této soustavy vyskytl. Teprve poté je mu přiřazeno čtvercové schéma prvků, tj. matice. Dále je v paragrafu o soustavě tří rovnic o třech neznámých zaveden determinant třetího řádu a teprve poté determinant n-tého řádu (již pomocí matice), a to jako součet $n!$ součinů opatřených znaménkem příslušné permutace.

Právě při obecném zavedení determinantu se v knize poprvé vyskytuje pojem matice, též matrix (již na straně 13). Je zavedena jako soustava mn čísel napsaných v m řádcích a n sloupcích. Její prvky jsou též nazývány elementy matice. Běžně jsou používána slovní spojení *determinant matice* (též *determinant jejích n^2 prvků*) i *matice determinantu*.

Nepříliš ostrou hranici mezi teorií determinantů a teorií matic dokumentuje rovněž skutečnost, že kapitola *Hodnost matice* je již v první části knihy. Tento pojem je definován pomocí nulovosti a nenulovosti subdeterminantů. V první části knihy je též vyložena teorie soustav lineárních rovnic, v níž je nutná a postačující podmínka řešitelnosti soustavy uvedena sice nejprve v řeči determinantů, ale ihned poté pomocí rovnosti hodností matice soustavy a rozšířené matice soustavy – tzv. Frobeniova věta je vyslovena v podstatě naším současným způsobem. Souhrnně tedy lze říci, že první část sice pojednává primárně o determinantech, ale uvážil-li autor, že je vhodnější v daném místě použít matici, učinil tak. Zcela svobodně přecházel mezi oběma teoriemi a kombinoval je. Někde však mělo toto prolínání i negativní důsledky v podobě občasného „zdvojení pojmů“. Například před již zmíněnou problematikou hodnosti matice definoval Bohumil Bydžovský i pojem *hodnost determinantu*, po zavedení hodnosti pro oba objekty napsal:

Přirovnáme-li definici hodnosti matice k definici hodnosti determinantu, vidíme, že hodnost determinantu je totožná s hodností jeho matice.
([By1], str. 48)

Poznamenejme ještě, že knížka rovněž uvádí vyjádření hodnosti matice pomocí lineární nezávislosti jejích řádků.

Vyjadřování na hranici dvou oborů je ještě více očividné z následujícího úryvku:

Vynecháme-li v matici determinantu řádek a sloupec, jež se kříží v prvku a_{ik}, obdržíme matici, jejíž determinant ... ([By1], str. 40)

Pro dnešního čtenáře je zcela nepochopitelné zavedení tzv. *řádkového* (též

---

[150] Z dnešního pohledu se jedná o výklad zcela triviální:
Píšeme a_{11}, a_{12} atd., nikoli $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, atd., což by bylo jasnější, avšak obšírnější; čteme ovšem a jedna jedna, a jedna dvě, atd. Oba indexy oddělujeme čárkou, jen když by jinak mohlo vzniknouti nedorozumění. Tak na př. je třeba psáti $a_{2,\,n-1}$, ježto a_{2n-1} má zřejmě jiný význam. ([By1], str. 1)

skalárního) součinu dvou matic, jehož výsledkem je determinant. („Obyčejné“ násobení matic je definováno v druhé části již dle našich zvyklostí.)

Řádkový součin dvou matic o stejném počtu (m) řádků a stejném počtu (n) sloupců nazýváme determinant stupně m-ho, jehož prvek stojící v i-tém řádku a k-tém sloupci je roven součinu i-ho řádku matice první a k-ho řádku matice druhé. ([By1], str. 102)

Jestliže byl maticového počtu chtivý čtenář při četbě první části *Teorie determinantů a jich užití* příjemně překvapen, bude pro něj druhá část *Teorie matic a jich užití* spíše zklamáním. Nalezne v ní totiž ve značné míře teorii forem, o čemž vypovídají již názvy čtyř jejích kapitol: *1. Počet maticový*, *2. Formy lineární a bilineární*, *3. Formy kvadratické I.* a *4. Formy kvadratické II.* Nicméně 1. kapitola druhé části je plně věnována základům maticového počtu. Bohumil Bydžovský zde zdůraznil výhody chápání matic jako nových objektů:

V úlohách, v nichž vystupují matice, ... se mluví o určitém výkonu, jehož předmětem je matice jako celek. Dospíváme tak zvláštního způsobu symbolického počítání maticemi, jímž se důkazy i znění některých vět velmi zjednodušují a jenž obdržel název počtu maticového (počítáme maticemi). ([By1], str. 141)

Následují zmíněné tři kapitoly věnované lineárním, bilineárním a kvadratickým formám a jejich souvislostem s maticemi.

Velmi překvapující je skutečnost, že zatímco matice jsou v první části knihy značeny bez jakýchkoli závorek nebo čar, v druhé znenadání a bez vysvětlení do kulatých závorek. V první části druhého vydání z roku 1947 rovněž nejsou matice ničím ohraničeny, ale ve druhé části jsou omezeny dvěma dvojicemi svislých čar a v poznámce pod čarou je podotknuto, že k označení matice lze použít i kulaté závorky.

Co se týče terminologie, jsou použité výrazy často totožné se současnými termíny, nebo jsou až na výjimky posuny od dnešní řeči natolik malé, že jsou pojmy intuitivně pochopitelné (některé dnes již nepoužívané termíny jsou pouhým důsledkem již zmíněného přecházení mezi teorií determinantů a teorií matic). Bohumil Bydžovský například používal termínů *n-řadový determinant*, *determinant n-tého stupně*, výjimečně i *determinant řádu n* (dnes používáme pouze termín determinant řádu n), *determinant soustavy* (determinant matice soustavy lineárních rovnic), *čtverečná matice* (čtvercová matice), *hlavní prvky matice* (prvky na hlavní diagonále matice), *jednořadový determinant* či opisem také *determinant mající samojediný prvek* (determinant řádu 1), *řady matice* (nadřazený pojem pro řádky a sloupce matice), *rovnoběžné řady matice* (množina některých řádků, nebo množina některých sloupců matice), *dvě řady matice, které nejsou rovnoběžné* (řádek a sloupec matice), *hlavní permutace* (identická permutace), *determinant tvaru diagonálního* (determinant diagonální matice), *souměrná matice* (symetrická matice), *souměrný determinant* (determinant symetrické matice), *resultant* či *eliminant soustavy* (determinant matice, jejímiž prvky jsou koeficienty soustavy $n + 1$ lineárních rovnic o n neznámých včetně pravé strany soustavy), *dva přidružené subdeterminanty* (dva subdeterminanty téhož determinantu, přičemž prvky jednoho z nich jsou vzaty ze všech řádků a sloupců, ze kterých nejsou vzaty prvky subdeterminantu druhého), *p-krát vroubený determinant* (determinant, k němuž bylo přidáno pod poslední řádek p řádků a za poslední sloupec p sloupců, prvky v průsečících přidaných, tzv. *vroubících* řádků a sloupců jsou obvykle rovny nule), *sdružená*, výjimečně *transponovaná matice* (transponovaná matice), *polosouměrný determinant* (determinant antisymetrické matice). *Rovnicí sekulární* autor rozuměl rovnici typu

$$|A + \lambda E| = 0,$$

kde A je symetrická matice a E je jednotková matice. Jedná se tedy v podstatě o charakteristickou rovnici, ale pojem je definován pouze pro matici symetrickou. Kořeny této *sekulární rovnice* jsou čísla opačná k vlastním číslům matice A.

Neustálené byly v době publikování knížky (1. i 2. vydání) pojmy subdeterminant, minor a *doplněk prvku* a_{ij}, který dnes obšírněji nazýváme algebraický doplněk prvku a_{ij}. *Doplněk prvku* a_{ij} definoval Bohumil Bydžovský dle našich zvyklostí. Determinant, který vznikne z daného determinantu řádu n vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce, nazval *subdeterminantem přidruženým prvku* a_{ij} a zároveň v poznámce pod čarou uvedl, že je možné používat i termín minor. Zde však současně upozornil na skutečnost, že někteří autoři termínem minor označují pojem, který on pojmenoval jako doplněk daného prvku. Oba pojmy se tedy pro lichý součet $i + j$ liší ve znaménkách.

Uvážíme-li uvedenou terminologii, není problém s „překladem" Bydžovského textu do současné řeči. Dokumentujme to na konkrétním, dnes notoricky známém tvrzení:

Jsou-li prvky souměrného determinantu vesměs reálné, má příslušná rovnice sekulární všechny kořeny reálné. ([By1], str. 115)

Součástí Bydžovského knížky jsou úlohy uvedené na konci každé kapitoly (cca 20 problémů pro každou z nich). Jedná se o početní příklady, ale i o odvození některých vztahů či důkazové úlohy. Také v samotném výkladu je občas uveden příklad, který je navíc řešený.

V roce 1936 publikoval Bohumil Bydžovský článek *Sur les matrices orthogonales symétriques.* V něm nejprve dokázal, že je-li h hodnost matice $A + E$, kde A je symetrická ortogonální matice řádu n a E jednotková matice stejného řádu, potom hodnost matice $A - E$ je právě $n - h$. Dále dokázal, že násobnost kořene 1 charakteristické rovnice matice A je h a kořene -1 je $n - h$, a proto můžeme tuto charakteristickou rovnici psát ve tvaru[151]

$$(\lambda + 1)^{n-h}(\lambda - 1)^h = 0.$$

Autor využil tohoto vztahu a teorie elementárních dělitelů k odvození tvaru čtvercového schématu, kterým je možno reprezentovat každou symetrickou ortogonální matici A. Uvedený tvar, který závisí na hodnosti h matice $A + E$,

[151] Bohumil Bydžovský však uvažoval, stejně jako v knížce z roku 1930, „charakteristickou rovnici" ve tvaru $|A + \lambda E| = 0$ místo dnes používaného tvaru $|A - \lambda E| = 0$. Proto došel k výsledku opticky přesně opačnému: násobnost kořene 1 je $n - h$ a kořene -1 je h. „Charakteristickou rovnici" tak vyjádřil v podobě $(\lambda + 1)^h(\lambda - 1)^{n-h} = 0$.

autor dále upravoval na součin jednodušších matic. Ukázal, že každou takovou matici A lze psát jako součin buď $n - h$ nebo h ortogonálních symetrických matic tvaru $E - 2bb'$, kde b jsou sloupce vhodně zvolené ortogonální matice B (b' značí vektor transponovaný k vektoru b). V případě h součinů dále představil velmi snadný způsob nalezení vektorů $b_i, \ldots, b_h$. Jedná se o vektory, které jsou řešením soustavy rovnic $(A - E)b_i = o$. Protože pro ortogonální symetrickou matici A platí $A = A^T = A^{-1}$, platí rovněž $A^2 = E$. Odtud

$$(A - E)(A + E) = A^2 - E = E - E = O$$

a zmíněné vektory b_i, které jsou řešením soustavy rovnic $(A - E)b_i = o$, jsou lineárními kombinacemi sloupců matice $A + E$.

Bydžovského článek je zmíněn v části *Normalformen von Matrizen* [Pg2] nedokončeného, velkoryse koncipovaného přepracovaného vydání *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.* Zmíněná stať byla publikována roku 1953, jejím autorem je Günter Pickert (nar. 1917).

4.5 Další matematikové našeho regionu

Významných výsledků v teorii matic dosáhli němečtí matematici, kteří jsou úzce spjati s českými zeměmi. Dodnes jsou známy tzv. *Pickovy matice*, v současných článcích a monografiích publikovaných po celém světě se běžně vyskytuje pojem *Loewnerovy matice.* Oba matematikové, jejichž jména jsou součástí zmíněných termínů, však značnou část svého života prožili mimo naše země.

Georg Alexander Pick (1859–1942) se narodil ve Vídni, kde také vystudoval, obhájil svou disertační práci a strávil zde i většinu z posledních patnácti let svého života. V podstatě celé své tvůrčí období však působil v Praze. Charles Loewner (1893–1968), Pickův doktorand, v roce 1939 emigroval do Spojených států amerických.[152]

---

[152] Zmiňme se podrobněji o obou matematicích.

Georg Alexander Pick publikoval první matematický článek v pouhých sedmnácti letech, v roce 1880 obhájil disertační práci na vídeňské univerzitě, v následujícím roce sepsal i práci habilitační, habilitoval se v roce 1882. Již po doktorátu se stal asistentem Ernesta Macha (1838–1916) na Karlo-Ferdinandově univerzitě v Praze. V roce 1892 byl jmenován řádným profesorem na německé univerzitě v Praze, v roce 1900/1901 zde byl děkanem filozofické fakulty. Penzionován byl v roce 1929, poté odešel zpět do Vídně. Po anšlusu Rakouska v roce 1938 se vrátil do Prahy. Roku 1942 byl zařazen do transportu do ghetta Terezín, kde po dvou týdnech zemřel.

Více o jeho životě a díle viz například článek Ivana Netuky (nar. 1944) *Georg Pick – pražský matematický kolega Alberta Einsteina* [Nu1] z roku 1999.

Charles Loewner se narodil jako Karel Löwner v Lánech nedaleko Prahy v německé židovské rodině. Byl veden k německé výchově a vzdělání, absolvoval nejprve německé gymnázium a poté německou univerzitu v Praze. Přesto však perfektně ovládal (na rozdíl od Picka) český jazyk slovem a písmem. Disertační práci vedenou Pickem obhájil roku 1917. Do roku 1922 působil na pozici asistenta na německé technice v Praze, poté odešel na Humboldtovu univerzitu do Berlína, kde se následujícího roku habilitoval. Roku 1928 přešel do Kolína nad Rýnem, kde byl mimořádným profesorem, v roce 1930 se vrátil do Prahy, od tohoto roku byl mimořádným a od roku 1934 řádným profesorem německé univerzity v Praze. V roce 1939 emigroval do zámoří, kde pracoval na několika univerzitách (Louisville University, Brown

V současných pracích je často referována Loewnerova takřka čtyřicetistránková práce *Über monotone Matrixfunktionen* [Lo2] z roku 1934, zmiňován je i jeho krátký článek *On totally positive Matrices* [Lo1] z roku 1955. Z Pickových prací z teorie matic uveďme článek z roku 1922 *Über die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen von Schwingungsproblemen* [Pc1].

Poznamenejme ještě, že na celosvětově známé výsledky později navázala Olga Taussky-Todd (1906–1995), která se narodila v Olomouci. Po třech letech se rodina přestěhovala do Vídně, poté do Lince, po vzniku Československa v roce 1918 však ještě rodina formálně patřila k nově vzniklému státu. I Olga Taussky-Todd však v roce 1934 kontinentální Evropu opustila, působila ve Velké Británii a Spojených státech amerických. Maticemi se začala zabývat až ve čtyřicátých letech 20. století, poslední práci z maticového počtu publikovala ještě počátkem devadesátých let. Patřila mezi přední představitele lineární algebry, rovněž její výsledky jsou stále referovány a zpřesňovány.[153]

University in Providence, University of Syracuse New York, Stanford University), roku 1963 byl penzionován.

Do roku 1939 psal své práce německy pod jménem Karl Löwner, poté téměř celé desetiletí nepublikoval a od roku 1948 psal anglicky pod jménem Charles Loewner. Dnes je znám především pod anglickou verzí svého jména.

Více informací o Loewnerových životních osudech a jeho vědeckých aktivitách viz monografie Martiny Bečvářové a Ivana Netuky *Karl Löwner and His Student Lipman Bers – Pre-war Prague Mathematicians* [BNe1], která vyjde roku 2015.

[153] Životní a profesní dráhu Olgy Taussky-Todd je těžké v krátkosti zachytit, neboť je spletitá (jen během 2. světové války se osmnáctkrát stěhovala). Později žila a pracovala například v Göttingen, v Londýně, kde poznala svého manžela, rovněž známého matematika Johna Todda (1911–2007), dále v Belfastu, Princetonu, Los Angeles či Pasadeně. Publikovala přibližně 250 prací, kromě maticového počtu (matice s dominantní diagonálou, Geršgorinovy kruhy, stabilní matice, matice s vlastností L, Kacovy matice, komutativita matic atd.) se věnovala například asociativním algebrám, teorii grup, numerické analýze či historii matematiky.

O jejím životě a díle bylo publikováno velké množství prací. Za všechny jmenujme její vzpomínku *An autobiographical essay* [Ta3] z roku 1985 nebo milý článek *How I became a torchbearer for matrix theory* [Ta2] z roku 1988, v němž sama sebe označila za *světlonoše teorie matic.* Byly jí věnovány i speciální (dvoj)svazky časopisů Linear and Multilinear Algebra 3(1975), Issue 1/2 [LMA1], Linear Algebra and its Applications 13(1976), Issue 1/2 [LAA1] a Linear Algebra and its Applications 280(1998) [LAA2]. Roku 2012 vyšly články Martiny Štěpánové *(Ne)řád v životě versus řád v maticích* [Sp1] a *Olga Taussky-Todd a otázky Geršgorinových kruhů* [Sp2].