Zborcené plochy

IV. Příklady zborcených ploch algebraických

In: Josef Kounovský (author): Zborcené plochy. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1947. pp. 59–94.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403176

Terms of use:

© Jednota československých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

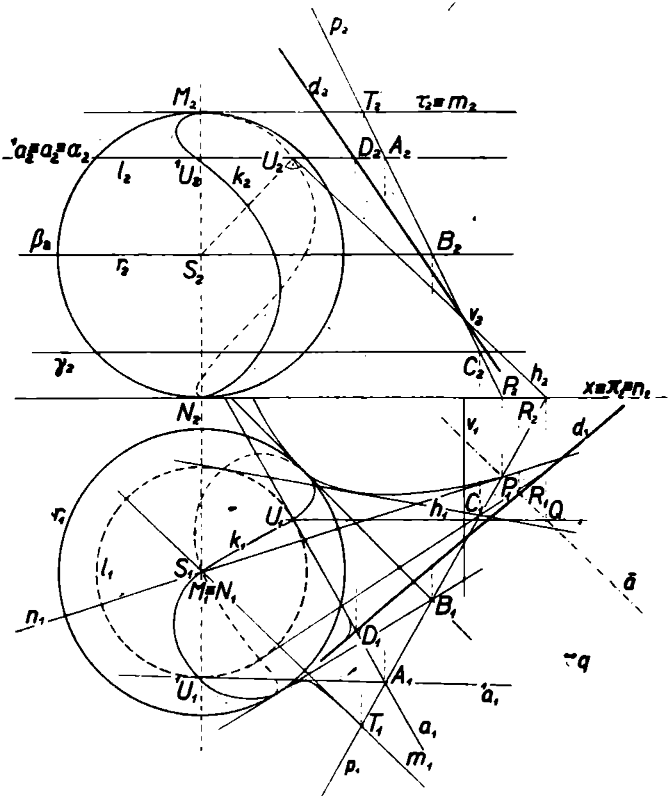
IV. PŘÍKLADY ZBORCENÝCH PLOCH ALGEBRAICKÝCH

14. Kulový konoid. Jest příkladem zborcených ploch čtvrtého stupně, kde řídící kuželosečka je nahrazena kulovou plochou, danou středem S a poloměrem (obr. 34). Řídící přímka p je vzhledem k řídící rovině v poloze obecné (jako v obr.) a pak konoid je *kosoúhlým*, nebo stojí kolmo na řídící rovinu (v obr. půdorysna π) a pak konoid je *přímým*. Úběžná přímka ${}_{\infty}q$ půdorysny je tedy druhou řídící přímkou.

Libovolným bodem A na přímce p položíme rovinu $\alpha \parallel \pi$ a tečny, sestrojené bodem A k průsečné kružnici l kulové plochy rovinou α, jsou povrchové přímky a a ${}^1a$ konoidu; jejich dotykové body na kulové ploše označme U a ${}^1U$. Řídící přímka je dvojnou přímkou konoidu, každým jejím bodem procházejí dvě různé tvořící přímky plochy. Geom. místem dotykových bodů $U, {}^1U, \ldots$ je křivka k (čtvrtého stupně), podél které se konoid dotýká řídící kulové plochy. V obr. sestrojeny ještě body na rovníku a na rovnoběžce shodné s l a souměrně sdružené s ní podle roviny rovníku; příslušné povrchové tvořící přímky procházejí v rovinách β a γ body B a C.

Budiž úkolem sestrojiti v libovolném bodě D na tvořící povrchové přímce a tečnou rovinu. Použijeme pomocného hyperbolického paraboloidu, jehož řídící rovinou je řídící rovina konoidu a řídícími přímkami jeho řídící přímka p a některá tečna v bodě U na kulovou plochu, na př. druhá hlavní přímka h v její tečné rovině kolmé na poloměr SU, $h_2 \perp S_2U_2$, $h_1 \parallel x$. V řídící půdorysně vytkněme povrchovou přímku $\bar{a} \equiv PQ$ druhé soustavy hyp. paraboloidu jako spojnici prvních stopníků přímek p a h; dále vytkněme v této soustavě přímku v kolmou k nárysně, $v_2 \equiv (p_2, h_2)$. Pak je ihned dán nárys $d_2 \equiv D_2v_2$ povrchové přímky hyperbolického paraboloidu v bodě D a pomocí stopníku R na $\bar{a}$ se odvodí půdorys d_1; (a, d) je hledaná tečná rovina.

Obráceně lze určiti dotykový bod D tečné roviny, jež prochází libovolně přímkou a; její stopa rovnoběžná s a protne $\bar{a}$



Obr. 34.

v stopníku R přímky d, sestrojí se nárys $d_2 \equiv R_2v_2$ a z bodu D_2 se odvodí D_1.

Tečné roviny $\tau \parallel \pi$ a π v bodech M a N kulové plochy určují torsální přímky $m \equiv MT$ a $n \equiv NP$ našeho konoidu a jejich kuspidální body T a P na p.

Abychom sestrojili druhé dvě torsální přímky, bylo by třeba sestrojiti přímkou p obě torsální tečné roviny ke kulové ploše; půdorysné hlavní přímky jdoucí dotykovými body v těchto rovinách jsou dalšími torsálními přímkami a určují úběžné kuspidální body na ${}_\infty q$. Obě tečné roviny sestrojí se na př. s pomocí osvětlení kulové plochy ve směru p; jejich první stopy jsou tečnami vrženého stínu kulové plochy na půdorysnu, který je určen středem, ohniskem a vedlejší poloosou.

Konstrukce těchto kuspidálních bodů se stává složitější, protíná-li přímka p kulovou plochu v reálných bodech, a jsou-li tedy torsální roviny a kuspidální body imaginární.

15. Přímý konoid eliptický. Osvětlení. Budiž *konoid určen elipsou k v nárysně se směry os x a z, řídící přímkou p kolmou k půdorysně a půdorysnou jako řídící rovinou* (obr. 35).

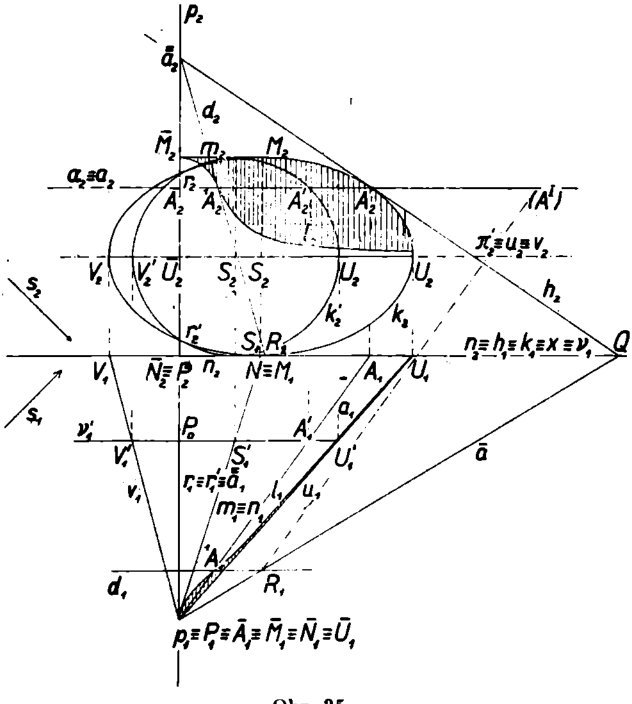
Pomocnou rovinou $\alpha \parallel \pi$ sestrojíme přímky a a ${}^1a$ procházející průsečíkem $\overline{A}$ řídící přímky p rovinou α a průsečíky s řídící elipsou; v obr. znázorněna jen přímka $a \equiv \overline{A}A$.

Řídící přímka p je opět dvojnou přímkou plochy.

Vodorovná rovina $\pi' \parallel \pi$, procházející středem řídící elipsy, je rovinou souměrnosti konoidu.

V průsečících nárysů p_2 a k_2 řídících útvarů jsou nárysy r_2 a r'_2 dvou povrchových přímek r a r' konoidu, jež jsou kolmé k nárysně, $r_1 \equiv r'_1 \perp x$.

Půdorysna a rovina s ní rovnoběžná, jichž se řídící elipsa dotýká, jsou torsálními rovinami a určují torsální přímky m a n ve vrcholech M a N vedlejší osy elipsy a kuspidální body $\overline{M}$ a $\overline{N}$ na řídící přímce p. Přímkou p a vrcholy U a V hlavní osy řídící elipsy procházejí její tečné roviny, tedy druhé dvě roviny torsální, jež obsahují torsální přímky $\overline{U}U \equiv u$ a $\overline{U}V \equiv v$ protínající se v bodě $\overline{U}$ na řídící přímce p a procházející úběžnými kuspidálními body v řídící rovině. Tyto



Obr. 35.

půdorysně promítací torsální roviny určují svými torsálními přímkami skutečný obrys konoidu pro jeho kolmý průmět na řídící rovinu; jejich půdorysy tvoří zdánlivý obrys plochy v první průmětně.

V obraze je vyznačena jen část plochy mezi řídící přímkou a řídící křivkou. Mimo to byl v obraze sestrojen řez konoidu rovinou $\nu' \parallel \nu$, tedy rovnoběžný s rovinou řídící elipsy. Protože plocha je čtvrtého stupně, je i její řez rovinou obecné polohy, který by se sestrojil jako geometrické místo průsečíků roviny s přímkami plochy, obecně křivkou čtvrtého stupně. Ale v našem případě je řez rovinou $\nu' \parallel \nu$ kuželosečkou k'. Odvodíme-li z půdorysu nárys, je zjevno, že křivka k'_2 je afinní s elipsou k_2 pro osu afinity p_2, na níž jsou obě křivky spjaty v bodech r_2 a r'_2 a charakteristiku afinity $\overline{A_2A'_2} : \overline{A_2A_2} = \overline{P_0A'_1} : \overline{P_2A_1} = \overline{P_0P_1} : \overline{P_2P_1} =$ konst. Z této vlastnosti plyne hned výhodné použití pásu plochy tohoto konoidu jako zborcené lícní plochy klenby nad lichoběžníkovým půdorysem (*klenbový oblouk*).

Tečnou rovinu v libovolném bodě ${}^1A$ na tvořící povrchové přímce $a \equiv \overline{A}A$ sestrojili bychom opět pomocným dotykovým hyperbolickým paraboloidem, daným řídící půdorysnou a řídícími přímkami p a h, kde h je tečnou řídící křivky v bodě A. Spojnice $\overline{a} \equiv PQ$ obou půdorysných stopníků je další přímkou vodorovné soustavy a třetí její přímkou je nárysně promítací přímka $\overline{\overline{a}}$, $\overline{\overline{a}}_2 \equiv (p_2, h_2)$; tím je konstrukce dána.

Chceme však řešiti také úlohu obrácenou ve spojení s řešením úkolu *určiti bod meze vlastního stínu na libovolně vytčené tvořící přímce povrchové.*

Přímkou a sestrojíme světelnou rovinu a určíme její dotykový bod, užitím téhož dotykového hyperbolického paraboloidu. V obr. zvoleno osvětlení technické ($\sphericalangle s_1x_1 = \sphericalangle s_2x_2 = 45°$). Světelná rovina určena světelným paprskem bodu A; jeho vrženým stínem na půdorysnu je (A^1), kde je $\overline{A_2(A^1)} = \overline{A_1A_2}$. První stopa světelné roviny je rovnoběžná s a_1 a protíná přímku $\overline{a}$ hyperbolického paraboloidu v bodě R, jímž prochází přímka $d \parallel \nu$, $d_1 \parallel x$, druhé soustavy; pomocný hyperbolický paraboloid je totiž rovnoosý, protože nárysna je jeho druhou řídící rovinou. Přímka d, jejíž nárys prochází bodem $\overline{\overline{a}}_2$, určí na a bod ${}^1A$ meze vlastního stínu l daného geometrálného osvětlení.

Souhrn světelných rovin povrchových tvořících přímek obaluje světelnou válcovou plochu, jejíž přímky jsou tečnými větelnými paprssky plochy; válcová plocha se dotýká plochy podél meze vlastního stínu.

Pro směr kosoúhlého promítání s jest křivka l skutečným obrysem plochy.

Přímka torsální, jak jsme vyvodili, má ve všech svých bodech (mimo bod kuspidální) společnou tečnou rovinu. Všechny roviny procházející torsální přímkou (mimo rovinu torsální) mají na ní dotykový bod v společném kuspidálním bodě. Proto také platí:

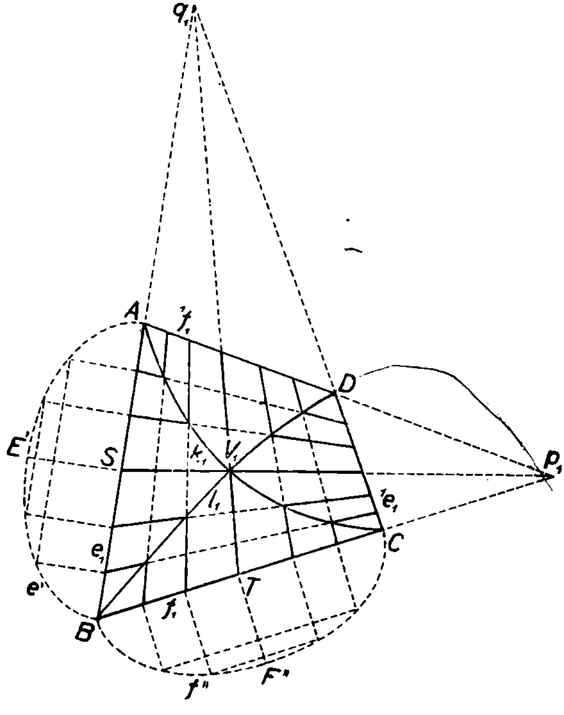
Skutečný obrys a mez vlastního stínu na zborcené ploše prochází všemi kuspidálními body a dotýká se v nich příslušné torsální přímky.

Pro náš konoid jsou takovými body kuspidálními bod $\overline{M}$ a úběžný bod torsální přímky u (mez vytčena jen pro horní polovinu plochy nad π').

Prakticky lze použíti této zborcené plochy k *sestrojení křížové klenby nad vodorovným různoběžníkem ABCD*. Sousední strany AB a BC různoběžníku zvolíme za hlavní osy řídících elips e a f dvou přímých konoidů, jejichž společnou řídící rovinou je půdorysna; řídícími přímkami p a q jsou svislice procházející průsečíky (AD, BC) a (AB, CD) družin protějších stran základního čtyrrohu (obr. 36).

Zřízení této „konoidové“ křížové klenby žádá, aby vedlejší poloosy obou řídících elips byly sobě rovny, $\overline{SE} = \overline{TF}$, v obr. ve sklopení $\overline{SE'} = \overline{TF''}$ na poloelipsách e' a f''. Pak mají konoidové lícní klenbové plochy v záhlaví společnou torsální rovinu a obě vodorovné torsální přímky v této rovině se protínají ve vrcholu V klenby, jímž procházejí průsečná žebra k a l; jsou to křivky společné oběma konoidům, v které se rozpadá jejich úplný průsek. Oba půdorysy jsou sestrojeny z průsečných bodů obou ploch na přímkách týchž kót z.

V obr. je sestrojen půdorys dvou čtveřin povrchových přímek; vytvořující svazky o vrcholech p_1 a q_1 půdorysů k_1 a l_1



Obr. 36.

jsou paprskové svazky vzájemně projektivní (zory podobných řad na AB a BC) a tedy křivky k_1 a l_1 jsou kuželosečkami.

Omezení obou konoidů ve svislých rovinách procházejících stranami CD a DA základního různoběžníku jsou průsečné rovinné křivky ^1e a ^1f čtvrtého stupně; není-li odchylka protějších stran různoběžníku příliš velkou, blíží se tyto křivky kuželosečkám.

Prstencová křížová klenba vznikne *průnikem kruhového rotačního anuloidu přímým konoidem s řídící elipsou*. Osa anuloidu je řídící svislou přímkou, rovina rovníku, v níž leží dráha (S) opsaná středem S jeho poledníkové kružnice, řídící rovinou konoidu. Řídící elipsa má svislou poloosu rovnou poloměru poledníkové kružnice a jest souměrná podle roviny rovníku; má střed S na dráze (S) a rovinu kolmou na SO, kde O je středem prstence.

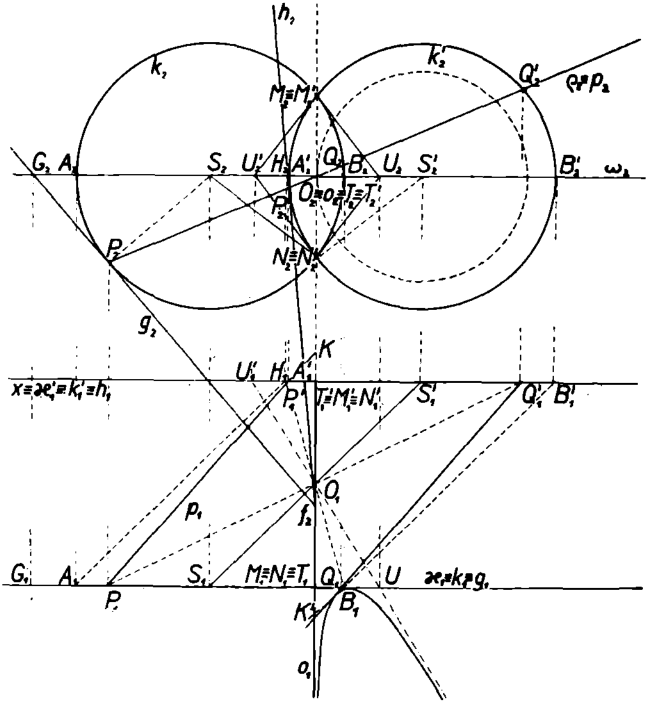
16. Plocha šikmého průchodu. Řídícími útvary této zborcené plochy čtvrtého stupně jsou dvě kružnice k a k' o témž poloměru v rovnoběžných rovinách $\varkappa$ a $\varkappa'$ a přímka o, která prochází půlícím bodem O vzdálenosti $\overline{SS'}$ středů obou řídících kružnic a stojí kolmo na jejich roviny. Budiž přímka o kolmá k nárysně, rovina (S, o) rovnoběžna s půdorysnou; průsečíky řídící přímky o s rovinami obou řídících kružnic buďtež T a T' (obr. 37).

Rovina $\omega = (S, o, S')$ je rovinou souměrnosti celé plochy, obě kružnice jsou podle ní souměrné. Vždy dvě tvořící přímky této plochy jsou podle této roviny souměrně sdruženy protínajíce se na přímce o, jež jest *dvojnou přímkou* plochy.

Každá rovina ϱ procházející přímkou o protíná plochu šikmého průchodu ve dvou rovnoběžných tvořících povrchových přímkách, stejně vzdálených od bodu O; proto každá přímka jdoucí bodem O jest *průměrem* plochy, půleným jejím *středem* O. O tom se přesvědčíme, sestrojíme-li přímkou o rovinu nárysně promítací ϱ a její průsečíky PQ a $P'Q'$ s řídícími kružnicemi. Povrchové přímky $PP' \parallel QQ'$ jsou stejně vzdálené od středu O; na př. PQ' a $P'Q$ jsou průměry plochy.

Opíše-li rovina ϱ celý rovinový svazek o ose o, vytvoří povrchové přímky PP' a QQ' zborcenou plochu, kdežto průměry PQ' a $P'Q$ opíší kuželovou plochu o vrcholu O a řídících křivkách k a k'. Společné příčky útvarů $[kk'o]$ jsou tedy také povrchovými přímkami této kuželové plochy druhého stupně, kterou dlužno od celkového výtvoru odečísti.

Tvořící přímky plochy šikmého průchodu protínají obě řídící kružnice v projektivních řadách; neboť bodové řady



Obr. 37.

$P, \ldots$ na k a $Q', \ldots$ na k' při otáčení roviny ϱ kolem osy o jsou shodné, i jest řada $P, \ldots$ projektivní s řadou $P', \ldots$ Tedy *přímky plochy spojují bodové družiny dvou projektivních řad na dvou kuželosečkách; plocha jest zborcenou plochou čtvrtého stupně.*

Podle odvozeného vzorce $n = 2n_1n_2n_3$ by byl stupeň této plochy $n = 8$, protože $n_1 = 1$ (přímka o) a $n_2 = n_3 = 2$ (řídící kružnice); dlužno však odečísti kuželovou plochu druhého stupně $[Ok]$ a pak dvě imaginární roviny spojující přímku o s oběma kruhovými body v rovinách $\varkappa \parallel \varkappa'$, jež jsou společné oběma řídícím kružnicím; tedy $n = 8 - 2 - 2 . 1 = 4$.

Mimo dvojnou přímku o má plocha šikmého průchodu ještě *dvojnou kuželosečku nekonečně vzdálenou*, což ukazují už dvojiny rovnoběžných povrchových přímek, určujících body úběžné křivky. Jest to kuželosečka, protože řídící kuželová plocha naší zborcené plochy je druhého stupně; zvolíme-li za vrchol této kuželové plochy bod T, pak stopou té řídící kuželové plochy na nárysně jest kružnice soustředná s řídící kružnicí k' a procházející bodem T'.

Povrchové přímky v rovině souměrnosti jsou torsálními a mají kuspidální body K a K' na přímce o. Úsečka KK' na o jest částí isolovanou.

Tečny z bodu T na k (v obr. imaginární) určují další dvě torsální přímky s kuspidálními úběžnými body. V našem případě poskytují průsečíky nárysů k_2 a k'_2 řídících kružnic dvě tvořící povrchové přímky MM' a NN' kolmé k nárysně.

Položíme-li přímkou PP' svislou rovinu, protíná plochu ještě v druhé povrchové přímce souměrně sdružené podle roviny souměrnosti ω; proto protíná tato svislá rovina zborcenou plochu ještě v kuželosečce.

Z projektivního vztahu na kružnicích k a k' ještě plyne, že všechny svislé roviny procházející povrchovými přímkami obalují válcovou plochu druhého stupně. Uvažované svislé roviny procházejí družinami tohoto projektivního vztahu a určují na průměrech AB a $A'B'$ dvě projektivní řady, jichž spojnice (průměty přímek plochy) obalují kuželosečku. V našem případě je to hyperbola o středu O (stejná vzdálenost rovnoběžných tečen od středu); $T_1T'_1$ jest její asymptotou (tečna středem). Sestrojíme-li pól U tětivy MN vzhledem ku k a pól U' tětivy $M'N'$ vzhledem ku k', jest UU' též družinou projektivního vztahu na průměrech AB a $A'B'$ a tedy UU' druhou asymptotou hyperboly. Zdánlivý obrys půdorysu plochy tvoří tato hyperbola a povrchové přímky AA' a BB'.

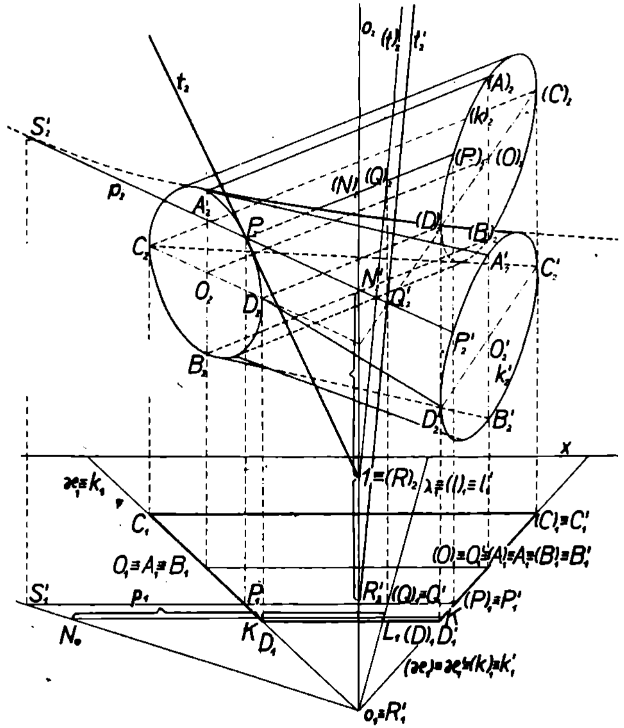
Kuželosečka, v které protíná plochu svislá rovina procházející reálnou přímkou zborcené plochy, má jednu osu ve vodorovné rovině souměrnosti ω a vrcholy tedy na přímkách AA', BB' a střed na přímce SS'. Jest to hyperbola, jejíž asymptoty jsou rovnoběžny k povrchovým přímkám ležícím v uvažované rovině; neboť ku každé povrchové přímce existuje ještě jedna s ní rovnoběžná a ty tedy poskytují dva nekonečně vzdálené body řezu.

Jsou-li povrchové přímky v takové svislé rovině sdruženě imaginární, pak řezem je elipsa nebo kružnice. Takovými jsou i řídící kružnice k a k', povrchové přímky v jejich rovinách jsou sdruženě imaginární; hyperbola v půdorysně dotýká se i půdorysů $\varkappa_1$ a $\varkappa'_1$ rovin řídících kružnic.

Úlohy o tečných rovinách podél tvořící povrchové přímky $p = PP'$ řešíme pomocí dotykového hyperboloidu, jehož jedna soustava má za řídící přímky o a tečny g a h k řídícím kružnicím, k druhé soustavě patří přímka p, spojnice GH průsečíků přímek g a h s rovinou ω a přímka f kolmá k nárysně, $f_2 = (g_2, h_2)$, $f \parallel o$; tato druhá soustava je zvláště výhodnou, protože nárysem daného bodu a bodem f_2 prochází ihned nárys přímky první soustavy; půdorys se odvodí průsečíkem s přímkou GH. A podobně se odvodí dotykový bod, je-li předem známa tečná rovina.

Plochy šikmého průchodu lze stereotomicky použíti jen při klenbách malé hloubky (klenbové oblouky). Při delších průchodech nebo podjezdech se užívá lícní plochy válcové a ložné čáry tvoří soustavu pravoúhlých trajektorií nebo šroubovic a odtud dva hlavní typy theoretického zřízení šikmých průchodů. V Praze je provedeno na podjezdech dráhy spojujících Poříč s Karlínem.

17. Cylindroid Frézierův. Body dvou řezů k a (k) válcové plochy druhého stupně jsou jejími povrchovými přímkami k sobě přiřazeny projektivně, vztahem afinním. V obr. 38 zvolena válcová plocha průčelná s povrchovými přímkami rovnoběžnými s nárysnou a její eliptické řezy rovinami $\varkappa$ a $(\varkappa)$ půdorysně promítacími vytčeny sdruženými průměry AB,



Obr. 38.

CD; $(A)(B)$, $(C)(D)$. Posuneme-li jeden řez (k) ve směru svislé průsečnice o rovin $\varkappa$ a $(\varkappa)$ obou řezů do polohy k' se sdruženými průměry $A'B'$, $C'D'$ a spojíme-li nové polohy bodů křivky k' s přiřazenými body křivky pevné k, jest geometrickým místem spojnic AA', BB', ... zborcená plocha čtvrtého stupně — *Frézierův cylindroid.*

Průsečnice o obou rovin jest *dvojnou přímkou cylindroidu* a leží na ploše, když protíná křivky k a k'; neprotíná-li jich reálně, jest isolovanou přímkou plochy; to plyne z okolnosti, že společné body obou křivek k a (k) na původní válcové ploše jsou sobě afinitou (o ose o) přiřazeny.

Mimo to má cylindroid ještě *úběžnou dvojnou přímku*, podél které se vzájemně dotýkají dvě části plochy cylindroidu. Tětivě křivky k rovnoběžné s o odpovídá afinitou rovnoběžná a stejně dlouhá tětiva křivky (k) a po posunutí právě taková tětiva křivky k'. Spojnice koncových bodů poskytují dvě vzájemně rovnoběžné povrchové přímky cylindroidu, procházející úběžným dvojným bodem. Úběžná přímka je určena *řídící rovinou*, s kterou jsou rovnoběžny všechny povrchové přímky cylindroidu. Směr řídící roviny je dán povrchovou přímkou válcové plochy a průsečnicí o obou jejích sečných rovin; v naší konstrukci jest jí nárysna. V dvojných úběžných bodech jsou obě tečné roviny identické, obě povrchové přímky zborcené plochy úběžným bodem procházející leží s úběžnou přímkou v téže řídící rovině.

Dotykové body obou tečen křivky k rovnoběžných s přímkou o jsou body torsálních přímek plochy s kuspidálními úběžnými body na úběžné dvojné přímce.

Obrys půdorysu je vytvořen půdorysy torsálních přímek CC', DD'. (V obraze je znázorněna část plochy mezi rovinami $\varkappa$ a $(\varkappa')$.)

Roviny, jež procházejí povrchovými přímkami rovnoběžně s nárysnou, jsou asymptotickými rovinami, dotýkajíce se cylindroidu v úběžných bodech. Roviny, které promítají tvořící povrchové přímky kolmo do nárysny jsouce kolmé k asymptotickým rovinám jsou rovinami centrálními a jejich dotykové body jsou centrálními body plochy; jejich geom. místem je *strikční křivka* plochy. *Nárys strikční křivky cylindroidu je zdánlivým obrysem nárysu plochy.*

Řez plochy libovolnou rovinou je křivka 4. stupně. Uvažujme o řezu rovinou, jež prochází přímkou o; *protíná základní válcovou plochu i cylindroid v kuželosečkách shodných*. Budiž v obr. taková rovina λ půdorysně promítací a příslušné řezy kuželosečka (l) válcové plochy a křivka l' na povrchu cylindroidu. Jak z půdorysu zjevno, protíná tato rovina všechny úseky přímek cylindroidu mezi řezy k a k' v témž dělícím poměru a platí to ovšem i pro rovinu protínající část v obr. nezobrazenou. Na povrchové přímce PP' sestrojen bod Q', i platí $\overline{(Q)Q'} : \overline{(P)P'} = \overline{PQ'} : \overline{PP'} =$ konst. Posunou se tedy všechny body elipsy (l) o stejnou dráhu na cylindroid a poskytnou jeho eliptický řez $l' \cong (l)$.

Sestrojíme-li příčku $\overline{KK'} \parallel x$ a $\overline{KK'} = \overline{(O)O'}$, pak vytíná na ní rovina λ bod L a $\overline{KL} = \overline{(Q)Q'}$ je velikost posunutí řezu (l) do l'. Obráceně lze ze známého posunutí určiti rovinu λ.

Abychom sestrojili tečnou rovinu τ cylindroidu v libovolném bodě Q' na povrchové přímce $p \equiv PP'$, určíme ještě tečnu t' kuželosečky l' procházející tím bodem na ploše; tato tečna jest rovnoběžna k příslušné tečně (t) v bodě (Q) řezu (l) základní válcové plochy; tečna (t) se protíná s tečnou t v bodu P na k v témž bodu 1 na ose afinity o. Sestrojí se tedy tečna t, ta protne přímku o v bodě $(R) \equiv 1$, $\overline{(R)R'} = \overline{(Q)Q'} = \overline{KL}$, $Q'R' \equiv t'$ je hledaná tečna; tečná rovina $\tau \equiv (p, t') \equiv (P, Q', R')$.

Ovšem lze použíti pomocného dotykového hyperbolického paraboloidu, protože plocha je určena řídícími kuželosečkami a rovinou.

Je-li obráceně dána tečná rovina τ procházející povrchovou přímkou p, určí se její průsečík R' s přímkou o, sestrojí se tečna t kuželosečky k v bodě P a ta určí na o bod (R); tím je dáno posunutí $\overline{(R)R'}$, učiníme $\overline{KL} = \overline{(R)R'}$ a $\lambda_1 \equiv o_1L$ stanoví již půdorys dotykového bodu Q' dané tečné roviny τ. Tím je také dána základní konstrukce osvětlení cylindroidu.

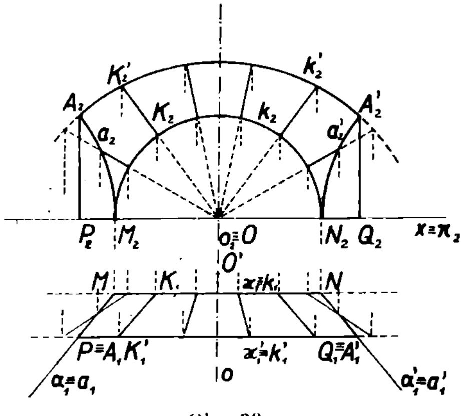
Je-li rovina τ, proložená přímkou p, nárysně promítací, pak její dotykový bod jest centrálním bodem povrchové přímky

p cylindroidu. Konstrukce je tato: Protíná-li nárys roviny $p_2 \equiv P_2P'_2$ nárys o_2 v bodě N'_2, učiníme $\overline{(R)_2N'_2} = \overline{KN_0}$ (v obráceném smyslu na KL); pak o_1N_0 protne $P_1P'_1$ v půdorysu S'_1 bodu centrálního, jehož nárys S'_2 určí bod druhého obrysu.

Geometrickým místem bodu S' jest strikční křivka cylindroidu; má obě torsální přímky za asymptoty, protože dotykový bod roviny kolmé k asymptotické rovině je v kuspidálním bodu v nekonečnu.

Řez rovinou obecné polohy sestrojí se pomocnými rovinami rovnoběžnými s nárysnou jako řídící rovinou; pomocná rovina protne cylindroid ve dvou povrchových přímkách vzájemně rovnoběžných a sečnou rovinu v nárysné hlavní přímce; jejich společné body náleží řezu.

18. Klenbové oblouky. Otupené čelné hrany klenby. Zmínili jsme se již v čl. 15, že lze použíti přímého konoidu kuželosečkového jako lícní plochy obloukové klenby nad úzkým licho-

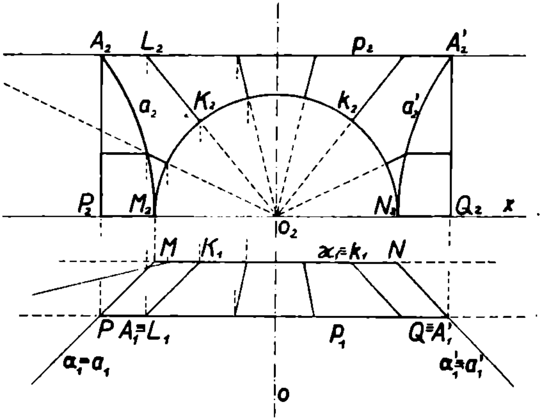


Obr. 39.

běžníkovým půdorysem; takové klenby mají obecný název *arrière-voussure*. Zvláště je-li řídící křivkou konoidu kružnice, kteráž plocha se zove též *kuželovým klínem*; je definován přímkami, které na dané pevné přímce stojí kolmo a protínají kružnici, jejíž rovina je s danou přímkou rovnoběžna.

Jako obloukových kleneb používá se v stavitelství mimo plochu šikmého průchodu zvláště ještě dvou ploch zborcených; jsou to oblouk marseilleský a montpellierský.

Oblouk marseilleský je znázorněn v obr. 39 sdruženými pravoúhlými průměty. Spojuje dvě kružnice k a k' v rovno-



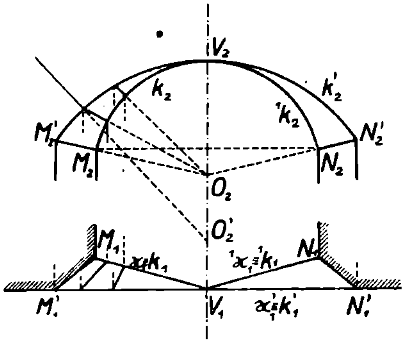
Obr. 40.

běžných svislých rovinách $\varkappa$ a $\varkappa'$. (Nepodáváme ovšem úplné stereotomické řešení této klenby.) Řídící přímkou o klenbové lícní plochy je osa menší zadní kružnice k, $o \perp \varkappa$ a leží v půdorysně; z plochy použije se horní poloviny. Lícní plocha je omezena křivkami a a a' v rovinách α a α' půdorysně promítacích a procházejících rameny PM a QN základního lichoběžníku.

Oblouk montpellierský zobrazen půdorysem a nárysem v obr. 40. Kružnice k' oblouku marseilleského je nahrazena vodorovnou průčelnou přímkou p, takže zborcená plocha

$[kpo]$ je čtvrtého stupně: Omezení lícní plochy křivkami a a a' jako v případě předcházejícím.

Corne de vache — kravský roh. Zove se tak rozšíření valené mostní klenby do průčelí plochami znázorněnými v obr. 41 v půdorysu i nárysu. Valená klenba je znázorněna v nárysu obloukem k_2 o středu O_2 většího zakřivení. Čelnou hranu klenby, která by procházela vrcholem V v rovině $\varkappa' \perp o$, odstraníme a valenou klenbu ukončíme jejími řezy k a ${}^1k$ ve svislých rovinách $\varkappa$ a ${}^1\varkappa$ a tyto křivky spojíme otupovací zborcenou plochou „corne de vache" tvaru kravského rohu s obloukem k' v rovině $\varkappa'$ a s osou o', dotýkajícím se ve vrcholu V (nebo dále od něho souměrně po obou stranách). Zborcené plochy kravského rohu $[kk'o]$ a $[{}^1kk'o]$ zlepšují mostní oblouk po stránce estetické i mechanické. (Stereotomického řešení nepodáváme; v obr. jen naznačeny povrchové přímky plochy, jichž nárysy procházejí O_2.)



Obr. 41.

Oblouky kruhové mohou býti ovšem nahrazeny oblouky eliptickými. Jelikož je třeba v nárysu zachovati kolmost povrchových přímek zborcené plochy a mostního oblouku, je patrno, že tyto nárysy jsou normálami elipsy a obalují její evolutu. Plocha je dána dvěma řídícími elipsami a řídící válcovou plochou, jejímž normálným řezem je tato evoluta. V Praze je aplikována tato plocha na kamenném mostě Legií u Národního divadla.

19. Normálie neboli **plocha normál** *jest geom. místo normál sestrojených na libovolnou plochu v bodech její křivky.* Jest obecně zborcená, protože i dvě blízké normály křivé plochy obecně se neprotínají. Daná plocha se zove *řídící plocha* a daná křivka na ní *řídící křivka.*

Sledovali jsme již speciální normálii zborcené plochy a to souhrn jejích normál v bodech libovolné tvořící netorsální přímky a seznali jsme, že *normálií každé zborcené plochy podél její netorsální přímky jest hyperbolický paraboloid* (čl. 10).

Normálie plochy druhého stupně podél jejího rovinného řezu (kuželosečky) *je zborcená plocha čtvrtého stupně.*

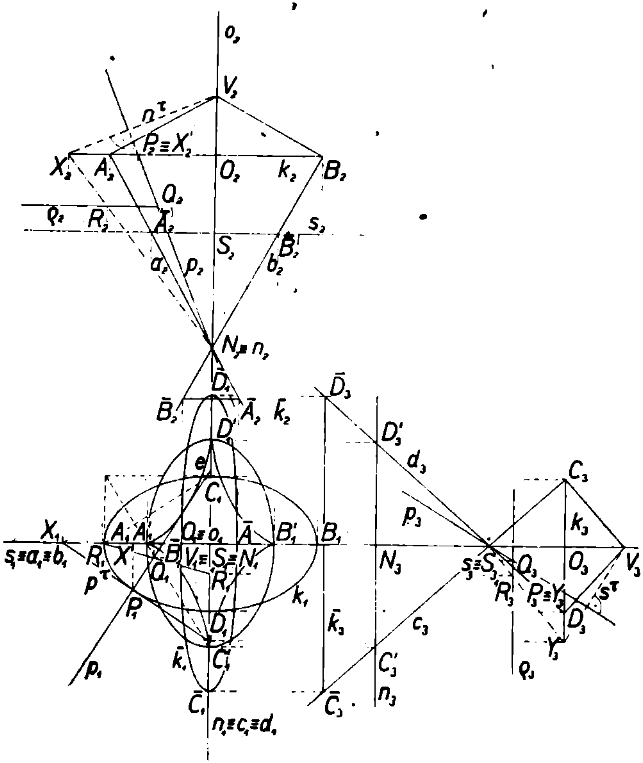
Tečné roviny v bodech takového rovinného řezu obalují kuželovou plochu 2. stupně, jejíž vrchol je pólem roviny kuželosečky vzhledem k ploše; normály obou ploch jsou společné. Lze tedy uvažovati jen *o ploše normál kuželové plochy druhého stupně podél kuželosečky na ní.*

Řídící kuželová plocha této normálie jest také druhého stupně.

Budiž dána kuželová plocha $[Vk]$, kde $k\,(A, B, \ldots)$ jest libovolná její kuželosečka. Sestrojíme-li povrchové přímky VA, VB, ... a vrcholem V k tečným rovinám normály, obdržíme řídící kuželovou plochu uvažované normálie. Tečny v bodech A, B, ... na k určují na dvou jejích pevných tečnách p a q bodové řady vzájemně projektivní, jejich zory z vrcholu V jsou paprskové svazky vzájemně projektivní a normály sestrojené vrcholem V na dvě tečné roviny (V, p) a (V, q) jsou osami dvou vzájemně projektivních rovinových svazků, jichž výtvarem jest (normálná) kuželová plocha 2. stupně. Je-li stopou této kuželové plochy na rovině řídící kuželosečky k kuželosečka l, jsou obě řady k a l na kuželosečkách projektivně sobě přiřazeny.

Sestrojíme-li body kuželosečky k rovnoběžky k přiřazeným přímkám kuželové plochy $[Vl]$, obdržíme *plochu normál 4. stupně,* protože její tvořící povrchové přímky spojují družiny dvou projektivně sobě přiřazených křivých řad na kuželosečce k a nekonečně vzdálené kuželosečky kuželové plochy $[Vl]$.

Je-li rovina řídící kuželosečky na ploše 2. stupně rovnoběžná s hlavní rovinou souměrnosti, jest právě takovou rovinou i na dotykové kuželové ploše, ke které sestrojujeme



Obr. 42.

plochu normál. Plocha se zove *přímá plocha normál plochy 2. stupně*. Budiž tato řídící elipsa k v půdorysně, osa $VO \equiv o$ dané kuželové plochy jest půdorysně promítací a jest *osou normálie* (obr. 42). Druhé dvě hlavní roviny dané plochy, procházející osami AB a CD kuželosečky k, buďtež nárysnou a stranorysnou, které při zobrazení průmětů vysuneme ve směru těchto os.

Sestrojme stopy tečné roviny τ v bodu P řídící kuželosečky k na hlavních rovinách, $n^\tau \equiv VX$, $s^\tau \equiv VY$. Průměty povrchové přímky p zborcené plochy jsou: $p_1 \perp p^\tau$, $p_2 \perp n^\tau$, $p_3 \perp s^\tau$. Označíme-li na ose AB sdružené body X a X', t. j. pól X a průsečík X' jeho poláry PX', tvoří patrně vzájemně projektivní řady; a obdobně družiny Y a Y' na druhé ose CD. V sdružených průmětech řada $X_2 \ldots \barwedge P_2 \ldots$ a řada $Y_3 \ldots \barwedge P_3 \ldots$

Jelikož body $P_2 \ldots$ procházejí paprsky $p_2 \ldots$ kolmé k paprskům $V_2(X_2 \ldots)$ a ježto podle souměrnosti tři z těchto paprsků, t. j. oba kolmé na obrysové přímky základní kuželové plochy a paprsek promítající se do o_2 se protínají na o_2, vyplňují patrně nárysy všech povrchových přímek normálie paprskový svazek o vrcholu n_2. A docela obdobně stranorysy povrchových přímek normálie vyplňují paprskový svazek o vrcholu s_3 na o_3. Z toho plyne:

Všechny přímky normálie protínají hlavní rovinu rovnoběžnou se stranorysnou v bodech přímky n a hlavní rovinu rovnoběžnou s nárysnou v bodech přímky s. Vzhledem k souměrnosti prochází každým bodem přímek n a s po dvou přímkách normálie, tedy n a s jsou jejími dvojnými přímkami. Úhrnem můžeme říci:

Přímá plocha normál plochy 2. stupně jest zborcenou plochou danou řídící kuželosečkou k a dvěma řídícími přímkami n a s, rovnoběžnými s jejími osami a protínajícími osu o procházející středem křivky k kolmo k její rovině. Je tedy plochou čtvrtého stupně.

Přímky procházející vrcholy řídící elipsy jsou patrně torsálními přímkami normálie s kuspidálními body A' a B' na povrchových přímkách a a b a přímce dvojné s a s kuspidálními body C' a D' na povrchových přímkách c a d a přímce dvojné n.

Půdorysy bodů kuspidálních jsou středy křivosti pro vrcholy křivky k, t. j. *body vratu evoluty e elipsy* k, která jsouc obalena jejími normálami p_1 ... jest zdánlivým obrysem půdorysu normálie.

Je-li k elipsa, nacházejí se jak patrno dvojné přímky n a s na opačné straně roviny elipsy k než vrchol V základní kuželové plochy. Všechny torsální přímky a kuspidální body jsou reálné, mimo úsečky $A'B'$ a $C'D'$ probíhají přímky s a n na normálii isolovaně.

Je-li k hyperbolou o hlavní ose AB, vycházejí přímky n a s po různých stranách roviny řídící hyperboly. Reálnými torsálními přímkami jsou a, b s body kuspidálními $A'B'$, přímka s jest isolovanou v úsečce $A'B'$. Přímka n nemá isolované části.

Zborcená plocha našeho druhu má za řezy rovinami rovnoběžnými s řídící kuželosečkou k kuželosečky souosé téhož druhu. To se dá posoudit pozorováním družin bodových obou řezů na téže přímce normálie. Poměr souřadnic bodů na řezu k a na řezu $\bar{k}$ v rovině s ním rovnoběžné je konstantní, i vzniká $\bar{k}$ z křivky k dvojí afinní transformací.

Úběžná přímka roviny řídící křivky k leží patrně na ploše, pro elipsu k jest ovšem isolovanou dvojnou přímkou plochy, při základní hyperbole dvojnou přímkou na ploše.

Zvolíme-li vrchol řídící kuželové plochy 2. stupně této normálie v průsečíku osy o s přímkou n nebo s, pak řez této kuželové plochy rovinou kolmou k ose o a obsahující druhou dvojnou přímku jest kuželosečka, jejíž půdorys má vrcholy v půdorysech $A'_1B'_1C'_1D'_1$ kuspidálních bodů; jest to kuželosečka podobná a souosá s řídící k, ale otočená o pravý úhel, jak ukazuje poměr poloos, vyjádříme-li poloměry křivosti křivky k. Můžeme tedy vysloviti větu:

Zborcená plocha 4. stupně $[k, n, s]$, kde k je kuželosečka a o je kolmice vztyčená v jejím středu k její rovině. n a s jsou příčky přímky o rovnoběžné s osami kuželosečky, jest přímá normálie plochy druhého stupně.

Tečná rovina v libovolném bodu Q na libovolné povrchové přímce p přímé normálie plochy 2. stupně sestrojí se s pomocí dotykového hyperbolického paraboloidu.

Řídícími jeho útvary jsou přímky n, s a tečna p^r v bodě P řídící kuželosečky k, řídící rovinou je půdorysna. Je-li $N \equiv (n, o)$ a $S \equiv (s, o)$, pak jsou XN a YS povrchovými přímkami paraboloidu ze soustavy přímky p. Na př. řídící rovina ϱ procházející bodem Q na p protíná v bodu R přímku XN a QR jest druhou přímkou procházející bodem Q; nebo ve stranorysu určí ϱ obdobný bod ${}^1R$ na YS a pak $R_1{}^1R_1$ prochází bodem Q_1 (kontrola). Žádaná tečná rovina jest (P, Q, R).

Obrys půdorysu tvoří evoluta základní křivky, jak bylo již řečeno. Dotykový bod povrchové přímky lze sestrojiti zase s pomocí půdorysně promítací tečné roviny hyperbolického paraboloidu; nebo planimetricky jako střed křivosti pro bod P křivky k s pomocí Pelcovy paraboly. Obě interpretace vedou k týmže konstruktivním přímkám.

Rovina asymptotická pro povrchovou přímku p normálie je kolmá na spojnici PV, ježto je rovnoběžná s dvěma splývajícími přímkami normálie.

Rovina centrální je kolmá na rovinu asymptotickou, i prochází přímkou PV. Všechny centrální roviny procházejí vrcholem V základní plochy; i jest geometrické místo jejich dotykových bodů, bodů centrálních, tedy strikční křivka normálie, skutečným obrysem plochy pro střed promítání V.

20. Zborcená plocha elipsoidického a prostorového eliptického pohybu. Jde vlastně o pohyb přímky, při kterém její tři určité body se pohybují ve třech stěnách trojhranu a kdy libovolný další bod přímky vytvořuje elipsoid. V pravoúhlém trojhranu jsou jeho stěny hlavními rovinami souměrnosti elipsoidu. Jsou-li P, N a S body přímky pohybující se v rovinách π, ν a σ (půdorysně, nárysně a stranorysně) a A její další bod (libovolný), pak $\overline{PA} = c$, $\overline{NA} = b$ a $\overline{SA} = a$ jsou poloosy elipsoidu na osách z, y a x.

Souhrn ∞^2 poloh takto se pohybující přímky vytvořuje paprskovou kongruenci (6, 2).*) Vyjmeme-li z tohoto souhrnu všechny přímky, které mají konstantní odchylku od hlavní roviny, na př. odchylku α od půdorysny, pak vyplňují *zborcenou plochu čtvrtého stupně tohoto elipsoidického pohybu,* která má týž charakter jako přímá plocha normál plochy druhého stupně.

Vytkneme-li takovou polohu přímky s neměnící se bodovou čtveřinou ${}^1P{}^1N{}^1S{}^1A$ v nárysně, jest při nepromĕnné velikosti odchylky α od půdorysny rovněž stálá čtveřina ${}^1P_1{}^1N_1{}^1S_1{}^1A_1$ v půdorysně, bod ${}^1N_1$ se pohybuje po ose x, bod ${}^1S_1$ po ose y a body ${}^1P_1$ a proměnný ${}^1A_1$ vytvořují elipsy. Na přímce v prostoru pohybuje se bod ${}^1P$ po elipse p v půdorysně, bod ${}^1N$ na přímce ${}^1n \parallel x$ v nárysně, bod ${}^1S$ na přímce ${}^1s \parallel y$ v stranorysně a bod ${}^1A$ opisuje eliptický řez plochy rovnoběžný s půdorysnou. *Zborcená plocha je určena řídící elipsou a dvěma řídícími přímkami rovnoběžnými s osami elipsy a protínajícími normálu její roviny v jejím středu vztyčenou.*

Tvořící přímky v hlavních rovinách jsou *torsálními přímkami* zborcené plochy a určují vždy na příslušné řídící přímce v té rovině ležící *kuspidální body* plochy. Torsální přímky všech zborcených ploch vytčeného elipsoidického pohybu obalují v hlavních rovinách pravidelné asteroidy eliptického pohybu. Souhrn kuspidálních bodů v hlavní rovině vyplňuje kuželosečku opsanou bodem v té rovině.

Řídící přímky n a s jsou dvojnými přímkami plochy; jejich části mimo elipsy kuspidálních bodů jsou na ploše isolovány.

Úběžná přímka roviny π je isolovanou dvojnou tvořící přímkou plochy.

Zborcená plocha prostorového eliptického pohybu. Pohybují-li se dva určité body A, B přímky po dvou mimoběžných trajektoriích (A) a (B), tu svírají všechny polohy pohybující

*) T. j. kongruenci, v níž každým bodem prostoru prochází šest přímek a v každé rovině leží dvě přímky kongruence.

se přímky s rovinou π kolmou na osu o obou mimoběžek konstantní úhel α. Souhrn přímek je tedy táž zborcená plocha jako pro pohyb elipsoidický. Řídicí křivkou je úběžná kuželosečka rotační kuželové plochy, jejíž povrchové přímky svírají s rovinou π úhel α. Úběžná přímka roviny π je dvojnou tvořící přímkou plochy.

21. Küpperův konoid jest zborcená plocha třetího stupně.

Poznali jsme, že zborcená plocha určená kuželosečkou a dvěma řídícími přímkami, které ji neprotínají, je zborcená plocha čtvrtého stupně. Platí to i tehdy, je-li jedna řídící přímka nahrazena řídící rovinou (konoid). Protíná-li řídící přímka p řídící kuželosečku k, pak všecky přímky procházející průsečíkem (p, k) a protínající druhou řídící přímku, patří k zborcené ploše, která se tedy zjevně rozpadá v rovinu a v zborcenou plochu třetího stupně. Tedy:

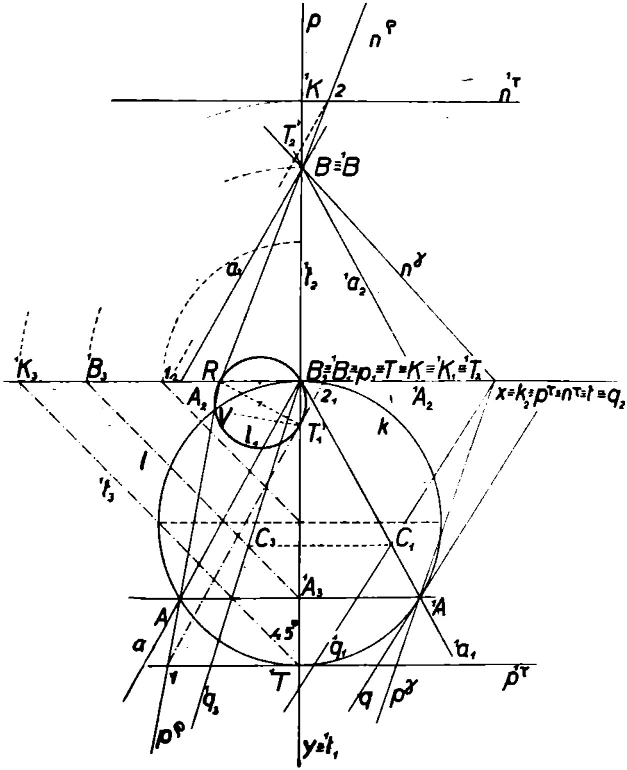
Zborcená plocha třetího stupně je určena řídící kuželosečkou a dvěma řídícími přímkami, z nichž jedna protíná řídící kuželosečku.

Řídící přímka p, která protíná řídící kuželosečku, je dvojnou přímkou plochy, druhá řídící přímka je její přímkou jednoduchou.

Küpperův konoid je vytvořen přímkou, která stále protíná danou řídící kružnici k, dále řídící přímku p, jež prochází bodem kružnice kolmo k její rovině a je rovnoběžna s rovinou, jež půlí úhel roviny kružnice a roviny, která procházejíc přímkou p dotýká se kružnice. Má tedy řídící rovina sklon 45° k rovině řídící kružnice. Zvolíme-li řídící kružnici v půdorysně tak, že se dotýká základnice x, lze v tomto dotykovém bodě sestrojiti v nárysně svislou řídící přímku p, nárysna je pak pomocnou rovinou a řídící rovinou rovina totožnosti (svírající úhel 45° s půdorysnou) (obr. 43).

Protože povrchové přímky konoidu jsou rovnoběžny s rovinou totožnosti, mají oba průměty vzájemně rovnoběžné, na př. $a_1 \parallel a_2$, ${}^1a_1 \parallel {}^1a_2$; obě přímky mají souřadnici y bodů

A a ^1A na k rovnou souřadnici z bodů $B \equiv {^1B}$ na dvojné přímce p.



Obr. 43.

Plocha má dvě úběžné tvořící povrchové přímky, jež spojují úběžný bod $_\infty P$ přímky p s kruhovými body řídící kružnice.

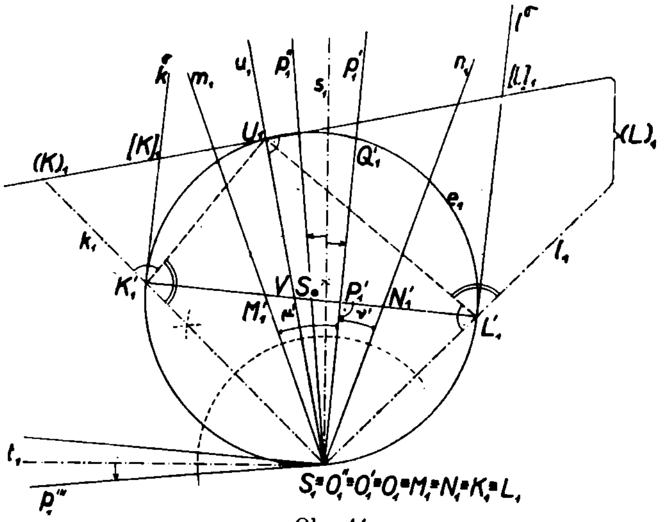
Úběžná přímka roviny totožnosti jest jednoduchou řídící přímkou plochy. Touto jednoduchou přímkou procházejí torsální roviny, jedna τ splývá s rovinou totožnosti, druhá ${}^1\tau \parallel \tau$. Torsální přímky $t \equiv x$ a ${}^1t \equiv {}^1T{}^1K$, kde $\overline{{}^1TK} = \overline{K{}^1K}$, K a ${}^1K$ jsou kuspidální body.

Libovolná rovina tečná, procházející povrchovou přímkou konoidu, na př. rovina ϱ jdoucí přímkou $a \equiv AB$ protíná konoid ještě v elipse mající své úběžné body na obou imaginárních úběžných přímkách plochy. Tyto eliptické řezy promítají se na rovinu řídící kružnice kolmo jako kružnice, což plyne odtud, že úběžné jejich body se promítají z úběžného bodu ${}_\infty P$ na p do kruhových bodů v půdorysně; důležité body řezu jsou v půdorysu l_1 vytčeny: bod R roviny ϱ na základnici x, bod K, bod T' na ${}^1t$, bod U na p^ϱ, RT''_1 je průměr.

Tečná rovina v libovolném bodě C na povrchové přímce ${}^1a$ sestrojí se pomocným dotykovým hyperbolickým paraboloidem, jenž má za řídící přímky přímku $p \perp \pi$ a tečnu q v bodě ${}^1A$ na k v půdorysně, řídící rovinou je rovina totožnosti. Soustava jeho povrchových přímek rovnoběžných s rovinou totožnosti tvoří v půdorysu patrně paprskový svazek o vrcholu p_1, jejich stranorysy jsou vzájemně rovnoběžny; hlavní stranorysna sdružena kolem základnice y s půdorysnou.

Druhá řídící rovina pomocného hyperbolického paraboloidu je půdorysně promítací rovina přímky q, druhá soustava povrchových přímek s ní rovnoběžná má tedy půdorysy rovnoběžně ku q a stranorysy tvoří paprskový svazek o vrcholu K, do něhož se promítá do stranorysny osa x jako jedna přímka soustavy první. Tím je jednoduché použití pomocného hyperbolického paraboloidu zřejmo. Z bodu C_1 odvodíme C_3 a druhá povrchová přímka ${}^1q$ bodem procházející je dána půdorysem ${}^1q_1 \parallel q$ i stranorysem ${}^1q_3 \equiv C_3K$. Obráceně je zřejmé sestrojení dotykového bodu pro rovinu procházející povrchovou přímkou.

22. Cylindroid čili Plückerův konoid. Cylindroid je určen *řídící elipsou* jako řezem rotační válcové plochy, *řídící přímkou,* která jest její přímkou povrchovou a *řídící rovinou,* jež jest rovinou jejího normálního řezu. Jest *eliptickým konoidem přímým* zvláštní konstrukce a je třetího stupně, protože řídící přímka protíná řídící křivku.



Obr. 44.

Jest několik způsobů sestrojení této důležité zborcené plochy; její použití tkví v mechanice a zvláště v kinematice. Vyjděme z určení, že *cylindroid je geometrickým místem os příček dvou daných mimoběžek a jejich osy.* Znázorňujícím obrazcem buď jediný kolmý průmět na rovinu, s níž jsou dané dvě mimoběžky m a n rovnoběžny a jejich osa o k ní kolmá, jeví se tedy o_1 jako bod $O_1 \equiv (m_1, n_1)$; (v obr. 44 bylo by třeba připojiti kóty bodů). Sestrojme kolmé příčky osy o a proměnné příčky mimoběžek m a n. Plocha určená těmito kolmými příčkami jest cylindroid.

Povrchové přímky konoidu jsou rovněž rovnoběžny s průmětnou a jejich průměty tvoří paprskový svazek o vrcholu o_1. Je-li $M'N'$ příčka mimoběžek m a n, pak povrchová přímka p' konoidu má svůj $p'_1 \perp M'_1N'_1$ a protíná tuto příčku v bodě P'. Označíme-li průsečíky přímek m, n a p' s osou o postupně M, N a O', pak $\overline{MO'} : \overline{NO'} = \overline{M'P'} : \overline{N'P'} = \overline{M'_1P'_1} : \overline{N'_1P'_1} = \operatorname{tg} \mu' : \operatorname{tg} \nu'$, jsou-li μ' a ν' úhly sevřené přímkou p' s přímkami m a n. Všechny příčky, jež mají tento poměr stálý, mají tutéž příčku p'; jsou to příčky s rovnoběžnými průměty. Souhrn povrchových přímek konoidu obdržíme, necháme-li bod M' na m pevným a probíhá-li při tom bod N' přímku n. Přímky m a n leží též na ploše. Osy souměrnosti s_1 a t_1 úhlů přímek m_1 a n_1 jsou průměty těch povrchových přímek s a t konoidu, které procházejí půlícím bodem S úsečky MN, t. zv. *středem plochy.*

Dvě povrchové přímky p' a p'', které svírají s některou z přímek s a t stejné úhly, protínají přímku o v bodech souměrně sdružených podle středu S. Na ose patrně je $\overline{MO'} : \overline{NO'} = \overline{NO''} : \overline{MO''}$.

Sledujeme-li dvě povrchové přímky p' a p''' té vlastnosti, že $\sphericalangle sp' = \sphericalangle tp'''$, poznáme, že protínají přímku o v témž bodě.

Zvláště přímky k a l, jež půlí úhel přímek s a t procházejících středem plochy, svírají s nimi úhel 45 a určují na o body K a L, jimiž prochází toliko po jedné povrchové přímce.

Přímka o je dvojnou přímkou konoidu a zove se jeho osou, přímky k a l jsou torsálními přímkami na ploše.

Jako byly základními přímky m a n, právě tak mohou jimi býti jiné dvě přímky, jež svírají stejné úhly s přímkou s (nebo t), jež půlí $\sphericalangle mn$; ve zvláštním případě mohou to býti přímky $k \perp l$.

Řez zborcené plochy cylindroidu rovinou, jež prochází povrchovou přímkou. Mysleme si rovinu σ přímkou p' a její stopy k^σ a l^σ na vodorovných rovinách, jež procházejí torsálními přímkami k a l, jakož i průsečíky $K' \equiv (k, k^\sigma)$ a $L' \equiv (l, l^\sigma)$. Pak $K'L'$ leží v rovině σ a protíná přímku p' v bodu P'. Podle definice konoidu prochází každým bodem P' na p' přímka, jež stojí na p' kolmo a protíná k a l, ($K'L' \perp p'$, spádová a hlavní přímka roviny σ). Volbou bodu P' je provedena volba roviny σ ze svazku rovinového s osou p'.

Kružnice e_1 opsaná nad průměrem $K'_1L'_1$ prochází bodem O_1 a je průmětem řezu konoidu rovinou σ. Ukážeme, že libovolná povrchová přímka u konoidu protíná rovinu σ v bodu U, jehož průmět U_1 je na e_1.

Sestrojme u_1 a v průsečíku U_1 s e_1 kolmici na u_1 a označme její průsečíky s průměty torsálních přímek $(K)_1$ a $(L)_1$, se stopami zvolené roviny $[K_1]$ a $[L_1]$. Pak (K) a (L) jsou průsečíky přímek k a l s příčkou bodem U a $[K]$ a $[L]$ lze považovati za stopníky přímky v rovině σ. Přímky $(K)(L)$ a $[K][L]$ se protínají v bodu U, jenž je průsečíkem přímky u s rovinou σ.

Z podobných trojúhelníků $\triangle\, U_1K'_1(K)_1 \sim \triangle\, U_1L'_1O_1$ (mají strany vzájemně kolmé) plyne, ježto také $K'_1[K]_1$ a L'_1V jsou v nich stejnolehlými příčkami, úměra

$$\overline{(K)_1U_1} : \overline{[K]_1U_1} = \overline{O_1U_1} : \overline{VU_1}.$$

Obdobně z podobných trojúhelníků $\triangle\, U_1L'_1(L)_1 \sim \sim \triangle\, U_1K'_1O_1$ plyne úměra

$$\overline{(L)_1U_1} : \overline{[L]_1U_1} = \overline{O_1U_1} : \overline{VU_1}.$$

Tedy

$$\overline{(K)_1U_1} : \overline{[K]_1U_1} = \overline{(L)_1U_1} : \overline{[L]_1U_1},$$

což potvrzuje, že bod U je průsečík přímek $(K)(L)$ a $[K][L]$; a jelikož leží v rovině σ a na u, jest tvrzení dokázáno. Tedy:

Rovina procházející povrchovou přímkou cylindroidu protíná plochu ještě v elipse, jež se promítá kolmo ve směru jeho osy do kružnice.

Tato kružnice se dotýká průmětu té povrchové přímky p''', která s p' protíná osu o v témž bodu. Neboť obě přímky určují s přímkou o obě tečné roviny plochy v tom bodě (tečné roviny obou plášťů, jež se v dvojné ose pronikají) a průsečnice roviny sečné a promítací tečné je tečnou řezu. Střed S_0

kružnice e_1 jest podle toho na průmětu p''_1 povrchové přímky p'', jenž je s p'_1 souměrně sdružený podle s_1.

Zároveň patrno, že vzniká těmito osami táž zborcená plocha třetího stupně, jež je definována v záhlaví článku řídícími útvary.

Zdánlivým obrysem libovolného průmětu cylindroidu jest křivka třetí třídy. Neboť každý bod průmětny je průmětem tří bodů plochy, průsečíků s promítacím paprskem; i procházejí jím průměty tří povrchových přímek jako tečny obrysové.

Sestrojování tečné roviny v bodě plochy a dotykového bodu pro rovinu procházející povrchovou přímkou cylindroidu je obsaženo v základním obrazci.

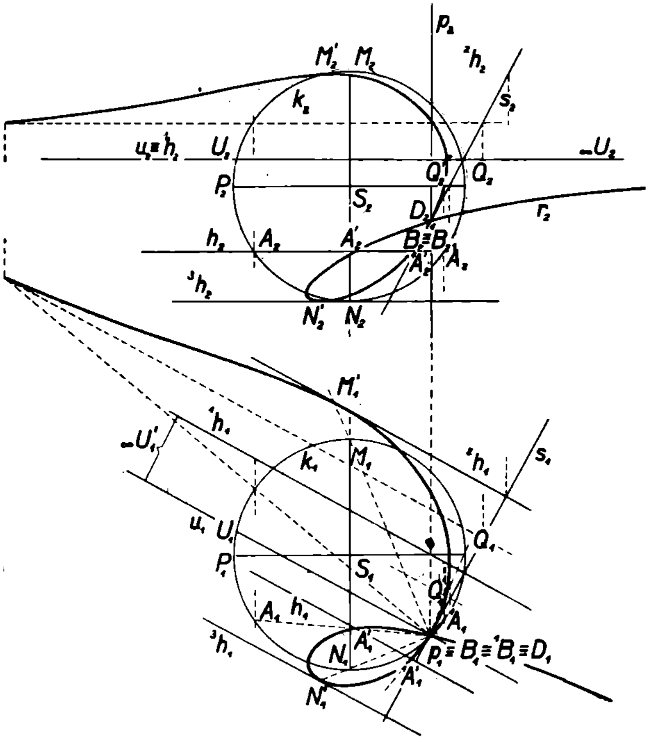
Je-li sestrojiti tečnou rovinu v bodě Q' povrchové přímky p', sestrojíme půlící bod úsečky $S_1Q'_1$ a v tom kolmici na p'_1; ta určí na torsálních přímkách k a l body K' a L', jimiž procházejí stopy $k^\sigma \parallel l^\sigma \parallel p'_1$ žádané tečné roviny na torsálních rovinách.

Je-li obráceně dána rovina σ, procházející povrchovou přímkou p', stopou $l^\sigma \parallel p'$ na horizontální rovině procházející torsální přímkou l, sestrojíme bodem $L' \equiv (l^\sigma, l)$ kolmici $L'K' \perp p'$ a zjistíme její patu P' na p'; učiníme-li $\overline{P'_1Q'_1} = \overline{P'_1O_1}$, je sestrojen dotykový bod Q' ve dvojnásobné vzdálenosti bodu P' od osy konoidu.

Jest ovšem možno řešiti obě úlohy použitím dotykového hyperbolického paraboloidu.

Řez cylindroidu rovinou polohy obecné jest křivka třetího stupně s dvojným bodem na dvojné řídící přímce. V obr. 45 řešena tato úloha pro řídící elipsu k, která se promítá do půdorysny i nárysny jako kružnice, půdorysně promítací řídící přímku p, která elipsu k seče, takže půdorys p_1 leží na k_1, a řídící půdorysnu. Elipsa k leží v rovině rovnoběžné se základnicí x a svírající s oběma průmětnami úhel 45°, hlavní osa $MN \perp x$, vedlejší $PQ \parallel x$, poměr poloos $\sqrt{2} : 1$. Sečná rovina ϱ je dána první spádovou přímkou s, protínající řídící přímku v bodě D.

Povrchové přímky v jednotlivých rovinách horizontálních poskytují body průsečné křivky r na půdorysných hlavních přímkách, v kterých je proťata rovina ϱ těmi pomocnými



Obr. 45.

rovinami; na př. na přímkách AB a $^1A^1B$ určí body A' a $^1A'$ průsečné křivky hlavní přímka h, jejíž půdorys $h_1 \perp s_1$ se odvodí z nárysu $h_2 \parallel x$ pomocí průsečíku s přímkou spádovou.

V libovolném bodě A' sestrojila by se tečna křivky r jako průsečnice tečné roviny plochy rovinou sečnou.

Sestrojíme-li na cylindroidu povrchovou přímku u rovnoběžnou s rovinou ϱ, $u_1 \parallel h_1$ a prochází bodem p_1, protne rovinu ϱ v úběžném bodě asymptotickém $_\infty U'$ křivky na její hlavní přímce ${}^1h$, $u_2 \equiv {}^1h_2$.

Torsální přímky poskytnou body M' a N' křivky r na hlavních přímkách ${}^2h$ a ${}^3h$ roviny ϱ, jež jsou tečnami průsečné křivky, protože tečné roviny v bodech M' a N' jsou horizontální roviny torsální.

Průsečík D sečné roviny a dvojné řídící přímky je dvojným bodem průsečné křivky.

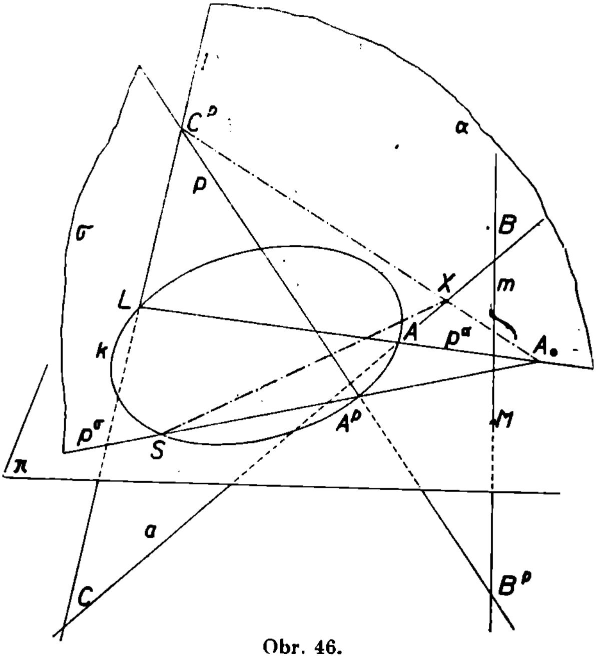
Zborcené plochy cylindroidu používá se v kinematice při určování rotačních hyperboloidů o mimoběžných osách dotýkajících se podél společné povrchové přímky, tedy při mechanismu, jenž převádí rovnoměrný rotační pohyb v týž pohyb kolem osy s původní mimoběžné (čl. 5). Dále při určování os šroubových pohybů, jež převádějí přímku a její bod v jinou přímku a bod na ní.

23. Některé vlastnosti obecných ploch zborcených třetího stupně. *Obecná zborcená plocha třetího stupně vzniká příčkami kuželosečky a dvou mimoběžek, z nichž jedna kuželosečku protíná.* Vskutku existují vždy tři povrchové přímky, jež protínají dané řídící útvary a libovolnou přímku p. Neboť přímka p a dané dvě řídící přímky určují svými příčkami zborcený hyperboloid, jejž daná kuželosečka protíná ve čtyřech bodech; ale jeden z nich je předem dán (průsečík řídící přímky s řídící kuželosečkou) a ostatními třemi procházejí tři povrchové přímky.

Je-li k kuželosečka, l řídící přímka, která ji protíná a m řídící přímka, která ji neprotíná, tu každým bodem na l procházejí dvě povrchové přímky t. j. l jest dvojnou přímkou zborcené plochy. Přímka m jest jen jednoduchou přímkou na ploše. Tečné roviny vedené přímkou m ke kuželosečce k určí na dvojné přímce l kuspidální body.

Rovina procházející povrchovou přímkou p zborcené plochy třetího stupně protíná ji ještě v kuželosečce; lze to ukázati přímo.

Označme v znázorňujícím obrazci 46 stopníky L a M řídících přímek l a m na rovině π řídící kuželosečky k. Libovolná



Obr. 46.

rovina α procházející přímkou l má stopu p^α jdoucí stopníkem L a určí na k bod A a na m bod B, i jest $AB \equiv a$ povrchovou přímkou zborcené plochy a protíná přímku l v bodě C.

Libovolná povrchová přímka p nechť protíná dané řídící útvary v bodech A^p, B^p a C^p, stopa libovolné roviny σ touto přímkou procházející jest p^σ, jde stopníkem A^p přímky, S jest její druhý průsečík s kuželosečkou k.

Proměnná povrchová přímka a zborcené plochy protíná tuto rovinu σ v bodě X, který vyplňuje kuželosečku; bod X leží na průsečnici rovin (σ, α), jež spojuje průsečík stop $(p^\sigma, p^\alpha) \equiv A_0$ s bodem C^p, společným patrně oběma rovinám.

Otáčí-li se rovina α kolem přímky l, vytvoří rovinový svazek, jeho řezy rovinou π a přímkou m, t. j. svazek stop $L(A, \ldots)$ a bodová řada $m(B, \ldots)$ jsou vzájemně projektivní a tedy též projektivní s paprskovým svazkem o vrcholu S, jenž promítá křivou bodovou řadu $k(A, \ldots)$.

Rovina $(S, A, B) \equiv (S, a)$, která obsahuje bod X, obaluje při tom otáčení kuželovou plochu druhé třídy, protože spojuje paprskové družiny soustředných vzájemně projektivních paprskových svazků $S(B, \ldots)$ a $S(A, \ldots)$ v rovinách (S, m) a π. Jednou polohou této roviny je také rovina σ; proměnná rovina (S, A, B) protíná tedy trojinu pevných rovin (S, m), π a σ v přiřazené trojině paprsků SB, SA a SX. Protože $S(X, \ldots) \overline{\wedge} S(A, \ldots) \overline{\wedge} L(A, \ldots)$ resp. $p^\sigma(A_0, \ldots)$ persp. $C^p(X, \ldots)$, jest tímto řetězem projektivních útvarů dán projektivní vztah paprskových svazků a vrcholech S a C^p v rovině σ, jež průsečíky svých družin poskytují body $X, \ldots$ průsečné kuželosečky.

Odtud plyne:

Roviny, které procházejí proměnnou povrchovou přímkou a pevným bodem zborcené plochy třetího stupně, obalují kuželovou plochu druhého stupně.

Odtud další věta:

Průmětem zborcené plochy třetího stupně z libovolného bodu na jejím povrchu na libovolnou rovinu jest kuželosečka; ta prochází ovšem průměty kuspidálních bodů.

Svazek rovinový $l(\alpha, \ldots)$, jehož osou je dvojná přímka l plochy, protíná přímku m a kuželosečku k v projektivních řadách $m(B, \ldots) \overline{\wedge} k(A, \ldots)$. Z toho plyne:

Povrchové přímky zborcené plochy třetího stupně protínají jednoduchou řídicí přímku a libovolnou kuželosečku na ploše v projektivních řadách.

A obráceně:

Jsou-li dány dvě projektivní bodové řady na libovolné přímce a libovolné kuželosečce, tu spojnice jejich bodových družin jsou povrchové přímky zborcené plochy třetího stupně.

Lze tedy tři libovolné družiny voliti, další jsou stanoveny. Jsou-li $A_1A_2A_3 \ldots \barwedge B_1B_2B_3$ tyto družiny, určíme k průsečíku B_4 přímky m a roviny π bod A_4 na k, spojnice A_4B_4 protíná k po druhé v bodu L a tím prochází přímka l jako příčka na př. spojnic A_1B_1 a A_2B_2. Svazek rovin α o ose l zajisté protíná m a k v projektivních řadách se sdruženými dvojinami A_1B_1, A_2B_2 a A_4B_4. Tedy libovolná rovina svazku protíná m a k v družinách projektivity, t. j. spojnice družin protínají všechny přímku l (dvojnou přímku plochy). Tím je tvrzení dokázáno, povrchové přímky jsou příčky útvarů $[klm]$.

Zborcená plocha 3. stupně jest plně určena dvojnou přímkou l, řídicí přímkou m a pěti povrchovými přímkami, které protínají obě přímky l a m. Neboť rovina procházející jednou z těch pěti povrchových přímek protíná ostatní čtyři v bodech, které s průsečíkem na přímce dvojné určují kuželosečku k. Pak je plocha dána řídícími útvary $[klm]$.

Pěti povrchovými přímkami se dvěma společnými transversálami jsou dány dvě zborcené plochy třetího stupně. Transversály leží celé na ploše, majíce s ní 4 body společné a protínají tedy i ostatní povrchové přímky. Jsou to tedy řídicí útvary plochy a podle toho, kterou z nich zvolíme za přímku dvojnou, obdržíme dvě různé plochy zborcené třetího stupně. Obě plochy nemají mimo ty dvě přímky žádného společného bodu, jinak by měly společnou i příčku obou přímek procházející bodem; pak by však rovina procházející onou příčkou protínala obě plochy v téže kuželosečce.

Tvořící povrchové přímky zborcené plochy třetího stupně protínají se po dvou na dvojné přímce plochy. Tyto družiny povrchových přímek protínají jednoduchou řídící přímku v družinách bodové involuce, jejíž samodružné body jsou na torsálních přímkách. Řada průsečíků na dvojné přímce jest projektivně přiřazena bodovým družinám involuce na jednoduché řídící přímce.

Otáčí-li se rovina kolem jednoduché řídící přímky m, tvoří její stopy paprskový svazek o vrcholu M, který vytíná na k družiny involuce; tato involuce se promítá z bodu L involucí paprskovou a z přímky l involucí rovinovou, která určuje na řídící přímce m tu bodovou involuci, jež je vyťata družinami povrchových přímek.

Svazek stop o vrcholu M určuje projektivní s ním involuci na kuželosečce k a tedy i projektivní k involuci sdružených bodů na m. Svazek stop o vrcholu M je také projektivní k bodové řadě dvojných bodů na přímce l. Tím je dán také vytčený projektivní vztah mezi l a m. Můžeme tedy říci:

Zborcená plocha třetího stupně vzniká spojnicemi bodů involuce na přímce s přiřazenými body řady, která je s bodovou involucí projektivní.