PŘEDMĚT MATEMATIKY

A) *Předmět matematiky je podmíněn programovými úlohami.*

Abychom poznali, do jaké míry se projevují praktické úlohy, kladené matematice v pokroku této vědy, promluvíme si o dvou údobích, klasickém a potom novodobém, jež jsou v tomto směru velmi poučná. Připomínáme výslovně, že nejde o historické zhodnocení všeho, co je pro udaná období význačné, ale o jisté pohledy, jež mají pro nás v dalším svůj význam.

Starověká matematika, na příklad geometrie egyptská i geometrie řeckých matematiků doby před Euklidem, čerpala mnoho z praktických potřeb. Předměty, jimiž se zabývala, byly z převážné většiny nejen *myslitelné,* ale, co je důležité, také *představitelné;* byly názorné povahy. Není také divu. Úlohy vznikly z takových podnětů, jako proměřování pozemků, staveb, jednoduchých ornamentů k účelům ozdobným a pod. Jde vždy o vyšetřování vztahů úseček, kruhových oblouků, jednoduchých křivek, jež lze kresliti. Jakkoli složité jsou geometrické úvahy, lze je vždy konstrukcí podepříti — lépe řečeno — konstrukcí na místě řešiti. Úvahy lze tedy pohodlně přehlédnouti, ponecháme-li si k tomu dostatek času. Obvykle nejde než o konečný počet předmětů, jež jsou ve hře, a v důsledku toho také o konečný počet vztahů, jež se mezi elementy úlohy naleznou, protože také myšlenkových operací, jimž jsou předměty i vztahy podrobeny, je také konečný počet. Tím jsou také nové předměty finitně konstituovány. Pokud se antická matematika zabývala úlohami, v nichž přichází nekonečný počet operací, pak to bývají úlohy takové, kde celý souhrn tohoto nekonečného množství operací lze jedním pohledem přehlédnouti. Příkladem pro takovou úlohu je důkaz nesouměřitelnosti strany čtverce a jeho úhlopříčky, kde jistý obrat se monotonně opakuje, nebo úloha aproximační, jakou bylo vyjádření délky kruhového oblouku délkou obvodu vepsaných i opsaných mnohoúhelníků, výpočet obsahu parabolické úseče a j. Monotonní opakování jistého konstruktivního obratu umožňuje právě ono přehlédnutí celého postupu jedním pohledem. Úlohy, kde se nelze obejíti bez nekonečného počtu operací, vznikly však až později, kdy již byly základy geometrie dostatečně pevné. Čím se však vyvinulo matematické myšlení, jež vyšlo od určitého praktického proměřování? Tam totiž také v podstatě šlo o úsečky, úhly, průsečíky, které však měly význam jen pro tu úlohu a nic více. Po vykonání měřické práce ztrácely tyto opory úvahy význam. Matematické myšlení šlo dále. Také před ním ležely původně konkrétní obrazce. Jde o to, co zbude, oprostí-li se myšlení od náhodných znaků, jež právě ten a ten obrazec má. Je jasno, že barva, empirická nepřesnost, určitá, zvláštní volba obrazce, jeho velikost, fakt, že úhel je tak a tak ostrý, *nesmí rušit obecné závěry*. Matematik musí míti schopnost, nevšímati si těchto náhodných znaků. Co však zbývá? Zbývají *vztahy* mezi elementy obrazce.

V psychologických úvahách o matematické abstrakci byl již vícekráte učiněn pokus, vyložiti ideální předměty matematické jako abstrakci z materielních nebo nějak idealisovaně představovaných předmětů až k čistému pojmu. Psychologický postup nepostrádá zajímavosti pro výklad genese takových pojmů, ale pro matematiku nemá valného užitku, protože, ať je abstrakce prováděna jakkoli daleko, nelze se nikdy odvrátiti od názorného podkladu. Tento názorný podklad je nesporně mocnou vzpruhou pro matematickou fantasii, ale postrádá logické přesnosti, jež mohou vyjádřiti jen *vztahy*.

Vrátíme-li se ku geometrickému obrazci, tedy to, co zůstane zachováno vždy, ať je obrazec dobře nebo špatně nakreslen (neuměle), představován jasně nebo méně jasně, jsouť *vztahy* mezi úsečkami, oblouky, body, plochami. Pro matematický rozbor je závažné: přímky se protínají v ostrém úhlu, přímky se protínají pod pravým úhlem, na této úsečce leží tři z hledaných bodů, kružnice je touto přímkou proťata ve dvou bodech. Tyto vztahy jsou něčím neproměnným, něčím, co daný obrazec vždy dostatečně určuje. Vztahy také zůstávají zachovány v jakékoli poloze a nemění se ani názorným pohybem.

Číselné zákonitosti byly v této první době většinou interpretovány geometricky, t. j. podle úseček a ploch. V tom směru postačí si vzpomenouti na věty Euklidovy nebo na větu Pythagorovu (jež vlastně patří do theorie kvadratických forem, jak jsme před nedávnem viděli na indických formulích pro řešení pythagorovské rovnice.). Zlomky byly chápány jako poměry, také většinou v geometrickém pojetí.

Neméně podnětnou službu prokázala matematice fysika. Tak jako praktické úlohy měřické vedly k usoustavění poznatků geometrických a k vybudování vědecké soustavy, tak také úlohy, jež kladla matematice fysika, vedly nejen k obohacení, ale přímo k vytvoření zcela nových method velké nosnosti, jež charakterisují dnešní matematiku.

Promluvíme si tu v nejhrubších rysech o fysikálním programu Galileiho, jenž právě moderní matematice dal největší impulsy. V této době se stává matematika pomocnou vědou pro universální, vše objímající vědu o vnějším světě, o tom světě, který má objektivní, všemi ověřitelné zákonitosti. S tímto přesvědčením, jež bylo podkladem pro novodobý přírodovědecký názor, se počal Galileiho program uskutečňovati a vývoj dal mu za pravdu. Galileiho program je v celku znám: fysikální zkoumání má vyjíti ze zkušenosti (jeho studie kyvu, volného pádu) a pokusiti se o matematickou formulaci fysikální zkušenosti.

Proti starověku a středověku jde o nový, radikálně nový program. Jde o výstavbu objektivního fysikálního světa, jenž má býti tak poznán, aby sloužil cílům lidské práce. Svět kvalit, který nelze objektivně měřiti, musí býti převeden na kvantity, jež je možno vyjádřiti přiřazenými čísly. Tón, barva, teplota, to vše musí býti redukováno na čísla. Výsledky jsou známy. Tón je charakterisován svojí výškou, danou počtem kmitů za vteřinu, jeho zabarvení, tedy vyložená kvalita, je určena spoluzněním svrchních tónů. Intensitu tónu, také kvalitu, lze také číselně vyjádřiti a uvésti do vztahu k energii kmitajícího tělesa a prostředí. Barva, kterou se domníváme viděti mimo sebe někde v prostoru, je vyjádřena příslušnou délkou elektromagnetické vlny, jež zasahuje naši sítnici a v nás teprve budí dojem barvy; objektivně existuje pro fysika, i když je barvoslepý; vlnu zachytí vždy, aspoň fotograficky. Teplotu, také typickou kvalitu, lze uvésti známým způsobem v souvislost s objemovými změnami plynů.

Program, jehož výsledky, dnes běžné, jsme si tu letmo připomněli, neměl v době Galileiho skoro žádné matematické prostředky, kterých si jeho uskutečnění vyžadovalo. Povaha tohoto programu to byla, jež přinutila matematiku k vytvoření celých nových odvětví, chtěla-li své povinnosti jako pomocná věda učiniti zadost. To je patrno na příkladu: fysikální tělesa mohou míti jakýkoli představitelný tvar, dráhy, jež probíhají body takového tělesa v prostoru, mohou býti jakékoli názoru přístupné křivky.*) Pro pojetí tak obecné bylo antickou geometrií připraveno velmi málo. Kromě několika zvláštních křivek, ploch a těles, nebylo patrno, jak vyjádřiti geometricky obecnější útvary. Odtud jde pak přímá cesta k analytické geometrii prostoru i v její diferenciální formě. Aritmetika, jež se tu připojuje ke Galileiho programu zcela souřadně, neomezuje se od této doby na vyjadřování číselných vztahů mezi konkrétními čísly, nýbrž hledá za pomoci symbolického vyjadřování značkami cestu k zachycení zákonitostí obecných. Fysikální vyjádření zákona musí mluviti ve vztazích obecných, ne s *určitou* hmotou, polohou a časem.

Je to zejména zcela nový rys, jenž se dostává do úvah, podnícených Galileiho programem, a to úvahy s nekonečnem. To počíná stále více pronikati, ať již jde o úvahy „v malém", týkající se spojitosti, nebo úvahy o veličinách rostoucích nad všechny meze. I toto vše leželo v programu Galileiho, v programu jeho konstrukce světa: zvládnutí mikrosvěta i kosmu jako celku. Tento celek se tehdy ztotožňoval s Euklidovským trojrozměrným prostorem. Úvahy o nekonečně malém, jak se tehdy říkalo, potřebovalo prohloubené studium spojitosti.

*) Matematika zná také křivky, jež leží třeba v euklidovské rovině, a jež si představiti nelze, na př. křivky, odpovídající funkcím, jež nemají nikde derivací (Bolzanův příklad, uvedený v Diferenciálním počtu prof. Petra), nebo třeba známá křivka Peanova.

Na druhé straně třeba formulace základních zákonů mechaniky, jež byla důsledkem nauky Koperníkovy si vynutila výslovné užití předmětu „nekonečně vzdáleného". Pod takovým předmětem rozumíme konstrukci, jejíž oprávnění vysvítalo v klasické mechanice z takovéto úvahy: mysleme si hmotné těleso v pohybu. Změníme-li nepatrně polohy a stavy těles, velmi vzdálených od tohoto tělesa v pohybu, bude jeho pohyb ovlivněn uvedenou změnou tím méně, čím jsou tělesa vzdálenější. Budou-li „nekonečně vzdálena", nezmění se pohyb našeho tělesa vůbec. Právě tak: hmotné těleso setrvá v rovnoměrném přímočarém pohybu, je-li „nekonečně vzdáleno" od ostatních hmotných těles. Zcela podobně bylo zavedeno těleso nekonečně vzdálené v úvaze o elektrickém potenciálu nabitého vodiče. Euklidovský prostor se hodil pro takovéto úvahy a teprve mnohem později, vlivem geometrie Riemannovy se počalo upouštěti od zavedení „nekonečně vzdálených" hmot a počal se soustavně zkoumati prostor finitně ohraničený. (K této věci srovn. Painlévé, Les axiomes de la mécanique, ve sbírce Les Maîtres de la pensée scientifique, str. 45 a násl., zejména str. 54 a násl.)

Strmý rozvoj matematiky, jenž vyšel ze širokého přírodovědeckého programu Galileiho, vedl k jejímu zkloubení a doplnění a také ke stoupající abstrakci. V této poslední fázi, v níž je matematika v dnešní době, vrací matematika často služby, jež jí fysika kdysi prokázala, a stává se pořádajícím nástrojem v úvahách o kosmu jako celku i v úvahách o dnešním mikrosvětě. Velká myšlenka Galileiho se změnila: z původního souřadného spojení pokusu a vyjádření zákonitosti se stává namnoze abstraktní spekulace, jež se dodatečně pokusy ověří.

Toto vše je dobře míti na mysli, než se obrátíme k obecné úvaze o povaze matematického předmětu. Převážná většina všeho pokroku v matematice je podmíněna impulsy, jež leží mimo vlastní technickou oblast matematiky. Invence matematikova byla vždy podnícena úlohami, jež jí kladla praxe a jen menší část je výsledkem úloh, kladených v oboru samém. V této okolnosti tkví také psychologické a sociologické předpoklady vědecké prosperity matematiky.

B) *Konstruovatelnost a bezespornost.*

Viděli jsme v předchozím, že názorné představy byly mocným inspiračním zdrojem pro matematiky. Názorné představy přinášejí sebou mnohé vlastnosti, jež má míti předmět matematikových úvah: shrnují v názorné jednotnosti mnoho složek a tvoří celky. Názorné vztahy mezi nazíranými představami vybízí k pojmovému rozboru a tím k nalezení exaktních relací, jež nezávisejí na názoru a jež vážou matematické předměty. Tím, že vyběřeme názorné celky, poutáme řadu vlastností a vztahů k jednomu předmětu, svazujeme je a předmětem centralisujeme pod jednotící hledisko. Takovým výběrem předmětu, při kterém spoluúčinkuje mnoho zřetelů, jako barvy, tvary, význam předmětu pro život — dosahujeme pořádku ve svém přehledu vnějšího světa, klasifikujeme, oddělujeme, s českým filosofem Vorovkou mluveno: uplatňujeme princip diskontinuity myšlení. O předmětech svého názoru, které jsme tak vybrali z chaosu dojmů, můžeme pronášeti výpovědi. A těmito výpověďmi jsme posunuli původní názorný předmět do oblasti myšlení.

Předmět myšlení je vše, o čem můžeme pronášeti ně-jaké výpovědi — o čem lze usuzovati. Tedy také matematický předmět je toho druhu. Ovšem, výpovědi a úsudky, jež o předmětu pronášíme, jsou také předměty našeho myšlení, protože i o nich můžeme pronášeti jiné výroky a tvořiti jiné úsudky. Taková redukce, převádění jedněch úsudků na druhé, nemůže býti bez konce. Je tedy patrno, že budeme musit vyjít, jak si později podrobněji ukážeme, od některých výroků a úsudků, které vezmeme za základní. Tím dostaneme pro soustavu úvah o předmětech pevnou základnu, od níž se všechny úvahy rozvíjejí.

Předmět sám jiným způsobem vymeziti nelze, je tu obdobná situace, jakou najdeme i u jiných základních pojmů. Podobná nesnáz je, uvažujeme-li o pravdivosti nebo nepravdivosti nějakého výroku. Především je jisto, že o takové vlastnosti výroku nelze usuzovati isolovaně. Výrok vždy musíme uvésti do vztahu se všemi výroky jinými, s nimiž souvisí a hledáme jeho pravdivost nebo nepravdivost vzhledem k celé síti výroků, s nimiž souvisí. Ale i tu musí někde redukce končit a musí tedy existovati výroky, jež další redukci v tomto systému nepřipouštějí a jež považujeme za základní. Nemají snad povahu absolutních neměnných pravd, nýbrž opor pro výstavbu soustavy, kterou má ten vědecký obor za svůj cíl. Se způsobem tohoto myšlení se v dalším seznámíme.

Nutným předpokladem, abychom mohli z nepřehledného proudu svého vědomí odloučit předmět a myslit vůbec „předmětně", je naše schopnost, popsané a vysouzené o předmětu podržeti: tím je zaručeno, že ten předmět je stále identický sám se sebou. Platí-li jinak pro náš život známé Heraklitovo rčení, že nikdy dvakráte nevstoupíme do *téže* řeky, platí pro myšlené předměty matematiky, že jsou samy s sebou identické a v čase neměnné. Vlastnost našeho duševního života, uplatniti tuto identitu v myšlení a tím umožniti předmětné myšlení, patří k nejpodivuhodnějším vlastnostem myšlení. Jinak by lidské myšlení nebylo než řadou reakcí na prostředí, v němž se náhodou organismus vyskytl.

Matematické předměty, aspoň mnohé, lze, jak se říká, konstruovati. Požadavku konstruovatelnosti velmi dobře vyhovovala antická matematika. Konstruovatelnost není míněna jako idealisované provádění skutečných konstruktivních úkonů (kružítkem a pravítkem), ale jako vytvoření nového předmětu takovým postupem, jak jsme si popsali při úvaze o některých rysech antické matematiky. Vyjdeme-li od nějakých základních předmětů a vztahů, o jejichž vznik se zatím nestaráme, dojdeme buď konečným, nebo nekonečným, ale pak v podstatě nazíratelným počtem kroků k předmětům novým. Právě tak k novým vztahům.

Celá záležitost je jednoduchá, pokud nejde o soubory předmětů, jež nejsou konečné. V úvahách o takových souborech se totiž užívá k zaručení existence nějakého matematického předmětu ještě jiného způsobu úvahy, který byl v nedávné době silně kritisován. Uvedeme si příklad: mějme nějaký soubor veličin, jistým způsobem definovaných. Soubor ten nechť není konečný. Takový soubor lze uspořádati a dejme tomu, že veličiny souboru nevzrůstají nad všechny meze. Pak musí býti možno, soubor nějak se shora ohraničiti, t. j. musí býti nějaká veličina, kterou jistě žádná veličina souboru nepřekročí. Úvaha, jež má existenci takové veličiny zaručiti, vede se často tak: dejme tomu, že by taková veličina nebyla. Pak je možno ukázati, že pro definované veličiny souboru plyne z tohoto předpokladu spor, nějaký absurdní důsledek. Ten však není možný — proto hranice existuje.

Tato methoda důkazu, považovaná běžně za existenční důkaz pro hledaný předmět, nestačí matematikům, kteří věří pouze konstruktivním důkazům, ať jde o soubory jakékoliv. Dokázati methodou sporu existenci hledaného předmětu, připouští jen při souborech konečných, kde je možno získat přehled přímým vyjmenováním eventualit. Pro tyto případy bývá methoda sporu však jen kratší cestou, než kterou poskytne konstruktivní methoda i se *stanovením* žádaného předmětu.

Stanovisko, jež žádá konstruktivní záruku pro existenci matematického předmětu, zastává matematická škola intuicionistická. Ti nechtějí pouze vědět, *že* nějaká veličina existuje, obecně, *že* nějaký předmět existuje, nýbrž chtějí onu veličinu také znát alespoň s dostačující přesností a předmět si sestrojiti. V čem spočívá nedůvěra intuicionistů k methodě sporu? Methoda sporu úzce souvisí s logickým principem o vyloučené třetí možnosti. Protože se budeme v dalším zevrubně zabývati logickým mechanismem matematiky, stačí na tomto místě jenom věc naznačiti. Běžné usuzování o nějakém předmětě vypadá asi tak: buď tento předmět je, má určité vlastnosti, nebo není. Třetí možnosti není. Tomuto druhu úsudku, jakkoli samozřejmě vypadá, nevěří intuicionisté a uvádějí příklady nerozhodnutých problémů, jdou dokonce tak daleko, že připouštějí problémy trvale nerozhodnutelné, u nichž nelze tak lehce říci: buďto je, nebo není — nic jiného není možné.

Proti intiucionistické škole, jejíž kritická činnost přinesla matematice cenné výsledky, stojí škola matematických logicistů, kteří se spokojí existencí předmětu, zaručeného pouhou bezespornosti. Matematický předmět existuje, jestliže jeho vlastnosti a vztahy k ostatním předmětům téže vědecké soustavy nejsou s nimi ve sporu.

Co se však stane, není-li předmět jednoduchý, běží-li o složité úvahy v theorii nekonečných množin? Vztahy předmětu ke druhým nemusí býti nijak přehledné, nemusí býti ani jednoduše pojmenovatelné a konečně zcela jistě množství vztahů i vlastností roste nad všechny meze. Jak tam zaručíme, že z žádné vlastnosti ani vztahu neplyne spor? Tyto otázky jsou již předmětem logiky a úvah o deduktivních systémech vůbec a nahlédneme do jejich řešení za nedlouho.

Jedno je již jasné. Existenci matematického předmětu lze chápati dvojím různým způsobem — buďto jej konstruujeme, nebo zajistíme jeho bezespornost. V prvním případě máme předmět jaksi hmatatelně v mysli, v druhém případě tento předmět vlastně ani nepoznáme, protože zkoumáme jen důsledky z jeho vlastností a vztahů. Lze ovšem zcela případně říci: známe-li vztahy a vlastnosti předmětu, jež zkoumáme se stanoviska bezespornosti, známe ten předmět sám. Uvedli jsme však před nedávnem typický příklad úvahy, kterou by se měla zaručiti existence jisté hranice. Důsledky z její existence nejsou ve sporu s předpoklady a přece tu hranici číselně vůbec nemusíme znáti.

V uvedeném rozštěpení názorů na matematickou existenci je patrný odraz dvou možných světových názorů. Intuicionista má silně vyvinuté pragmatické rysy, v každém případě je lidský se svým poctivým přiznáním, že možná existují i v matematice zásadně neřešitelné problémy. Možná, že zavrhuje z jistého puristického ostychu i předměty, jež jsou, a jež dosud není schopen konstruovati. Stoupenci matematického logicismu nespokojí se konstruovanými matematickými předměty jako intuicionisté. Pro ně prostě předměty, bezesporností zajištěné, existují, jako by předem připraveny a stačí je, v jejich smyslu, pouze odkrývati jako neznámé země.