Úvod do filosofie matematiky

Slovné vyjádření

In: Otakar Zich (author): Úvod do filosofie matematiky. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1947. pp. 13–24.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403160

SLOVNÉ VYJÁDŘENÍ

První, čím se budeme zabývati, bude vyjádření myšlenek v slovném tvaru. Matematika se zabývá myšlenými předměty, vztahy těchto předmětů a důsledky, jež plynou ze studia těchto vztahů. Toto vše musí nějak spolehlivě vyjadřovati. O mnohých předmětech matematiky lze sice přemýšlet bez slovní formulace, avšak úvahy je nutno nakonec slovně vyjádřiti, ať již s použitím značkové řeči nebo bez ní. V tomto tvaru se také dostávají do rukou čtenáře, v definitivním tvaru, jenž jim je dán promýšlejícím matematikem. Řeč, jako výsledek historického vývoje tohoto sdělovacího prostředku není jen prostředkem sdělování pojmů, ba lze říci spíše, *není vůbec zaměřena k logickým potřebám* přesného myšlení. To věděli umělci, tvořící v tomto materiálu, dávno dříve, než k těmto závěrům došla moderní psychologie a jazykověda. Neobyčejně veliký aparát historické řeči, jenž byl obohacován hlavně z podnětů citových a volních, je znamenitě uzpůsoben pro tvorbu básníkovu, pro tvorbu umělcovu. Dovede navoditi citové stavy zvláštním oparem, jenž je vyvolán vědomými i podvědomými asociacemi, vážícími se na slova. Mnohá z nich mají vůbec význam nejasný a zřetelně ukazují stopy toho, kdy funkce slov byla mnohdy spíše mystická anebo aspoň symbolická. Mnohoznačnost a neurčitost spolupůsobí také značně. Pojmenování dvou naprosto různých předmětů tímtéž slovem jest známé, je však někdy obtížné, skutečně takový dvojí význam analysou prokázati.

Spolehlivost řeči pro naše účely by se dala asi takto vyjádřiti: mějme na mysli nějaké předměty, jež označíme A, B. Nechť tyto předměty myšlení jsou vázány vztahem R, takže platí ARB. Vyjádření řečí bude tehdy spolehlivé, bude-li předmětu A odpovídati slovná skupina A′, relaci R slovná skupina R′ a konečně předmětu B slovná skupina B′. Při tom skupinám A′, B′, R′ musí jednoznačně odpovídati předměty A, B, R a naopak a dále, vazba skupin A′, B′ skupinou R′ platí tehdy a jen tehdy, jsou-li předměty vázány relací R.*)

Jak patrno, jde o jistý druh zobrazení myšlených předmětů na značky, jež těm předmětům odpovídají v řeči.

K spolehlivosti tohoto druhu se dopracovaly až moderní značkové řeči většiny oborů soudobé matematiky. Neschopnosti řeči, vyhověti přesné funkci logiky, vezmeme-li řeč tak jak je, si byli dávno vědomi Řekové. Nebude na škodu, uvedeme-li si tu několik logických paradox z té doby; poznáme na nich lépe funkci řeči a zúročí se nám ještě později.

1. První příklad pochází od Eubulida, popírá existenci „hromady" asi takto: hromada nemůže vůbec vzniknouti — nevíme, *kolik* zrnek bychom měli shromážditi, aby utvořila hromadu.

V podstatě tentýž kritický postřeh je obsažen v anekdotické formě, kterou Řekové rádi paradoxa odívali, v paradoxu „holohlavého" (Calvus): Kolik vlasů musí vypadnouti, aby člověk byl holohlavý?

Slova jako shluk, hromada a j. mají v běžném životním užití zcela jasný význam, chceme-li jich užíti v dorozumění. Takové slovo má určitý asociační „opar", ale

---

*) Formulaci by bylo možno provésti obecněji, neučiním tak proto, že nemáme ještě dostatek symbolických prostředků. Uvedená formulace postačí zatím, protože relace R není vázána žádnou omezující podmínkou.

nemá přiřazení k přesně určitelnému myšlenkovému předmětu, jenž by mu odpovídal.

Matematika, lze namítnouti, ovšem takových slov neurčitého významu neužije. Uvidíme však, že přece: Cantorova zdánlivá definice množiny, jednoho ze základních pojmů moderní matematiky, není příliš vzdálena od těchto „oparových" formulací a také se špatně osvědčila: stala se pramenem paradox, kterým zabránila až korektní definice axiomatická.*)

2. „Lhář", pocházející také od Eubulida: Kréťan Epimenides tvrdí, že Kréťané lhou. Mluví pravdu nebo lže?

a) Mluví pravdu: pak však popírá to, co říká jako *obecnou* větu, v jejímž oboru platnosti by také on sám musil být (se *svým* vlastním lhaním).

b) Lže: pak však mluví pravdu — neboť Kréťané tedy nelhou a on sám, jako jeden z nich, tedy také ne.

V tomto příkladě přichází mimo jiné také důležité slovo — pravda. Co znamená, že výrok je pravdivý, co znamená, že pravdivost matematických vět je povýšena nad vší pochybnost, jak se rádo tvrdí? Uvidíme později, že pravdivost, tak jak my ji budeme potřebovati pro matematiku, nespočívá tak v nějakém souhlase se skutečností, jehož se skoro vždy musí dovolávati pravda v občanském slova smyslu, nýbrž v zákonitosti mechanismu, jímž jsou matematické věty vázány na své předpoklady, jež jsou jejich východiskem. Obecně vzato, je otázka pravdivosti výroku vůbec jednou z nejtěžších, které lze položiti.

---

*) Cantorova definice, jež byla později předmětem mnoha kritik, vedoucích k vyjasnění pojmů theorie množin, zní: Pod množinou *M* rozumíme „shrnutí určitých dobře rozlišených předmětů svého názoru anebo svého myšlení (jež se nazývají elementy množiny *M*) v celek".

Abychom se vrátili k paradoxu: Kréťan, *který vyslovuje svůj úsudek o druhých,* je v slovním vyjádření buďto lhář, nebo pravdomluvný člověk. Pozor však na jednu okolnost: ať již mluví Kréťan pravdu nebo lež, zaujímá vůči *všem ostatním* kritické stanovisko, je snad lhářem *nad* lháři, v každém případě je posuzuje. Kritické stanovisko, jež zaujal ke svým spoluobčanům, ho vylučuje z kolektiva, jehož byl členem, a staví ho nad ostatní. Tato okolnost nás bude zajímati dále v theorii logických typů. Tu je nutno jen konstatovati, že řeč nevyhovuje svému účelu, protože *zvláštní postavení* Epimenidovo se vyjádřením, že může býti lhářem nebo pravdomluvným občanem, nijak neprojeví — a v tom je právě pramen paradoxa.

Paradox Kréťana zdánlivě vůbec nesouvisí s matematikou, a přece se v tolika různých obměnách Kréťan v matematice objevil. Vrátíme se k němu, až budeme mluviti o definicích „bludným kruhem" (circulus vitiosus) v theorii typů později.

3. Zajímavá je ještě tato moderní forma paradoxa Grelling-Nelsonova, jež bylo podnětné pro studium problémů theorie množin i theorie řeči. Jsou slova, jež patří pod pojem, jejž sama označují — tak na př. slovo „abstraktní" pod pojem „abstraktní". Jiná slova, na př. již slovo „konkrétní" patří tamže, jako předchozí, tedy nepatří samo pod pojem, jejž označuje. Nazveme všechna slova, jež patří pod pojem, jejž označují, slovy autologickými. Ostatní slova nazveme heterologická. Uvažujme teď, kam patří slovo „heterologický", Je-li heterologické, pak patří pod pojem, jejž samo označuje, a je tedy autologické. Autologické býti nemůže, protože jeho korespondující pojem je „heterologičnost". Tedy zase spor.

Všimněme si obdoby s paradoxem o Kréťanovi, jež není ihned patrná. Kréťan, pronášející soud o ostatních Kréťanech, *posuzuje* jejich výpovědi, jak jsme si řekli. Výraz „autologický" nebo „heterologický" je *klasifikačním* posudkem o všech možných ostatních výrazech. Tento klasifikační posudek má, obdobně jako v antinomii Kréťana, vyšší stupeň než kterýkoli výraz, jenž patří do skupiny, již si tento termín vytvořil (shrnul). Je to jen nedostatečnost naší řeči, jež klade řádově vyšší výrazy do jedné roviny (obrazně řečeno), se všemi ostatními termíny a zachází s nimi jako s výrazy souřadnými a nikoli nadřazenými.

Nedostatečnost slovního odlišení ve vyjadřování ukážeme na dvou dalších příkladech, jež se již přímo týkají matematiky.

Jedním ze základních předmětů geometrických je přímka. Řecká geometrie měla trochu jiné pojetí čar vůbec, než novodobá matematika. Řekové chápali čáry jako *celky*, tedy nikoli jako bodová kontinua, ke kterým došla matematika až v době analytické geometrie Descartesovy. Je ovšem pravda, že také pro řeckou matematiku ležely na čarách body, zejména tehdy, když tyto body byly považovány za průsečíky čáry s nějakou jinou. Pro řeckého matematika byla také čára, zejména tedy úsečka, dělitelná: rozdělitelná v menší části — úsečka tedy v libovolné množství velmi malých úseček. Ale toto dělení v menší části nebylo nekonečné, úsečky, byť sebe kratší, se neredukovaly až na body. V tom je patrný *finitistický* rys řecké matematiky, jenž byl později vystihován výrazem „potenciálního nekonečna". Finitisté v matematice, kteří uznávají jen takové „potencionální nekonečno", uznávají v matematice pouze takové věty o nekonečnu, jež lze vyjádřiti větami, obsahujícími výroky o konečnu. Nemá tedy pro ně smyslu na př. výraz „nekonečně malé číslo", výraz, kterého hojně užívala matematika v době prvého rozvoje infinitesimálního počtu, nýbrž pouze „číslo menší než libovolně malé předem dané číslo ε". Odstranění záhadných „nekonečně malých čísel", o něž byly vedeny také filosofické spory, je zásluhou zakladatelů moderní analyse, Cauchyho a Weistrassa, kteří vytvořili novou ε-dialektiku analyse. Pojetí přímky ve smyslu analytické geometrie vede naproti tomu k uznání „aktuelně nekonečně mnoha" bodů, z nichž se přímka skládá. Tyto body jsou v přímce nebo na přímce přítomny všechny, nehledají se teprve jako průsečíky při konstrukci a tvoří bodové kontinuum. Body jsou tu prvky, na něž je kontinuum možno rozanalysovati, v opaku k pojetí řeckému (také pojetí synthetické euklidovské geometrie), kde bylo možno dojíti až k úsečce, ovšem libovolně krátké. První pojetí přímky, obvyklé v klasické synthetické geometrii, i druhé pojetí přímky (pojetí analytické geometrie), se od sebe nijak neliší slovním výrazem — pro obojí máme totéž pojmenování. Záleží tedy na souvislosti, v níž se výraz „přímka" vyskytuje, pojmově jde o značně různé předměty.

Druhý příklad, ke kterému se později vrátíme ještě v jiné souvislosti, se týká reálných čísel. Protože logickou theorií celých čísel se budeme podrobněji zabývati na svém místě, spokojíme se tu zase znalostí celých čísel z početní praxe. Vedle celých čísel jsou čísla racionální, vyjádřená ve tvaru zlomku. Tato čísla již nejsou pojmově na téže rovině jako čísla celá. Jsou konstrukcemi z čísel celých. Ještě nápadnější je to však u čísel iracionálních, která také patří do reálných čísel. Iracionální číslo je určeno na př. t. zv. Dedekindovým řezem; myšlenku tohoto řezu navodila jistě početní praxe, vystihnouti iracionální číslo s možnou přesností, což byl postup známý také již v antické matematice. Takové číslo iracionální je určeno tak, že rozdělíme všechna čísla racionální ve dvě skupiny: v první skupině jsou všechna čísla racionální menší než ono číslo a při tom v této skupině není číslo největší, obdobně stanovíme druhou skupinu, v které jsou všechna racionální čísla větší než ono iracionální a kde zase není číslo nejmenší. Iracionální číslo je těmi dvěmá skupinami jednoznačně stanoveno. Je tedy určeno logicky dokonce množinami racionálních čísel, jež nemají ani konečný počet elementů. Přesto ten myšlenkový předmět nazveme zase ‚číslo', právě tak jako číslo racionální nebo celé. Homogenity, jež se nám zdá v souboru všech těch druhů čísel tak zřejmá, se dociluje společným sugestivním pojmenováním — s počátku neprávem. To je patrno z toho, že platnost základních početních pravidel pro reálná čísla, definovaná Dedekindovým řezem, se musí v každém úvodu do analyse *znovu* prokazovati. Teprve tehdy, když platí pro všechna reálná čísla stejná početní pravidla, máme právo, dívati se na jejich soubor jako na soubor se stanoviska početních pravidel homogenní — teprve tehdy jsme se přiblížili rovnoprávnosti všech čísel, již mají body přímky, které často číslům reálným přiřazujeme. Vyjdeme-li v konstrukci bodového kontinua z čísel celých, pak nelze toto kontinuum se stanoviska konstrukce druhů čísel, jež v něm přicházejí, považovati za homogenní.

V obou příkladech šlo jen o to, ukázati si, že stejné pojmenování nemusí vždy, ani v matematice, znamenati tentýž předmět, ba, že může jíti o předměty značně odlišné — právě tak jako v paradoxu o Kréťanovi, kde autor kritiky mohl být lhářem slovně stejně označeným jako oběti jeho kritiky. Pochopíme teď důvody, jež vedly k důkladné revisi vyjadřovacích prostředků řeči. První náběh k vytvoření přesné řeči spočívá v tom, že matematik pro pojmy, v nichž myslí, vytvoří vhodné a během téže úvahy neměnné popisy, jež pojmům odpovídají. Tyto popisy zaručují, že do charakteristiky pojmu se nevloudí během úvahy něco nového, co tam původně nebylo. V tom směru již byla klasická řecká geometrie na úrovni vynikající.

Dalším krokem k zpřesnění a zjednodušení je náhrada složitých slovních svazků popisných symbolickými značkami, jež se počala soustavně prováděti po prvé v oboru algebry. Značka je ovšem neměnná, nepodléhá ani změnám tvarovým, jimž jsou podrobena slova historických řečí. Značka je pak zkratkou za určitý slovní svazek, je jednoduchá, přehledná, a je možno touto značkou na papíře velmi lehce pracovati.

Abychom docílili poučného srovnání pro stenografickou výkonnost moderní matematické značky vzhledem k staršímu způsobu slovného popisu, uveďme si tu v plném znění text jisté duchaplné methody francouzského matematika 17. století, Pierre Fermata (45. poznámka Fermantova vydání Diofanta): „L'aire d'un triangle rectangle en nombres ne peut être un carré. Je vais donner la démonstration de ce théorême que j'ai découvert, je ne l'ai pas trouvé au reste sans une pénible et laborieuse méditation, mais ce genre de démonstration conduira à des progrès merveilleuses dans la science des nombres. — Si l'aire d'un triangle était un carré, il y aurait 2 bicarrés dont la différence serait un carré; il s'ensuit qu'on aurait également deux carrés, dont la somme et la différence seraient des carrés. Par conséquent on aurait un nombre carré, somme d'un carré et du double d'un carré, avec la condition que la somme des deux carrés qui servent à le composer soit également un carré. Mais si un nombre est somme d'un carré et du double d'un carré, sa racine est également somme d'un carré et du double d'un carré, ce que je puis preuver sans difficulté. On conclura de là que cette racine est la somme des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'un des carrés composant formera la base et le double de l'autre carré la hauteur. Ce triangle rectangle sera donc formé par deux nombres carrés, dont la somme et la différence seront des carrés. Mais on prouvera, que la somme de ces deux carrés est plus petite que celle des deux premiers, dont on a également supposé que la somme et la différence soient des carrés. Donc si on donne deux carrés dont la somme et la différence soient des carrés, on donne par là même en nombres entiers deux carrés jouissant de la même propriété et dont la somme est inférieure. Par le même raisonnement on aura ensuite une autre somme plus petite que celle déduite de la première, et en continuant indéfinement on trouvera toujours des nombres entiers de plus en plus satisfaisant aux mêmes conditions. Mais cela est impossible, puisqu'un nombre entier étant donné il ne peut y avoir une infinité de nombres entiers qui soient plus petites." Potud Fermat. Co do přesnosti vyjadřování si nelze zajisté více přáti, srovnáním s nynějším způsobem podání téže látky si ujasníme výkonnost značkového zápisu.

Základní rovnice pro pythagorovský trojúhelník zní: $x^2 + y^2 = z^2$. O číslech x, y, z můžeme předpokládati, že nemají společného činitele, pak je také jen jedno z čísel na levé straně rovnice sudé. Řešení rovnice podávají indické formule pro pythagorovské trojúhelníky v této formě:

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2;$$

m, n opět nesoudělná.

Obsah trojúhelníka je tedy $mn \,.\, (m^2 - n^2)$ a ten má býti čtvercem. Pak musí býti jednotlivé činitele tohoto součinu čtverci a to

$$m = a^2, \quad n = b^2, \quad a^4 - b^4 = c^2,$$

čili podle poslední rovnice

$$(a^2 - b^2)\,(a^2 + b^2) = c^2.$$

Oba činitelé napravo jsou zase nesoudělní, jak je snadno patrno, takže platí

$$a^2 - b^2 = p^2, \quad a^2 + b^2 = q^2$$

a z těchto dvou rovnic dostáváme

$$p^2 + 2b^2 = q^2.$$

Rozložíme-li levou stranu rovnice v činitele

$$(p + \mathrm{i}b\sqrt{2})\,(p - \mathrm{i}b\sqrt{2}) = q^2,$$

pak musí činitelé nalevo opět býti čtverci čísel stejného tvaru, t. j.

$$(p + \mathrm{i}b\sqrt{2}) = (r + \mathrm{i}s\sqrt{2})^2$$

a podobně pro $(p - \mathrm{i}b\sqrt{2})$. Potom však

$$p = r^2 - 2s^2, \quad b = 2rs,$$

kde opět r, s jsou nesoudělná. Z rovnic předchozího odstavce však následuje

$$a^2 = p^2 + b^2 = r^4 + 4s^4.$$

Existoval by tedy nový pythagorovský trojúhelník o stranách a, r^2, $2s^2$, jeho obsah by byl zase čtvercem (r^2s^2), ale strany by byly menší než v trojúhelníku původním. Stejným závěrem bychom došli k trojúhelníku ještě menšímu, atd., což jest zřejmě nemožné, jsou-li strany všech těchto trojúhelníků *celá* čísla.

Důkaz, který byl uveden ve tvaru nyní obvyklém, pochází v podstatě od jiného znamenitého francouzského matematika Legendra. Časový rozdíl mezi oběma důkazy není, vzhledem ke stáří matematiky, tak veliký, rozdíl mezi daty narození obou matematiků je 151 let.

Z uvedeného příkladu je jasně viděti pokrok, vzniklý zavedním značek, a to jak po stránce úspory, tak také větší přehlednosti. Je to krok dalekosáhlého významu pro studium matematických děl. Nynější složité a smělé konstrukce v některých oborech matematiky by snad nebylo ani možno bez zavedení značek popsati — a kdyby, spotřebovalo by se na několikastránkovou studii papíru na celou knihu. Toto praktické stanovisko jen zdánlivě nesouvisí s matematikou jako oborem myšlení, mohlo by se zdát lhostejné. Matematika však právě v technickém užití má tak velké úspěchy, že ani toto praktické stanovisko nelze podceňovati.

Je tu však ještě hlubší důvod další, nemluvíme-li již o zvětšené přesnosti, ani o zlepšení záznamu ve smyslu stenografie. Je to *objevitelská* cena značkového záznamu. Vztahy značek a tím vztahy jim přiřazených předmětů je možno mnohem snáze nalézti a nalezení nových vztahů je právě cesta objevu. Lze míti důvodné pochybnosti o tom, že by se bylo bez použití značek podařilo najíti hlubší formální podobnosti; na př. obdoby, jež jsou vyjádřeny jistými parciálními diferenciálními rovnicemi v různých oborech theoretické fysiky.

Nové technické pojmy matematické, jako symetrie rovnic nebo jejich soustav, jsou vázány svým vznikem na značku. Zdá se, že není příliš smělé, tvrdíme-li, že bez zavedení značkového systému v matematice bychom byli ne o mnoho dále, než je dnešní látka probíraná ve středoškolských učebnicích dosavadního rázu.

Velkou výhodou značek je dále, že určitý svazek jejich, jenž se podle povahy věcí nemění během téhož vyšetřování, je možno shrnouti v značku jedinou, snadno tak přecházíme k definici nového předmětu. Velmi často takové nové pojmenování, neboť to vskutku není nic jiného, umožní nový objev a užitím nové značky se matematická řeč obohacuje ve výrazových prostředcích.