metrických výsledků velmi lehce, výsledků velmi obecných, z kterých rázem dostaneme četné věty speciální.

Pro vzájemný vztah metrické a projektivní geometrie a pro pochopení geometrie neeuklidovské mají tyto poznatky význam fundamentální.

b) Reálná kulová plocha $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ obsahuje dvě soustavy přímek. Píšeme-li její rovnici ve tvaru

$$(x + iy)(x - iy) = (r + z)(r - z), \tag{1}$$

jeví se nám jako výsledek vyloučení veličiny α z rovnic

$$x + iy = \alpha(r - z), \quad \alpha(x - iy) = r + z, \tag{2}$$

nebo jako výsledek vyloučení veličiny $-\beta$ z rovnic

$$-\beta(x - iy) = r - z, \quad x + iy = -\beta(r + z). \tag{3}$$

Při konstantním α znamenají rovnice (2) dvě roviny, tedy přímku, při proměnném α značí soustavu přímek. Právě tak rovnice (3) vyjadřuje při proměnném β druhý systém přímek. Přímky téže osnovy (parametry α_1, α_2) jsou vždy mimoběžné, jedna přímka prvé osnovy a jedna druhé osnovy se vždy protínají v reálném bodě plochy.

Ostatně z hořejších rovnic plyne

$$x = r \cdot \frac{1 - \alpha\beta}{\alpha - \beta}, \quad y = r\,\frac{i(1 + \alpha\beta)}{\alpha - \beta}, \quad z = r\,\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}; \tag{4}$$

souřadnice bodu na ploše jsou vyjádřeny jako funkce dvou parametrů α, β. Je-li α konstantní, jsou x, y, z lineární funkce jednoho parametru a tedy bod proběhne přímku jedné osnovy; podobně při konstantním β proběhne bod přímku druhé osnovy. Aby bod byl reálný, musí být α a $-\dfrac{1}{\beta}$ komplexní sdružené. Skutečně při $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = -\dfrac{1}{\alpha_1 - i\alpha_2}$ dají (4) reálné hodnoty. Přímky na reálné kulové ploše jsou vesměs imaginární prvého druhu. Ostatně se snadno přesvědčíme, že průsek tečné roviny s plochou jsou dvě imaginární přímky. Na př. tečná rovina bodu $(0; 0; r)$ jest $z = r$; dosadíme-li do (1), dostaneme $x^2 + y^2 = 0$ čili $(x + iy)(x - iy) = 0$. Všechny přímky kulové plochy protínají absolutní kružnici, jsou to tedy přímky minimální.

c) Imaginární kulová plocha daná rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 + r^2 = 0$$

nemá žádného reálného bodu. Reálný však je polární systém jí definovaný. Reálnému bodu $P(x_0; y_0; z_0)$ patří reálná polární rovina

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 + r^2 = 0.$$

Přesvědčíme se snadno, že tomu tak je i obráceně.

Vezmeme-li opět reálnou kulovou plochu

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

za reálnou zástupkyni imaginární plochy, vidíme, že polární rovina bodu P vzhledem k ní, t. j.

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 - r^2 = 0,$$

je podle středu O symetricky položená s prvou. Polarita k imaginární kulové ploše (antipolarita reálné) je tedy složena z polarity k reálné zástupkyni a středové symetrie.

Na takové kulové ploše jsou jen imaginární přímky druhého druhu. Lze je napsati

$$x + iy = \alpha(z + ri), \qquad x + iy = \beta(z - ri),$$

$$x - iy = -\frac{1}{\alpha}(z - ri), \qquad x - iy = -\frac{1}{\beta}(z + ri).$$

d) Podobně imaginární elipsoid je dán rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

Nemá reálného bodu a obsahuje dva systémy imaginárních přímek druhého druhu. Polární systém je reálný podobně jako u imaginární kulové plochy.

e) Reálná plocha kuželová druhého stupně o vrcholu v počátku má rovnici tvaru

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad (a > b > c);$$

rovina $z =$ konst ji seče v elipse (na př. $z = c$ dává elipsu s poloosami a, b). Obecný průsek je kuželosečka. Kdy dostaneme průsek kruhový? Kružnice je kuželosečka, která prochází kruhovými body v nekonečnu ve své rovině. Ale kuželosečka v nekonečnu na kuželi a absolutní kružnice mají společné čtyři body. Ty mají 6 spojnic, ale jenom dvě z nich jsou reálné, totiž ty, které spojují vždy dva a dva sdružené body. Jsou tedy dvě osnovy kruhových průseků. Daný kužel a kužel isotropický o společném vrcholu O (0; 0; 0) určují svazek kuželů

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \lambda\,(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Trojím způsobem lze voliti λ, aby se kužel rozpadl ve dvojici rovin; pro $\lambda = \frac{1}{a^2}$ je taková dvojice reálná a lze ji napsati

$$z^2\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) y^2 = 0.$$

Při $a = b$ splynou obě osnovy; v tomto případě plocha je rotační plochou kuželovou. Stopa rotační kuželové plochy na rovině nevlastní je tedy kuželosečka, která má s absolutní kružnicí dotyk ve dvou bodech. (Osou plochy — osou z — jdou dvě isotropické roviny, které se dotýkají kuželové plochy podél isotropických přímek v rovině $z = 0$.)

Ostatně snadno poznáme, že každá rotační plocha druhého stupně má v nevlastní rovině kuželosečku, která se dvakrát dotýká absolutní kružnice v kruhových bodech roviny kolmé k ose. Rotační válec má v nevlastní rovině dvojinu přímek, které jsou tečnami absolutní kružnice.

f) Hyperboloid jednodílný

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

obsahuje dvě soustavy reálných přímek, jak ukazuje rozklad

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right);$$

odtud dostaneme totiž soustavy přímek

$$\frac{x}{a} + \frac{c}{z} = \alpha\left(1 - \frac{y}{b}\right), \qquad \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 + \frac{y}{b}\right),$$

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{y}{b}\right); \qquad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

pro α, β reálné jsou přímky reálné. Volíme-li α, β komplexní, dostaneme přímky imaginární druhého druhu.

g) Buď dána elipsa e v rovině $z = 0$ o poloosách a, b ($a > b$), tedy rovnicemi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad z = 0. \tag{1}$$

Každou tečnou této elipsy procházejí dvě isotropické roviny a všechny obalují plochu (imaginární), která je symetrická podle všech rovin $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Proto v každé této rovině je dvojná křivka, t. j. taková, že každou tečnou jdou dvě vytvořující roviny. V $z = 0$ je to daná elipsa e; ukážeme, že v $y = 0$ je také reálná dvojná křivka, hyperbola h.

Napišme podmínku, aby isotropická rovina

$$ux + vy + wz + 1 = 0, \; (u^2 + v^2 + w^2 = 0) \tag{2}$$

se dotýkala elipsy e. Tato podmínka vychází ve tvaru

$$a^2u^2 + b^2v^2 = 1,$$

nebo, dosadíme-li $v^2 = -(u^2 + w^2)$, ve tvaru

$$e^2u^2 - b^2w^2 = 1, \quad (e^2 = a^2 - b^2).$$

Průsečnice roviny (2) s $y = 0$ jest $ux + wz + 1 = 0$, čili

$$ux + \frac{\sqrt{e^2u^2 - 1}}{b} z + 1 = 0. \tag{3}$$

Bodem v rovině $y = 0$ procházejí dvě přímky (3), neboť při pevném x a z dostáváme pro u kvadratickou rovnici

$$u^2 (b^2x^2 - e^2z^2) + 2b^2ux + b^2 + z^2 = 0. \tag{4}$$

Tyto přímky obalují křivku, jejímž bodem jdou dvě přímky splývající. Položíme-li proto diskriminant rovnice (4) rovný nule, dostaneme rovnici obálky

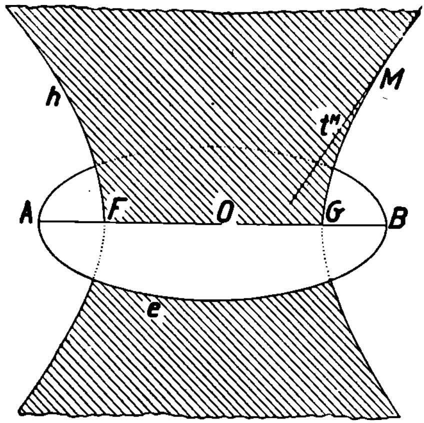
$$\frac{x^2}{e^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1;$$

je to hyperbola h v rovině $y = 0$. Vrcholy reálné osy jsou v ohniskách elipsy e, ohniska její jsou ve vrcholech elipsy, neboť $e^2 + b^2 = a^2$.

V rovině $x = 0$ dostaneme jako dvojnou křivku imaginární elipsu.

Má tedy uvažovaná plocha, obalená isotropickými rovinami, celkem čtyři dvojné kuželosečky, a to dvě reálné e, h a dvě imaginární, jednu v $x = 0$ a druhou absolutní kružnici v nekonečnu. Tyto čtyři kuželosečky hrají důležitou úlohu v teorii konfokálních ploch druhého stupně a ještě i jiných geometrických útvarů (Dupinovy cyklidy). Ukážeme jen jednu vlastnost, kterou lze též velmi snadno dokázati elementárně bez použití imaginárních útvarů. Buď M libovolný bod na h a sestrojme kuželovou plochu, která má vrchol M a prochází elipsou e. Tečnou t_M jdou dvě tečné roviny ke kuželi, jež se dotýkají křivek h, e i absolutní kružnice a dotýkají se kužele $M(e)$ i uvažované plochy isotropických rovin podél týchž dvou povrchových přímek.

Kuželová plocha *M* (*e*) se dotýká dvakrát absolutní kružnice a je tedy rotační. Hyperbola *h* je geometrické místo vrcholu rotační kuželové plochy, která prochází



21

elipsou *e* a obráceně *e* je geometrické místo vrcholu rotační kuželové plochy, která jde hyperbolou *h*. Vzájemnou polohu křivek *e* a *h* v prostoru znázorňuje obr. 21.