XIII. RŮZNÁ ROZŠÍŘENÍ POJMU VÍCEROZMĚRNÉHO INTEGRÁLU (INTEGRÁLY NEVLASTNÍ, PLOŠNÉ).

1. INTEGRÁLY DVOJNÉ NEVLASTNÍ.

305. Funkce jest nekonečná toliko v okolí jediného bodu. Doposud jsme předpokládali, že funkce $f(x, y)$, k níž dvojný integrál se vztahuje, jest v oboru integračním Ω v každém bodě definována a že tam jest konečnou. Obdobně jako u integrálů z jedné proměnné můžeme i u integrálů dvojných pojem integrálu rozšířiti pro případ, že $f(x, y)$ jest v Ω nekonečnou a pro jisté množství bodů neurčitou. Rovněž i pro případ, že integrační obor Ω se prostírá do nekonečna, provedeme později příslušné rozšíření pojmu dvojného integrálu.

Pokud jde o body, ve kterých funkce $f(x, y)$ jest neurčitou, lze obdobně jako při integrálech jednoduchých vysloviti větu: *Nutná a postačující podmínka, aby existoval integrál*

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy,$$

kde $f(x, y)$ stává se neurčitou) v jistém množství* E *na Ω položeném, jest dána těmito požadavky:*

1. Funkce $f(x, y)$ jest v Ω integrace schopnou, přisoudíme-li jí v bodech množství E *nějaké určité hodnoty.*

2. Množství E *má obsah* (**J**) *rovný nule.*

V důsledku této věty budeme se v následujícím zabývati pouze případem, že $f(x, y)$ stává se na Ω nekonečnou, po případě, že Ω samo jest nekonečno.

Vezmeme v úvahu nejprve nejjednodušší případ, že $f(x, y)$ stává se nekonečnou v oboru Ω toliko v okolí jediného bodu

*) Při tom ovšem předpokládáme, (stejně jako při integrálech jednoduchých), že interval neurčitosti (poznámka odstavce 138) jest pro všecky body, ve kterých funkce stává se neurčitou, týž konečný interval.

$[x_0, y_0]$ položeného *uvnitř* oboru integračního Ω (anebo, jak kratčeji se budeme vyjadřovati, *stává se nekonečnou* pouze *v bodě* $[x_0, y_0]$ položeném uvnitř Ω). Vyloučíme z Ω obor menší ω tak, že bod $[x_0, y_0]$ jest uvnitř ω, čímž dostaneme obor, který označíme $\Omega - \omega$, a budeme uvažovati integrál

$$\iint\limits_{\Omega-\omega} f(x, y)\, dx\, dy$$

za předpokladu, že $f(x, y)$ jest v oboru $\Omega - \omega$ integrace schopna, ať si zvolíme ω jakkoliv*). Položíme pak *definujíce*

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\, dx\, dy = \lim_{\omega} \iint\limits_{-} f(x, y)\, dx\, dy, \tag{1}$$

při čemž limitu jest počítati za předpokladu, že při měnícím se oboru ω oba rozměry oboru ω konvergují k nule způsobem libovolným. Neexistuje-li limita v rovnici (1) *aneb není-li vždy táž, když ω svými rozměry různým způsobem konverguje k nule, říkáme, že symbol na levé straně rovnice* (1) *nemá významu že tedy $f(x, y)$ není v Ω integrace schopna).*

Za obory ω volíme si nejdříve jednoduše spočetnou posloupnost kruhů $k_1, k_2, k_3, \ldots,$ jejichž středy jsou v bodě $[x_0, y_0]$ a jejichž poloměry $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ konvergují k nule. Budiž dále pro jednoduchost $\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 > \ldots$ V tomto jednoduchém případě nám k rozhodnutí, zda existuje limita

$$\lim_{n=\infty} \iint\limits_{\Omega-k_n} f(x, y)\, dx\, dy, \tag{2}$$

dává prostředek věta Bolzano-Cauchyova, podle které k existenci limity (2) jest nutno a postačitelno, aby ke každému číslu kladnému ε bylo lze stanoviti číslo N takové, že

$$\left| \iint\limits_{\Omega-k_n} f(x, y)\, dx\, dy - \iint\limits_{\Omega-k_{n'}} f(x, y)\, dx\, dy \right| < \varepsilon$$

$$\text{pro všecka } n > N,\ n' > N;$$

t. j., aby — značíme-li obor omezený kruhy k_n, $k_{n'}$ krátce $(k_n, k_{n'})$ —

$$\left| \iint\limits_{(k_n,\, k_{n'})} f(x, y)\, dx\, dy \right| < \varepsilon \quad \text{pro všecka } n > N,\ n' > N. \tag{3}$$

---

*) Oboru ω ovšem jsou platny předpoklady, jež jsme hned na počátku části čtvrté pro Ω, ω zavedli; vedle toho, jak pochopitelno, budeme mlčky předpokládati, že ω padne do nitra oboru Ω.

Není-li tato podmínka splněna, neexistuje limita (2) a tudíž i neexistuje limita (1), která jest obecnější. Je-li splněna, existuje sice limita (2), než nemusí existovati limita (1); avšak k existenci limity (1) jest pak nutno a postačitelno (je-li splněna již podmínka (3)), aby ke každému kladnému číslu ε bylo lze udati číslo η tak, aby vždy

$$\left|\iint\limits_{\omega-k_\nu} f(x, y)\,dx\,dy\right| < \varepsilon, \tag{4}$$

při tom obor ω obsahuje bod (x_0, y_0) ve svém nitru a má rozměry menší než η a splnění této podmínky se požaduje pro všecky takové obory a pro všecky kruhy z řady $k_1, k_2, k_3, \ldots$, jež položeny jsou na oboru ω. Obor $\omega - k_\nu$ jest obor zbylý z oboru ω po odnětí kruhu k_ν. Že skutečně právě uvedená podmínka jest k existenci limity (1) nutna a postačitelna, jest nasnadě.*)

POZNÁMKA 1. V předcházející úvaze možno místo jednoduše spočetné řady kruhů voliti jinou, jednoduše spočetnou řadu útvarů, v jejichž nitru nachází se bod $[x_0, y_0]$ a jejichž rozměry konvergují k nule. Že právě kruhy voleny, má svou příčinu v tom, že kruh lze jednodušeji určiti než kteroukoliv jinou část roviny XY (určen jest středem a poloměrem).

Rovněž není nutno požadovati, aby oba rozměry oboru ω konvergovaly k nule; postačilo by v předcházejících definicích na příklad v definici (1) stanoviti, že plocha oboru ω konverguje k nule. Stanovení však tu zvolené (že oba rozměry oboru ω konvergují k nule) jest účelné vzhledem k způsobu, kterým

---

*) Neboť, jelikož podle předpokladu existuje limita (2), kterou označíme pro okamžik I, lze udati číslo η' takové, že

$$\left|\iint\limits_{\Omega-k_n} f(x, y)\,dx\,dy - I\right| < \varepsilon \tag{α}$$

pro všecky kruhy k_n, jejichž poloměr jest menší než η'. Poněvadž pak (je-li ovšem k_ν položeno cele na ω)

$$\iint\limits_{\Omega-k_\nu} f(x, y)\,dx\,dy - \iint\limits_{\Omega-\omega} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\omega-k_\nu} f(x, y)\,dx\,dy,$$

vyplývá z (α) a (4)

$$\left|\iint\limits_{\Omega-\omega} f(x, y)\,dx\,dy - I\right| < 2\varepsilon$$

jistě pro všecka ω, jejichž rozměry jsou menší než menší z čísel η, η'. Limita (1) tedy existuje a podmínka (4) jest postačující. Že jest nutná, jest bezprostředně jasno.

bude provedeno rozšíření pojmu dvojnásobného integrálu na obory do nekonečna se prostírající.

POZNÁMKA 2. Konečně jest vytknouti, že omezení oboru ω může býti dáno jednou anebo několika uzavřenými křivkami (které jsou ovšem podle stanovení hned na počátku čtvrté části jednou provždy učiněného kvadratury v užším slova smyslu schopny). Může se tudíž obor ω skládati z několika částí spolu nesouvisících. Tím zavedena jest jistá odchylka od definic integrálů nevlastních při jedné proměnné integrační. Tam integrál v intervalu (a, b) z funkce $f(x)$, jež toliko v jednom bodě c intervalu (a, b) stává se nekonečnou, byl dán jakožto limita součtů dvou integrálů z $f(x)$ v intervalech $(a, c-\varepsilon)$, $(c+\varepsilon', b)$ pro ten případ, že ε, ε' konvergují k nule. Vyňat jest tedy z celého intervalu integračního interval $(c-\varepsilon, c+\varepsilon')$ o délce s $\varepsilon, \varepsilon'$ konvergující k nule a skládající se z jediné části.

306. Z podmínek (3) a (4) a zároveň vztahu (10) odstavce 269 následuje ihned, že, existuje-li za předpokladů o $f(x, y)$ a o Ω učiněných v odstavci předcházejícím druhý z obou integrálů

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy, \qquad \iint_{\Omega} |f(x, y)|\, dx\, dy, \tag{5}$$

existuje i prvý. K tomu však, aby existoval druhý z právě napsaných integrálů, jest nutno a postačitelno, aby existovala limita

$$\lim_{n=\infty} \iint_{\Omega-k_n} |f(x, y)|\, dx\, dy, \tag{6}$$

t. j., aby ke každému číslu kladnému ε bylo lze udati číslo N tak, že

$$\iint_{(k_n, k_{n'})} |f(x, y)|\, dx\, dy < \varepsilon \text{ pro všecka } n > N,\ n' > N. \tag{7}$$

Neboť, je-li hranice oboru ω obsažena v mezikruží $(k_n, k_{n'})$, jest patrně pro $n' > n$

$$\iint_{\Omega-k_n} |f(x, y)|\, dx\, dy \leqq \iint_{\Omega-\omega} |f(x, y)|\, dx\, dy \leqq \iint_{\Omega-k_{n'}} |f(x, y)|\, dx\, dy$$

(neboť pro poloměry obou kruhů jest podle předpokladu $\varrho_{n'} < \varrho_n$) a tedy se zřetelem k (7)

$$\iint_{\omega-k_{n'}} |f(x, y)|\, dx\, dy < \varepsilon,$$

následkem čehož všecky podmínky podle předcházejícího odstavce nutné a postačitelné k existenci druhého z integrálů (5) jsou v důsledku existence limity (6) (anebo v důsledku podmínky (7)) splněny.

Dále jest patrno, *že, neexistuje-li limita* (6), *pak integrál za znaménkem limitním se nacházející s rostoucím n vzrůstá nade všecky meze.*

307. Dokázali jsme v odstavci předcházejícím, že k tomu, aby existoval prvý z integrálů (5), jest postačitelno, aby existoval druhý z těch dvou integrálů, t. j. postačitelno, aby byla splněna podmínka (7). Avšak podmínka tato jest nejenom postačitelna, nýbrž i nutna a tudíž, kdykoliv existuje prvý z integrálů (5), existuje i druhý a ta podmínka jest splněna.

Abychom to dokázali, připusťme, že existuje při jisté funkci $f(x, y)$ prvý z integrálů (5), nikoliv však druhý. Pak oba integrály $(n' > n)$

$$\left.\begin{aligned} &\iint\limits_{(k_n,\, k_{n'})} \tfrac{1}{2}(|f(x, y)| + f(x, y))\, dx\, dy, \\ &\iint\limits_{(k_n,\, k_{n'})} \tfrac{1}{2}(|f(x, y)| - f(x, y))\, dx\, dy \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

s rostoucím n' rostou nade všecky meze (neboť předpokládáme, že integrál z $|f(x, y)|$ v Ω a tudíž i v k_n neexistuje, z $f(x, y)$ pak existuje, viz větu ke konci odstavce předcházejícího). Můžeme tedy k libovolně velikému číslu kladnému A zvoliti číslo n' tak, aby bylo

$$\iint\limits_{(k_n,\, k_{n'})} \tfrac{1}{2}(|f(x, y)| \pm f(x, y))\, dx\, dy > A. \tag{9}$$

Rozdělme nyní rovinu na příklad přímkami rovnoběžnými s osami XY na čtverce o straně δ; tím rozpadne se mezikruží $(k_n, k_{n'})$ na plochy ω_k, jež jsou jednak čtverce o straně δ, jednak části takových čtverců. Jelikož pak jest $f(x, y)$ v mezikruží $(k_n, k_{n'})$ integrace schopno, můžeme si zvoliti δ tak malé, aby součet těch ploch ω_k, v nichž oscilace funkce $f(x, y)$ jest větší než ε, byl menší než η. Při tom můžeme ε i η předpokládati libovolně malé. Zvolme si tak δ.

Budiž nyní M_k^+ horní hranicí funkce $\frac{1}{2}(|f(x, y)| + f(x, y))$ v ω_k; pak jest podle (9)

$$\sum_k M_k^+ \omega_k > A. \tag{10}$$

M_k^+ jest také horní hranicí funkce $f(x, y)$ v těch ω_k, kde $f(x, y$ nenabývá hodnot výhradně záporných; v těch ω_k, kde $f(x, y)$

jest stále zápornou resp. nule rovnou, jest funkce $\frac{1}{2}(|f(x, y)| + f(x, y))$ stále nule rovna a M_k^+ jest tedy nula. Členy součtu (10) k těmto ω_k se vztahující (ve kterých $M_k^+ = 0$) můžeme potlačiti; mimo to potlačíme i ty členy v součtu (10), které vztahují se k takovým ω_k, v nichž oscilace funkce $f(x, y)$ jest větší než ε. Potlačením členů vytčených se zmenšiti může součet v (10), avšak nejvýše se zmenší o $\mathfrak{M}\eta$, kde $\mathfrak{M}$ jest horní hranicí funkce $f(x, y)$ v mezikruží $(k_n, k_{n'})$. Vyznačíme-li ty z částí ω_k, které nám zůstaly, indexem k' (v částech $\omega_{k'}$ jest tedy $M_k^+ > 0$ a oscilace funkce $f(x, y)$ jest $< \varepsilon$), máme tedy

$$\sum_{k'} M_{k'}^+ \omega_{k'} > A - \mathfrak{M}\eta. \tag{11}$$

Dolní hranice funkce $f(x, y)$ v $\omega_{k'}$ budiž $m_{k'}$; pak jest $M_{k'}^+ - m_{k'} < \varepsilon$ a

$$\sum_{k'} m_{k'} \omega_{k'} > A - \mathfrak{M}\eta - \pi(\varrho_n^2 - \varrho_{n'}^2)\,\varepsilon. \tag{12}$$

Jelikož η i ε můžeme si zvoliti libovolně malé, můžeme docíliti, aby pravá strana poslední nerovniny byla větší než jisté číslo B, které sice jest menší než A, které však si zároveň s A můžeme předem zvoliti libovolně velikým. Souhrn však oborů $\omega_{k'}$ zvětšený o kruh $k_{n'}$ tvoří jistý obor ω o rozměrech nejvýše rovných číslu $2\varrho_n$ (tedy libovolně malých) a v důsledku vztahů (11) a (12) jest

$$\iint\limits_{\omega - k_{n'}} f(x, y)\, dx\, dy > A - \mathfrak{M}\eta - \pi(\varrho_n^2 - \varrho_{n'}^2)\,\varepsilon > B. \tag{13}$$

(Obdobná nerovnina platí ovšem i pro integrál z $f(x, y)$ v oboru $\omega - k_{n''}$, $n'' > n'$, neboť integrál z té funkce v oboru $(k_{n'}, k_{n''})$ podle předpokladu o $f(x, y)$ jest menší co do absolutní hodnoty než jisté konečné číslo.) Předcházející úvahou dokázáno, že není pro $f(x, y)$ splněna podmínka (4), ať si rozměry oboru ω zvolíme jakkoliv malé, a nemůže tedy existovati prvý z integrálů (5), což jest však v odporu s učiněným předpokladem. Neexistuje-li tudíž druhý z integrálů (5), neexistuje i prvý.

Máme tak větu: *Nutná a postačující podmínka, aby existoval integrál v oboru Ω z funkce $f(x, y)$, která jest nekonečnou toliko v jednom bodě (x_0, y_0) toho oboru Ω* — bod (x_0, y_0) budiž uvnitř toho oboru — *jest, aby existovala limita*

$$\lim_{n=\infty} \iint\limits_{\Omega - k_n} |f(x, y)|\, dx\, dy.$$

(K existenci této limity pak jest nutno a postačí, aby splněna byla podmínka vyjádřená ve vztahu (7).)

Obdobnou větu bylo by lze vysloviti i pro ten případ, že bod (x_0, y_0) jest na hranici oboru Ω.

POZNÁMKA. Při integrálech dvojných z funkcí stávajících se nekonečnými běží tedy vždy o absolutní konvergenci těch integrálů. Příčina toho jest zčásti objasněna poznámkou 2 odstavce 305. Mohlo by se však zdáti, že bychom mohli dosáhnouti úplné analogie s integrály z funkcí o jedné proměnné, kdybychom na oborech ω, jimiž se vyjímá z oboru Ω okolí bodu (x_0, y_0), požadovali, aby byly omezeny jedinou uzavřenou čarou. Tomu však tak není. Na příklad obor ω, v tomto odstavci zavedený, může se sice skládati z několika částí, můžeme však „kanály" sjednotiti všecky ty části v jeden celek; zvolíme-li pak šířku těch kanálů dostatečně malou, můžeme docíliti, aby nebyla dotčena v podstatě nerovnina (13), takže platnost oné nerovniny jest i pro ty obory ω zachována, jež omezeny jsou jedinou uzavřenou čarou.

Mohli bychom však dosáhnouti zmíněné analogie, kdybychom pro obory ω zavedli jiné podmínky. Na příklad mohli bychom požadovati, aby obor ω byl omezen čarou uzavřenou, kterou každý polopaprsek z bodu (x_0, y_0) vycházející protíná toliko v jednom bodě (anebo obecněji v počtu bodů, kterýž jest menší nežli pevné číslo p). V tomto případě lze mluviti o konvergenci absolutní a neabsolutní. Viz příklad 2, odst. 314.

Kdybychom vzali v úvahu obory ω ještě specielnější, získali bychom čísla obdobná t. zv. hlavní hodnotě (viz odstavec 235, kde pojem hlavní hodnoty objasněn příkladem). Taková čísla jsou na příklad limita v (2), když existuje.

308. Pro kriteria konvergence dvojných integrálů právě v úvahu vzatých můžeme si způsobem obšírně vyloženým při integrálech z funkcí o jedné proměnné odvoditi různé věty. Při tom budeme předpokládati, abychom se vyhnuli stálému opakování, že integrály z funkcí projednávaných vždy existují v oborech, které vzniknou z oboru vzatého v úvahu vyloučením libovolného okolí toho bodu, ve kterém se funkce stávají nekonečnými. Uvádím v té příčině větu nasnadě ležící: Jestliže v jistém okolí bodu (x_0, y_0) jest stále $|f(x, y)| \leqq |\varphi(x, y)|$, jestliže dále $f(x, y)$ (stejně jako $\varphi(x, y)$) stává se nekonečnou v oboru Ω toliko v bodě (x_0, y_0), pak existuje-li integrál z $\varphi(x, y)$ v oboru

Ω, existuje i integrál z $f(x, y)$. A naopak neexistuje-li v oboru Ω dvojný integrál z $f(x, y)$, neexistuje i integrál z $\varphi(x, y)$.

Uvažujme nyní funkci

$$\frac{A}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{\frac{1}{2}\sigma}},$$

kde A jest konstanta. K tomu cíli vypočteme integrál

$$\iint_{(k_n,\, k_{n'})} \frac{A\, dx\, dy}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{\frac{1}{2}\sigma}},$$

kde k_n, $k_{n'}$ jsou kruhy s poloměry $\varrho_n, \varrho_{n'}$ a středem (x_0, y_0); budiž $\varrho_n > \varrho_{n'}$ pro $n' > n$. Tento integrál transformujeme substitucí $x - x_0 = r\cos\varphi$, $y - y_0 = r\sin\varphi$. Tím se změní daný integrál dvojný v integrál dvojnásobný

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\varrho_{n'}}^{\varrho_n} \frac{A}{r^{\sigma-1}}\, dr = \frac{2\pi A}{2-\sigma}(\varrho_n^{2-\sigma} - \varrho_{n'}^{2-\sigma}), \qquad \sigma \neq 2,$$

$$= 2\pi(\log \varrho_n - \log \varrho_{n'}), \qquad \sigma = 2.$$

Tento výraz konverguje k nule s ϱ_n (a tedy pro $\lim n = \infty$) tenkráte a jenom tenkráte, když $2 - \sigma > 0$.

Použijeme-li tohoto výsledku a věty hořejší, můžeme vysloviti větu: Stává-li se $f(x, y)$ v oboru Ω nekonečnou toliko v bodě (x_0, y_0), avšak tak, že

$$|f(x, y)| < \frac{A}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{\frac{1}{2}\sigma}}$$

pro body uvnitř kruhu o rovnici $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \varrho^2$, tu, je-li $\sigma < 2$, má integrál z $f(x, y)$ v oboru Ω význam.

Dále plyne věta: Platí-li pro okolí bodu $[x_0, y_0]$ nacházejícího se uvnitř oboru Ω a dané na příklad vnitřkem kruhu o rovnici $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \varrho^2$ (ϱ vhodné číslo kladné), že

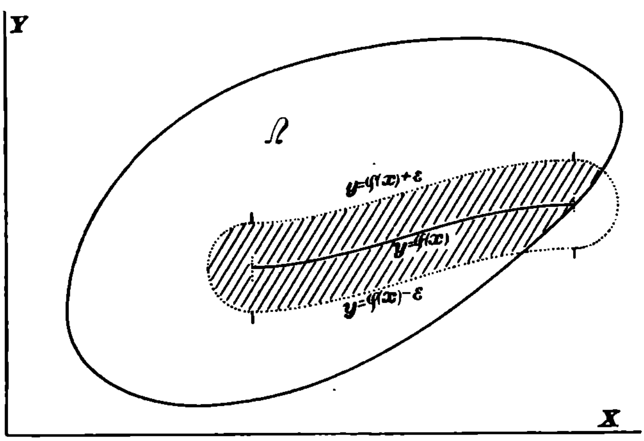
$$\frac{A'}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{\frac{1}{2}\sigma}} \leqq |f(x, y)| \leqq \frac{A}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{\frac{1}{2}\sigma}}, \tag{14}$$

kde A, A', σ jsou kladné konstanty, pak nutná a postačující podmínka, aby v oboru Ω existoval integrál z $f(x, y)$, která toliko v bodě $[x_0, y_0]$ stává se nekonečnou na Ω, jest dána nerovninou $\sigma < 2$. Jsou-li pro $f(x, y)$ splněny nerovniny (14), můžeme říkati, že $f(x, y)$ se v bodě $[x_0, y_0]$ stává nekonečnou řádu σ.

309. Výsledky tu docílené pro integrály dvojné nevlastní mají bezprostřední důsledky pro integrály dvojnásobné nevlastní. Dvojnásobný integrál z $f(x, y)$ pro obor Ω, při čemž pro $f(x, y)$ splněny jsou předpoklady odstavce 307 a napřed provádí se integrace podle y a pak podle x, lze, existuje-li ten integrál, vyjádřiti jako limitu rovnicí

$$\int_{\Omega} dx \int f(x, y)\, dy = \lim_{n=\infty} \int_{\Omega - k_n} dx \int f(x, y)\, dy,$$

kde k_n jsou kruhy o středu $[x_0, y_0]$, jejichž poloměr s rostoucím n nade všecky meze konverguje k nule. Na základě této rovnice a úvah předcházejících odstavců můžeme vysloviti větu: *Stává-li se v oboru Ω funkce $f(x, y)$ nekonečnou toliko v bodě $[x_0, y_0]$ a existuje-li dvojný integrál z funkce $f(x, y)$ v oboru $\Omega - k_n$ pro všecka n, pak existuje-li dvojnásobný integrál z $|f(x, y)|$ v oboru Ω, existuje i dvojný integrál z $f(x, y)$ v tom oboru a*



Obr. 23.

naopak, existuje-li dvojný integrál z $f(x, y)$ v Ω, existuje dvojnásobný integrál z $|f(x, y)|$ i z $f(x, y)$ v oboru Ω. U dvojnásobných integrálů ve větě uváděných může býti pořad integrací libovolný. Jestliže existuje dvojný integrál z $f(x, y)$ v Ω, jest

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx = \int_{\Omega} dx \int f(x, y)\, dy = \int_{\Omega} dy \int f(x, y)\, dx,$$

čímž rozšířena platnost vět odstavce 273 a zároveň získána podmínka pro záměnnost pořadů integračních i v případě, že Ω obsahuje bod, v němž $f(x, y)$ stává se nekonečnou.

POZNAMKA. Jak by se úvahy předcházející upravily, kdyby bod $[x_0, y_0]$ místo uvnitř oboru Ω byl položen na hranici oboru Ω, jest nasnadě.

310. Kdyby $f(x, y)$ **stávala se nekonečnou v** Ω **toliko v bodech čáry o rovnici** $y = \varphi(x)$, postupovali bychom obdobně ku případu v předcházejících odstavcích vyšetřovanému. Místo kruhu se středem v bodě $[x_0, y_0]$ nastoupiti by tu mohl na příklad obor ω_ε znázorněný na obr. 23 a bylo by lze zavésti obdobné definice, věty a kriteria jako právě pro jednodušší případ. Jelikož však úvahy příslušné jenom málo se liší od úvah předcházejících odstavců, jsou k vůli stručnosti úvahy ony tu pominuty. Platí tu opět — jakož jest úplně nasnadě — věta: *Stává-li se v oboru* Ω *funkce* $f(x, y)$ *nekonečnou toliko v bodech čáry* $y = \varphi(x)$ *a existuje-li dvojný integrál z funkce* $f(x, y)$ *v oboru* $\Omega - \omega_\varepsilon$, *pak existuje-li dvojnásobný integrál z* $|f(x, y)|$ *v oboru* Ω, *existuje i dvojný integrál z* $f(x, y)$ *a naopak, existuje-li dvojný integrál z* $f(x, y)$ *v* Ω, *existuje dvojnásobný integrál z* $|f(x, y)|$ *i z* $f(x, y)$ *v oboru* Ω. *Oba ty integrály — dvojný i dvojnásobný z funkce* $f(x, y)$ — *pak jsou si rovny.*

Z této věty následuje zejména, že dvojný integrál z $f(x, y)$ jistě existuje, stává-li se funkce $f(x, y)$ nekonečnou pouze v bodech čáry $y = \varphi(x)$, a to řádu $\sigma < 1$. Ba může se stávati v jednotlivých bodech té čáry i nekonečnou řádu vyššího než 1, menšího však než 2, tvoří-li na příklad souřadnice x-ové těch bodů množství bodové obsahu nulového. Při tom říkáme, že $f(x, y)$ stává se nekonečnou řádu σ na čáře $y = \varphi(x)$, jestliže — je-li $[x_0, y_0]$ libovolný bod příslušného oblouku, na němž se nenacházejí ony jednotlivé body, v nichž $f(x, y)$ stává se nekonečnou řádu $\geqq 1$, avšak < 2 — obě limity

$$\lim_{x = x_0} |x - x_0|^\sigma f(x, y_0), \qquad \lim_{y = y_0} |y - y_0|^\sigma f(x_0, y)$$

existují a jsou obsaženy mezi dvěma čísly $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, když $[x_0, y_0]$ probíhá celý oblouk křivky $\mathfrak{L}$ padající na váhu.

Stejné věty platí i v tom případě, že $f(x, y)$ se v Ω stává nekonečnou toliko v bodech čáry o rovnici $x = \psi(y)$.

Kdyby konečně $f(x, y)$ stávala se nekonečnou v oboru Ω v konečném počtu bodů isolovaných a v bodech konečného počtu čar, jež lze rozložiti v oblouky zčásti o rovnici $y = \varphi(x)$, zčásti o rovnici $x = \psi(y)$, provedli bychom rozdělení oboru Ω na obory menší, čímž bychom tento obecnější případ převedli na předcházející.

I v tomto případě, stejně jako v předcházejícím následují snadným způsobem nové věty pro záměnnost pořadí integračního při integrálech dvojnásobných z funkcí stávajících se v oboru integračním nekonečnými.

311. PŘÍKLAD 1. Vyšetřiti jest, za jakých podmínek existuje integrál dvojný

$$\iint_{\Omega} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{\alpha}}\, dx\, dy, \tag{a}$$

při čemž Ω jest čtverec, jehož strany mají rovnice $x = +1$, $x = -1$, $y = +1$, $y = -1$. Funkce stává se nekonečnou toliko v bodě (0, 0). Poněvadž $|x^2 - y^2| < x^2 + y^2$, jest i

$$\left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{\alpha}} \right| < \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha - 1}}.$$

I vidíme, že funkce stává se nekonečnou v okolí bodu [0, 0] řádu, jenž nepřevyšuje $2(\alpha - 1)$, a tedy podle vývodů odstavce 308 integrál dvojný jistě existuje, jestliže $2(\alpha - 1) < 2$, t. j. jestliže $\alpha < 2$. Pro případ, že $\alpha = 2$ integrál, dvojný nemá významu, jakož jest také patrno z toho, že integrály dvojnásobné

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dy = \pi, \qquad \int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx = -\pi$$

mají různé hodnoty; viz odstavec 181, příklad 1. Tím spíše ovšem pro $\alpha > 2$ symbol (a) jest bez významu.

Výsledky tyto zůstávají patrně v platnosti, ať jest Ω jakýkoliv obor obsahující bod [0, 0] ve svém nitru. Je-li Ω kruh s poloměrem R a středem v počátku, lze integrál (a) — má-li ovšem význam — snadno vypočísti. Provedeme k tomu cíli substituci $x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$. I dostaneme v důsledku této substituce

$$\iint_{\Omega_1} \frac{\varrho^2 \cos 2\varphi}{\varrho^{2\alpha}}\, \varrho\, d\varrho\, d\varphi = \iint_{\Omega_1} \frac{\cos 2\varphi}{\varrho^{2\alpha - 3}}\, d\varrho\, d\varphi, \tag{b}$$

kde Ω_1 jest pravoúhelník (v rovině o pravoúhlých osách ϱ, φ) omezený přímkami o rovnicích $\varrho = 0$, $\varrho = R$, $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$. Funkce v integrálu (b) se vyskytující stávati se může nekonečnou toliko v bodech přímky $\varrho = 0$ a to jenom tenkráte, je-li $2\alpha - 3 > 0$; je-li $2\alpha - 3 < 0$, t. j. je-li $\alpha < \frac{3}{2}$, jest funkce v integrálu transformovaném pro obor Ω_1 konečná a jest tedy provedenou transformací daný integrál nevlastní (v případě, že $0 < \alpha < \frac{3}{2}$) převeden na vlastní integrál. Pro případ, že $2\alpha - 3 > 0$ podrží integrál (b) význam tenkrát (podle odstavce 140), když $2\alpha - 3 < 1$, t. j. když $\alpha < 2$; což shoduje se s výsledkem hořejším. Integrál (b) převádí se pak na dvojnásobný integrál

$$\int_0^R \frac{d\varrho}{\varrho^{2\alpha - 3}} \cdot \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi\, d\varphi = 0.$$

Že integrál (b) jest rovný nule, jest předem patrno; neboť funkce, jež se integruje, nabývá v bodech symetricky vzhledem ku přímce $x - y = 0$ položených hodnoty, jež jsou co do absolutní hodnoty stejny, jež však jsou znamének protivných. Poněvadž pak obor integrační jest symetricky položen vzhledem ku přímce $x - y = 0$, jest příslušný integrál rovný nule. Z téže příčiny jest též integrál (a) rovný nule v případě, že Ω jest čtverec svrchu v úvahu vzatý a že $\alpha < 2$.

Rovněž z téže příčiny máme i následující rovnici

$$\iint\limits_{\text{Mezikruží }(k,\, k')} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^\alpha}\, dx\, dy = 0, \tag{c}$$

ať jest α jakékoliv reálné číslo, mají-li kruhy k, k' střed v bodě $|0, 0|$. Následkem toho mají integrály

$$\iint\limits_{\Omega - k} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^\alpha}\, dx\, dy, \qquad \alpha \text{ libovolné},$$

kde Ω jest obor libovolně daný, mající však bod $|0, 0|$ ve svém nitru, a k libovolný kruh se středem $|0, 0|$ probíhající uvnitř Ω, všecky touž (na poloměru kruhu k nezávislou) hodnotu. Existuje tudíž v našem příkladě limita (2) a jest splněna podmínka (3) při každém α (viz rovnici c); integrál dvojný má však význam toliko pro $\alpha < 2$. Jest tedy patrno na tomto jednoduchém příkladě, že podmínka (3) není pro existenci dvojného integrálu z funkce stávající se v oboru integračním nekonečnou postačitelna.

PŘÍKLAD 2. Aby alespoň na příkladě doložena byla rozmanitost způsobů, jak funkce o dvou proměnných v isolovaném bodě stávati se může nekonečnou, — rozmanitost přirozeně daleko větší než při funkcích o jedné proměnné — vezmeme v úvahu integrál dvojný

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{dx\, dy}{(x^\alpha + y^\beta)^A}; \qquad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \tag{m}$$

Obor Ω nechť jest omezen úsečkami kladných částí osy X a osy Y stýkajících se koncovými body v počátku souřadnic a spojitou křivkou K spojující druhé dva koncové body těch úseček a probíhající uvnitř prvého kvadrantu. Funkce za znaménkem integračním stává se nekonečnou toliko v bodě (0, 0) ležícím na hranici oboru Ω, všude jinde v Ω jest spojitou funkcí obou proměnných. Pro vyšetření podmínek nutných a postačitelných k existenci integrálu daného jest tudíž lhostejno, jak probíhá křivka K; zvolíme si později tuto křivku k vůli zjednodušení určitým vhodným způsobem.

Kdybychom chtěli použíti kriteria odstavce 308, mohli bychom ihned tvrditi, že daný integrál jistě existuje, když větší z čísel $A\alpha$, $B\beta$ jest menší než 2. Tato postačující podmínka není však nutna, jak ihned seznáme. Abychom si odvodili podmínku nutnou a postačující, zavedeme místo x, y nové proměnné u, v rovnicemi

$$x^\alpha = u \cos^2 v, \qquad y^\beta = u \sin^2 v; \qquad 0 \leqq v \leqq \tfrac{1}{2}\pi, \qquad u \geqq 0.$$

Rovnicemi těmi jsou u, v jednoznačně pomocí x, y (daného oboru Ω) stanoveny a naopak x, y jednoznačně pomocí u, v; vyjmeme-li ovšem v oboru Ω bod (0, 0), kdež nastává okolnost vytčená při zavádění souřadnic polárních místo pravoúhlých. Pro funkcionální determinant máme

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{u^{1/\alpha + 1/\beta} \cos^{2/\alpha - 1} v \sin^{2/\beta - 1} v}{\alpha\beta} \begin{vmatrix} u^{-1} \cos v, & -2 \sin v \\ u^{-1} \sin v, & 2 \cos v \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\alpha\beta} u^{1/\alpha + 1/\beta - 1} \cos^{2/\alpha - 1} v \sin^{2/\beta - 1} v.$$

Tak dostaneme

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{dx\,dy}{(x^\alpha+y^\beta)^A}=\frac{2}{\alpha\beta}\iint\limits_{\Omega_1}u^{1/\alpha+1/\beta-A-1}\cos^{2/\alpha-1}v\sin^{2/\beta-1}v\,du\,dv.$$

Křivku K nyní zvolíme si tak, aby její rovnice byla $x^\alpha+y^\beta=a$. Pak jest Ω_1 pravoúhelník o vrcholech $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(a, \frac{1}{2}\pi)$, $(0, \frac{1}{2}\pi)$; integrál pak dvojný na pravé straně poslední rovnice mění se hned v tento jednoduchý integrál dvojnásobný

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}dv\int\limits_0^a u^{1/\alpha+1/\beta-A-1}\cos^{2/\alpha-1}v\sin^{2/\beta-1}v\,du, \tag{n}$$

kterýžto integrál rozpadá se ihned v součin dvou integrálů z funkcí o jedné proměnné a to jednak o proměnné u, jednak o proměnné v. Prvý integrál má význam tenkráte a jenom tenkráte, když

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-A-1>-1, \qquad \text{t. j. když } A<\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta};$$

druhý integrál má při kladných α, β vždy význam.

Máme tak jako výsledek: *Nutná a postačující podmínka pro existenci integrálu (m) jest dána vztahem*

$$A<\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}. \tag{p}$$

Touž podmínku bychom dostali, kdyby obor Ω byl omezen dvěma přímkami probíhajícími uvnitř prvého kvadrantu a stýkajícími se v počátku a pak spojitou křivkou K druhé dva koncové body přímek těch spojující a uvnitř prvého kvadrantu probíhající. Rovněž by mohl býti obor Ω omezen čarou v prvém kvadrantu probíhající, uzavřenou, spojitou a mající v počátku dvě tečny svírající konečný úhel. Kdyby obor Ω byl omezen čarou mající v počátku špici (o jediné tečně, jako jest na příklad při algebraických křivkách bod úvratu) a jinak týchž vlastností, byla by podmínka (p) sice postačitelnou, avšak nemusí býti v tomto případě nutnou.

Z propočítaného příkladu jest patrný užitek, jaký při vyšetřování, zda daný integrál existuje, poskytnouti může transformace daného integrálu zavedením nových proměnných.

PŘÍKLAD 3. Budiž dán integrál

$$I=\iint\limits_{\Omega}x^{\alpha-1}y^{\beta-1}(1-x-y)^{\gamma-1}\,dx\,dy,$$

ve kterémž obor Ω jest trojúhelník v rovině XY omezený přímkami $x=0$, $y=0$, $1-x-y=0$. Integrál má význam tenkráte (a jenom tenkráte), když $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$; neboť pak funkce integrovaná stávati se může nekonečnou jenom podél hranic oboru Ω a to řádů menších než 1.*) Integrál jest dále jisté zevšeobecnění Eulerova integrálu 1. druhu (odstavec 211) a lze

*) Ve vrcholech trojúhelníka Ω se ovšem funkce za integračním znaménkem může stávati nekonečnou řádu vyššího než 1; avšak řád ten jest vždy, když $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, menší než 2.

jej snadno též pomocí gammafunkce vyjádřiti. Převedeme-li jej totiž na integrál dvojnásobný, integrujíce napřed na příklad podle y, máme

$$I = \int_0^1 dx \,.\, x^{\alpha-1} \int_0^{1-x} y^{\beta-1} (1-x-y)^{\gamma-1}\, dy.$$

Dosaďme ve vnitřním integrálu $y = (1-x)\eta$; obdržíme ihned

$$\int_0^{1-x} y^{\beta-1} (1-x-y)^{\gamma-1}\, dy = (1-x)^{\beta+\gamma-1} \int_0^1 \eta^{\beta-1} (1-\eta)^{\gamma-1}\, d\eta =$$

$$= (1-x)^{\beta+\gamma-1} \frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)}$$

a tedy

$$I = \frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta+\gamma-1}\, dx = \frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)},$$

$$I = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)},$$

čímž integrál daný vypočten.

Na integrál I lze převésti substitucí obecnější integrál*)

$$J = \iint_{\Omega_1} (u_1 x + v_1 y + w_1)^{\alpha-1} (u_2 x + v_2 y + w_2)^{\beta-1} (u_3 x + v_3 y + w_3)^{\gamma-1}\, dx\, dy,$$

ve kterémž obor Ω_1 jest dán trojúhelníkem omezeným přímkami $u_1x+v_1y+w_1=0$, $u_2x+v_2y+w_2=0$, $u_3x+v_3y+w_3=0$. Součinitelé v rovnicích těchto přímek buďtež tak voleni, abychom, dosadíme-li souřadnice bodů ležících uvnitř trojúhelníka Ω_1 do levých stran rovnic daných přímek, dostali za výsledek kladná čísla.

Zavedeme substitucí

$$u_1 x + v_1 y + w_1 = \frac{x'}{A_1},$$
$$u_2 x + v_2 y + w_2 = \frac{y'}{A_2} \qquad (q)$$

nové proměnné x', y', při čemž konstanty A_1, A_2 tak volíme, aby byla zároveň s těmito dvěma splněna (jakožto jejich důsledek) ještě tato rovnice

$$u_3 x + v_3 y + w_3 = \frac{1 - x' - y'}{A_3}. \qquad (r)$$

K tomu jest nutno a postačitelno, aby čísla A_1, A_2, A_3 hověla rovnicím

$$A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3 = 0,\ A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3 = 0,\ A_1 w_1 + A_2 w_2 + A_3 w_3 = 1, \qquad (s)$$

které dostaneme, násobíme-li rovnice (q), (r) po řadě čísly A_1, A_2, A_3, rovnice znásobené sečteme a pak požadujeme, aby rovnice tak vzniklá byla splněna pro všecky (x, y) identicky. Rovnicím (s) bude vyhověno, položíme-li

$$A_1 = \frac{W_1}{\delta}, \qquad A_2 = \frac{W_2}{\delta}, \qquad A_3 = \frac{W_3}{\delta},$$

---

*) Viz *Lerch*, Časopis sv. 38, kde vyšetřován integrál ještě obecnější a vypočten poněkud jiným způsobem.

kdež

$$\delta = \begin{vmatrix} u_1, & v_1, & w_1 \\ u_2, & v_2, & w_2 \\ u_3, & v_3, & w_3 \end{vmatrix}$$

a W_1, W_2, W_3 jsou minory příslušné k elementům w_1, w_2, w_3 tohoto determinantu. Zároveň jest jasno, že čísla A_1, A_2, A_3 jsou kladná.*) Z toho jest patrno, že bodům, jejichž souřadnice (x, y) činí výrazy $u_k x + v_k y + w_k$ $(k = 1, 2, 3)$ kladnými — t. j. bodům trojúhelníka Ω_1 — jsou přiřazeny body o souřadnicích (x', y') takové že $x' > 0, y' > 0, 1 - x' - y' > 0$; t. j. body trojúhelníka Ω' omezeného přímkami $x' = 0$, $y' = 0$, $1 - x' - y' = 0$. Přiřazení to jest jedno-jednoznačné.

Pro funkcionální determinant vyplývá z (q)

$$\frac{D(x', y')}{D(x, y)} = A_1 A_2 \begin{vmatrix} u_1, & v_1 \\ u_2, & v_2 \end{vmatrix} = \frac{W_1 W_2 W_3}{\delta^2}.$$

Máme tudíž

$$J = \frac{|\delta|^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{|W_1|^\alpha |W_2|^\beta |W_3|^\gamma} \iint\limits_{\Omega'} x'^{\alpha-1} y'^{\beta-1} (1 - x' - y')^{\gamma-1} \, dx' \, dy' =$$

$$= \frac{|\delta|^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{|W_1|^\alpha |W_2|^\beta |W_3|^\gamma} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma)}.$$

Plochu trojúhelníka omezeného přímkami $u_1 x + v_1 y + w_1 = 0$, $u_2 x + v_2 y + w_2 = 0$, $u_3 x + v_3 y + w_3 = 0$ dostaneme z této formule, klademe-li v ní $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$; obdržíme pro ni známý z analytické geometrie výraz

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{\delta^2}{|W_1 W_2 W_3|}.$$

Viz též příklad odstavce 290a.

PŘÍKLAD 4. Vypočítati jest integrál

$$\iiint\limits_{K_R} \frac{dx\, dy\, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}\sigma}},$$

kde integrační obor jest koule K_R s poloměrem R a středem v počátku. Integrál se převádí zavedením souřadnic polárních ihned na integrál trojnásobný

$$\int_0^R dr \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} d\Theta \int_0^{2\pi} r^{2-\sigma} \cos\Theta \, d\varphi = \frac{4\pi}{3 - \sigma} R^{3-\sigma}$$

za předpokladu ovšem, že $3 - \sigma > 0$, t. j. že $\sigma < 3$. Snadno bychom na základě tohoto výsledku věty uvedené ke konci odstavce 309 a vztahující se k integrálům dvojným rozšířili na obdobné pro integrály trojné.

PŘÍKLAD 5. Podobně lze stanoviti i integrál

$$I = \iiint\limits_{K_R^{(1)}} \frac{x^{\lambda-1} y^{\mu-1} z^{\nu-1} \, dx\, dy\, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}\sigma}},$$

---

*) Že na příklad A_3 jest kladné, dokáže, se vypočteme-li souřadnice průsečíků přímek $u_1 x + v_1 y + w_1 = 0$, $u_2 x + v_2 y + w_2 = 0$ a dosadíme-li je do výrazu $u_3 x + v_3 y + w_3$. Tu dostaneme jako výsledek δ / W_3 a jest toto číslo (následkem předpokladu o součinitelích v rovnicích přímek učiněného) kladným.

je-li $K_R^{(1)}$ ta část koule s poloměrem R a o středu v počátku, jež položena jes v prvém oktantu. Touž substitucí jako v příkladě předcházejícím dostávám

$$\int_0^R dr \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\Theta \int_0^{\frac{1}{2}\pi} r^{\lambda+\mu+\nu-\sigma-1} \cos^{\lambda+\mu-1}\Theta \sin^{\nu-1}\Theta \cos^{\lambda-1}\varphi \sin^{\mu-1}\varphi \, d\varphi.$$

Tento integrál trojnásobný má patrně význam tehdy a jen tehdy, když

$$\lambda > 0, \quad \mu > 0, \quad \nu > 0, \quad \sigma < \lambda + \mu + \nu. \tag{a}$$

Jsou-li podmínky tyto splněny, máme na základě odstavce 228 (4) ihned

$$I = \frac{R^{\lambda+\mu+\nu-\sigma}}{\lambda+\mu+\nu-\sigma} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)} =$$

$$= \frac{R^{\lambda+\mu+\nu-\sigma}}{4(\lambda+\mu+\nu-\sigma)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\right)}.$$

PŘÍKLAD 6. Na základě příkladu předcházejícího lze snadno rozhodnouti, kdy integrál

$$J = \iiint_{T'} \frac{x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} \, dx \, dy \, dz}{(x^\alpha + y^\beta + z^\gamma)^A}; \quad \alpha > 0, \ \beta > 0, \ \gamma > 0,$$

má význam, je-li T' obor obsahující body prvého oktantu a omezený jednak rovinami XY, YZ, ZX, jednak plochou probíhající v prvém oktantu a protínající roviny XY, YZ, ZX v bodech, jejichž vzdálenost od počátku jest větší než jisté kladné číslo. Pro rozhodnutí této otázky jest lhostejno, jak tato plocha probíhá, a my si ji účelně můžeme voliti. Předpokládejme tedy, že integrační obor T' jest vymezen nerovninami

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad z \geqq 0, \quad x^\alpha + y^\beta + z^\gamma \leqq R^2.$$

Zavedeme-li za tohoto předpokladu nové proměnné integrační rovnicemi

$$x^\alpha = \xi^2, \quad y^\beta = \eta^2, \quad z^\gamma = \zeta^2, \quad x = \xi^{\frac{2}{\alpha}}, \quad y = \eta^{\frac{2}{\beta}}, \quad z = \zeta^{\frac{2}{\gamma}},$$

dostaneme integrál, jehož integrační obor v proměnných ξ, η, ζ bude právě $K_R^{(1)}$ (viz příklad předcházející). Obdržíme snadným počtem

$$J = \frac{8}{\alpha\beta\gamma} \iiint_{K_R^{(1)}} \frac{\xi^{\lambda-1} \eta^{\mu-1} \zeta^{\nu-1} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^A},$$

kde

$$\lambda = \frac{2l}{\alpha}, \quad \mu = \frac{2m}{\beta}, \quad \nu = \frac{2n}{\gamma},$$

a má tudíž integrál J tenkrát a jenom tenkrát význam podle (a), když

$$l > 0, \quad m > 0, \quad n > 0, \quad A < \frac{l}{\alpha} + \frac{m}{\beta} + \frac{n}{\gamma}.$$

Způsobem stejným lze odvoditi i podmínky postačující k tomu, aby integrál poněkud obecnější

$$\iiint\limits_{T'} \frac{x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1}\, dx\, dy\, dz}{(ax^{\alpha_1} y^{\beta_1} z^{\gamma_1} + bx^{\alpha_2} y^{\beta_2} z^{\gamma_2} + cx^{\alpha_3} y^{\beta_3} z^{\gamma_3})^A}$$

měl význam; při tom jsou konstanty $A, a, b, c, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \ldots$ čísla kladná po případě nule rovná a determinant z čísel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ jest od nuly různý. (Stačí zavésti nové proměnné ξ, η, ζ rovnicemi $x^{\alpha_1} y^{\beta_1} z^{\gamma_1} = \xi^2, \ldots$)

PŘÍKLAD 7. Uvažujme integrál trojný

$$I = \iiint\limits_T f\left[\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{b}\right)^\beta + \left(\frac{z}{c}\right)^\gamma\right] x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1}\, dx\, dy\, dz,$$

kde T jest obor vymezený nerovninami ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$)

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad z \geqq 0, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{b}\right)^\beta + \left(\frac{z}{c}\right)^\gamma \leqq 1.$$

Zaveďme nové proměnné x_1, y_1, z_1 pomocí vztahů

$$\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha = x_1, \quad \left(\frac{y}{b}\right)^\beta = y_1, \quad \left(\frac{z}{c}\right)^\gamma = z_1, \quad x_1 \geqq 0, \quad y_1 \geqq 0, \quad z_1 \geqq 0;$$

dostaneme při kladných α, β, γ

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma} \iiint\limits_{T_1} f(x_1 + y_1 + z_1)\, x_1^{p_1-1} y_1^{q_1-1} z_1^{r_1-1}\, dx_1\, dy_1\, dz_1,$$

kde obor T_1 jest vymezen nerovninami

$$x_1 \geqq 0, \quad y_1 \geqq 0, \quad z_1 \geqq 0, \quad x_1 + y_1 + z_1 \leqq 1$$

a kde $p = \alpha p_1$, $q = \beta q_1$, $r = \gamma r_1$. Zaveďme opět nové proměnné integrační ξ, η, ζ rovnicemi

$$x_1 + y_1 + z_1 = \xi, \qquad y_1 + z_1 = \xi\eta, \qquad z_1 = \xi\eta\zeta. \tag{b}$$

Z nich vyplývá

$$x_1 = \xi(1 - \eta), \qquad y_1 = \xi\eta(1 - \zeta), \qquad z_1 = \xi\eta\zeta \tag{c}$$

a

$$\frac{D(x_1, y_1, z_1)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{vmatrix} 1-\eta, & -\xi, & 0 \\ \eta(1-\zeta), & \xi(1-\zeta), & -\xi\eta \\ \eta\zeta, & \xi\zeta, & \xi\eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\eta, & -\xi, & 0 \\ \eta, & \xi, & 0 \\ \eta\zeta, & \xi\zeta, & \xi\eta \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ \eta, & \xi, & 0 \\ \eta\zeta, & \xi\zeta, & \xi\eta \end{vmatrix} = \xi^2\eta.$$

Oboru T_1 jest přiřaděn obor T', pro který $0 \leqq \xi \leqq 1$, $0 \leqq \eta \leqq 1$, $0 \leqq \zeta \leqq 1$. Neboť, že každému bodu oboru T' jest přiřaděn jeden bod v T_1, plyne z (c) a naopak, že každému bodu oboru T_1 přísluší jeden bod z oboru T', následuje snadno z rovnic, jež obdržíme řešením rovnic (b) podle ξ, η, ζ. Jest totiž na příklad

$$\zeta = \frac{z_1}{y_1 + z_1}, \quad 1 - \zeta = \frac{y_1}{y_1 + z_1} \quad \text{a tedy } 0 \leqq \zeta \leqq 1$$

(nehledíc ovšem k bodům, pro něž $y_1 = 0$, $z_1 = 0$).

Provedeme-li substituci proměnných ξ, η, ζ do integrálu daného, dostaneme

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma} \iiint\limits_{T'} f(\xi)\, \xi^{p_1+q_1+r_1-1} (1-\eta)^{p_1-1} \eta^{q_1+r_1-1} (1-\zeta)^{q_1-1} \zeta^{r_1-1}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

kterýžto integrál lze ihned vypsati jakožto integrál trojnásobný, v němž jednotlivé integrace se provádějí v mezích 0, 1. Poněvadž však funkce za znaménkem integračním se dá rozložiti v součin tří funkcí závislých vždy toliko na jedné ze tří proměnných ξ, η, ζ, rozpadá se integrál daný v součin tří jednoduchých integrálů, a to těchto

$$\int_0^1 f(\xi)\, \xi^{p_1+q_1+r_1-1}\, d\xi,$$

$$\int_0^1 (1-\eta)^{p_1-1}\, \eta^{q_1+r_1-1}\, d\eta = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(q_1+r_1)}{\Gamma(p_1+q_1+r_1)},$$

$$\int_0^1 (1-\zeta)^{q_1-1}\, \zeta^{r_1-1}\, d\zeta = \frac{\Gamma(q_1)\Gamma(r_1)}{\Gamma(q_1+r_1)}.$$

Jest tudíž za předpokladu ovšem, že čísla $p, q, r, \alpha, \beta, \gamma$ jsou kladná,

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma} \cdot \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(q_1)\,\Gamma(r_1)}{\Gamma(p_1+q_1+r_1)} \int_0^1 f(\xi)\, \xi^{p_1+q_1+r_1-1}\, d\xi =$$

$$= \frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}\right)} \int_0^1 f(\xi)\, \xi^{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}-1}\, d\xi,$$

čímž daný integrál převeden na integrál jednoduchý.

312. Obor integrační jest nekonečný. Podobně jako dvojné integrály z funkcí stávajících se nekonečnými v oboru integračním můžeme definovati i integrály dvojné, při kterýchž obor integrační prostírá se do nekonečna. Vezmeme, abychom pojem integrálů takových objasnili, v úvahu nejjednodušší případ, kdy obor integrační obsahuje celou rovinu XY. K tomu cíli sestrojíme si řadu oborů jednoduše spočetnou

$$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots$$

omezených uzavřenými spojitými křivkami (kvadratury a rektifikace schopnými) a takových, že d_n — značiž d_n nejmenší vzdálenost hranice oboru Ω_n od počátku nebo od nějakého jiného pevného bodu, nacházejícího se stále uvnitř všech Ω_n — roste s rostoucím n nade všecky meze. Vyšetřujeme pak limitu

$$\lim_{n=\infty} \iint_{\Omega_n} f(x,y)\, dx\, dy. \tag{1}$$

Existuje-li tato limita a vždy táž limita, ať si zvolíme jakoukoli spočetnou posloupnost oborů Ω_n (s d_n rostoucím zároveň s n nade všecky meze), sluje ta limita dvojný integrál z funkce $f(x, y)$ v oboru $\mathfrak{O}_0$ zaujímajícím celou rovinu a značí se

$$\iint\limits_{\mathfrak{O}_0} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{1'}$$

Neexistuje-li limita (1), říkáme, že symbol (1') nemá význam

Podobně definují se i dvojné integrály v jiných oborech, prostírajících se do nekonečna, na příklad integrál z $f(x, y$ v prvém kvadrantu, anebo integrál v oboru omezeném parabolou atd.

Pro tyto integrály následuje z definice jejich téměř bezprostředně věta

$$\iint\limits_{\mathfrak{O}} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{\mathfrak{O}'} f(x, y)\, dx\, dy + \iint\limits_{\mathfrak{O}''} f(x, y)\, dx\, dy \tag{2}$$

platná za předpokladu, že obory $\mathfrak{O}'$, $\mathfrak{O}''$ dohromady tvoří obor $\mathfrak{O}$. Je-li obor $\mathfrak{O}$ obor do nekonečna se prostírající, pak aspoň jeden z oborů $\mathfrak{O}'$, $\mathfrak{O}''$ jest rovněž obor do nekonečna se prostírající.

313. Mohli bychom při vyšetření otázky, zda daný dvojný integrál pro obor do nekonečna se prostírající existuje, postupovati podobně jako při integrálech z funkcí stávajících se v oboru integračním nekonečnými. Lze však pomocí zavedení nových proměnných integrály, jejichž obor prostírá se do nekonečna, převésti na integrály, jejichž obor jest konečný, a které se mohou ovšem pak vztahovati na funkce, jež v novém oboru integračním jsou nekonečné, i když v původním integrálu běželo o funkci v celém oboru integračním konečnou.

Způsob, jak převedení ono lze provésti, vysvětlím na nejjednodušším případě oboru $\mathfrak{O}_0$ zaujímajícího celou rovinu. Nejprve tento obor rozdělím ve dva, a to v obor konečný, omezený kružnicí k o poloměru R a o středu v počátku, a v obor nekonečný, položený vně této kružnice; označíme tento obor $\mathfrak{O}_R$ Tím podle rovnice (2) rozpadne se integrál z $f(x, y)$ v integrály dva, z nichž jeden bude míti za obor integrační kruh s poloměrem R, tedy obor konečný. Běží tedy vlastně o vyšetření dvojného integrálu

$$\iint\limits_{\mathfrak{O}_R} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{3}$$

Tento integrál jest dán limitou (1), při čemž Ω_n jest obor omezený jednak kruhem k, tvořícím vnitřní ohraničení oboru Ω_n (viz odstavec 204), jednak čarou uzavřenou — po případě čarami uzavřenými vně kruhu k probíhajícími; označíme-li pak ohraničení oboru Ω_n vně kruhu k položené krátce K_n a nejmenší vzdálenost bodů na K_n od počátku značkou d_n, jsou obory Ω_n takové, že d_n s rostoucím n roste nade všecky meze.

Zaveďme do integrálu, který se nachází ve výraze (1), nové proměnné x', y' rovnicemi

$$x = R^2 \frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = R^2 \frac{y'}{x'^2 + y'^2} \tag{4}$$

(transformace inversní, viz odstavec 284). Obor Ω_n změní se v obor Ω'_n, jehož ohraničením (vnějším) bude opět kruh k, kterýž inversí se nemění, zbývající pak hranice oboru Ω'_n — označme ji K'_n — vylučuje z vnitřku kruhu k obor ω'_n obsahující počátek (0, 0) ve svém nitru a takový, že oba rozměry oboru toho s rostoucím n konvergují k nule. Neboť z rovnic (4) vyplývá

$$x^2 + y^2 = \frac{R^4}{x'^2 + y'^2};$$

má-li tedy nějaký bod na křivce K_n nejmenší vzdálenost od počátku rovnou d_n, má příslušný bod na křivce K'_n mezi všemi body této křivky největší vzdálenost od počátku rovnou R^2/d_n. Dostaneme tak rovnici

$$\iint\limits_{\Omega_n} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{\Omega'_n} f\left(\frac{R^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \frac{R^2 y'}{x'^2 + y'^2}\right) \frac{R^4\, dx'\, dy'}{(x'^2 + y'^2)^2}.$$

Má-li pravá strana této rovnice limitu, má ji ovšem i levá strana a naopak. Avšak pravá strana (místo Ω'_n bychom patrně tam mohli psáti $k - \omega'_n$, značí-li k též obor omezený kruhem k) má limitu tehdy a jenom tehdy při libovolně volených K_n, když existuje integrál

$$\iint\limits_{k} f\left(\frac{R^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \frac{R^2 y'}{x'^2 + y'^2}\right) \frac{R^4\, dx'\, dy'}{(x'^2 + y'^2)^2}. \tag{5}$$

Tím převedeno vyšetření, zda symbol integrální (3) má význam, na vyšetření obdobného symbolu, který však vztahuje se na obor konečný, a můžeme používati k tomuto vyšetření vět již dříve odvozených.

Z výsledku tohoto jest zejména patrno, *že k tomu, aby měl význam integrál* (3), *jest nutno a postačitelno, aby též*

$$\iint\limits_{\Omega_R} |\, f(x, y)\,|\, dx\, dy$$

měl význam; obdobný výrok lze učiniti patrně i při integrálech v oborech jiných do nekonečna se prostírajících.

I jiné věty dříve odvozené pro dvojné integrály z funkcí stávajících se nekonečnými převádějí se snadno na dvojné integrály v oborech do nekonečna se prostírajících. Omezím se v té příčině toliko na jednu větu, kterou ještě odvodím.

Budiž $f(x, y)$ taková, že

$$|f(x,y)| < \frac{\mathfrak{A}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}\alpha}} \tag{6}$$

pro všecky body (x, y), pro něž $x^2+y^2>R^2$. Pak dosadíme-li do této nerovniny podle (4), máme

$$\left| f\left(\frac{R^2x'}{x'^2+y'^2}, \frac{R^2y'}{x'^2+y'^2}\right) \frac{R^4}{(x'^2+y'^2)^2} \right| < \frac{R^{4-2\alpha}\mathfrak{A}}{(x'^2+y'^2)^{2-\frac{1}{2}\alpha}}$$

pro všecky body, pro něž $x'^2+y'^2<R^2$, t. j. pro všecky uvnitř kruhu k. Podle této nerovniny jest funkce v integrálu (5) nekonečnou toliko v bodě $(x'=0,\ y'=0)$, a to řádu nejvýše $4-\alpha$ stává-li se ovšem vůbec nekonečnou. Má tedy integrál ten podle věty odstavce 309 jistě význam, je-li $4-\alpha<2$, t. j. je-li $\alpha>2$. *Tudíž i integrál z funkce $f(x, y)$ hovící nerovnině* (6) *má jistě význam i pro nekonečné obory vně kruhu $x^2+y^2=R^2$ se rozprostírající, jestliže $\alpha>2$.*

Podobně, hoví-li $f(x, y)$ nerovnině

$$\frac{\mathfrak{A}'}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}\alpha}} < |f(x,y)| < \frac{\mathfrak{A}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}\alpha}}; \qquad 0<\mathfrak{A}'<\mathfrak{A}$$

pro všecky body, pro něž $x^2+y^2>R^2$, pak integrál z $f(x, y)$ v oboru daném vnějškem kruhu $x^2+y^2=R^2$ má tehdy a jen tehdy význam, když $\alpha>2$.

Kdyby obor, podle kterého se má integrovati, nezaujímal celou nekonečnou rovinu, nýbrž jenom jistou část, mohli bychom postupovati stejně. Tak na příklad obor obsahující kladnou část osy X-ové od bodu (1, 0) počínaje do nekonečna a omezený jednak obloukem paraboly o rovnici $y^2=2px$, jednak obloukem kruhu $x^2+y^2=1$, změní se inversní transformací (4) při $R=1$ v obor konečný omezený jednak obloukem křivky o rovnici

$$y'^2 = 2px'(x'^2+y'^2),$$

jednak obloukem kruhu $x'^2+y'^2=1$. Bod (0, 0) bude však v tomto případě položen na obvodě toho oboru; hranice oboru má v tomto bodě bod úvratu.

314. PŘÍKLAD 1. Uvažujme integrál dvojný

$$\iint_{\mathfrak{O}_0} \sin(x^2+y^2)\, dx\, dy.$$

kde $\mathfrak{O}_0$ jest obor obsahující celou rovinu. K rozhodnutí, zda tento nevlastní integrál má význam, stačí vyšetřiti, zda existuje limita výrazu

$$\iint_{K_R} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy \tag{p}$$

pro ten případ, že lim $R=\infty$; K_R jest kruh, jehož střed jest v počátku a jehož poloměr jest R. K výpočtu integrálu (p) použijeme transformace v souřadnice polární; obdržíme jej ihned jakožto rovný dvojnásobnému integrálu, jakož vyjadřuje rovnice

$$\iint_{K_R} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r \sin(r^2)\,dr = 2\pi\,.\,\tfrac{1}{2}\,(1-\cos(R^2)).$$

Avšak limita výrazu $\pi(1-\cos R^2)$ pro lim $R=\infty$ neexistuje a tudíž daný symbol nemá významu. Ostatně plyne to též ihned z okolnosti, že integrál

$$\iint_{\mathfrak{O}_0} |\sin(x^2+y^2)|\,dx\,dy$$

jest bez významu, kterážto okolnost jest téměř bezprostředně patrna.

Podotýkám ještě, že integrály dvojnásobné

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2+y^2)\,dy, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2+y^2)\,dx$$

význam mají a že jsou si i rovny. Neboť pro první integrál na příklad plyne

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} [\sin(x^2)\cos(y^2)+\cos(x^2)\sin(y^2)]\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} \cos(y^2)\,dy + \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} \sin(y^2)\,dy =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \pi \qquad \text{(viz odstavec 187).}$$

PŘÍKLAD 2. Kdybychom postup v příkladě předcházejícím použitý a opírající se o integrál (p) použili u symbolu integrálního

$$\iint_{\mathfrak{O}_0} \sin(x^2+y^2)^2\,dx\,dy, \qquad \mathfrak{O}_0 \text{ jest obor obsahující celou rovinu } XY,$$

nedospěli bychom k důkazu, že tento symbol nemá význam.*)

Naopak lze snadno obecněji dokázati, že limita

$$\lim_{n=\infty} \iint_{O_n} \sin(x^2+y^2)^2\,dx\,dy \tag{q}$$

*) Že daný integrální symbol jest bez významu, vyplývá z okolnosti, že

$$\iint_{\mathfrak{O}_0} |\sin(x^2+y^2)^2|\,dx\,dy$$

jest bez významu, jakož bezprostředně téměř jest patrno.

existuje, je-li O_n obor omezený křivkou uzavřenou, spojitou, protínající každý polopaprsek z počátku vycházející v jediném bodě a konečně takovou, že nejmenší vzdálenost D_n bodů na ní položených od počátku s rostoucím n roste nade všecky meze. Neboť jest

$$\iint_{O_n} \sin (x^2 + y^2)^2 \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{F_n(\varphi)} \sin (r^4) \, r \, dr \, d\varphi = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{F_n^2(\varphi)} \sin (s^2) \, ds$$

(zavedeny nejprve polární souřadnice r, φ; pak užita substituce $r^2 = s$); při tom jest $F_n(\varphi)$ funkce, jež jest definována v intervalu $(0, 2\pi)$ tak, že jest stále $F_n(\varphi) \geqq D_n$. Poněvadž však D_n s rostoucím indexem roste nade všecky meze, jest

$$\int_0^{F_n^2(\varphi)} \sin (s^2) \, ds = \tfrac{1}{2} \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi} + \varepsilon_n(\varphi), \quad \text{kde } |\varepsilon_n(\varphi)| < \varepsilon_n, \quad \lim_{n=0} \varepsilon_n = 0$$

a následkem toho (podle věty o střední hodnotě)

$$\left| \iint_{O_n} \sin (x^2 + y^2)^2 \, dx \, dy - \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi} \right| < \pi \varepsilon_n,$$

odkudž svrchu uvedené tvrzení vyplývá; limita (q) tedy vskutku existuje a jest rovna $(\frac{1}{2}\pi)^{\frac{3}{2}}$. Stejný výsledek bychom obdrželi, kdyby hranice oboru O_n každý polopaprsek z počátku vycházející místo v jediném bodě protínala v jistém počtu bodů, jenž může býti větší než 1, avšak stále a pro všecky indexy jest menší než určité číslo kladné P.

PŘÍKLAD 3. Uvažujme integrál

$$\iint_{\mathfrak{O}_R^{(1)}} \frac{dx \, dy}{(x^\alpha + y^\beta)^A}; \qquad \alpha > 0, \ \beta > 0,$$

kde $\mathfrak{O}_R^{(1)}$ jest obor nekonečný daný tou částí prvého kvadrantu $(x \geqq 0, y \geqq 0)$, jejíž body jsou vně křivky o rovnici $x^\alpha + y^\beta = R^2$; jest tedy obor $\mathfrak{O}_R^{(1)}$ úplně vyznačen těmito nerovninami: $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x^\alpha + y^\beta \geqq R^2$.

Provedeme na integrál předložený transformaci danou rovnicemi

$$x^{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{x'^{\frac{1}{2}\alpha}}{x'^\alpha + y'^\beta}, \qquad y^{\frac{1}{2}\beta} = \frac{y'^{\frac{1}{2}\beta}}{x'^\alpha + y'^\beta}; \qquad x' > 0, \ y' > 0.$$

Transformace tato jest jisté zevšeobecnění transformace inversní. Nejprve jest

$$\left| \frac{D(x, y)}{D(x', y')} \right| = \frac{1}{(x'^\alpha + y'^\beta)^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta}}}$$

a tudíž

$$\iint_{\mathfrak{O}_R^{(1)}} \frac{dx \, dy}{(x^\alpha + y^\beta)^A} = \iint_{\Omega_R^{(1)}} \frac{dx' \, dy'}{(x'^\alpha + y'^\beta)^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} - A}},$$

kde $\Omega_R^{(1)}$ jest obor konečný v rovině proměnných (x', y') vymezený nerovninami

$$x' \geqq 0, \quad y' \geqq 0, \quad x'^\alpha + y'^\beta \leqq \frac{1}{R^2}.$$

Funkce v novém integrálu jest konečná v oboru $\Omega_R^{(1)}$, jestliže $A > 2/\alpha + 2/\beta$; není-li tato podmínka splněna, stává se funkce nekonečnou v bodě (0, 0) položeném na hranici oboru $\Omega_R^{(1)}$; integrál však právě získaný shoduje se v podstatě s integrálem příkladu 2, odstavec 311; užijeme-li výsledku tam docíleného, vidíme ihned, že nutná a postačující podmínka, aby integrál nově získaný a tudíž i integrál původně daný měl význam, jest

$$\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} - A < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}, \qquad \text{t. j. aby } A > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}.$$

Z výsledku tohoto a příkladu 2, odstavec 311, jest patrno, že integrální symbol

$$\iint\limits_{\mathfrak{O}^{(1)}} \frac{dx\,dy}{(x^\alpha + y^\beta)^A}; \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0,$$

v němž obor $\mathfrak{O}^{(1)}$ jest celý první kvadrant, nemá při žádném A významu.

2. INTEGRÁLY PLOŠNÉ.

315. Způsobem obdobným, jako zavedeny byly integrály křivkové při jedné integrační proměnné, lze při dvou proměnných zavésti integrály plošné. Budiž dána jistá spojitá část plošná — značme ji Π — taková nejprve, že rovnici její lze psáti ve tvaru

$$z = f(x, y). \tag{1}$$

Při tom nechť dostaneme na základě této rovnice souřadnice všech bodů na Π a každého bodu jedenkrát, necháme-li $[x, y]$ probíhati jistý obor Ω roviny XY; $f(x, y)$ jest spojitou funkcí proměnných x, y v Ω. Vezmeme pak v úvahu tento integrál dvojný

$$\iint\limits_{\Omega} F(x, y, f(x, y))\,dx\,dy.$$

Integrálu tomuto násobenému buď $+1$ *anebo* -1 *říkáme integrál plošný podle plochy* Π (podle části plošné Π) *z funkce* $F(x, y, z)$. Zavádíme pak pro něj stručnější označení na základě rovnice

$$\overset{\text{(pl.)}}{\iint\limits_{\Pi}} F(x, y, z)\,dx\,dy = \varepsilon \iint\limits_{\Omega} F(x, y, f(x, y))\,dx\,dy; \qquad \varepsilon = \pm 1. \tag{2}$$

Rovnice tato podává nám označení a zároveň definici integrálů plošných. Ovšem není definice tato úplná (jednoznačná), neboť na pravé straně jest činitel ε, jejž můžeme si zvoliti rovný buď $+1$ anebo rovný -1. Při integrálech křivkových činitel ± 1 nemusil býti zaváděn; tam totiž byla možnost vhodnou volbou směru integračního, který označením byl vytčen, dáti příslušnému integrálu činitel ± 1. Možnost taková při integrálech plošných není; abychom však i tu účelně stanovili číslo ε a tak zavedením integrálů plošných docílili vskutku v úvahách a dalších vyšetřováních zjednodušení, omezíme se na *plochy mající dvě strany.*

Takové plochy o dvou stranách jsou především spojité, uzavřené plochy, jež tvoří hranici tělesa.*) Bod, který nachází se uvnitř takové uzavřené plochy a tedy uvnitř tělesa, nemůže, pohybuje-li se, proniknouti do vnějšku uzavřené plochy, ledaže pronikne skrze uzavřenou plochu; obdobně jest tomu i při bodu, který se pohybuje vně té uzavřené plochy. Můžeme tudíž vskutku na takových plochách (pokládáme-li je aspoň v představě jaksi za hmotné rozhraní dvou částí prostorových) rozeznávati dvě strany; na jednu stranu naráží bod pohybující se z vnitra ke hranici, na druhou bod pohybující se vně tělesa k jeho hranici.

Rovněž každá část plochy uzavřené a tvořící hranici tělesa jest plochou mající dvě strany. Tak na příklad část plošnou Π svrchu pomocí (1) stanovenou lze pokládati za část hranice jistého tělesa (další částí hranice mohou na příklad býti jednak plocha válcová rovnoběžná s osou Z o řiditelce dané krajem plochy Π, jednak rovina rovnoběžná s rovinou XY a neprotínající plochu (1)). Má tedy Π dvě strany; na jednu z nich naráží bod pohybující se rovnoběžně s osou Z ve směru kladném, na druhou bod pohybující se rovnoběžně k Z ve směru záporném. Tuto druhou stranu plochy Π pak nazveme *horní* a označíme $\Pi^{(h)}$, prvou pak nazveme *dolní* stranou a označíme $\Pi^{(d)}$. *Zavedeme pak vlastně místo integrálů plošných integrály podle jednotlivých stran plochy těmito rovnicemi*

$$\overset{\text{(pl.)}}{\iint\limits_{\Pi^{(h)}}} F(x, y, z)\, dx\, dy = +\iint\limits_{\Omega} F(x, y, f(x, y))\, dx\, dy,$$

$$\overset{\text{(pl.)}}{\iint\limits_{\Pi^{(d)}}} F(x, y, z)\, dx\, dy = -\iint\limits_{\Omega} F(x, y, f(x, y))\, dx\, dy.$$

Mějmež nyní spojitou plochu Π o dvou stranách $\Pi^{(\mathrm{I})}$, $\Pi^{(\mathrm{II})}$ a takovou, že ji lze rozložiti v konečný počet ploch $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$, při čemž rovnice plochy Π_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ jest dána rovnicí $z = f_k(x, y)$, ve kteréž $[x, y]$ probíhá obor Ω_k a $f_k(x, y)$ jest spojitou funkcí obou proměnných v tomto oboru. Budiž dále rozklad plochy Π v plochy Π_k již takový, že buď jest horní strana plochy

*) Pod „tělesem" vyrozumíváme v následujícím obor trojrozměrný spojitý, ohraničený plochami spojitými názoru přístupnými.

Π_k ve všech svých bodech shodna se stranou $\Pi^{(I)}$, aneb že tomu tak jest u dolní strany plochy Π_k. Pak klademe, definujíce plošný integrál z funkce $F(x, y, z)$ podle strany $\Pi^{(I)}$ plochy Π,

$$\iint\limits_{\Pi^{(I)}}^{(pl.)} F(x, y, z)\, dx\, dy = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \iint\limits_{\Omega_k} F(x, y, f(x, y))\, dx\, dy\,; \tag{3}$$

tu jest $\varepsilon_k = +1$, je-li horní strana plochy Π_k součástí té strany $\Pi^{(I)}$, podle níž se integruje; je-li však dolní strana plochy Π_k součástí strany $\Pi^{(I)}$, jest klásti $\varepsilon_k = -1$. Stejně se definuje plošný integrál podle strany $\Pi^{(II)}$. Očividně jest

$$\iint\limits_{\Pi^{(I)}}^{(pl.)} F(x, y, z)\, dx\, dy = - \iint\limits_{\Pi^{(II)}}^{(pl.)} F(x, y, z)\, dx\, dy. \tag{4}$$

Tak na příklad je-li daná plocha elipsoid E o rovnici $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, rozdělíme ji ve dvě části Π_1, Π_2 o rovnicích

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (\text{část } \Pi_1)\,;$$

$$z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (\text{část } \Pi_2).$$

Vnější strana elipsoidu skládá se z horní strany části Π_1 a dolní strany části Π_2; obory Ω_1, Ω_2 dané jakožto průměty částí Π_1, Π_2 na rovinu XY redukují se na jediný obor Ω omezený elipsou o rovnici $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Tedy jest

$$\begin{aligned} \iint\limits_{E^{(\text{vněj.})}}^{(pl.)} F(x, y, z)\, dx\, dy &= \iint\limits_{\Omega} F\left(x, y, c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\right) dx\, dy \,- \\ &- \iint\limits_{\Omega} F\left(x, y, -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\right) dx\, dy. \end{aligned} \tag{5}$$

316. Rozpadá-li se těleso ohraničené spojitou uzavřenou plochou Π pomocnou plochou spojitou π na dvě části omezené uzavřenými spojitými plochami Π_1, Π_2, jest patrně

$$\iint\limits_{\Pi^{(I)}} F(x, y, z)\, dx\, dy = \iint\limits_{\Pi_1^{(I)}} F(x, y, z)\, dx\, dy + \iint\limits_{\Pi_2^{(I)}} F(x, y, z)\, dx\, dy,$$

při čemž index horní (I) značí na příklad vnější stranu příslušných uzavřených ploch. Neboť pravá strana liší se od levé jenom tím, že na pravé straně (vedle integrálů podle dvou částí plochy $\Pi^{(I)}$) se vyskytují integrály podle obou stran plochy π, jež podle (4) mají součet rovný nule.

317. Zvlášť jednoduché stanovení čísel ε_k v rovnici (3) docílíme, předpokládáme-li, že daná spojitá, *uzavřená* plocha (podle které se integrál plošný počítá a která omezuje jisté konečné těleso) má normálu aspoň v jednom bodě M_k každé části Π_k, a to normálu, jež není kolmá k ose Z. Učiňme tento předpoklad a ze dvou možných směrů na normále v bodě M_k uvažujme směr od tělesa omezeného danou uzavřenou plochou, t. zv. směr *normály vnější*; označíme jej n_k. Pak patrně, svírá-li směr OZ se směrem vnější normály n_k úhel ostrý, jest horní strana na části Π_k vnější stranou na dané uzavřené ploše; svírá-li úhel tupý, jest dolní strana na části Π_k vnější stranou dané plochy. Můžeme tudíž, *jestliže $\Pi^{(\mathrm{I})}$ jest stranou vnější dané uzavřené plochy*, rovnici (4) psáti takto

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} F(x, y, z)\, dx\, dy = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{sign} \cos (Z, n_k) \iint\limits_{\Omega_k} F(x, y, f(x, y))\, dx\, dy, \tag{6}$$

kde (Z, n_k) jest úhel osy Z s n_k a kde sign $a = +1$ aneb -1 podle toho, je-li a kladné aneb záporné.

Rovnice právě odvozená jest platna ovšem i v tom případě, že běží o plochy *neuzavřené* mající však dvě strany. Pak n_k značí směr normály — jakožto polopaprsku vycházejícího z bodu M_k — vztyčené na té straně plochy, podle které se integruje, t. j. na straně $\Pi^{(\mathrm{I})}$.

318. Stejně jako integrál plošný vzhledem k spojité ploše o rovnici $z = f(x, y)$ (resp. ku ploše, která se dá rozložiti v konečný počet částí vesměs o takovéto rovnici a která tedy jest protínána přímkami rovnoběžnými s osou Z v konečném počtu bodů) lze definovati integrály plošné

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} F(x, y, z)\, dx\, dz, \qquad \iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} F(x, y, z)\, dy\, dz \tag{7}$$

a to první integrál tenkráte, jestliže plocha Π se dá rozložiti v konečný počet částí, jejichž rovnice mají tvar $y = h(z, x)$, druhý pak tehdy, když se dá rozložiti plocha ta v konečný počet částí o rovnicích tvaru $x = g(y, z)$. Lze opět rozeznávati i tu integrály vzhledem k oběma stranám plochy a zavedeme obdobná stanovení a označení jako při integrálech plošných, jejichž integrační proměnné byly x, y; tak neliší se výrazy (7) od výrazů dříve zavedených než jiným označením proměnných.

Konečně integrál

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} [F(x, y, z)\, dy\, dz + G(x, y, z)\, dz\, dx + H(x, y, z)\, dx\, dy], \tag{8}$$

pokládáme-li jej za součet tří integrálů plošných z funkce F resp. G, H podle integračních proměnných $[y, z]$ resp. $[z, x]$, $[x, y]$, má podle předcházejícího význam, je-li plocha Π protínána rovnoběžkami s osami X, Y, Z v konečném počtu bodů a lze-li ji nad to rozložiti jednak v konečný počet částí o rovnici $z = f(x, y)$, jednak v konečný počet částí o rovnici $x = g(y, z)$ resp. o rovnici $y = h(z, x)$.

Připustíme ještě do úvah svých plochy válcové rovnoběžné s jednotlivými osami. Značí-li na příklad $V_Z^{(\mathrm{I})}$ jednu stranu části plochy válcové, jejíž přímka vytvořující jest rovnoběžna s osou Z, klademe

$$\iint\limits_{V_Z^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} H(x, y, z)\, dx\, dy = 0; \tag{9}$$

obdobné rovnice nechť platí o částech válcových ploch V_X, V_Y.

319. Předpokládejme, abychom výraz pro integrál plošný ještě více zjednodušili, že rovnici plochy Π, podle jejíž jedné strany se integruje, lze psáti ve tvaru parametrickém

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \qquad z = \chi(u, v).$$

Při tom každému bodu plochy Π přísluší jedna dvojice $[u, v]$ jistého oboru Ω' a naopak každé dvojici $[u, v]$ jeden bod $[x, y, z]$ na Π. Funkce φ, ψ, χ nechť jsou funkce proměnných u, v v Ω' spojité, mající v Ω' derivace rovněž spojité.

Kosiny směrné normály v bodě (u, v) jsou dány rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} \cos(X, n) &= \frac{\pm A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \cos(Y, n) = \frac{\pm B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos(Z, n) &= \frac{\pm C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

kde ve všech třech výrazech jest buď zvoliti znaménko horní anebo dolní a kde

$$A = \frac{D(\psi, \chi)}{D(u, v)}, \qquad B = \frac{D(\chi, \varphi)}{D(u, v)}, \qquad C = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$$

(viz odstavec 297, (2) a odstavec 298). Bod M', který se nachází na normále vztyčené na jedné straně plochy Π ve vzdálenosti λ od paty normály M, má souřadnice

$$\varphi(u, v) + \lambda \cos(X, n), \quad \psi(u, v) + \lambda \cos(Y, n), \quad \chi(u, v) + \lambda \cos(Z, n). \tag{11}$$

Mění-li bod M na ploše Π spojitě svoji polohu, mění i bod M' (položený na normále v bodě M — stále na téže straně vztyčené — ve vzdálenosti λ od M) spojitě svoji polohu. Tudíž i souřadnice jeho v (11) se spojitě mění a následkem toho jest ve výrazech (10) voliti při všech bodech plochy Π stále totéž znaménko (a sice buď horní anebo dolní podle toho, o kterou stranu plochy Π běží). Můžeme tudíž psáti (jelikož odmocninu bereme kladně)

$$\begin{gathered}\operatorname{sign}\cos(X,n)=\pm\operatorname{sign}A,\qquad \operatorname{sign}\cos(Y,n)=\pm\operatorname{sign}B,\\ \operatorname{sign}\cos(Z,n)=\pm\operatorname{sign}C,\end{gathered}\tag{+}$$

kde znaménko $\pm$ jest voliti ve všech těchto rovnicích a pro všecky body plochy Π stejné. Zavedeme-li tedy do výrazů na pravé straně rovnice (6) místo $[x, y]$ za integrační proměnné $[u, v]$, dostaneme (podle pravidla odstavce 278)

$$\operatorname{sign}\cos(Z,n_k)\iint\limits_{\Omega_k}F(x,y,f(x,y))\,dx\,dy=$$

$$=\pm\iint\limits_{\Omega'_k}F(\varphi,\psi,\chi)\operatorname{sign}C\,.\,|C|\,du\,dv=\pm\iint\limits_{\Omega'_k}F(\varphi,\psi,\chi)\,C\,du\,dv$$

a poněvadž znaménko $\pm$ jest u všech sčítanců na pravé straně rovnice 6) totéž a součet oborů Ω'_k dává obor Ω', jest

$$\iint\limits_{\Pi^{(1)}}^{(\mathrm{pl.})}F(x,y,z)\,dx\,dy=\pm\iint\limits_{\Omega'}F(\varphi,\psi,\chi)\,C\,du\,dv.\tag{12}$$

Předpoklady svrchu učiněné o existenci a spojitosti derivací funkcí φ, ψ, χ nemusí býti splněny podél bodů resp. čar oboru Ω', lze-li jenom ty body resp. čáry uzavříti v obory, jejichž plochu celkovou lze učiniti libovolně malou, a mimo to tak, že zbytek oboru Ω' jest jednoduše souvislý. Neboť pak postačí pohyb bodu M svrchu v úvahu vzatý omeziti jenom na ty části plochy, které právě odpovídají onomu zbytku oboru Ω'. Předpoklad o jedno-jednoznačném přiřadění bodů $[x, y, z]$ na Π a dvojic $[u, v]$ oboru Ω' lze podobně rozšířiti (viz také odstavec 281, příklad 1).

PŘÍKLAD. Rovnici elipsoidu E v odstavci 315 v úvahu vzatého lze psáti parametricky ve tvaru

$$x=a\cos u\sin v,\qquad y=b\sin u\sin v,\qquad z=c\cos v.$$

Obor Ω' proměnných $[u, v]$ jest dán na příklad pravoúhelníkem, jehož vrcholy mají souřadnice $[0, 0]$, $[2\pi, 0]$, $[2\pi, \pi]$, $[0, \pi]$. Přiřadění mezi (x, y, z) a (u, v) jest nehledě ke hranicím pravoúhelníka (t. j. ke stranám spojujícím jednak vrcholy $[2\pi, 0]$, $[2\pi, \pi]$, jednak vrcholy $[0, 0]$, $[0, \pi]$) jedno-jednoznačné. Pro funkcionální determinanty máme

$$-A=bc\cos u\sin^2 v,\quad -B=ac\sin u\sin^2 v,\quad -C=ab\sin v\cos v.$$

I jest tedy (neboť v rovnici (10), značí-li n směr normály vnější, jest voliti v tomto případě znaménko dolní)

$$\iint\limits_{E(\text{vněj.})}^{(\text{pl.})} F(x, y, z)\, dx\, dy = \iint\limits_{\Omega'} F(a \cos u \sin v, b \sin u \sin v, c \cos v)\, ab \sin v \cos v\, du\, dv.$$

Pravou stranu lze snadno v tomto případě vypsati jako integrál dvojnásobný.

320. Platnost rovnice (12) rozšiřuje se ihned na integrály (8) za předpokladů o ploše Π v obou odstavcích předcházejících učiněných. Jest

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\text{pl.})} [F(x, y, z)\, dy\, dz + G(x, y, z)\, dz\, dx + H(x, y, z)\, dx\, dy] = \\ = \pm \iint\limits_{\Omega'} [F(\varphi, \psi, \chi)\, A + G(\varphi, \psi, \chi)\, B + H(\varphi, \psi, \chi)\, C]\, du\, dv,\end{aligned} \tag{13}$$

kde znaménko $\pm$ závisí na straně plochy Π, podle které se integruje, a na volbě proměnných u, v. S touto rovnicí souhlasí i stanovení v (9) učiněné; neboť na části válcové plochy V_Z jest stále $C = 0$.

Rovnice (13) užijeme jako prostředku k jinému vyjádření plošných integrálů. Rozložme obor Ω' v integrálu pravé strany té rovnice na obory menší $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_m$; pak jest

$$\iint\limits_{\Omega'} F(\varphi, \psi, \chi)\, A\, du\, dv = \iint\limits_{\omega'_1} + \iint\limits_{\omega'_2} + \iint\limits_{\omega'_3} + \ldots + \iint\limits_{\omega'_m}.$$

Funkci integrovanou (kterouž jsme na pravé straně vynechávali) můžeme psáti jako součin

$$F(\varphi, \psi, \chi) \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

jehož druhý činitel jest kladný. Lze tudíž užíti na integrál věty o střední hodnotě; předpokládáme-li při tom pro jednoduchost vedle spojitosti derivací funkcí φ, ψ, χ ještě spojitost funkce F v oborech, o něž jde, můžeme tudíž psáti se zřetelem k (10) a (+)

$$\begin{aligned}\pm \iint\limits_{\Omega'} F(\varphi, \psi, \chi)\, A\, du\, dv = \\ = \sum_{i=1}^{m} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos(X, n_i) \iint\limits_{\omega'_i} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv.\end{aligned}$$

Oboru ω'_i proměnných (u, v) přísluší na ploše Π jistá část její, již označíme krátce σ_i; rovněž tak označíme velikost povrchu této části σ_i. Bod (ξ_i, η_i, ζ_i) jest patrně bod na σ_i; n_i pak jest normála v tom bodě ku ploše Π a to na té straně plochy vztyčená, podle které se právě integruje. Máme pak dále (na základě formule (II) odstavce 298)

$$\pm\iint F(\varphi, \psi, \chi)\, A\, du\, dv = \sum_{i=1}^{m} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos(X, n_i)\, .\, \sigma_i.$$

Rovnice tato jest platna, ať si zvolíme m jakkoliv veliké; necháme-li m vzrůstati nade všecky meze a zároveň rozměry části σ_i konvergovati k nule, lze pravou stranu psáti jako dvojný integrál*)

$$\iint_{\Pi} F(x, y, z) \cos(X, n)\, d\sigma; \tag{14}$$

neboť funkce $F(x, y, z) \cos(X, n)$, jsouc spojitou funkcí bodu na ploše, jest integrace schopna. Při tom jest bod (x, y, z) bod na ploše Π, n jest pak normála v tomto bodě ku ploše Π vztyčená na té straně, na které se integruje.

Podobně lze vyjádřiti i ostatní sčítance pravé strany rovnice (13), takže celkem lze psáti

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} [F(x,y,z)\, dy\, dz + G(x,y,z)\, dz\, dx + H(x,y,z)\, dx\, dy] = \\ = \iint_{\Pi} [F(x,y,z)\cos(X,n) + G(x,y,z)\cos(Y,n) + H(x,y,z)\cos(Z,n)]\, d\sigma. \end{aligned} \tag{15}$$

321. Jelikož jest identicky

$$\iint_{\Pi} F(x, y, z) \cos(X, n)\, d\sigma = \iint_{\Pi} F(x, y, z) \frac{\cos(X, n)}{\cos(Z, n)} \cos(Z, n)\, d\sigma$$

a podle předcházejícího odstavce

$$\iint_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} F(x, y, z)\, dy\, dz = \iint_{\Pi} F(x, y, z) \cos(X, n)\, d\sigma,$$

*) Při definici dvojného integrálu z funkce $f(x, y)$ v oboru Ω jsme dělili obor rovinný Ω na jistý počet oborů $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$. Tady vyskytuje se obor Π daný jistou plochou, ten se pak dělí na obory $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$. Každému bodu oboru Π jest přiřaděna jistá hodnota funkční; jelikož poloha bodu závisí toliko na dvou parametrech, jest funkce ta ve skutečnosti závislá také jenom na dvou proměnných, ježto však plocha Π není rovinná a ve funkci $F(x, y, z)$ jest vyznačena závislost na bodu stanoveném svými souřadnicemi prostorovými, vyskytují se v ní tři argumenty (ovšem ne nezávislé). Jinak nic nepřekáží, abychom definici integrálu svého času podanou pro obory rovinné nepřenesli beze změny na obory dvojrozměrné dané povrchem plochy Π. Rozměry ploch σ_i můžeme měřiti prostřednictvím dvou systémů čar na ploše vhodně volených, na příklad v našem případě pomocí systému čar $u =$ konst. a systému $v =$ konst.

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} F(x, y, z)\, dx\, dy = \iint\limits_{\Pi} F(x, y, z) \cos(Z, n)\, d\sigma,$$

dále pak

$$\frac{\cos(X, n)}{\cos(Z, n)} = -\frac{\partial z}{\partial x} = -p. \quad \text{(viz též odstavec 297, (2))}$$

jest ihned

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} F(x, y, z)\, dy\, dz = -\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} F(x, y, z)\, p\, dx\, dy. \tag{16}$$

Podobně

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} F(x, y, z)\, dx\, dz = -\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} F(x, y, z)\, q\, dx\, dy. \tag{17}$$

Při tom jsou počítány p, resp. q (jakožto derivace z podle nezávislé proměnné x, resp. y) z rovnice plochy Π a činěny o ploše té mlčky jisté předpoklady, jež k odvození vztahů v předcházejícím užitých byly předpokládány.

POZNÁMKA. Rovnice (15), po případě rovnice (16) a (17) mohou sloužiti za podklad k rozšíření pojmu plošného integrálu i na takové části plošné, jež jsou protínány rovnoběžkami s osou Z (po případě s osou X aneb Y) v nekonečném počtu bodů. Ovšem zase jest při příslušných částech plošných nutno předpokládati existenci normály v každém bodě plochy.

322. Řešme nyní tento úkol: Jaké jsou nutné a postačující podmínky, aby plošný integrál

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} [F(x, y, z)\, dy\, dz + G(x, y, z)\, dz\, dx + H(x, y, z)\, dx\, dy] \tag{21}$$

byl roven nule, ať jest $\Pi^{(\mathrm{I})}$ jedna strana jakékoliv uzavřené plochy probíhající v jistém trojrozměrném oboru **T**. Při řešení tohoto úkolu omezíme se přirozeně na plochy, pro něž podána definice plošných integrálů, a později učiníme o nich další omezující předpoklad. Vedle toho učiníme předpoklad, že funkce F, G, H jsou v oboru **T** spojité funkce tří proměnných (x, y, z) a že mají v **T** derivace $\partial F/\partial x$, $\partial G/\partial y$, $\partial H/\partial z$ rovněž spojité.

Zvolme si nyní uvnitř oboru **T** libovolný bod $[x_0, y_0, z_0]$, který nechť jest středem krychle **K** o straně 2δ a o hranách rovnoběžných s osami XYZ. Při tom nechť jest δ již tak malé, aby **K** bylo cele uvnitř **T**. Vypočteme integrál daný berouce za $\Pi^{(\mathrm{I})}$ vnější stranu povrchu této krychle. Nejprve jest

$$\underset{\text{Zevnější povrch K}}{\overset{\text{(pl.)}}{\iint}} H(x, y, z)\, dx\, dy = \underset{\substack{\text{Čtverec} \\ (x_0-\delta,\, y_0-\delta;\, x_0+\delta,\, y_0+\delta)}}{\iint} [H(x, y, z_0 + \delta) - H(x, y, z_0 - \delta)]\, dx\, dy.$$

(Integrály podle ostatních stěn jsou identicky rovny nule; viz (9)). Užijeme-li věty o střední hodnotě, máme dále, zkracujíce označení integrální,

$$\underset{\text{Z. p. K}}{\overset{\text{(pl.)}}{\iint}} H(x, y, z)\, dx\, dy = 2\delta \underset{\text{Čtv.}}{\iint} \left[\frac{\partial H}{\partial z}\right]_{z=z_0+\Theta\delta} .\, dx\, dy = \frac{\partial H(x'_0, y'_0, z'_0)}{\partial z'_0}\, 2\delta \underset{\text{Čtv.}}{\iint} dx\, dy =$$

$$= 8\delta^3 \frac{\partial H(x'_0, y'_0, z'_0)}{\partial z'_0}.$$

Při tom jest Θ číslo intervalu $(-1+0,\ 1-0)$, jež jest spojitou funkcí bodu $[x, y]$, a $[x'_0, y'_0, z'_0]$ bod položený uvnitř **K**.

Podobně se vypočtou i druzí dva sčítanci v integrálu (21), takže jest celý ten integrál pro případ krychle rovný výrazu

$$8\delta^3 \left[\frac{\partial F(x'''_0, y'''_0, z'''_0)}{\partial x'''_0} + \frac{\partial G(x''_0, y''_0, z''_0)}{\partial y''_0} + \frac{\partial H(x'_0, y'_0, z'_0)}{\partial z'_0}\right],$$

při čemž body $[x'''_0, y'''_0, z'''_0]$, $[x''_0, y''_0, z''_0]$ jsou rovněž jisté body uvnitř **K**. Jelikož daný integrál má býti rovný nule, ať jest plocha, podle které se integruje, jakákoliv, jest výraz získaný rovný nule a tedy

$$\frac{\partial F(x'''_0, y'''_0, z'''_0)}{\partial x'''_0} + \frac{\partial G(x''_0, y''_0, z''_0)}{\partial y''_0} + \frac{\partial H(x'_0, y'_0, z'_0)}{\partial z'_0} = 0.$$

Tento výraz jest stále roven nule, ať jest δ jakkoliv malé. Má tedy tento výraz i limitu rovnou nule, když δ konverguje k nule. Avšak v tomto případě body (x'_0, y'_0, z'_0), $(x''_0, \ldots)$, ... konvergují k bodu (x_0, y_0, z_0) a jest tudíž v důsledku předpokládané spojitosti derivací funkcí F, G, H

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial G(x_0, y_0, z_0)}{\partial y_0} + \frac{\partial H(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0} = 0.$$

Bod (x_0, y_0, z_0) může však býti kterýkoli bod uvnitř oboru **T**; můžeme tedy tuto rovnici psáti též ve tvaru

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0, \qquad [x, y, z] \text{ v oboru T}, \tag{22}$$

což jest *hledaná nutná podmínka*.

323. Avšak můžeme též snadno dokázati, že nalezená podmínka jest také podmínkou postačující. K tomu cíli zevšeobecníme poněkud úvahu v odstavci předcházejícím provedenou. Budiž nyní dáno těleso uvnitř oboru **T** cele položené, omezené jednou uzavřenou plochou spojitou Π, jež jest protínána každou rovnoběžkou s osou X, resp. Y, Z toliko ve dvou bodech.

Uvažujme plošný integrál

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} H(x, y, z)\, dx\, dy, \qquad \Pi^{(\mathrm{I})} \text{ nechť jest vnější strana plochy } \Pi.$$

Vyplňuje-li průmět plochy Π na rovinu XY obor Ω, můžeme tento integrál též psáti ve tvaru

$$\iint\limits_{\Omega} (H(x, y, z_2) - H(x, y, z_1))\, dx\, dy, \qquad z_2 > z_1;$$

(viz příklad odstavce 315, k označení porovnej odstavec 293). Užijeme-li věty o střední hodnotě počtu diferenciálního a potom věty o střední hodnotě počtu integrálního za předpokladu, že $H(x, y, z)$ jakož i $\partial H/\partial z$ jsou v **T** funkce spojité, dostaneme postupně pro poslední integrál tyto hodnoty

$$\iint\limits_{\Omega} (z_2 - z_1) \left[\frac{\partial H}{\partial z}\right]_{z = z_1 + \Theta(z_2 - z_1)} dx\, dy =$$

$$= \left[\frac{\partial H}{\partial z}\right]_{\substack{x = x' \\ y = y' \\ z = z'}} \iint\limits_{\Omega} (z_2 - z_1)\, dx\, dy = \frac{\partial H(x'_0, y'_0, z'_0)}{\partial z'} V, \qquad (*)$$

při čemž $0 < \Theta < 1$, $[x'_0, y'_0, z'_0]$ pak jest jistý bod uvnitř daného tělesa; V konečně jest krychlový obsah tělesa daného (viz odstavec 293, (II')). Obdobné výsledky máme i pro ostatní sčítance integrálu (21) a jest celkem integrál (21) rovný výrazu

$$V \left[\frac{\partial F(x'''_0, y'''_0, z'''_0)}{\partial x'''_0} + \frac{\partial G(x''_0, y''_0, z''_0)}{\partial y''_0} + \frac{\partial H(x'_0, y'_0, z'_0)}{\partial z'}\right], \qquad (+)$$

při čemž body $[x'''_0, y'''_0, z'''_0]$, $[x''_0, y''_0, z''_0]$ jsou rovněž jisté body uvnitř daného tělesa. Výsledek (*) a tudíž i právě napsaný jest platný i pro tělesa ohraničená jednou uzavřenou plochou, která jest protínána každou rovnoběžkou s osou X nebo Y nebo Z i ve větším (avšak konečném) počtu bodů než 2; neboť každé takové těleso lze pomocnými plochami rozděliti na konečný počet těles takových, jako jest to, jež jsme brali v úvahu, atd.

Učiňme nyní předpoklad, že v **T** jest u funkcí F, G, H splněna relace (22), a rozdělme třemi k sobě kolmými systémy rovnoběžných rovin celý prostor na krychlové obory o straně δ. Tím se i těleso, jehož ohraničení nechť jest dáno plochou Π — $\Pi^{(\mathrm{I})}$ budiž vnější strana tohoto ohraničení — rozpadne jednak na celé krychle, jednak na části takových krychlí a integrál (21) podle věty odstavce 316 lze psáti jako součet integrálů tvaru

$$\iint_{\pi^{(1)}} (F\,dy\,dz + G\,dz\,dx + H\,dx\,dy); \qquad (\times)$$

$\pi^{(1)}$ jest vnější strana plochy uzavřené omezující jednu část, na které se těleso s ohraničením Π rozpadá (krychle resp. část krychle). Avšak podle (+) jest tento integrál roven obsahu té části (jež jest rovna buď δ^3 aneb menší než δ^3) násobenému hranatou závorkou v (+) za předpokladu ovšem, že $[x', y', z'], \ldots, [x''', \ldots]$ jsou tři body uvnitř té části; odchylky vzájemné těchto bodů mezi sebou resp. jejich odchylky od jednoho bodu příslušné části jsou menší než δ. Činíme-li tedy předpoklad, že *derivace funkce F*, resp. *G, H podle x*, resp. *y, z jsou funkce spojité v* **T**, pak v důsledku (22) jest hranatá závorka menší než kladné číslo ε, zvolíme-li vhodně δ (t. j. dosti malé), a to pro všecky části, na něž se těleso s ohraničením Π uvažovaným systémem rovnoběžných rovin rozpadne. Zvolíme-li tak δ, jest integrál $(\times)$ menší než

$$\varepsilon\,\delta^3$$

a integrál (21) menší než

$$\varepsilon V.$$

Jelikož pak ε jest číslo kladné libovolné a integrál (21) na δ nezávislý, jest integrál (21) rovný nule a podmínka (22) jest *podmínkou postačující.*

Jest tedy celkem dokázáno, *že nutná a postačující podmínka, aby integrál* (21) *byl roven nule,* ať jest $\Pi^{(1)}$ jedna strana jakékoliv uzavřené, na **T** probíhající plochy spojité a souvislé, jež tu brány jsou v úvahu, *jest* za předpokladu, že funkce F, G, H mají derivace prvá podle x, druhá podle y a třetí podle z, že všechny tyto funkce (počtem 6) jsou spojité funkce v **T** a že $\Pi^{(1)}$ ohraničuje těleso, jehož všechny body patří k **T**, *dána vztahem* (22).

Jest patrno ostatně, že výsledek docílený jest platný i pro tělesa, jejichž ohraničení se skládá z několika ploch uzavřených, jako na příklad těleso omezené dvěma soustřednými plochami kulovými.

324. Věta o střední hodnotě u plošných integrálů. Podržíme-li označení a předpoklady o funkcích F, G, H a jejich derivacích podle x resp. y a z (že to jsou funkce spojité v **T**, které však nevyhovují vztahu (22), neboť pak integrál (21) jest nám znám), můžeme udati pro integrál (21) vztah vyjadřující přibližně jeho hodnotu. Tu nejprve z věty odstavců předcházejících následuje, že

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} [F\,dy\,dz + G\,dz\,dx + (H - \Phi)\,dx\,dy] = 0,$$

je-li Φ funkce tak volená, aby v celém oboru **T** bylo

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \qquad (-)$$

a aby Φ i derivace Φ podle z byly spojité funkce v **T**. I jest tudíž plošný integrál (21) rovný podle předcházejícího odstavce integrálu plošnému

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy = \frac{\partial \Phi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} V, \qquad \text{viz rovnice } (*)$$

a podle rovnice (—) máme tedy konečně

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} [F\,dy\,dz + G\,dz\,dx + H\,dx\,dy] = \left[\frac{\partial F(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} + \frac{\partial G(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} + \frac{\partial H(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta}\right] V,$$

což jest hledaná věta o střední hodnotě u plošných integrálů.

325. PŘÍKLAD 1. Integrál plošný

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} (a\,dy\,dz + b\,dz\,dx + c\,dx\,dy),$$

v němž a, b, c jsou konstanty, jest rovný nule, ať jest Π jakákoliv plocha uzavřená (předpokládaných vlastností).

PŘÍKLAD 2. Integrály

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} z\,dx\,dy, \qquad \iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} x\,dy\,dz, \qquad \iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} y\,dz\,dx$$

jsou si rovny, je-li Π libovolná plocha uzavřená předpokládaných vlastností. Neboť jest na příklad

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} (z\,dx\,dy - x\,dy\,dz) = 0,$$

jelikož jest splněna pro tento integrál podmínka (22).

PŘÍKLAD 3. Uvažujme integrál

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} \frac{x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

I tento integrál jest rovný nule, je-li $\Pi^{(\mathrm{I})}$ vnější strana plochy, jež jest hranicí spojitého tělesa neobsahujícího ve svém nitru ani na hranici bod $[0, 0, 0]$.

Neboť podmínka (22) jest i tu splněna, jak snadno čtenář dokáže; spojitost funkcí F, G, H a jejich derivací jest pak v jistém oboru, v jehož nitru jest dané těleso, ihned patrna.

Jestliže však bod $[0, 0, 0]$ jest uvnitř tělesa omezeného plochou Π, pak funkce F, G, H a jejich derivace jsou v bodě tom nekonečny a daný integrál nemusí býti rovný nule. Abychom v tomto případě vypočetli jeho hodnotu, odejmeme z tělesa kouli o poloměru ϱ a středu $[0, 0, 0]$, při čemž ovšem ϱ volíme dosti malé, aby koule probíhala uvnitř tělesa. Integrál podle vnějšího ohraničení tělesa tak vzniklého jest rovný nule. Označíme-li tedy vnější stranu povrchu kulového $k_\varrho^{(\mathrm{I})}$, máme

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} \frac{x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \iint\limits_{k_\varrho^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} \frac{x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Druhý člen levé strany této rovnice jest hodnota numerická na ϱ nezávislá (jelikož i prvý člen jest na ϱ nezávislý). Výpočet provedeme, uvážíme-li, že na povrchu koule jest $x^2+y^2+z^2=\varrho^2$ a že plošné integrály podle $k_\varrho^{(\mathrm{I})}$ z výrazů $z\,dx\,dy$, $y\,dz\,dx$, $x\,dy\,dz$ dávají krychlový obsah koule; i jest

$$\iint\limits_{k_\varrho^{(\mathrm{I})}} \frac{x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\varrho^3} \cdot \frac{4\pi\varrho^3}{3} \cdot 3 = 4\pi,$$

kteréžto hodnotě jest rovný i daný integrál.

PŘÍKLAD 4. Pomocí označení zavedeného plošnými integrály můžeme formuli pro krychlový obsah tělesa psáti též ve tvaru

$$V = \iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} z\,dx\,dy, \tag{α}$$

při čemž jest $\Pi^{(\mathrm{I})}$ vnější strana plochy omezující dané těleso.

Jest snadno dokázati, že omezíme-li se na plochy, pro něž integrály plošné v této úvaze přibrané mají význam, a to na základě definic podaných v odstavci 315 a 318, výraz (α) má vskutku všecky tři základní vlastnosti, které stanoví krychlový obsah (viz odstavec 291), a že tudíž těm plochám vskutku krychlový obsah daný rovnicí (33) přísluší.

Nejprve jest patrno, že splněna jest při integrále (α) vlastnost druhá a třetí v odstavci 291; pro vlastnost druhou následuje to ihned z věty odstavce 316, pro vlastnost třetí pak snadným počtem. Abychom dokázali, že jest splněna vlastnost prvá, postačí dokázati, že hodnota výrazu v (α) se nemění libovolnou transformací pravoúhlých souřadnic. Avšak každou transformaci pravoúhlých souřadnic lze rozložiti rozmanitým způsobem v transformace jednodušší, jež jsou jednak pošinutí ve směru jedné osy daného pravoúhlého systému XYZ, jednak rotace o jistý úhel kolem jedné z os. Nadto lze výrazu v (α) dáti jeden ze tří tvarů

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} z\,dx\,dy = \iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} x\,dy\,dz = \iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} y\,dz\,dx \qquad \text{(viz příklad 2)} \tag{β}$$

V jiném pravoúhlém systému souřadnicovém $X'Y'Z'$ lze ovšem též psát obdobné rovnosti pro plošné integrály podle téže plochy Π, totiž

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} z'\,dx'\,dy' = \iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} x'\,dy'\,dz' = \iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} y'\,dz'\,dx'. \qquad (\beta')$$

Při tom musíme míti na paměti, že v (β) a (β') běží vždy o tutéž plochu Π a že tedy její rovnice v (β) vyjádřené v souřadnicové soustavě XYZ, v (β') pak v soustavě $X'Y'Z'$ jsou různé a přecházejí v sebe právě užitou transformací souřadnic. Dokážeme-li tedy o jednom výrazu z (β), že jest rovný jednomu výrazu z (β'), dokázali jsme, že formule (α) dává i v soustavě XYZ i v soustavě $X'Y'Z'$ touž hodnotu pro V. Se zřetelem k úplné symetrii vzhledem k x, y, z resp. k x', y', z' stačí tudíž — abychom dokázali úplnou nezávislost výrazu (α) na poloze pravoúhlé soustavy souřadnicové — vyšetřovati jenom tyto dvě transformace souřadnic

I. $x = x'$, $\quad y = y'$, $\quad z = z' + a$,

II. $x = x' \cos\alpha + y' \sin\alpha$, $\quad y = -x' \sin\alpha + y' \cos\alpha$, $\quad z = z'$.

Pro první transformaci máme

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} z\,dx\,dy = \iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} (z' + a)\,dx'\,dy' = \iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} z'\,dx'\,dy' \quad \text{(viz příklad 1)},$$

odkudž vyplývá, že formule (α) dává pro V v soustavě původní i v soustavě pošinuté podél kterékoliv osy souřadnicové tytéž hodnoty.

Pro druhou transformaci (ve které nová soustava souřadnicová vzniká z původní otočením kolem osy Z) následuje ihned

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} z\,dx\,dy = \iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} z'\,dx'\,dy',$$

a to na základě vzorce pro transformaci dvojných integrálů, v něž se plošné integrály na obou stranách se nacházející dají rozložiti. Tedy i v soustavě z původní soustavy vzniklé otočením kolem kterékoliv z os dává (α) touž hodnotu jako v soustavě původní. Dává tedy (α) v každém pravoúhlém systému souřadnicovém touž hodnotu, čímž jest dokázáno, že i prvá vlastnost charakterisující krychlový obsah přísluší výrazu v (α).

326. Abychom integrál (21), v němž funkce F, G, H hoví vztahu (22), pro případ, že plocha Π není uzavřenou plochou, vyjádřili integrálem křivkovým a tak odvodili důležitou formuli zvanou *Stokesovou*, dokážeme nejprve, že funkce F, G, H hovící rovnici (22) v celém oboru $\mathbf{T}$ lze vždy psáti ve tvaru

$$F = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}, \quad G = \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}, \quad H = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad (23)$$

P, Q, R jsou funkce tří proměnných v $\mathbf{T}$ spojité, majíc derivace

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}$$

v tom oboru rovněž spojité. Že funkce F, G, H rovnicemi (23) dané mají v oboru **T** vlastnosti pro F, G, H požadované, zejména, že hoví rovnici (22), jest bezprostředně jasno. Avšak též naopak lze z (23) stanoviti P, Q, R, při čemž si jednu z funkcí P, Q, R můžeme hned předem s jistou libovůlí zvoliti. Učiníme na příklad $R = 0$ a příslušné k této volbě funkce P, Q označíme P_0, Q_0. Jest tedy pro tyto funkce

$$F = \frac{\partial Q_0}{\partial z}, \qquad G = -\frac{\partial P_0}{\partial z}, \qquad H = \frac{\partial P_0}{\partial y} - \frac{\partial Q_0}{\partial x}. \tag{23'}$$

Z prvých dvou rovnic právě napsaných ihned vyplývá

$$P_0 = -\int_{z_0}^{z} G(x, y, z)\, dz, \qquad Q_0 = \int_{z_0}^{z} F(x, y, z)\, dz + \varphi(x, y),$$

kde z_0 jest vhodná hodnota (tak volená, aby přímka $z = z_0$ probíhala oborem **T**) a $\varphi(x, y)$ libovolná v **T** spojitá funkce proměnných x, y mající jenom v **T** spojitou derivaci podle x. Obdobnou funkci mohli jsme i ve výraze pro P_0 přidati; to však jest zbytečné, jelikož nám v prvé řadě běží o jedno partikulární řešení rovnic (23). Dosadíme-li tyto výsledky do třetí z rovnic (23), máme na základě (22)

$$\int_{z_0}^{z} \frac{\partial H}{\partial z}\, dz - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = H \qquad \text{aneb} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + H(x, y, z_0) = 0,$$

$$\varphi(x, y) = -\int_{x_0}^{x} H(x, y, z_0)\, dx.$$

Jest tedy rovnicím (23′) vyhověno, klademe-li

$$P_0 = -\int_{z_0}^{z} G(x, y, z)\, dz, \qquad Q_0 = \int_{z_0}^{z} F(x, y, z)\, dz - \int_{x_0}^{x} H(x, y, z_0)\, dx \tag{24'}$$

a rovnice (23) pak jsou splněny, dosadíme-li za P, Q, R výrazy P_0, Q_0, 0. Splňují-li však i P, Q, R i P_0, Q_0, R_0 rovnice (23), splňují rozdíly $P - P_0$, $Q - Q_0$, $R - R_0$ rovnice

$$\frac{\partial (Q - Q_0)}{\partial z} - \frac{\partial (R - R_0)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial (R - R_0)}{\partial x} - \frac{\partial (P - P_0)}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial (P - P_0)}{\partial y} - \frac{\partial (Q - Q_0)}{\partial x} = 0;$$

t. j. výraz $(P - P_0)\, dx + (Q - Q_0)\, dy + (R - R_0)\, dz$ jest úplný diferenciál jisté funkce $\Phi(x, y, z)$ (viz odstavec 210), takže, známe-li jedno řešení P_0, Q_0, R_0 rovnic (23), jsou všecka ostatní dána výrazy

$$P = P_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Q = Q_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad R = R_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{24}$$

kde Φ jest funkce mající v oboru **T** prvé i druhé derivace spojité a jinak jest libovolně zvolena.

327. Formule Stokesova. Předpokládáme-li tedy, že podmínka (22) jest splněna, můžeme integrál (21) nahraditi integrálem

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) dz\, dx + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dy\right], \tag{25}$$

kterýžto integrál ovšem se nemění, ať si zvolíme za P, Q, R jakýkoliv systém funkcí rovnicím (23) hovící. Položíme-li tam $P = P_0$, $Q = Q_0$, $R = 0$, kde P_0, Q_0 jsou dány v (24'), dostaneme jej zejména ve tvaru

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} \left[\frac{\partial Q_0}{\partial z} dy\, dz - \frac{\partial P_0}{\partial z} dz\, dx + \left(\frac{\partial P_0}{\partial y} - \frac{\partial Q_0}{\partial x}\right) dx\, dy\right].$$

O ploše Π učiníme zatím předpoklad, že její rovnici lze psáti ve tvaru $z = f(x, y)$, kde $f(x, y)$ má prvé derivace podle x a podle y spojité v oboru **T**. Jest to tedy plocha neuzavřená. protínající každou přímku rovnoběžnou s osou Z toliko v jednom bodě — protíná-li ji vůbec. Můžeme pak integrál na základě rovnic (16), (17) odstavce 321 nejprve nahraditi integrálem plošným při proměnných integračních x, y a pak podle základních rovnic definujících (odstavec 315) integrálem dvojnásobným. Dostaneme tak integrál, je-li $\Pi^{(\mathrm{I})}$ horní strana plochy Π a značíme-li obor roviny XY vzniklý průmětem plochy Π na rovinu XY jako dříve Ω, při vhodném uspořádání ve tvaru

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial P_0}{\partial y} + \frac{\partial P_0}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q_0}{\partial x} + \frac{\partial Q_0}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right] dx\, dy,$$

ve kterémž z a jeho derivace jest nahraditi hodnotami plynoucími z rovnice $z = f(x, y)$. První kulatá závorka jest patrně derivace funkce $P_0(x, y, f(x, y))$ podle y, druhá pak jest derivací funkce $Q_0(x, y, f(x, y))$ podle x a můžeme tedy na poslední dvojný integrál užíti formuli Greenovu odstavce 205 rovnice (7)*), čímž obdržíme

*) Při užití této rovnice jest však na jedné straně pozměniti znaménko; neboť rovinné osy XY tam (v odstavci 205) za základ vzaté jsou jinak orientovány než osy XY v systému os prostorových XYZ tu užívaném. Stojíme-li totiž patou v počátku pravoúhlé soustavy XYZ tak, že směr od paty k hlavě jest směr kladné osy Z, a jsme-li obráceni ke kladné části osy X, jest kladná část osy Y na pravé straně.

daný integrál vyjádřený integrálem podle křivky K_Ω omezující v rovině XY obor Ω

$$\int_{K_\Omega} [P_0(x, y, f(x, y))\, dx + Q_0(x, y, f(x, y))\, dy]\,;$$

tento však jest identický s integrálem

$$\int_{K_{\Pi^{(\mathrm{I})}}} [P_0(x, y, z)\, dx + Q_0(x, y, z)\, dy] \tag{26'}$$

podle křivky prostorové $K_{\Pi^{(\mathrm{I})}}$, jež jest krajem plochy Π probíhaným na straně $\Pi^{(\mathrm{I})}$ ve směru kladném, t. j. tak, že jdeme-li po okraji plochy Π na straně $\Pi^{(\mathrm{I})}$, jest plocha Π na levé straně. Avšak integrál

$$\int_{K_{\Pi^{(\mathrm{I})}}} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\, dz\right] = 0 \qquad \text{(odstavec 210).}$$

Přičteme-li tedy tento výraz k (26'), změní se (26') se zřetelem k (24) v integrál

$$\int_{K_{\Pi^{(\mathrm{I})}}} [P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz]. \tag{26}$$

Máme tak celkem tuto formuli (porovnáme-li integrál, ze kterého jsme vyšli, s integrálem, ke kterému jsme dospěli)

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) dz\, dx + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dy\right] = \\ = \int_{K_{\Pi^{(\mathrm{I})}}} (P\, dx + Q\, dy + R\, dz). \tag{27}$$

Touž rovnici dostáváme, je-li $\Pi^{(\mathrm{I})}$ dolní strana uvažované plochy Π. Formule tato jest odvozena pro plochy, jejichž rovnici lze psáti ve tvaru $z = f(x, y)$; platna jest ovšem též — se zřetelem k symetrii vzhledem k proměnným x, y, z — pro plochy, jejichž rovnice jest buď $x = g(y, z)$ aneb $y = h(z, x)$, mají-li jenom funkce g, h derivace $\partial g/\partial y$, $\partial g/\partial z$, $\partial h/\partial z$, $\partial h/\partial x$, jež jsou v **T** spojité.

Jest však platna pro plochy Π, jež lze pomocnými čarami rozložiti na konečný počet částí $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ takových, že rovnice každé z nich jest jednoho ze tří uvedených tvarů. Neboť integrá plošný podle jedné strany plochy Π se rovná součtu integrálů plošných podle vhodně volených stran ploch Π_k, součet pak integrálů podle okrajů ploch Π_k v náležitých směrech počítaných jest rovný integrálu podle okraje plochy Π. Integrál totiž podle každé pomocné čáry vyskytuje se v posledním součtu dvakráte, a to ve směrech protivných, a jest tedy součet integrálů podle pomocných čar rovný nule.

Formule (27) sluje *Stokesova*; vedle předpokladů vytčených byl činěn mlčky předpoklad, že čáry tvořící kraj plochy Π (resp. $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$) — jakož i čára tvořící hranici oboru Ω — jsou takové, že příslušné křivkové integrály ve vyšetřování užité mají význam.

Vlastnost plochy Π, pro kterou věta Stokesova byla dokázána, lze také charakterisovati výrokem, že v každém bodě plochy Π — vyjma body, jež jsou položeny na krajích ploch $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ — existuje normála, jež se s bodem na ploše spojitě mění.

328. O zavádění nových proměnných do plošných integrálů. Budeme bráti v úvahu jenom plochy, pro něž byla odvozena rovnice (13), odstavec 320. Budiž Π taková plocha a přiřaďme každému bodu (x, y, z) na ploše Π aneb v jejím okolí se nacházejícímu jeden bod (x', y', z') rovnicemi

$$x' = L_1(x, y, z), \qquad y' = M_1(x, y, z), \qquad z' = N_1(x, y, z), \tag{28}$$

kde L_1, M_1, N_1 jsou funkce spojité ve zmíněném okolí plochy Π. Tím ploše Π bude přiřaděna jistá plocha Π' a okolí plochy Π bude přiřaděno jisté okolí plochy Π' a budeme naopak také požadovati, aby tímto způsobem každému bodu (x', y', z') v tomto okolí plochy Π' (resp. na Π') přiřaděn byl jediný bod v okolí plochy Π (resp. na Π). Pak můžeme v důsledku rovnic také psáti rovnice

$$x = L(x', y', z'), \qquad y = M(x', y', z'), \qquad z = N(x', y', z'), \tag{29}$$

kde L, M, N jsou rovněž spojité funkce ve vytčeném okolí plochy Π'. O funkcích L, M, N učiníme předpoklad, že mají spojité derivace pro všecky body v okolí plochy Π'; obdobnou vlastnost pak nechť mají i funkce L_1, M_1, N_1.*)

Jelikož pro plochu Π jest podle předpokladu nejdříve učiněného platno parametrické vyjádření (odstavec 319), jest následkem (28) i pro plochu Π' takové vyjádření možné, takže současně lze psáti rovnice obou ploch

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \qquad z = \chi(u, v);$$
$$x' = \varphi_1(u, v), \qquad y' = \psi_1(u, v), \qquad z' = \chi_1(u, v),$$

*) Předpoklady tu učiněné o funkcích L, M, N; L_1, M_1, N_1 jakož i o jejich derivacích nejsou na sobě úplně nezávislé.

při čemž bodům sobě odpovídajícím patří na obou plochách stejné parametry (u, v) a funkce φ, ψ, χ; $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$ mají zároveň derivace prvé podle u a podle v spojité.

I jest dále podle (12), zavedeme-li pro krátkost místo $F(\varphi, \psi, \chi) = \Phi(u, v)$,

$$\underset{\Pi^{(\mathrm{I})}}{\overset{(\mathrm{pl.})}{\iint}} F(x, y, z)\, dy\, dz = \pm \iint_{\Omega'} \Phi(u, v)\, A\, du\, dv,$$

kde znaménko $\pm$ nezávisí na funkci $F(x, y, z)$. Avšak*)

$$A = \frac{D(\psi, \chi)}{D(u, v)} = \frac{D(y, z)}{D(u, v)} = \frac{D(y, z)}{D(y', z')}\,\frac{D(y', z')}{D(u, v)} + \frac{D(y, z)}{D(z', x')}\,\frac{D(z', x')}{D(u, v)} +$$
$$+ \frac{D(y, z)}{D(x', y')}\,\frac{D(x', y')}{D(u, v)}$$

aneb značíme-li

$$A_1 = \frac{D(y', z')}{D(u, v)}, \qquad B_1 = \frac{D(z', x')}{D(u, v)}, \qquad C_1 = \frac{D(x', y')}{D(u, v)},$$
$$A = \frac{D(y, z)}{D(y', z')} A_1 + \frac{D(y, z)}{D(z', x')} B_1 + \frac{D(y, z)}{D(x', y')} C_1$$

a tedy, dosadíme-li ještě

$$\Phi(u, v) = F(x, y, z) = F[L(x', y', z'), M(\ldots), N(\ldots)] = F_1(x', y', z'),$$

máme na základě rovnice (13)

$$\underset{\Pi^{(\mathrm{I})}}{\overset{(\mathrm{pl.})}{\iint}} F(x, y, z)\, dy\, dz = \pm \underset{\Pi'^{(\mathrm{I})}}{\overset{(\mathrm{pl.})}{\iint}} F_1(x', y', z') \left[\frac{D(y, z)}{D(y', z')}\, dy'\, dz' + \right. \tag{30}$$
$$\left. + \frac{D(y, z)}{D(z', x')}\, dz'\, dx' + \frac{D(y, z)}{D(x', y')}\, dx'\, dy' \right],$$

čímž formule pro transformaci integrálu plošného odvozena. $\Pi'^{(\mathrm{I})}$ jest ta strana plochy Π', jež odpovídá straně $\Pi^{(\mathrm{I})}$. Obdobné formule následují i pro ostatní sčítance levé strany rovnice (13). Znaménko na pravé straně rovnice (30) později v odstavci násle-

---

*) Vztah nahoře uvedený vzniká snadnou úpravou z rovnice

$$A = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u}, & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}, & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial x'}\dfrac{\partial x'}{\partial u} + \dfrac{\partial y}{\partial y'}\dfrac{\partial y'}{\partial u} + \dfrac{\partial y}{\partial z'}\dfrac{\partial z'}{\partial u}, & \dfrac{\partial y}{\partial x'}\dfrac{\partial x'}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial y'}\dfrac{\partial y'}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial z'}\dfrac{\partial z'}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x'}\dfrac{\partial x'}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y'}\dfrac{\partial y'}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial z'}\dfrac{\partial z'}{\partial u}, & \dfrac{\partial z}{\partial x'}\dfrac{\partial x'}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y'}\dfrac{\partial y'}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial z'}\dfrac{\partial z'}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Jest také důsledkem známé z nauky o determinantech věty o „násobení" dvou matic; v našem případě těchto dvou matic

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial x'}, & \dfrac{\partial y}{\partial y'}, & \dfrac{\partial y}{\partial z'} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x'}, & \dfrac{\partial z}{\partial y'}, & \dfrac{\partial z}{\partial z'} \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial x'}{\partial u}, & \dfrac{\partial y'}{\partial u}, & \dfrac{\partial z'}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v}, & \dfrac{\partial y'}{\partial v}, & \dfrac{\partial z'}{\partial v} \end{Vmatrix}.$$

dujícím bude stanoveno; jest patrno již nyní z vývodů předcházejících, že znaménko to nezávisí na funkci $F(x, y, z)$.

329. Budiž dána v soustavě XYZ rovnicemi $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$ spojitá, uzavřená plocha Π tak, že všechny její body dostaneme, necháme-li (u, v) probíhati veškeré body oboru Ω' (a každý bod plochy Π jedenkrát, nehledě ovšem k těm hodnotám parametrů (u, v), jež jsou na hranici Ω'). Buďtež dále funkce φ, ψ, χ spojité v Ω' s derivacemi prvými podle u, v rovněž spojitými. Zaveďme do výrazu dávajícího krychlový obsah tělesa omezeného plochou Π rovnicemi (28) resp. (29) odstavce 328 nové proměnné $[x', y', z']$; rovnicemi těmi jest bodu o souřadnicích $[x, y, z]$ přiřaděn (též v pravoúhlé soustavě souřadnicové $X'Y'Z'$) bod o souřadnicích $[x', y', z']$, ploše pak Π jest přiřaděna — za předpokladů o funkcích L, M, N resp. L_1, M_1, N_1 a jejich derivacích v citovaném odstavci učiněných — rovněž uzavřená spojitá plocha Π'. Funkce L, M, N resp. L_1, M_1, N_1 zprostředkující závislost mezi $[x, y, z]$ a bodem $[x', y', z']$ buďtež dále takové, že determinant funkcionální

$$\frac{D(L, M, N)}{D(x', y', z')} \tag{31}$$

existuje, jest pro všecky body nacházející se uvnitř Π' od nuly různý a funkcí spojitou a tudíž stále téhož znaménka.

Můžeme pak na základě rovnice (30) psáti provádějíce transformaci, kterou jsme si předsevzali,

$$\begin{aligned} V_\Pi &= \iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} z\,dx\,dy = \\ &= \pm \iint\limits_{\Pi'^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} N(x', y', z') \left[\frac{D(L, M)}{D(x', y')} dx'\,dy' + \frac{D(L, M)}{D(y', z')} dy'\,dz' + \frac{D(L, M)}{D(z', x')} dz'\,dx'\right], \end{aligned} \tag{32}$$

při čemž na obou stranách rovnice jsou $\Pi^{(\mathrm{I})}$, $\Pi'^{(\mathrm{I})}$ vnější strany příslušných ploch, V_Π jest krychlový obsah tělesa omezeného plochou Π a obdobný význam měj i $V_{\Pi'}$. Užijeme-li na pravou stranu poslední rovnice věty o střední hodnotě, dostaneme po snadném počtu za dalšího předpokladu, že i derivace druhé u funkcí L, M podle proměnných $[x', z']$ resp. podle proměnných $[z', y']$, $[y', x']$ existují,

$$V_\Pi = \pm \left[\frac{D(L, M, N)}{D(x', y', z')}\right]_{\substack{x'=\xi' \\ y'=\eta' \\ z'=\zeta'}} \cdot V_{\Pi'}. \tag{33}$$

Avšak V_{Π} i $V_{\Pi'}$ jsou čísla kladná a jest tedy patrno, že znaménko + jest voliti, je-li determinant funkcionální v rovnici se vyskytující kladný, znaménko pak —, je-li tam determinant záporný.

Tím jsme také docílili stanovení znaménka v rovnici (30) odstavce 328, ovšem jenom při plochách uzavřených. Avšak výsledek tento dá se rozšířiti i na plochy neuzavřené, mající však dvě strany. Neboť každou plochu neuzavřenou vlastností v odstavci 328 předpokládaných lze doplniti na plochu uzavřenou a to tak, že plocha doplňující prochází okolím plochy Π v odstavci 328 uvažovaným (ve kterémžto okolí jsou splněny vlastnosti na uvedeném místě o funkcích $L, M, N, L_1, \ldots$ předpokládané) a že zároveň o celku (složeném z neuzavřené plochy Π a jejího doplňku na plochu uzavřenou) jsou platny předpoklady v tomto odstavci učiněné, vztahující se ku parametrickému vyjádření rovnice plochy. Užijeme-li tedy rovnici (30) odstavce 328 na uzavřenou plochu v úvahu vzatou, při čemž funkci $F(x, y, z)$ v bodech na doplňku plochy Π stanovíme jakožto rovnou nule, vidíme na základě předcházejícího, že na pravé straně té rovnice neurčené dosud znaménko $\pm$ jest nahraditi činitelem + 1, je-li determinant (33) v okolí plochy Π' kladný, a činitelem — 1, je-li ten determinant záporný. Jest tedy znaménko to i na ploše Π nezávislé a závisí toliko na funkcích, jež zprostředkují závislost mezi (x, y, z) a (x', y', z').

Z toho však dále jest patrno, že rovnice (32) resp. (33) zůstává v platnosti, i když uzavřená plocha Π skládá se z několika částí takových, že parametrické vyjádření každé té části jest dáno různými funkcemi, a podél čar, ve kterých části ty se stýkají, uzavřená plocha Π nemá normály.

POZNÁMKA. Předpoklad, že funkce L, M mají druhé derivace $\partial^2 L/\partial x' \partial y'$, $\partial^2 L/\partial x' \partial z'$, $\partial^2 L/\partial y' \partial z'$, $\partial^2 M/\partial x' \partial y', \ldots$, není aspoň pro stanovení znaménka v rovnici (30) odstavce 328 podstatný. Neboť rovnice (32) jest patrně správná pro transformaci

$$x = x', \qquad y = y', \qquad z = N(x', y', z') \tag{34}$$

(tedy při $L(x', y', z') = x'$, $M(x', y', z') = y'$), kde pro $N(x', y', z')$ — vedle jiných předpokladů z předcházejícího vyplývajících — postačuje existence toliko prvých derivací podle x', y', z' a nevyžaduje se existence druhých derivací. Avšak obecná transformace dá se (po případě při vhodném rozkladu příslušných trojrozměrných oborů) pokládati jakožto sled tří transformací tvaru (34), ve kterém dvě proměnné v podstatě se nemění. Z toho a z okolnosti, že funkcionální determinant transformace výsledné jest součinem funkcionálních determinantů transformací, jež postupně provedeny výslednou transformaci dávají, vyplývá, že předpis odvozený pro stanovení znaménka v rovnici (30) odstavce 328 i tenkráte jest platný, když druhé derivace funkcí L, M svrchu vytčené neexistují. Avšak k důkazu rovnice (33), kterou lze psáti též ve tvaru

$$V_\Pi = \left| \frac{D(L, M, N)}{D(x', y', z')} \right|_{\substack{x'=\xi' \\ y'=\eta' \\ z'=\zeta'}} . V_{\Pi''}$$

by bylo třeba, kdybychom chtěli odstraniti předpoklad o druhých derivacích funkcí L, M, dalšího vyšetřování.

330. Věty odstavce 322—324 lze ještě jednodušeji a v obecnějším tvaru i za obecnějších předpokladů odvoditi, užíváme-li integrálů trojných a vět, pomocí nichž se integrál trojný převádí na sled integrálu dvojného a jednoduchého (odstavec 276).

Užijme na příklad rovnici (IV_1) tohoto odstavce pro případ, že v celém oboru **T** jest

$$f(x, y, z) = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x},$$

při čemž jest $f(x, y, z)$ podle proměnných $[x, y, z]$ v **T** schopna integrace. Pak jest podle definice plošných integrálů, značíme-li plochu omezující obor **T** písmenem Π a její vnější stranu značkou $\Pi^{(\mathrm{I})}$, v důsledku rovnice (IV_3)

$$\iiint\limits_{\mathbf{T}} \frac{\partial F}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \overset{(\mathrm{pl.})}{\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}} F(x, y, z)\, dy\, dz.$$

Za obdobných předpokladů o funkcích $G(x, y, z)$, $H(x, y, z)$ a o jejich derivacích $\partial G/\partial y$, $\partial H/\partial z$ máme

$$\iiint\limits_{\mathbf{T}} \frac{\partial G}{\partial y}\, dx\, dy\, dz = \overset{(\mathrm{pl.})}{\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}} G(x, y, z)\, dz\, dx,$$

$$\iiint\limits_{\mathbf{T}} \frac{\partial H}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \overset{(\mathrm{pl.})}{\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}} H(x, y, z)\, dx\, dy.$$

Jest tedy celkem

$$\iiint\limits_{\mathbf{T}} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \overset{(\mathrm{pl.})}{\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}} (F(x, y, z)\, dy\, dz + G(x, y, z)\, dz\, dx + H(x, y, z)\, dx\, dy). \tag{35}$$

Rovnice tato jest jisté rozšíření formule odstavce 205 (formule Greenovy-Riemannovy) na integrály trojné.

Její platnost lze snadno rozšířiti i pro funkce F, G, H poněkud obecnější než ty, které tu byly v úvahu vzaty.

Z rovnice (35) vyplývá snadno věta odvozená v odstavcích 322, 323, jakož i věta o střední hodnotě plošných integrálů a vypsaná v odstavci 324, a to za širších ještě předpokladů o funkcích F, G, H. Zejména není nutno předpokládati, že derivace funkcí F, G, H v rovnici té se vyskytující jsou spojité funkce bodu $[x, y, z]$ v **T**, nýbrž lze činiti předpoklady značně obecnější.

331. Klaďme v rovnici (35)

$$F = U\frac{\partial V}{\partial x}, \quad G = U\frac{\partial V}{\partial y}, \quad H = U\frac{\partial V}{\partial z},$$

kde $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$ jsou funkce mající v **T** derivace

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

při čemž funkce U a prvé derivace funkce V nechť jsou v **T** spojité funkce proměnných x, y, z a mimo to nechť funkce U a derivace svrchu uvedené funkcí U, V jsou funkce v **T** integrace schopné. Pak jest ihned

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\mathbf{T}}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz + \iiint\limits_{\mathbf{T}} U\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right] dx\,dy\,dz = \\ = \overset{(\mathrm{pl.})}{\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}} U\left[\frac{\partial V}{\partial x}\,dy\,dz + \frac{\partial V}{\partial y}\,dz\,dx + \frac{\partial V}{\partial z}\,dx\,dy\right].\end{aligned} \tag{36}$$

Vztahu tomuto lze dáti poněkud jiný tvar, zavedeme-li si pojem derivace funkce $F(x, y, z)$ v bodě (x_0, y_0, z_0) podle kladného směru přímky p tím bodem procházející. Ta derivace jest dána limitou

$$\lim_{\overline{AM}=0} \frac{F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0)}{\overline{AM}} = \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0}};$$

při tom značí A bod (x_0, y_0, z_0) na přímce p, M bod (x, y, z) položený rovněž na přímce p; $\overline{AM}$ jest pak vzdálenost bodu M od bodu A, jestliže směr od A k M jest kladný; je-li však tento směr záporný, jest $\overline{AM}$ vzdálenost bodu M od A vzatá záporně. Jsou-li $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kosiny směrné kladného směru přímky p, jest patrně

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \overline{AM} \quad \text{aneb} \quad x = x_0 + \overline{AM}\cos\alpha$$

a rovněž

$$y = y_0 + \overline{AM} \cos \beta, \qquad z = z_0 + \overline{AM} \cos \gamma$$

a tedy, klademe-li k vůli stručnosti $\overline{AM} = h$,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_{[x_0, y_0, z_0]} = \lim_{h=0} \frac{F(x_0 + h \cos \alpha,\ y_0 + h \cos \beta,\ z_0 + h \cos \gamma) - F(x, y, z)}{h} =$$
$$= \left[\frac{\partial F}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial F}{\partial z} \cos \gamma\right]_{[x, y, z] = [x_0, y_0, z_0]}.$$

Můžeme tedy obecně psáti (zavedeme-li místo $[x_0, y_0, z_0]$, kterýžto bod může býti libovolný bod přímky p, stručněji $[x, y, z]$, t. j. označení bez indexu 0)

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial F}{\partial z} \cos \gamma.$$

Podle odstavce 320 však jest, je-li Π plocha mající normálu (nehledě k jistému množství bodů, jež lze na Π vyloučiti čarami uzavřenými v konečném počtu odstraňujícími z Π část plošnou o velikosti libovolně malé), a označíme-li směr normály vnější n, tato rovnice platna

$$\iint\limits_{\Pi^{(\mathrm{I})}}^{(\mathrm{pl.})} U \left[\frac{\partial V}{\partial x} dy\, dz + \frac{\partial V}{\partial y} dz\, dx + \frac{\partial V}{\partial z} dx\, dy\right] =$$
$$= \iint\limits_{\Pi} U \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos (X, n) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos (Y, n) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos (Z, n)\right] d\sigma,$$

což se dále rovná podle právě zavedeného pojmu derivace podle přímky v bodě $[x, y, z]$ výrazu

$$\iint\limits_{\Pi} U \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma.$$

Tím obdrží rovnice (29) tvar

$$\iiint\limits_{\mathrm{T}} \left[\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z}\right] dx\, dy\, dz =$$
$$= \iint\limits_{\Pi} U \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma - \iiint\limits_{\mathrm{T}} U \Delta V\, dx\, dy\, dz, \tag{37}$$

kde pro krátkost užito obvyklého označení

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Zaměníme-li v rovnici předposlední U s V, dostaneme (za náležitě pozměněných předpokladů o U a V)

$$\iiint\limits_{\mathrm{T}} \left[\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z}\right] dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\Pi} V \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma - \iiint\limits_{\mathrm{T}} V \Delta U\, dx\, dy\, dz$$

a máme tedy porovnáním obou rovnic ihned

$$\iint_{\Pi}\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma=\iiint_{\mathrm{T}}(U\Delta V-V\Delta U)\,dx\,dy\,dz.$$

Rovnice tato užívaná v matematické fysice zvláště při teorii potenciálu má jméno **rovnice Greenovy.** Předpoklady k jejímu odvození učiněné jsou zejména tenkráte splněny, jsou-li U, V jakož i jejich derivace prvé a druhé funkce spojité v **T**. Při tom nemusí U a V býti vně oboru **T** definovány a značí potom ovšem $\partial U/\partial n, \partial V/\partial n$ derivace zleva funkcí U, V ve směru normály vnější. (Tyto derivace jsou stanoveny hodnotami, které nabývají funkce U, V v bodech uvnitř **T**.)