XI. UŽITÍ V GEOMETRII.

1. DÉLKA KŘIVÝCH ČAR.

241. Vezmeme v úvahu oblouk AB čáry spojité, který sám sebe neprotíná (viz odstavec 203). Budeme uvažovati hned čáry v prostoru trojrozměrném, jelikož omezení se na rovinu nepřináší s sebou podstatných výhod v následujícím.

Abychom **definovali délku oblouku** AB **dané čáry,** zvolíme si na něm jistý počet bodů $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{n-1}$, jež jsme psali v pořadí, v jakém k nim dospívá bod z A do B po oblouku AB se pohybující; vedle toho pod M_0 resp. M_n vyrozumíváme bod A resp. B. Sestrojíme dále lomenou čáru $M_0M_1M_2 \ldots M_n$ a pravíme definujíce, že *délka oblouku dané čáry jest rovna limitě délky lomené čáry* $M_0M_1 \ldots M_n$ *pro ten případ, že n roste nade všecky meze a délky všech stran* $\overline{M_{i-1}M_i}$ *lomené čáry současně konvergují k nule, za předpokladu ovšem, že limita ta existuje a jest vždy táž, ať body* $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ *si volíme jakkoliv.* Existuje-li taková limita, říkáme, že oblouk AB jest *rektifikace schopný.*

242. Jest snadno v jednom obecném případě rozhodnouti, zda limita v definici vytčená existuje, a zároveň tuto limitu vyjádřiti omezeným integrálem. Nechť souřadnice pravoúhlé veškerých bodů oblouku AB vyplývají z rovnic

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

tím, že necháme t probíhati spojitě všecky hodnoty od t_0 do T. Spojité funkce $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ buďtež *funkce mající ve všech bodech intervalu derivace*, které nejsou současně rovny nule ve všech bodech nějakého intervalu položeného na (t_0, T).

Bodům $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ přísluší jisté hodnoty parametru, jež značíme $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$; hodnoty ty pak $t_0, t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$, $T = t_n$ jsou řadou hodnot buď stále rostoucích anebo stále klesajících; předpokládejme, abychom určitý případ měli na mysli, že jsou řadou hodnot stále rostoucích. Podle známé formule pro vzdálenost dvou bodů jest

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \sqrt{(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2 + (\chi(t_i)-\chi(t_{i-1}))^2}.$$

Avšak podle věty o střední hodnotě máme

$$\begin{aligned} \varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}) &= (t_i - t_{i-1})\,\varphi'(\tau'_i), \\ \psi(t_i)-\psi(t_{i-1}) &= (t_i - t_{i-1})\,\psi'(\tau''_i), \\ \chi(t_i)-\chi(t_{i-1}) &= (t_i - t_{i-1})\,\chi'(\tau'''_i), \end{aligned} \tag{1}$$

kde $\tau'_i, \tau''_i, \tau'''_i$ jsou jisté hodnoty intervalu (t_{-1}, t_i), takže jest

$$\overline{M_{i-1}M_i} = (t_i - t_{i-1})\,.\,\sqrt{\varphi'^2(\tau'_i) + \psi'^2(\tau''_i) + \chi'^2(\tau'''_i)}.$$

Jelikož pro $\lim (t_i - t_{i-1}) = 0$ jest i $\lim \overline{M_{i-1}M_i} = 0$ a naopak, můžeme na základě definice svrchu vytčené psáti

$$\text{délka oblouku } AB = \lim \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \sqrt{\varphi'^2(\tau'_i) + \psi'^2(\tau''_i) + \chi'^2(\tau'''_i)} \tag{2}$$

$$\text{pro } \lim n = \infty \text{ a } \lim (t_i - t_{i-1}) = 0.$$

Avšak*)

$$\left| \sqrt{\varphi'^2(\tau'_i) + \psi'^2(\tau''_i) + \chi'^2(\tau'''_i)} - \sqrt{\varphi'^2(t_i) + \psi'^2(t_i) + \chi'^2(t_i)} \right| \leqq$$

$$\leqq |\varphi'(\tau'_i) - \varphi'(t_i)| + |\psi'(\tau''_i) - \psi'(t_i)| + |\chi'(\tau'''_i) - \chi'(t_i)| \leqq O_i^{(1)} + O_i^{(2)} + O_i^{(3)}, \tag{3}$$

kde $O_i^{(1)}, O_i^{(2)}, O_i^{(3)}$ jsou oscilace funkcí $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t)$ v intervalu (t_{i-1}, t_i). Tedy

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \sqrt{\varphi'^2(\tau'_i) + \psi'^2(\tau''_i) + \chi'^2(\tau'''_i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \sqrt{\varphi'^2(t_i) + \psi'^2(t_i) + \chi'^2(t_i)} + \vartheta \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) (O_i^{(1)} + O_i^{(2)} + O_i^{(3)}), \tag{4}$$

při čemž $|\vartheta| \leqq 1$. *Předpokládáme-li dále, že $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t)$ jsou v (t_0, T) integrace schopny*, jest limita druhého členu pravé strany

*) Neboť, nejsou-li všecka čísla $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ rovna nule, jest identicky

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} - \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2} = \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2-b_1^2-b_2^2-b_3^2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} =$$

$$= (a_1 - b_1)\frac{a_1+b_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} + (a_2 - b_2)\frac{a_2+b_2}{\sqrt{}+\sqrt{}} +$$

$$+ (a_3 - b_3)\frac{a_3+b_3}{\sqrt{}+\sqrt{}}.$$

Než zlomky, kterými v posledním výraze jsou násobeny rozdíly $a_i - b_i$, jsou co do absolutní hodnoty menší než jedna, po případě rovny jedné, a tedy jest v každém případě (i svrchu vyloučeném)

$$\left| \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} - \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2} \right| \leqq |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3|.$$

v poslední rovnici rovna nule (pro $\lim n = \infty$ a $\lim (t_i - t_{i-1}) = 0$, viz odstavec 74, (9″)) a zároveň z rovnice (3) poněkud specialisované vyplývá, že i $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}$ jest integrace schopno;*) my pak můžeme psáti rovnici (2) na základě (4)

$$\text{délka oblouku } AB = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\, dt. \tag{5}$$

Tak vidíme, že oblouk AB křivky dané rovnicemi

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

kde $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ mají v (t_0, T), t. j. pro všecky body oblouku (A, B) derivace $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$, jež jsou v (t_0, T) integrace schopny, jest rektifikace schopný a jeho délka jest dána výrazem (5).

POZNÁMKA *1.* Věta dokázaná očividně zůstane v platnosti, jestliže derivace $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ neexistují v bodech množství délky nulové na intervalu (t_0, T). Derivace ty mohou se v intervalu (t_0, T) stávati i nekonečnými a to zase v bodech množství délky nulové. I v tomto případě integrál v (5), má-li význam, vyjadřuje délku oblouku AB tak, jak byla svrchu definována. Zevrubnou úvahu příslušnou provede snadno čtenář.

POZNÁMKA 2. Jsou-li derivace $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ v okolí bodu t_0 spojité funkce parametru t, jest platný vztah

$$\lim_{M = M_0} \frac{\text{tetiva } M_0M}{\text{oblouk } M_0M} = 1.$$

Vztahu tomu lze také dáti tvar

$$\text{tetiva } M_0M = \sqrt{\varphi'^2(t_0) + \psi'^2(t_0) + \chi'^2(t_0)} \,.\, dt + \varepsilon\, dt,$$

kde t (parametr příslušný bodu M) jest rovný $t_0 + dt$ a kde $\lim \varepsilon = 0$ pro $\lim dt = 0$. Prvnímu členu pravé strany poslední rovnice říká se také *diferenciál oblouku* v bodě t_0 pro přírůstek parametru t rovný dt. Diferenciál tento značívá se krátce ds_0, a pro libovolný bod na křivce ds, takže jest

$$ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\; dt.$$

*) Jest totiž podle (3)

$$\left| \sqrt{\varphi'^2(t'_i) + \psi'^2(t'_i) + \chi'^2(t'_i)} - \sqrt{\varphi'^2(t''_i) + \psi'^2(t''_i) + \chi'^2(t''_i)} \right| \leqq$$
$$\leqq O_i^{(1)} + O_i^{(2)} + O_i^{(3)}$$

jsou-li t'_i, t''_i libovolné hodnoty intervalu (t_{i-1}, t_i); jest tudíž oscilace funkce $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}$ v intervalu (t_{i-1}, t_i) menší než součet oscilací funkcí $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ v tom intervalu, následkem čehož jest prvá funkce integrace v (t_0, T) schopna, jsou-li poslední tři funkce integrace schopny.

POZNÁMKA 3. Kdyby $T < t_0$ (a ne, jak jsme předpokládali, $T > t_0$), pak by buď v (5) integrál bylo nutno bráti se znaménkem protivným aneb bylo by nutno tam zaměniti meze integrálu.

243. Formule speciální. Běží-li o křivku rovinnou, lze její rovnici patrně psáti

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = 0$$

a formule pro délku oblouku se přemění v

$$s = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \tag{6}$$

Jestliže rovnice oblouku křivky jest tvaru

$$y = f(x), \qquad x_0 \leqq x \leqq X,$$

kterážto rovnice jest ekvivalentní rovnicím $x = t$, $y = f(t)$, jest podle formule (6) dána délka oblouku výrazem

$$s = \int_{x_0}^{X} \sqrt{1 + f'^2(t)}\, dt = \int_{x_0}^{X} \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx = \int_{x_0}^{X} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx, \tag{7}$$

kterýžto bývá psán často též ve formě

$$s = \int_{x_0}^{X} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

mající tu výhodu, že zavádění nových integračních proměnných lze prováděti mechanickým počítáním s diferenciály.

Podobně lze dáti obecné formuli (5), klademe-li $\varphi'(t) = dx/dt$, $\psi'(t) = dy/dt, \ldots$ a užíváme-li diferenciálního označení, tvar

$$s = \int_{x_0}^{X} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}; \tag{8}$$

anebo zvolíme-li si za integrační proměnnou x,

$$s = \int_{x_0}^{X} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx. \tag{8'}$$

244. PŘÍKLAD 1. Jest vyjádřiti *délku oblouku* v **souřadnicích polárních.** Běží-li o křivku rovinnou o rovnici $r = F(\varphi)$, lze rovnice její v souřadnicích pravoúhlých psáti ve tvaru

$$x = r\cos\varphi = F(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi = F(\varphi)\sin\varphi,$$

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = F'^2(\varphi) + F^2(\varphi) = r'^2 + r^2,$$

takže formule příslušná jest

$$s = \int\limits_{\varphi_0}^{\Phi} \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\varphi \tag{9}$$

anebo v označení diferenciálním

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Podobně jest pro křivku prostorovou, zavedeme-li souřadnice polární ($x = r\cos\varphi\sin\psi$, $y = r\sin\varphi\sin\psi$, $z = r\cos\psi$),

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\psi^2 + r^2 \sin^2\psi\, d\varphi^2 \tag{10}$$

a příslušný integrální výraz pro délku oblouku lze i tu snadno napsat.

PŘÍKLAD 2. Délka oblouku *paraboly*. Budiž rovnice její dána ve tvaru $x^2 = 2py$. Pak jest

$$y = \frac{x^2}{2p}, \qquad y' = \frac{x}{p},$$

$$s = \frac{1}{p}\int\limits_0^x \sqrt{p^2 + x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\left[\frac{x\sqrt{x^2+p^2}}{p} + p \log \frac{x + \sqrt{x^2+p^2}}{p}\right],$$

při čemž délka oblouku počítána od vrcholu paraboly až k bodu, jehož úsečka jest x; předpokládáno jest $x > 0$.

PŘÍKLAD 3. *Elipsa*. Píšeme-li rovnici její ve tvaru

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad \text{jest } y' = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}};$$

počítáme-li pak oblouk elipsy od vrcholu $(a, 0)$, máme (pozn. 3)

$$s = \int\limits_x^a \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx$$

anebo substitucí $x = a\xi$

$$s = a\int\limits_{\frac{x}{a}}^1 \sqrt{\frac{1 - k^2\xi^2}{1 - \xi^2}}\, d\xi, \quad -a \leqq x < a, \quad k = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} < 1.$$

Jest tedy vyjádřen oblouk elipsy eliptickým integrálem druhého druhu a máme bezprostředně vyjádření to v normálním tvaru Legendreově. Klademe-li $\xi = \sin\varphi$, máme

$$s = a\int\limits_{\varphi}^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = a\,[E(k, \tfrac{1}{2}\pi) - E(k, \varphi)],$$

kde $E(k, \varphi)$ jest známé označení eliptického integrálu druhého druhu (odstavec 40) a φ jest úhel, který jest dán rovnicemi $x = a\sin\varphi$, $y = b\cos\varphi$. Pro délku kvadrantu eliptického bychom dostali (kladouce pro dolní mez integrálu $x = 0$, $y = b$ a tedy $\varphi = 0$)

$$S_0 = aE(k, \tfrac{1}{2}\pi),$$

což jest úplný eliptický integrál druhého druhu násobený a.

PŘÍKLAD 4. *Hyperbola*. Píšeme-li rovnici její ve tvaru

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

a klademe-li

$$l = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a},$$

máme podobně, počítajíce oblouk hyperboly od vrcholu $(a, 0)$,

$$s = \int_a^x \sqrt{\frac{l^2x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}\, dx; \qquad x > a, \quad l > 1.$$

Dosadíme tu $x = a/\xi$:

$$s = al \int_{\frac{a}{x}}^{1} \sqrt{\frac{1 - k^2\xi^2}{1 - \xi^2}} \cdot \frac{d\xi}{\xi^2}, \qquad k = \frac{1}{l} < 1.$$

Avšak derivováním podle ξ zjednáme si snadno vztah

$$\left(\frac{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}{\xi}\right)' = -\frac{1}{\xi^2}\sqrt{\frac{1-k^2\xi^2}{1-\xi^2}} - k^2\sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-k^2\xi^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\xi^2}\sqrt{\frac{1-k^2\xi^2}{1-\xi^2}} + \frac{k'^2}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} - \sqrt{\frac{1-k^2\xi^2}{1-\xi^2}},$$

odkudž dostáváme pro s

$$s = \frac{al}{\xi}\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)} + alk'^2 \int_\xi^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} - al\int_\xi^1 \sqrt{\frac{1-k^2\xi^2}{1-\xi^2}}\, d\xi.$$

Klademe-li i tu $\xi = a/x = \sin\varphi$ (při čemž φ jest úhel prvého kvadrantu určený rovnicí $\sin\varphi = a/x$ při $x > 0$), dostáváme pro oblouk hyperboly měřený od jejího vrcholu výraz

$$s = \frac{a}{k}\cot g\,\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} + a\frac{k'^2}{k}(F(k, \tfrac{1}{2}\pi) - F(k,\varphi)) - \frac{a}{k}(E(k, \tfrac{1}{2}\pi) - E(k,\varphi)).$$

Mohli bychom mu dáti též tvar

$$s = \cot g\,\varphi\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2} + bk'(F(k, \tfrac{1}{2}\pi) - F(k,\varphi)) - \sqrt{a^2+b^2}\,(E(k, \tfrac{1}{2}\pi) - E(k,\varphi)).$$

V tomto výsledku značí $E(k, \varphi)$, $F(k, \varphi)$ eliptický integrál 2. a 1. druhu ve tvaru Legendreově (viz odstavec 74, 77) a

$$k' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{1-k^2}, \qquad k = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

PŘÍKLAD 5. *Cykloida.* Rovnici její lze psáti ve tvaru

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t).$$

Užíváme-li formule (6), máme

$$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t = 4a^2\sin^2\tfrac{1}{2}t$$

a tedy pro délku oblouku cykloidy měřeného od bodu O (od bodu, pro který $t = 0$)

$$s = \int_0^t 2a\,|\sin\tfrac{1}{2}t|\, dt.$$

Délka celé větve cykloidy (od jedné špice k následující) jest pak

$$s_0 = \int_0^{2\pi} 2a \mid \sin \tfrac{1}{2}t \mid dt = \int_0^{2\pi} 2a \sin \tfrac{1}{2}t \, dt = -\left[4a \cos \tfrac{1}{2}t\right]_0^{2\pi} = 8a;$$

jest tedy rovna 8násobnému poloměru kruhu cykloidu vytvořujícího.

PŘÍKLAD 6. *Lemniskata.* Abychom podali příklad na souřadnice polární, provedeme počet v souřadnicích polárních. Rovnice jedné poloviny lemniskaty v nich jest

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi \quad \text{a tedy} \quad r' = -a \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \qquad -\tfrac{1}{4}\pi < \varphi < \tfrac{1}{4}\pi;$$

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = a \sqrt{\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} + \cos 2\varphi} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}};$$

počítáme-li tudíž oblouk od vrcholu lemniskaty ($x = a$, $y = 0$),

$$s = a \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Integrál tento změní se na eliptický v normálním tvaru Legendreově, klademe-li $\sin \varphi = u/\sqrt{2}$; dostaneme

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\frac{1}{2}u^2)}}.$$

Pro čtvrtinu oblouku celé lemniskaty jest integrovati při φ v mezích $(0, \frac{1}{4}\pi)$ a tedy při u v mezích $(0, 1)$, čímž dostaneme vyjádření čtvrtiny oblouku celé lemniskaty úplným eliptickým integrálem 1. druhu ve tvaru

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{2}\pi\right).$$

PŘÍKLAD 7. Buďtež dány dvě křivky prostorové K, K_1 o rovnicích

$$\begin{array}{llll} \text{pro } K & x = \varphi(t), & y = \psi(t), & z = \chi(t); \\ \text{pro } K_1 & x_1 = \varphi_1(u), & y_1 = \psi_1(u), & z_1 = \chi_1(u). \end{array}$$

Předpokládejme, že funkce $\varphi, \varphi_1, \psi, \ldots$ mají spojité první derivace, a vyšetřujme derivace (podle t resp. podle u) funkce l udávající vzdálenost dvou bodů M, M_1, z nichž prvý jest položen na K, druhý na K_1; příslušné k těmto bodům hodnoty parametrů buďtež právě t, u. Vzdálenost ta jest dána rovnicí

$$l^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Derivujeme-li rovnici podle t, máme

$$l \frac{\partial l}{\partial t} = (x - x_1) \frac{dx}{dt} + (y - y_1) \frac{dy}{dt} + (z - z_1) \frac{dz}{dt}.$$

Označíme-li kosiny směrné přímky $\overline{MM_1}$ $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, dále kosiny směrné tečné křivky K ve směru rostoucího t $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$, jest

$$\frac{x - x_1}{l} = -\cos a, \ldots, \quad \frac{dx}{dt} = \cos \lambda \frac{ds}{dt}, \ldots {}^{*})$$

*) Při tom jest s délka oblouku křivky K měřená ve směru rostoucího t od jistého pevného bodu na křivce K. Obdobný význam má i s_1 při K_1. Čísla s, s_1 mohou tudíž při této úvaze býti i záporná.

a předcházející rovnici lze psáti

$$\frac{\partial l}{\partial t} = -(\cos a \cos \lambda + \cos b \cos \mu + \cos c \cos \nu) \frac{ds}{dt}$$

aneb, jelikož výraz v závorce jest kosinus úhlu, který svírá tečna svrchu zmíněná s přímkou $\overline{MM_1}$ a kterýž úhel označíme Θ,

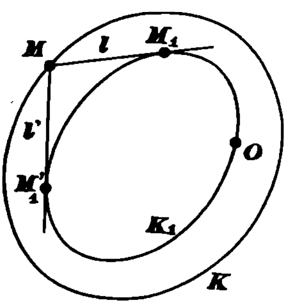
$$\frac{\partial l}{\partial t} = -\cos \Theta \frac{ds}{dt}.$$

Obdobnou úvahou získáme

$$\frac{\partial l}{\partial u} = -\cos \Theta_1 \frac{ds_1}{du};$$

při tom jest Θ_1 úhel sevřený tečnou ke K_1 v bodě M_1 (ve směru rostoucího u) s přímkou $\overline{M_1M}$. Obě rovnice poslední lze pomocí označení diferenciálního shrnouti v jedinou**)

$$dl = -\cos \Theta \, ds - \cos \Theta_1 \, ds_1. \qquad (\alpha)$$



Obr. 13.

Rovnice právě odvozená má zajímavá užití při kuželosečkách konfokálních. Buďtež ku příkladu křivky K a K_1 dvě konfokální elipsy (obsažené v jedné rovině) a buď K_1 položena uvnitř K. Zvolme si na K_1 bod M_1, ve kterém sestrojíme tečnu, kteráž nechť protne (jdeme-li od dotyčného bodu v určitém směru; nechť jest to ve směru rostoucího u) elipsu K v bodě M. (Viz obr. 13.) Značíme-li l vzdálenost bodů M, M_1, jest tu podle (α)

$$dl = -\cos \Theta \, ds - ds_1.$$

Sestrojíme-li z M ke K_1 druhou tečnu MM'_1 o délce l', svírá tato, jak známá věta o konfokálních elipsách nás učí, s tečnou v bodě M ke K úhel, který s Θ doplňuje se na π, a máme obdobně

$$dl' = +\cos \Theta \, ds + ds'_1.$$

**) Veličina l závisí na proměnných t a u; s resp. s_1 závisí pouze na t resp. u i jest tedy při označení diferenciálním (za náležitých předpokladů, jež tu však jsou splněny)

$$dl = \frac{\partial l}{\partial t} dt + \frac{\partial l}{\partial u} du, \quad ds = \frac{ds}{dt} dt, \quad ds_1 = \frac{ds_1}{du} du.$$

Tu jest s_1 resp. s'_1 délka oblouku elipsy K_1 měřená od jistého bodu (ve směru rostoucího u) až k dotyčnému bodu M_1 tečny prvé resp. až k dotyčnému bodu M'_1 tečny druhé. Sčítáním posledních dvou rovnic máme

$$d(l+l') = d(s'_1 - s_1)$$

anebo integrací

$$l + l' = s'_1 - s + \text{konst.}; \ \overline{MM_1} + \overline{MM'_1} - \text{arc el. } M_1M'_1 = \text{konst.}$$

Rovnicí touto jest dokázána věta: *Vedeme-li z bodu M na dané elipse dvě tečné ku konfokální elipse, jest součet délek těch tečných zmenšený o délku oblouku elipsy konfokální položeného mezi dotyčnými body konstantní* (t. j. nezávislý na poloze bodu M na dané elipse). Při tom jest pod obloukem omezeným dotyčnými body vyrozumívati kratší z obou oblouků elipsy dotyčnými body omezených. Věta tato sluje *Gravesova* a obsažena jest jako dodatek v jeho překladě pojednání Chaslesových pojednávajících o kuželích a sférických kuželosečkách (z r. 1841).

Obdobnou větu odvodil *Mac Cullagh* pro hyperbolu a konfokální elipsu. Věty uvedené mnohdy mají též pojmenování *Chaslesovy* věty, který je nezávisle na svých předchůdcích objevil a uveřejnil (v r. 1843).

245. Vyjádřili jsme délku oblouku křivky spojité pomocí určitého integrálu za jistých předpokladů o funkcích $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$. Příslušnému oblouku patří však na základě dané definice určitá délka v případech mnohem obecnějších, ve kterých zmíněný právě integrál pozbývá významu.

Budiž tedy rovnice oblouku AB křivky spojité

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

při čemž, probíhá-li t spojitě interval (t_0, T), probíhá bod o souřadnicích x, y, z daných těmito rovnicemi spojitě oblouk AB.

Pak platí věta (*Jordanova*): *Nutná a postačující podmínka, aby oblouk AB dané křivky byl rektifikace schopný, jest, aby spojité funkce $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ byly v intervalu (t_0, T) funkce s variací konečnou.*

Nejprve jest patrno, že, mají-li součty

$$\mathfrak{s} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2 + (\chi(t_k) - \chi(t_{k-1}))^2}, \qquad t_n = T$$

limitu s pro ten případ, že $\lim (t_k - t_{k-1}) = 0$ a n roste nade všecky meze, všecka $\mathfrak{s}$ jsou menší než s (po případě i rovna s). Neboť, rozdělíme-li intervaly (t_{k-1}, t_k) novými body na intervaly menší a utvoříme-li příslušný součet $\mathfrak{s}'$, bude $\mathfrak{s}' \geqq \mathfrak{s}$ (podle věty odpovídající známé větě geometrické, že přímka spojující dva body jest kratší než lomená čára ty dva body spojující, viz též DP 187). Rozdělíme-li intervaly vedoucí k součtu $\mathfrak{s}'$ opětně novými body a utvoříme-li příslušný součet $\mathfrak{s}''$, bude opět $\mathfrak{s}'' \geqq \mathfrak{s}'$; atd. Řada čísel

$$\mathfrak{s}, \mathfrak{s}', \mathfrak{s}'', \ldots, \mathfrak{s}^{(i)}, \ldots$$

jest řada čísel rostoucích (anebo aspoň neklesajících) a má limitu s (podle předpokladu). Jsou tudíž všecka ta čísla menší než s (po případě mu rovna).

Zároveň však jest jasno, že podmínka větou uvedená jest nutná; neboť kdyby ku příkladu nebyla spojitá funkce $\varphi(t)$ funkcí s variací konečnou v intervalu (t_0, T), bylo by lze (podle definice funkcí s variací konečnou) ke každému číslu M libovolně velikému udati rozdělení intervalu (t_0, T) v intervaly (t_{k-1}, t_k) tak, že

$$\sum_{k=1}^{n} \mid \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) \mid > M, \qquad t_n = T.$$

Tím spíše by bylo pro ono rozdělení

$$\mathfrak{s} = \sum \sqrt{[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})]^2 + [\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})]^2 + [\chi(t_k) - \chi(t_{k-1})]^2} > M$$

a nemohly by (podle svrchu uvedené vlastnosti součtů $\mathfrak{s}$) součty $\mathfrak{s}$ míti limitu pro ten případ, že $\lim (t_k - t_{k-1}) = 0$.

Jsou-li však funkce $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ funkce s variací konečnou, lze udati jisté číslo V tak, že ať si zvolíme rozdělení intervalu (t_0, T) v intervaly (t_{k-1}, t_k) jakékoliv, jest vždy

$$\sum \{ \mid \varphi(t_{k-1}) - \varphi(t_k) \mid + \mid \psi(t_{k-1}) - \psi(t_k) \mid + \mid \chi(t_{k-1}) - \chi(t_k) \mid \} < V.$$

Tím spíše jest

$$\mathfrak{s} = \sum^{n} \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2 + \ldots} < V,$$

odkudž vyplývá, že souhrn čísel $\mathfrak{s}$ má jistou horní hranici; označme ji $\bar{\mathfrak{s}}$. Avšak postupem úplně stejným, jako jsme postupovali v obdobném případě při součtech S v odstavci 86, se dokáže, že k této horní hranici $\bar{\mathfrak{s}}$ konvergují součty $\mathfrak{s}$, když jenom $\mid t_k - t_{k-1} \mid$ konverguje k nule (pro $k = 1, 2, \ldots n$) a n roste při tom nade všecky meze. T. j. jinými slovy: V tom případě, že funkce $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ jsou funkce s variací konečnou, jest oblouk AB rektifikace schopný a pro jeho délku s máme vztah $s = \bar{\mathfrak{s}}$. Jest tedy podmínka větou Jordanovou pro spojité funkce $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ požadovaná postačitelna.

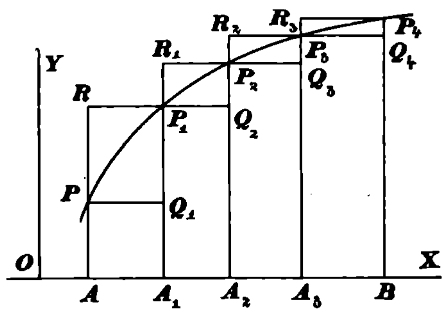
2. O POČÍTÁNÍ PLOCHY ROVINNÉ OMEZENÉ KŘIVOU ČAROU.

246. Velikost plochy vypočtená na základě definice integrální Cauchy-Riemannovy. Budiž $y = f(x)$ rovnice křivky probíhající nad osou X. Budiž pak $f(x)$ funkce spojitá v intervalu (a, b) a k vůli jednoduchosti s rostoucím x stoupající. Znázorněmě si geometricky součty S, s, kterých použito bylo při výkladu definice Cauchy-Riemannovy.

Součet

$$S = M_1(x_1 - a) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(b - x_{n-1})$$

jest dán plochou mnohoúhelníka $ARP_1R_1P_2 \ldots R_{n-1}P_nBA$ (viz obr. 14, na obrázku jest $n = 4$, $OA_k = x_k$, $M_k = A_kR_k$, $m_k = A_kQ_k$).



Obr. 14.

Obdobně jest součet

$$s = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(b - x_{n-1})$$

plochou mnohoúhelníka $APQ_1P_1Q_2P_2 \ldots P_{n-1}Q_nBA$. Připustíme-li tedy, že části roviny omezené křivkou $y = f(x)$, pořadnicemi AP, BP_n a osou X přísluší určitá velikost plošná $\mathbf{P}$ hovící dvěma základním vlastnostem (viz odstavec 55), jest ihned na základě druhé vlastnosti

$$s \leqq \mathbf{P} \leqq S,$$

ať jsou body $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ kterékoliv body intervalu (a, b) a v jakémkoliv počtu, t. j. jest nutně

$$\mathbf{P} = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx. \tag{I}$$

Dospíváme tudíž na základě druhé definice integrálu k témuž výsledku pro velikost plochy jako v odst. 55 na základě primitivních funkcí. O tom, kterým částem roviny přísluší vskutku určitá velikost plošná stanovená dvěma základními vlastnostmi v odstavci 55 uvedenými, provedeme teprve později příslušné šetření. Seznáme zejména, že v případě zde v úvahu vzatém, jakož i v případech odstavců následujících, částem rovinným určitá velikost plošná přináleží, takže, předpokládáme-li předem tento výsledek, číslo rovnicí (I) dané, jakož i obdobná čísla odstavců následujících, za velikosti plošné částí rovinných právě v úvahu vzatých jest pokládati.

PŘÍKLAD 1. Plocha omezená obloukem elipsy o rovnici

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

osou X a pořadnicemi o rovnicích $x = x_0$, $x = x_1$ $(x_0 < x_1)$ jest podle (I) dána výrazem

$$\int_{x_0}^{x_1} y\,dx = \frac{b}{a}\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left[ab \arcsin\frac{x}{a} + \frac{bx}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right]_{x_0}^{x_1}.$$

Volíme-li $x_0 = -a$, $x_1 = a$, dostaneme z předcházejícího výrazu plochu polo-viny elipsy, totiž

$$\tfrac{1}{2}\left[ab \arcsin\frac{x}{a} + \frac{bx}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right]_{-a}^{a} = \tfrac{1}{2}\pi ab.$$

PŘÍKLAD 2. Plocha omezená křivkou $y = Ax^{\alpha}$, pořadnicemi $x = 0$, $x = x_1 > 0$ a osou X jest dána výrazem platným při α větším než 0

$$\int_0^{x_1} y\,dx = A\int_0^{x_1} x^{\alpha}\,dx = \frac{A}{\alpha + 1}\,x_1^{\alpha+1} = \frac{x_1y_1}{\alpha + 1}.$$

Výsledek tento má jednoduchý geometrický vztah ku ploše pravoúhelníka o vrcholech $(0, 0)$ $(x_1, 0)$ (x_1, y_1) $(0, y_1)$, který se dá snadno rozšířiti i pro α záporné, avšak větší než -1. V tomto posledním případě běží o plochu, jež podél osy Y do nekonečna se rozprostírá.

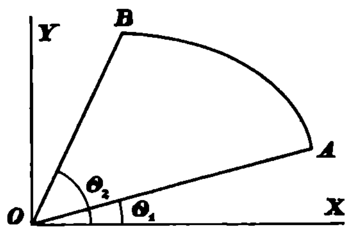
247. Podejme rozšíření formule (I). Budiž v rovině XY dána uzavřená křivka K obsažená mezi pořadnicemi $x = a$, $x = b$ a taková, že každá pořadnice mezi $x = a$, $x = b$ probíhající protíná K ve dvou bodech. Body společné křivce K a přímkám $x = a$, $x = b$ dělí křivku ve dvě části; v části „horní“ buď rovnice křivky $y = f_2(x)$, v části „dolní“ $y = f_1(x)$; $f_1(x)$, $f_2(x)$ buďtež spojité funkce. (Viz obr. 10, ve kterém však voleno poněkud jiné označení.) Plocha omezená uzavřenou křivkou K jest podle 2. základní vlastnosti odstavce 55 rovna rozdílu ploch omezených křivkou $y = f_2(x)$ resp. křivkou $y = f_1(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$, probíhá-li celá křivka K nad osou X; t. j. tato plocha jest podle formule (I)

$$P_K = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \tag{II}$$

Tento výsledek však platí i v tom případě, že křivka K probíhá z části anebo celá pod osou X, jak čtenář snadnou úvahou potvrdí. Užíváme-li označení daných zavedením křivkových integrálů, můžeme (II) též psáti ve tvaru

$$P_K = -\int_K y\, dx, \tag{II'}$$

kde integrace podle křivky K musí se prováděti ovšem ve směru kladném. Jestliže dána část roviny omezená křivkou K, jež každou pořadnici mezi přímkami $x = a$, $x = b$ položenou protíná v konečném sice počtu bodů, jenž však nabývá též hodnot větších než 2, můžeme nejprve vhodnými čarami pomocnými rozložiti onu část v části rovinné, jejichž ohraničení každá pořadnice protíná nejvýše ve dvou bodech; na části vzniklé užíti



Obr. 15.

formule (II') a čísla tak získaná sečísti; jelikož pak integrály křivkové podle čar pomocných vzaté vyskytují se v součtu dvakráte a to vždy brány ve směrech protivných, ruší se vzájemně integrály podle čar pomocných a redukuje se tudíž zmíněný součet na výraz daný ve (II'), který tedy *jest platný pro části rovinné* (konečné), *jejichž ohraničení K jest protínáno pořadnicemi v konečném počtu bodů* a kde zároveň jest v rovnicích jednotlivých oddílů křivky K, jež lze psáti ve tvaru $y = f_k(x)$, funkce $f_k(x)$ funkcí spojitou. Formule (II') ostatně i tenkráte podržuje platnost, jestliže ohraničení K části rovinné se skládá též z přímek rovnoběžných s osou Y (o rovnicích $x =$ konst.); viz odstavec 198 (IV_2).

248. Jiné výrazy pro velikost plošnou. Zaměníme-li v (II') roli obou proměnných (při čemž musíme ve (II') vedle záměny x s y zároveň změniti znaménko, jelikož poloha relativní kladné části osy X vzhledem ke kladné části osy Y jest táž jako kladné části osy Y vzhledem k záporné části osy X; zároveň pak jest třeba změniti předpoklady o křivce K, což zde dopodrobna k vůli stručnosti a se zřetelem k tomu, že vyslovení těch předpokladů neposkytuje potíže, opomíjím), obdržíme pro velikost části rovinné omezené křivkou K tento výsledek

$$P_K = \int_K x\,dy. \tag{III}$$

Z výrazů (II) a (III) následuje (sčítáním a dělením dvěma, za předpokladů nasnadě ležících)

$$P_K = \tfrac{1}{2}\int_K (x\,dy - y\,dx). \tag{IV}$$

Formule tato má četná použití a hodí se zejména ku počítání ploch t. zv. výseků, jejichž vrchol jest v počátku souřadnic. Výseky (viz obr. 15) jsou části roviny omezené obloukem křivky AB a paprsky OA, OB spojujícími koncové body oblouku s vrcholem výseku, při čemž se obyčejně předpokládá, že oba paprsky OA, OB protínají oblouk AB toliko v jednom bodě. Užijeme-li na výsek formulé (IV), dostaneme (křivka K omezující část rovinnou skládá se tu z oblouku AB a úseček OA, OB; přitom buď směr, který probíháme, jdeme-li na oblouku AB od A ku B, kladný)

$$\text{plocha výseku } OAB = \tfrac{1}{2}\int_{\overline{OA}} (x\,dy - y\,dx) + \tfrac{1}{2}\int_{\widehat{AB}} (x\,dy - y\,dx) + \tfrac{1}{2}\int_{\overline{BO}} (x\,dy - y\,dx).$$

Avšak první a třetí integrál pravé strany jsou rovny nule; neboť ku příkladu rovnice přímky $\overline{OA}$ jest $y = ax$ a tedy $x\,dy - y\,dx$ jest na $\overline{OA}$ stále rovno nule; tak jest

$$\text{plocha výseku } OAB = \tfrac{1}{2}\int_{\widehat{AB}} (x\,dy - y\,dx). \tag{IV'}$$

Je-li rovnice křivky pro oblouk AB dána vztahy $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ jsou funkce mající v intervalu (t_0, T) derivace a kde parametry t_0, T přísluší bodům A, B, lze poslední rovnici též psáti ve tvaru (zavedeme-li do integrálu za novou proměnnou integrační t)

$$\text{plocha výseku } OAB = \tfrac{1}{2}\int_{t_0}^{T} (\varphi(t)\,\psi'(t) - \varphi'(t)\,\psi(t))\,dt. \tag{IV''}$$

Z tohoto vztahu dostáváme snadno vyjádření plochy výseku v souřadnicích polárních, je-li pól ve vrcholu výseku. Označíme-li polární souřadnice r, Θ, jest za předpokladu, že souřadnice x, y bodu na oblouku AB jsou spojité funkce buď Θ anebo r mající derivace,

$$x = r\cos\Theta, \qquad y = r\sin\Theta,$$

$$dx = -r\sin\Theta\, d\Theta + dr\cos\Theta, \qquad dy = r\cos\Theta\, d\Theta + dr\sin\Theta,$$

$$x\,dy - y\,dx = r^2\, d\Theta$$

a

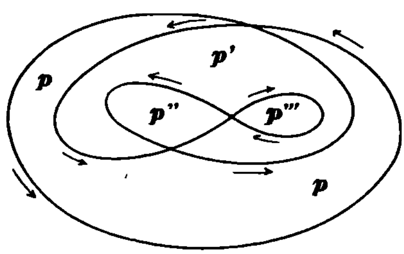
$$\text{plocha výseku } OAB = \tfrac{1}{2}\int_{\widehat{AB}} r^2\, d\Theta = \tfrac{1}{2}\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} r^2\, d\Theta; \tag{IV'''}$$

v posledním výraze značí Θ_1, Θ_2 úhly přímek OA, OB s osou X a předpokládáno, že r jest rovnicí křivky (pro oblouk AB) stanoveno jednoznačně jakožto funkce Θ; mimo to jest $\Theta_2 > \Theta_1$.

Z formule (IV) plyne ostatně pro libovolnou uzavřenou křivku K v souřadnicích polárních

$$P_K = \tfrac{1}{2}\int_K r^2\, d\Theta, \tag{IV''''}$$

kteroužto formuli lze odvoditi snadno přímo postupem užitým v odstavci 246 za pouhého předpokladu, že průvodiče protínají



Obr. 16.

křivku K v konečném počtu bodů a že v jednotlivých oddílech křivky K má rovnice její tvar $r = \varphi_k(\Theta)$, kde $\varphi_k(\Theta)$ jest funkce spojitá proměnné Θ.

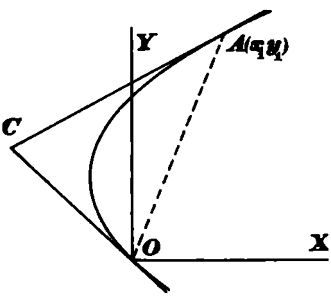
249. *POZNÁMKA.* V předcházejícím stanoven za jistých předpokladů geometrický význam integrálů

$$-\int_K y\,dx, \qquad \int_K x\,dy, \qquad \tfrac{1}{2}\int_K (x\,dy - y\,dx), \qquad \tfrac{1}{2}\int_K r^2\,d\Theta \tag{5}$$

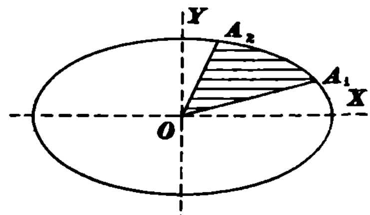
vzhledem k uzavřené spojité křivce K, jež sama sebe neprotíná. Jest snadno v každém jednotlivém případě udati význam těch integrálů i tenkráte, běží-li o křivku K uzavřenou, spojitou a v konečném počtu bodů se protínající; neboť v každém takovém případě lze příslušný integrál rozložiti na integrály v konečném počtu podle křivek se neprotínajících. Tak ku příkladu integrály (5) podle křivky z obr. 16 ve směru šipek se rozpadají v příslušné integrály podle čtyř různých křivek se neprotínajících (vzatých vesměs ve směru kladném). Rovná se tedy integrál podle celé křivky

$$(p+p'+p''+p''')+(p'+p''+p''')+p''-p'''=p+2p'+3p''+p''',$$

při čemž p, p', p'', p''' jsou plochy v obrazci vyznačené částí rovinných vymezených danou křivkou.



Obr. 17.



Obr. 18.

250. Příklady pro počítání velikosti plošné:

PŘÍKLAD 1. *Úsek parabolický.* Parabola měj rovnici

$$y^2-2yy_0=2px;$$

vypočteme plochu úseku omezeného tětivou OA a obloukem OA, kde O jest počátek, A jiný bod paraboly o souřadnicích (x_1, y_1). Užijeme formule (IV*,*) při čemž za integrační proměnnou volíme y. Dostaneme při $y_1>0$

$$x=\frac{y^2-2yy_0}{2p}, \qquad dx=\frac{y-y_0}{p}\,dy.$$

$$\text{Úsek}=\tfrac{1}{2}\int_{y_1}^{0}\left(\frac{y^2-2yy_0}{2p}\,dy-y\,\frac{y-y_0}{p}\,dy\right)=-\frac{1}{4p}\int_{y_1}^{0}y^2\,dy=\frac{y_1^3}{12p}\cdot$$

Plocha trojúhelníka OAC, kde CA jest tečna v bodě A, CO pak tečna v O, jest $y_1^3/8p$; jest tedy plocha úseku rovna dvěma třetinám plochy trojúhelnka OAC. (Viz obr. 17.)

*) Úsek tu možno pokládati za plochu omezenou obloukem paraboly OA, paprskem OA a paprskem OC dotýkajícím se v O paraboly, tedy za výsek. Paprsek OC ovšem jest hranicí úseku toliko v bodě O.

PŘÍKLAD 2. *Výsek elipsy.* Rovnici její předpokládáme ve tvaru $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ a použijeme opět formule (IV′), za proměnnou integrační volíce x. Dostáváme pro prvý a druhý kvadrant

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\qquad dy=-\frac{b}{a}\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Jsou-li tedy (x_1, y_1), (x_2, y_2) souřadnice dvou bodů A_1, A_2 položených na oblouku elipsy v prvých dvou kvadrantech (viz obr. 18), máme

$$\text{výsek elipsy } OA_1A_2=\tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}(x\,dy-y\,dx)=$$

$$=\tfrac{1}{2}\frac{b}{a}\int_{x_1}^{x_2}\left[-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{a^2-x^2}\right]dx=\tfrac{1}{2}ab\int_{x_2}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$=\tfrac{1}{2}ab\left(\arcsin\frac{x_1}{a}-\arcsin\frac{x_2}{a}\right).$$

Zvolíme-li si za A_1, A_2 krajní body velké osy, t. j. klademe-li ve výsledku $x_1=a$, $x_2=-a$, obdržíme pro plochu polovičky elipsy číslo $\tfrac{1}{2}\pi ab$ a tedy plocha celé elipsy jest

$$\text{plocha elipsy}=\pi ab.$$

PŘÍKLAD 3. *Plocha středového výseku hyperboly* o rovnici

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

omezená obloukem A_1A_2, kde A_1, A_2 jsou body prvého kvadrantu, jest podobně

$$\text{výsek hyperboly } OA_1A_2=\tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}(x\,dy-y\,dx)=\tfrac{1}{2}ab\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=$$

$$=\tfrac{1}{2}ab\left[\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right]_{x_1}^{x_2}=$$

$$=\tfrac{1}{2}ab\left[\log\left(\frac{x_2}{a}+\frac{y_2}{b}\right)-\log\left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}\right)\right]=\tfrac{1}{2}ab\log\frac{d_2}{d_1};$$

tu značí d_2, d_1 vzdálenosti bodů (x_2, y_2), (x_1, y_1) od asymptoty hyperboly probíhající druhým kvadrantem.

PŘÍKLAD 4. Výpočet výseku omezeného obloukem *křivky racionální* lze pohodlně počítati podle vzorce (IV″). V tomto případě jest rovnice křivky dána vztahy

$$x=\frac{P(t)}{R(t)},\qquad y=\frac{Q(t)}{R(t)},\tag{a}$$

kde $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ jsou polynomy jistého stupně v parametru t. Dosadíme-li tyto výrazy do (IV″), máme ihned

$$\text{plocha výseku } OAB=\tfrac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\frac{PQ'-P'Q}{R^2}\,dt,\tag{b}$$

při čemž označení parametrů t_0, T jest tak voleno, že, mění-li se t od t_0 k T, bod příslušný křivky se pošinuje na křivce od A ku B ve směru kladném.*)

*) Jest také takový případ možný, že má-li bod příslušný k t na základě rovnic (a) opsati náležitý oblouk křivky, t se musí měniti od t_0 do $+\infty$, potom od $-\infty$ k T. Pak vlastně integrál v (b) se rozpadá ve dva s mezemi (t_0, ∞) a $(-\infty, T)$. Podobně v obdobných případech.

Tak pro *lemniskatu*, píšeme-li její rovnice ve tvaru (odstavec 32)

$$x = a^2\lambda \frac{\lambda^2 + a^2}{\lambda^4 + a^4}, \qquad y = a^2\lambda \frac{\lambda^2 - a^2}{\lambda^4 + a^4},$$

dostaneme

$$\text{výsek lemniskaty} = \tfrac{1}{2}a^4 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{4\lambda^3 a^2}{(\lambda^4 + a^4)^2}\, d\lambda = -\tfrac{1}{2}a^6 \left[\frac{1}{\lambda^4 + a^4}\right]_{\lambda_1}^{\lambda_2}. \qquad (c)$$

Zvolíme-li $\lambda_1 = 0$, dostaneme bod $(0, 0)$; probíhá-li λ od 0 do ∞, probíhá, jak z rovnice patrno, příslušný bod na lemniskatě celou pravou její polovici ve směru kladném a rovnice (c) dává v mezích $(0, \lambda)$ pro λ kladné úsek lemniskaty omezený tětivou OM a dolním obloukem pravé polovice lemniskaty (viz obr. 19).

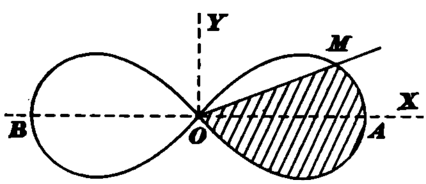
Obdržíme

$$\text{úsek } OAM = \tfrac{1}{2}a^2 - \frac{a^6}{2(\lambda^4 + a^4)};$$

aneb, dosadíme-li za $\lambda^2 = a^2(x + y)/(x - y)$,

$$\text{úsek } OAM = \tfrac{1}{2}a^2 - \frac{a^2(x - y)^2}{2 \cdot 2(x^2 + y^2)} = \tfrac{1}{4}a^2 \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2}.$$

Pro plochu celé poloviny lemniskaty dostaneme číslo $\tfrac{1}{2}a^2$.



Obr. 19.

PŘÍKLAD 5. Počítejme ještě používajíce souřadnic polárních plochu *Cassiniovy křivky*, jež jest geometrickým místem bodů M, pro něž součin vzdáleností ode dvou pevných bodů F_1, F_2 jest konstantní a rovný a^2. Zvolíme-li si za osu polární spojnici bodů F_1, F_2, pól O pak ve středu úsečky $\overline{F_1F_2} = 2e$, máme snadným počtem jakožto rovnici té křivky

$$\varrho^2 = e^2 \cos 2\Theta \pm \sqrt{a^4 - e^4 \sin^2 2\Theta}. \qquad (d)$$

Jestliže $a^2 = e^2$, křivka redukuje se na lemniskatu. Je-li $a^2 > e^2$, jest také $a^4 - e^4 \sin^2 2\Theta > (e^2 \cos 2\Theta)^2$ a rovnice (d) toliko při kladném znaménku odmocniny dává kladné hodnoty pro ϱ^2 (a tedy reálné body). Křivka se tu skládá toliko z jednoho reálného oválu; ke každému Θ jest přiřazeno jedno a jen jedno kladné ϱ. Jestliže konečně $a^2 < e^2$, musí, má-li býti odmocnina reálná, $\sin^2 2\Theta < a^4/e^4$, t. j.

$$-\frac{a^2}{e^2} \leqq \sin 2\Theta \leqq \frac{a^2}{e^2},$$

čímž jest omezen úhel Θ na jisté intervaly, a bude probíhati (máme-li obdržeti všecky body křivky) buď interval $(-\vartheta_0, \vartheta_0)$ aneb interval $(\pi - \vartheta_0, \pi + \vartheta_0)$, při čemž jest ϑ_0 dáno jakož úhel ležící v intervalu $(0, \tfrac{1}{4}\pi)$ rovnicí $\sin 2\vartheta_0 = a^2/e^2$.

Poněvadž při obou znaménkách v (*d*) dostáváme reálné hodnoty ϱ, vidíme, že křivka pro $a^2 < e^2$ skládá se ze dvou uzavřených křivek (symetricky položených vzhledem k ose Y); první dostaneme, dáme-li Θ probíhati interval $(-\vartheta_0, \vartheta_0)$, druhou interval $(\pi - \vartheta_0, \pi + \vartheta_0)$.

a) Buď $a^2 > e^2$. Pak výsek omezený Cassiniovou křivkou bude podle (IV‴) dán výrazem

$$V = \tfrac{1}{4}\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} (e^2 \cos 2\Theta + \sqrt{a^4 - e^4 \sin^2 2\Theta})\, d\Theta =$$

$$= \tfrac{1}{8} e^2 (\sin 2\Theta_2 - \sin 2\Theta_1) + \tfrac{1}{8} a^2 \int_{2\Theta_1}^{2\Theta_2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi;$$

při tom jsme položili

$$k^2 = \frac{e^4}{a^4}, \qquad 2\Theta = \varphi.$$

Plocha výseku omezeného Cassiniovou křivkou vyjádřena tu jest integrálem eliptickým druhého druhu. Plochu omezenou celým oválem obdržíme, klademe-li ku příkladu $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2 = 2\pi$; tím dostaneme

$$\text{plocha Cassiniova oválu} = \tfrac{1}{8} a^2 \int_0^{4\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi = 2a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

b) $a^2 < e^2$. Tu položíme

$$k^2 = \frac{a^4}{e^4}, \qquad \sin 2\Theta = k \sin \varphi,$$

tedy

$$d\Theta = \tfrac{1}{2} k \frac{\cos \varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

a pro plošný obsah výseku dostáváme výraz

$$V = \tfrac{1}{8} e^2 (\sin 2\Theta_2 - \sin 2\Theta_1) \pm \tfrac{1}{8} a^2 k \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos^2 \varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

kterýžto snadno lze redukovati na integrály eliptické prvého a druhého druhu v normálním tvaru Legendreově. Specielně pro plošný obsah jednoho oválu máme

$$\text{plocha jednoho oválu Cassiniova} = \tfrac{1}{2} a^2 k \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2 \varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = a^2 k \int^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}\, d\varphi.$$

251. PŘÍKLAD 6. Buďtež K_1, K_2 dvě uzavřené, spojité čáry. Souřadnice bodů na prvé křivce značme (x_1, y_1), na druhé (x_2, y_2); rovnice křivek předpokládejme ve tvaru $x_1 = \varphi_1(t_1)$, $y_1 = \psi_1(t_1)$; resp. $x_2 = \varphi_2(t_2)$, $y_2 = \psi_2(t_2)$. Při tom jsou t_1, t_2 proměnlivé parametry a $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ funkce spojité v intervalech přicházejících v úvahu. Budiž dále $\overline{M_1 M_2}$ úsečka nepromĕnné délky l, jež se pohybuje tak, že jeden její konec M_1 jest stále na K_1, druhý pak na K_2. Vezmeme v úvahu pak takový pohyb úsečky $\overline{M_1 M_2}$, při kterém $\overline{M_1 M_2}$ má počáteční a konečnou polohu tutéž. Při takovémto pohybu opisují body úsečky $\overline{M_1 M_2}$ (po případě na jejím prodloužení) patrně uzavřené křivky. Jejich plochu (ve smyslu odstavce 227) dovedeme udati, víme-li, kolikráte (a v jakém směru)*) proběhl v celku bod M_1 křivku K_1, bod M_2 křivku K_2 a kolikráte se celkem otočila při svém pohybu úsečka $\overline{M_1M_2}$.

Budiž bod M bod na úsečce $\overline{M_1M_2}$, který dělí úsečku v poměru $\lambda_2 : \lambda_1$, při čemž $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Pak jsou souřadnice (ξ, η) toho bodu dány rovnicemi

$$\xi = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \qquad \eta = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

a plocha opsaná tím bodem při svrchu vytčeném pohybu, jejž označíme Π, jest dána integrálem

$$-\int_{(\Pi)} \eta\, d\xi = -\lambda_1^2 \int_{(\Pi)} y_1\, dx_1 - \lambda_1\lambda_2 \int_{(\Pi)} (y_1\, dx_2 + y_2\, dx_1) - \lambda_2^2 \int_{(\Pi)} y_2\, dx_2;$$

čtyři integrály křivkové pravé strany jest tu bráti podle oblouků při pohybu Π opisovaných body resp. (x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_2). Toliko prvý a čtvrtý z těchto bodů pohybují se na daných křivkách Avšak podle předpokladů jest úsečka M_1M_2 stále téže délky a můžeme tedy klásti

$$x_1 - x_2 = l \cos \varphi, \qquad y_1 - y_2 = l \sin \varphi,$$

při čemž jest φ úhel úsečky $\overline{M_2M_1}$ s osou X spojitě při pohybu úsečky $\overline{M_2M_1}$ se měnící. Tak máme

$$-\int_{(\Pi)} (y_1 - y_2)\, d(x_1 - x_2) = l^2 \int_{(\Pi)} \sin^2 \varphi\, d\varphi = l^2 \int_{(\Pi)} \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)\, d\varphi.$$

Zvětší-li se při pohybu Π úhel φ o $2\beta\pi$ (β jest pak počet otoček úsečky $\overline{M_1M_2}$), jest poslední integrál rovný číslu $\beta\pi l^2$ a lze předcházející rovnici též psáti ve tvaru

$$-\int_{(\Pi)} y_1\, dx_1 + \int_{(\Pi)} (y_1\, dx_2 + y_2\, dx_1) - \int_{(\Pi)} y_2\, dx_2 = \beta\pi l^2. \qquad (p)$$

Mimo to jest, značí-li α_1 (resp. α_2), kolikrát M_1 (resp. M_2) proběhl při pohybu Π křivku K_1 (resp. K_2) a značí-li dále P_1 (resp. P_2) plochy křivek K_1 (resp. K_2),

$$-\int_{(\Pi)} y_1\, dx_1 = \alpha_1 P_1, \qquad -\int_{(\Pi)} y_2\, dx_2 = \alpha_2 P_2. \qquad (q)$$

I jest tedy celkem, dosadíme-li podle (p) a (q),

$$-\int_{(\Pi)} \eta\, d\xi = (\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2)\alpha_1 P_1 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)\alpha_2 P_2 - \beta\lambda_1\lambda_2\pi l^2$$

aneb

$$-\int_{(\Pi)} \eta\, d\xi = \alpha_1\lambda_1 P_1 + \alpha_2\lambda_2 P_2 - \beta\pi\lambda_1\lambda_2 l^2,$$

čímž jest hledaná plocha vypočtena.

*) Bod M_1 proběhne při svém pohybu pevným bodem M'_1 na křivce K_1 p'-kráte ve směru kladném, n'-kráte ve směru záporném. Pak jest rozdíl $p' - n'$ pro všecky body křivky K_1 týž a udává nám právě, kolikráte proběhl v celku bod M_1 křivku K ve směru kladném. Číslo $p' - n'$ může býti ovšem též záporné

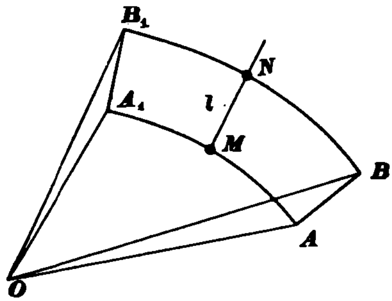
Obdobně se to má při čítání celkového počtu otoček úsečky $\overline{M_1M_2}$; otočení ve směru kladném při tom čítání se ruší se stejně velikým otočením ve směru záporném.

Redukují-li se křivky K_1 a K_2 na jednu křivku K o ploše P, pak jest $\overline{M_1 M_2}$ tětiva té křivky; je-li pak možný pohyb tetivy té po obvodě křivky takový, aby zároveň bylo ke konci pohybu $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = 1$, jest

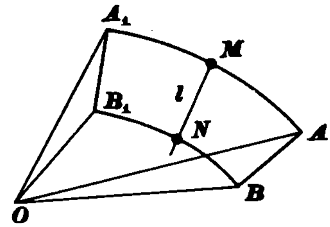
$$-\int \eta \, d\xi = P - \pi l_1 l_2; \qquad \lambda_1 l = l_1, \qquad \lambda_2 l = l_2, \qquad l_1 + l_2 = l.$$

Jest tedy plocha jedním bodem tětivy opsaná o $\pi l_1 l_2$ menší než plocha původní křivky (věta Holditchova).

252. PŘÍKLAD 7. Budiž dána křivka K rektifikace schopná, takže rovnici její lze dáti tvar $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, kde s značí délku oblouku té



Obr. 20a.



Obr. 20b.

křivky od pevného bodu A až k bodu M o souřadnicích (x, y). Mějtež dále $\varphi(s)$ a $\psi(s)$ první a k vůli zjednodušení následujících vývodů i druhé derivace podle s, jež mimo to buďtež spojité funkce s.

Pak jest nejprve

$$ds^2 = [\varphi'(s)^2 + \psi'(s)^2] \, ds^2,$$

t. j.

$$\varphi'(s)^2 + \psi'(s)^2 = 1. \tag{ϱ}$$

Kosiny úhlů α, β, jež normála svírá s osami X, Y, jsou úměrny číslům $\psi'(s)$, $-\varphi'(s)$. Stanovíme-li nadto, že kladný směr normály má tutéž polohu relativní ke směru tečné shodujícímu se v dotyčném bodě se směrem rostoucího s, jako má směr osy X ke směru osy Y, můžeme se zřetelem k (ϱ) psáti rovnosti

$$\cos \alpha = \psi'(s), \qquad \cos \beta = -\varphi'(s).$$

Nanesme na normále od bodu křivky M o souřadnicích (x, y) délku l; obdržíme bod N, jehož souřadnice (ξ, η) jsou dány rovnicemi

$$\begin{aligned} \xi &= x + \lambda l \cos \alpha = \varphi(s) + \lambda l \psi'(s), \\ \eta &= y + \lambda l \cos \beta = \psi(s) - \lambda l \varphi'(s), \end{aligned} \tag{σ}$$

při čemž $\lambda = +1$ anebo $\lambda = -1$ podle toho, byla-li délka l nanesena na normálu ve směru kladném či záporném.

Proveďme tu konstrukci pro všecky body oblouku AA_1 křivky K; obdržíme tak oblouk BB_1 křivky $\mathfrak{K}$ takové, že každému bodu M oblouku AA_1 jest přiřazen jeden bod N oblouku BB_1 (viz obr. 20a, 20b). Úkolem naším jest nejprve stanoviti plochu výseku OBB_1 omezeného obloukem BB_1 křivky $\mathfrak{K}$

a paprsky OB, OB_1 vycházejícími z počátku souřadnic. Předpokládati budeme při tom, abychom se vyhnuli zbytečným komplikacím, že, probíháme-li oblouk AA_1 od A k A_1, probíháme jej ve směru rostoucího s, a zároveň, že jest to směr kladný při vymezení výseče OAA_1. Délka l budiž dosti malá, aby obdobnou vlastnost měl směr BB_1 (na oblouku omezujícím výseč OBB_1).

Jest pak pro plochu výseče OBB_1

$$V(OBB_1) = \frac{1}{2}\int_{\widehat{BB_1}} (\xi\, d\eta - \eta\, d\xi),$$

aneb dosadíme-li podle (σ), při čemž oblouk AA_1 dané křivky K značíme s_1,

$$V(OBB_1) = \frac{1}{2}\int_0^{s_1} [(\varphi(s) + \lambda l\psi'(s))(\psi'(s) - \lambda l\varphi''(s)) - (\psi(s) - \lambda l\varphi'(s))(\varphi'(s) + \lambda l\psi''(s))]\, ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{s_1} (\varphi(s)\,\psi'(s) - \psi(s)\,\varphi'(s))\, ds - \frac{1}{2}\lambda l \int_0^{s_1} (\varphi(s)\,\varphi''(s) + \psi(s)\,\psi''(s) - \varphi'^2(s) - \psi'^2(s))\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} l^2 \int_0^{s_1} (\psi''(s)\,\varphi'(s) - \varphi''(s)\,\psi'(s))\, ds.$$

První z členů posledního výrazu jest plocha výseku OAA_1. Pro druhý člen máme pak snadným počtem a použitím (ϱ)

$$-\frac{1}{2}\lambda l \int_0^{s_1} (\varphi\varphi'' + \psi\psi'' - \varphi'^2 - \psi'^2)\, ds = -\frac{1}{2}\lambda l \int_0^{s_1} (\varphi\varphi' + \psi\psi')'\, ds + \frac{1}{2}\lambda l \int_0^{s_1} 2ds =$$

$$= -\frac{1}{2}\lambda l\, [\varphi(s)\,\varphi'(s) + \psi(s)\,\psi'(s)]_0^{s_1} + \lambda l s_1,$$

což jest rovno, značíme-li souřadnice bodů A resp. B (x_0, y_0) resp. (x_1, y_1), úhly pak normál v těch bodech (α_0, β_0) resp. (α_1, β_1), výrazu

$$\frac{1}{2}\lambda l\, (x_1 \cos\beta_1 - y_1 \cos\alpha_1) - \frac{1}{2}\lambda l\, (x_0 \cos\beta_0 - y_0 \cos\beta_0) + \lambda l s_1 =$$

$$= OA_1B_1 - OAB + \lambda l s_1.$$

Při tom jest OAB plocha trojúhelníka OAB vzatá kladně, po případě záporně podle toho, zda body O, A, B na obvodě trojúhelníka následují po sobě ve směru kladném či záporném.

Pro třetí člen hořeního výrazu následuje konečně z (ϱ)

$$\frac{1}{2} l^2 \int_0^{s_1} (\psi''\varphi' - \varphi''\psi')\, ds =$$

$$= \frac{1}{2} l^2 \int_0^{s_1} \frac{\psi''\varphi' - \varphi''\psi'}{\varphi'^2 + \psi'^2}\, ds = \frac{1}{2} l^2 \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{\varphi'(s)}{-\psi'(s)}\right]_0^{s_1} = \frac{1}{2} l^2 \varphi_1,$$

kde φ_1 jest úhel, jejž svírá normála v bodě B s normálou v bodě A. Výsledek tento sice jest odvozen jenom pro interval $(0, s_1)$, uvnitř něhož $\psi'(s)$ nestává se nulou, avšak bez potíží rozšiřuje se pro jakýkoliv interval (viz obdobnou úvahu v příkladě 7, str. 164), stanovíme-li jenom, že φ_1 jest úhel, jenž spojitě přechází v nulu, když s_1 blíží se k nule.

Tak máme

$$V(OBB_1) = V(OAA_1) + OA_1B_1 - OAB + \lambda l s_1 + \frac{1}{2} l^2 \varphi_1. \qquad (\upsilon)$$

Avšak (viz obr.)

$$V(OBB_1) - V(OAA_1) - OA_1B_1 + OAB = ABB_1A_1, \qquad (\zeta)$$

při čemž jest ABB_1A_1 plocha omezená úsečkami AB, B_1A_1 a oblouky A_1A, BB_1 (vzata kladně resp. záporně podle toho, v jakém směru postupují body A, B, B_1, A_1 na obvodu té plochy). Odtud z (υ) a (ζ) pak následuje jednoduchý výsledek

$$ABB_1A_1 = \lambda l s_1 + \tfrac{1}{2} l^2 \varphi_1. \qquad (\eta)$$

Křivka $\mathfrak{L}$ sluje *paralelní křivka* ke K. Patrně jsou vždy k dané křivce $\mathfrak{L}$ při dané vzdálenosti l dvě paralelní křivky ($\lambda = \pm 1$). Podle výsledku odvozeného jest *plocha omezená dvěma normálami křivky K a příslušnými oblouky obou paralelních křivek sestrojených ve vzdálenosti l od K (při dosti malém l) rovna $2ls$.*

Z věty, že křivka $\mathfrak{L}_1$ paralelní ke křivce $\mathfrak{L}$, jež jest paralelní ke K, jest křivkou paralelní ke K, a z rovnice (η) jakož i z dvou rovnic obdobně jako (η) utvořených, avšak pro dvojice křivek ($\mathfrak{L}_1, K$), ($\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}$), následuje snadno výraz pro délku oblouku křivky paralelní. Jest

$$\text{arc}\, BB_1 = s_1 + \lambda l \varphi_1.$$

253. Vyšetřování křivek, jimž přísluší velikost plošná. Abychom podali vyšetření křivek uzavřených, jimž velikost plošná přísluší, mohli bychom vycházeti od křivkových integrálů (II'), (III), (IV) a zkoumati, zda těmto křivkovým integrálům přísluší vlastnosti velikost plošnou definující (odstavec 55). Bude však účelnější a jednodušší, zavedeme-li místo čísel (II'), (III), (IV) čísla poněkud obecnější. Za tím účelem se budeme zabývati nejprve plochou mnohoúhelníka rovinného a jejím vyjádřením analytickým.

Jsou-li $0, 1, 2, 3, 4, 5$ body v rovině a zároveň vrcholy šestiúhelníka tak položené, že lomená čára uzavřená 0123450 sama sebe neprotíná, znamenati bude v následujícím 012345 plochu toho šestiúhelníka branou kladně resp. záporně podle toho, zda směr lomené čáry $012\ldots$ na obvodě šestiúhelníka jest kladný či záporný, a podobně pro každý mnohoúhelník. Na základě tohoto označení plyne ihned vztah

$$012345 = O01 + O12 + O23 + O34 + O45 + O50,$$

kde O jest počátek souřadnic pravoúhlých o osách XY a kterýmžto vztahem jest vyjádřena plocha šestiúhelníku součtem ploch trojúhelníků (zčásti kladně, zčásti záporně braných).

Jsou-li $0', 1', 2', \ldots$ průměty bodů $0, 1, 2, \ldots$ na osu X, jest též

$$012345 = 011'0' + 122'1' + 233'2' + 344'3' + 455'4' + 500'5',$$

čímž podáno vyjádření plochy mnohoúhelníka součtem ploch lichoběžníků (násobených ± 1).

Obdobný výraz bychom mohli napsati, kdybychom vycházeli od průmětů bodů *0*, *1*, *2*,... na osu Y.

Jest však (jak snadno čtenář dokáže), jsou-li (x_k, y_k) souřadnice bodu k,

$$\mathit{001} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}(x_1 + x_0)(y_1 - y_0) - \tfrac{1}{2}(y_1 + y_0)(x_1 - x_0)),$$
$$\mathit{011'0'} = -\tfrac{1}{2}(y_1 + y_0)(x_1 - x_0).$$

Tak obdržíme pro plochu n-úhelníka, jehož obvod sám sebe neprotíná, zavedeme-li ještě tyto zkratky

$$x_n = x_0,\ y_n = y_0;\ \tfrac{1}{2}(x_k + x_{k-1}) = \xi_k,\ \tfrac{1}{2}(y_k + y_{k-1}) = \eta_k;$$
$$x_k - x_{k-1} = \Delta x_k,\quad y_k - y_{k-1} = \Delta y_k,$$
$$\mathit{012}\ldots\overline{n-1} = \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k \Delta y_k - \eta_k \Delta x_k) = -\sum_{k=1}^{n}\eta_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\xi_k \Delta y_k.$$

Výsledek tento zůstane v platnosti i tenkráte, když lomená čára spojující po řadě body *0*, *1*, *2*, ..., $n - 1$, *0* sama sebe protíná; pak ovšem $\mathit{012}\ldots\overline{n-1}$ není plochou n-úhelníka v obyčejném slova smyslu, nýbrž jest to součet ploch mnohoúhelníků omezených přímkami $\overline{01}$, $\overline{12}$, $\overline{23}$,... a násobených vhodnými celistvými koeficienty. Viz obdobnou úvahu v odstavci 249. Tak ku příkladu *0123*, protíná-li lomená čára *01230* sama sebe, jest součtem ploch dvou trojúhelníků, z nichž jedna jest násobena $+1$, druhá -1.

254. Vezmeme nyní v úvahu křivku K rovinnou, uzavřenou, spojitou a se neprotínající (viz odstavec 203), na níž zvolíme si n bodů *0*, *1*, *2*, ..., $n - 1$, při čemž označení tak volíme, aby body *0*, *1*, *2*, ..., $n - 1$, *0* na obvodě oboru konečného křivkou K omezeného po řadě za sebou následovaly vzhledem k vnitřku křivky ve směru kladném. Tu je-li n dosti veliké, lze vhodnou volbou bodů těch docíliti (se zřetelem k tomu, že běží o křivku spojitou), aby vzdálenost dvou kterýchkoliv bodů položených na každém oblouku křivky K spojujícím dva po sobě následující body (z bodů *0*, *1*, *2*, ..., $n - 1$, *0*) byla vesměs menší než δ. Jest pak nasnadě k stanovení velikosti plošné křivky K vyšetřovati limity

$$\lim \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k \Delta y_k - \eta_k \Delta x_k),\qquad -\lim \sum_{k=1}^{n}\eta_k \Delta x_k,\qquad \lim \sum_{k=1}^{n}\xi_k \Delta y_k \tag{1}$$

pro ten případ, že $\lim n = \infty$ a zároveň $\lim \delta = 0$. Neboť jednak mají tyto limity vzhledem ku předcházejícímu odstavci jednoduchý geometrický význam, jednak limity ty, mají-li křivkové integrály ve (II'), (III), (IV) odstavce 247, 248 význam, jsou dány právě těmito křivkovými integrály (podle významu čísla δ jsou všecka Δx_k, Δy_k co do absolutní hodnoty menší než δ) a tudíž se rovnají v tomto případě číslům, jimž jedině velikost plošná křivky K může býti rovna. Tak ku příkladu limita na druhém místě v (1) uvedená jest aritmetický střed limit

$$-\lim\sum_k y_k\,\Delta x_k, \qquad -\lim\sum_k y_{k-1}\,\Delta x_k,$$

kteréžto limity podle definice (IV) v odstavci 198 jsou právě rovny křivkovému integrálu ve (II′) odstavce 247, jestliže tento integrál existuje. Avšak nemůžeme obecně tvrditi, že křivkové integrály, o něž jde, existují současně s limitami (1), a následkem toho pro označení limit (1) volíme značky poněkud odchylné od značek pro křivkové integrály. Označíme totiž limity (1) po řadě následovně

$$\tfrac{1}{2}\int\limits_K^{\bullet}(x\,dy - y\,dx,) \qquad -\int\limits_K^{\bullet} y\,dx, \qquad \int\limits_K^{\bullet} x\,dy. \tag{2}$$

Nejprve budeme se zabývati limitami obdobně utvořenými, avšak vztahujícími se místo na celou uzavřenou křivku toliko na oblouk AB jisté křivky K probíhaný v určitém směru (od A ku B). Označení těchto limit budiž dáno výrazy (2) s tím dodatkem, že v dolním indexu při znaménku integrálním vytkneme ještě v závorce oblouk AB, podobně jako jsme to činili při integrálech křivkových s nimiž limity (2) jsou v úzkém vztahu.

255. Dokážeme si, že, existuje-li jedna z limit (2) utvořených vzhledem k oblouku AB křivky K, též ostatní dvě existují. Rozdělme k tomu cíli oblouk AB na n částí body $0, 1, 2, \ldots, n$ tak, že A resp. B shodují se s 0 resp. s n a že n jest již tak veliké a body $0, 1, 2, \ldots, n$ tak voleny, aby vzdálenost dvou kterýchkoli bodů na jednotlivých částech oblouku AB vzniklých dělením byla menší než δ. Vezměme v úvahu nejprve limitu

$$\lim\sum_{k=1}^{n}(\eta_k\,\Delta x_k + \xi_k\,\Delta y_k) \quad \text{pro } \lim n = \infty, \quad \lim \delta = 0.$$

Avšak podle významu čísel ξ_k, η_k jest $\eta_k \Delta x_k + \xi_k \Delta y_k = x_k y_k - x_{k-1} y_{k-1}$. Dosadíme-li podle tohoto vztahu do předcházejícího výrazu, dostaneme (provedeme-li sčítání a značíme-li souřadnice bodu A resp. B x_A, y_A resp. x_B, y_B)

$$\lim\sum_{k=1}^{n}(\eta_k\,\Delta x_k + \xi_k\,\Delta y_k) = \lim(x_n y_n - x_0 y_0) = x_B y_B - x_A y_A.$$

Existuje tedy limita (při čemž volíme označení obdobně jako v (2))

$$\int\limits_{K(AB)}^{*}(y\,dx + x\,dy) = x_B y_B - x_A y_A \tag{3}$$

vždy (při každé křivce) a odtud následuje ihned svrchu uvedené tvrzení. Neboť má-li ku příkladu limita $\int\limits_{K(AB)}^{*} y\,dx$ význam, má jej i

$$\int\limits_{K(AB)}^{*}(y\,dx + x\,dy) - \int\limits_{K(AB)}^{*} y\,dx = \int\limits_{K(AB)}^{*} x\,dy$$

atd.

Způsobem stejným jako výpočet limity (3) plyne snadno vyjádření limit

$$\int\limits_{K(AB)}^{*} x\,dx = \tfrac{1}{2}(x_B{}^2 - x_A{}^2) \qquad \int\limits_{K(AB)}^{*} y\,dy = \tfrac{1}{2}(y_B{}^2 - y_A{}^2)$$

platné pro oblouk AB každé křivky K.

256. Vyšetřujme dále, jak se limity (2) utvořené vzhledem k oblouku AB transformují při obecné transformaci souřadnic pravoúhlých. Nejobecnější taková transformace jest

$$\begin{aligned} x &= a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned} \tag{+}$$

Dosadíme-li podle těchto rovnic do druhé z limit (2), máme po snadném počtu

$$\int\limits_{K(AB)}^{*} y\,dx = \int\limits_{K(AB)}^{*} y'\,dx' - \sin^2\alpha \int\limits_{K(AB)}^{*}(x'\,dy' + y'\,dx') +$$
$$+ \sin\alpha\cos\alpha \int\limits_{K(AB)}^{*}(x'\,dx' - y'\,dy') + b\cos\alpha \int\limits_{K(AB)}^{*} dx' - b\sin\alpha \int\limits_{K(AB)}^{*} dy',$$

odkudž následuje

$$\int\limits_{K(AB)}^{*} y\,dx = \int\limits_{K(AB)}^{*} y'\,dx' - (x'_B y'_B - x'_A y'_A)\sin^2\alpha + \tag{4}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\,(x'_B{}^2 - y'_B{}^2 - x'_A{}^2 + y'_A{}^2) + (x'_B - x'_A)\,b\cos\alpha - (y'_B - y'_A)\,b\sin\alpha.$$

Jest tudíž patrno na základě uvedeného, že, existuje-li některá z limit (2) vzhledem k oblouku AB křivky K a vzhledem k jistému pravoúhlému systému souřadnic, existují všecky, ať si volíme jakkoliv systém souřadnicový. Poněvadž pak limity v (2) existují, existují-li příslušné křivkové integrály, a poněvadž integrál křivkový $\int\limits_{K(AB)} y\,dx$ má jistě význam, protíná-li každá rovnoběžka s osou Y oblouk AB toliko v konečném počtu bodů (viz odstavec 197), vidíme, že *limity* (2) *vzhledem k oblouku AB jistě existují, protínají-li všecky rovnoběžky s jistou pevnou přímkou oblouk ten v konečném počtu bodů,* a obecněji (odstavec 200), jestliže souřadnice bodů na oblouku AB jsou vyjádřeny parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, můžeme tvrditi, že *limity* (2) *vzhledem k oblouku AB jistě existují, jestliže buď $\varphi(t)$ aneb $\psi(t)$, aneb* — se zřetelem k (+) — *při vhodně voleném α výraz* $\cos\alpha\,\varphi(t) - \sin\alpha\,\psi(t)$ *jsou (spojité) funkce proměnné t v příslušném intervalu s variací konečnou.*

Nazývejme křivku spojitou K resp. její oblouk AB *kvadratury schopný v širším smyslu,* existují-li pro křivku K resp. její oblouk AB limity (2). Na základě této definice jest ihned patrno, že, je-li křivka K kvadratury schopna, jest také každý její oblouk kvadratury schopný, a naopak, že křivka K jest jistě kvadratury schopna, lze-li ji rozděliti v oblouky kvadratury schopné (vesměs v širším smyslu).

POZNÁMKA. *Z předcházejícího a z odstavce 245 vyplývá, že každý oblouk křivky rektifikace schopný jest také kvadratury schopný.*

257. Obrátíme se nyní k důkazu, že čísla (2) přiřazená uzavřené křivce K, je-li tato kvadratury schopna, hoví oběma základním požadavkům pro velikost plošnou (odstavec 55).

a) *Ke shodným uzavřeným křivkám K náleží stejná čísla* (2). Tvrzení toto dokážeme, dokážeme-li, že se (2) nemění libovolnou transformací pravoúhlých souřadnic; neboť z toho následuje, že velikost čísla (2) nezávisí na poloze křivky K vůči systému souřadnicovému. Avšak z rovnice (4) máme ihned, splývá-li bod A s B (a tedy $x'_A = x'_B$, $y'_A = y'_B$),

$$\overset{\bullet}{\int\limits_{K}} y\,dx = \overset{\bullet}{\int\limits_{K}} y'\,dx',$$

čímž důkaz nezávislosti druhého z čísel (2) na poloze soustavy souřadnicové (a tudíž i ostatních čísel z (2)) proveden.

b) *Rozdělíme-li část roviny, kterážto část jest omezena křivkou K kvadratury schopnou a jíž jest přiřaděna na základě výrazů* (2) *velikost plošná P, ve dvě části obloukem CD křivky $\mathfrak{L}$ kvadratury schopným, jsou i těmto částem přiřaděny na základě*

(2) *jisté velikosti plošné* P_1, P_2, *a to tak, že jest mezi čísly* P, P_1, P_2 *vztah*

$$P = P_1 + P_2.$$

Neboť body C, D rozpadá se křivka K ve dva oblouky K_1, K_2. Část, jíž přísluší velikost plošná P_1, nechť jest omezena obloukem K_1 a obloukem CD křivky $\mathfrak{L}$; pak část o velikosti plošné P_2 bude omezena obloukem K_2 a obloukem DC křivky $\mathfrak{L}$. I jest

$$P_1 = -\int\limits_{K_1}^{*} y\,dx - \int\limits_{\mathfrak{L}(CD)}^{*} y\,dx, \qquad P_2 = -\int\limits_{K_2}^{*} y\,dx - \int\limits_{\mathfrak{L}(DC)}^{*} y\,dx,$$

$$P_1 + P_2 = -\int\limits_{K_1}^{*} y\,dx - \int\limits_{K_2}^{*} y\,dx - \int\limits_{\mathfrak{L}(CD)}^{*} y\,dx - \int\limits_{\mathfrak{L}(DC)}^{*} y\,dx =$$

$$= -\int\limits_{K_1}^{*} y\,dx - \int\limits_{K_2}^{*} y\,dx = -\int\limits_{K}^{*} y\,dx = P.$$

Tím jest i vlastnost druhá charakterisující velikost plošnou při výrazech (2) dokázána a tudíž i dokázáno, že čísla v rovnicích (I), (II), ... (IV‴) odstavce 225, 226 daná vskutku vyjadřují velikosti plošné.

258. Vykládáme-li definici velikosti plošné svrchu podanou geometricky, jest plocha křivkou uzavřenou K omezená definována v podstatě jako limita ploch mnohoúhelníků, jejichž vrcholy jsou položeny na křivce a při nichž počet stran roste nade všecky meze a zároveň délka stran konverguje k nule. Na základě tohoto geometrického významu definice jsou vlastnosti, jež byly odvozeny pro limity vyjadřující velikost plošnou, téměř samozřejmy.

Zároveň jest patrno, že k definici velikosti plošné užito bylo v podstatě téže mnohoúhelníkové čáry jako k definici délky oblouku.

Máme-li dále jeden takový mnohoúhelník $012 \ldots \overline{n-1}$, že vzdálenost dvou libovolných bodů na oblouku křivky omezeném dvěma po sobě jdoucími vrcholy jest menší ($\leqq$) než δ, jest ihned patrno, že čára K jest obsažena v uzavřeném pásu, který vznikne jako souhrn n obdélníků, z nichž každý má ve svém nitru jednu z n stran uzavřeného mnohoúhelníka $012 \ldots \overline{n-1}$. Při tom na příklad obdélník obepínající úsečku 23 má delší stranu rovnou vzdálenosti bodů 2, 3 zvětšené o 2δ a zároveň rovnoběžnou s $\overline{23}$ ve vzdálenosti δ od $\overline{23}$, kratší strana jest délky 2δ a jest vzdálena o δ od koncového bodu úsečky $\overline{23}$. Obdobně jest tomu i při ostatních stranách uzavřeného mnohoúhelníka.

Je-li nyní křivka K nejenom kvadratury, nýbrž i rektifikace schopna a má-li celkovou délku s, pak, volíme-li zároveň body $0, 1, 2, \ldots, n-1$ tak, že délka oblouku čáry K spojujícího dva po sobě následující body jest větší ($\geq$) než δ (což jest vždy možno), jest plocha pásu menší než $6\delta s$. Sestrojíme-li síť čtverců o stranách δ pomocí dvou systémů rovnoběžných přímek, jest z toho patrno téměř bezprostředně, že součet ploch čtverců, jejichž obvod jest protínán křivkou K, jest menší než $2\delta s(1+\sqrt{2})^3 < 29\delta s$. (Neboť čtverce ty padnou jistě vesměs do pásu obdobně utvořeného jako hořejší, jehož obdélníky však mají strany o $2\delta\sqrt{2}$ větší.) Následuje z toho věta: *Součet ploch čtverců o straně δ, jež jsou obsaženy v síti čtvercové vzniklé dvěma systémy rovnoběžných přímek a jež jsou protínány křivkou kvadratury a rektifikace schopnou, konverguje k nule, konverguje-li strana čtverců δ k nule.*

Můžeme však totéž dokázati pro křivky ještě obecnější. Budiž dán oblouk křivky K, jehož parametrické rovnice jsou $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t_0 \leq t \leq T$. Nechť jest *jedna* z těchto dvou funkcí funkce s variací konečnou; budiž to na příklad $\varphi(t)$. Bodu k na oblouku daném nechť přísluší parametr t_k. Ustanovme kladné číslo η tak, aby $|\psi(t')-\psi(t'')| \leq \delta$ pro všechna t', t'', pro něž $|t'-t''|<\eta$; buďtež konečně body t_i a celé číslo n tak voleno, aby $0<t_i-t_{i-1}<\eta$ pro $i=1,2,\ldots,n$ $(t_n=T)$. Pak oblouk křivky K příslušný intervalu (t_{i-1}, t_i) bude se prostírati na pravoúhelníkovém oboru, jehož strany jsou rovnoběžny s osami X a Y a jsou menší ($\leq$) prvá než variace funkce $\varphi(t)$ v $(t_{i-1}, t_i) = V_i$, druhá (rovnoběžná s Y) než 2δ. V síti čtvercové (o stranách rovnoběžných s X a Y) budou s tímto obloukem míti společné body čtverce, jež pokrývají na rovině XY plochu, která jest buď menší než plocha onoho pravoúhelníkového oboru, aneb, je-li větší, jest větší pouze o ϑ/n; při tom jest ϑ číslo kladné, jež můžeme učiniti tak malým, jak chceme, zvolíme-li stranu čtverců v síti dostatečně malou. Celý oblouk daný křivky K bude tedy protínati čtverce sítě o celkové ploše jistě menší než

$$2\delta\sum_{i=1}^{n} V_i + n\frac{\vartheta}{n} = 2\delta \,.\, \text{variace funkce } \varphi(t) \text{ v } (t_0, t_n) + \vartheta,$$

což jest číslo kladné, libovolně malé. *Tvrzení svrchu učiněné pro křivky rektifikace schopné rozšířeno tím i pro křivky o rovnici $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, kde jedna z funkcí $\varphi(t)$, $\psi(t)$ jest funkce s variací konečnou v příslušném intervalu.*

Aby křivka K měla vzhledem k síti čtvercové vlastnost svrchu uvedenou, k tomu tedy není nutno, aby byla rektifikace schopna. Nepostačí k tomu však — jak se zdá —, aby byla pouze kvadratury schopna (ve smyslu definice zde podané). Avšak lze snadno dokázati, že všecky křivky, jež onu vlastnost mají, jsou kvadratury schopny. Budeme nazývati křivky, jimž ona vlastnost přísluší, *kvadratury schopné v užším smyslu. V následujícím budeme pod* **křivkou kvadratury schopnou** *vždy vyrozumívati křivky kvadratury schopné v užším smyslu a pod velikostí plošnou velikost plošnou v užším smyslu.*

PŘÍKLAD. Máme-li čáru $y = f(x)$, kde $f(x)$ jest spojitá funkce Bolzanova (DP 114, příklad 3), pak jest tato čára kvadratury schopna v užším smyslu (neboť její rovnice parametrické jsou $x = t$, $y = f(t)$ a funkce $\varphi(t) \equiv t$ jest funkce monotonní a tedy s variací konečnou). Avšak, jak tam dokázáno, není rektifikace schopna.

259. Obsah množství bodového vícerozměrného *(podle Jordana).* Pojem velikosti plochy rovinné omezené uzavřenou křivkou dá se rozšířiti jednak tím, že uvažujeme velikost plochy rovinné zaujaté jistým množstvím bodovým, jednak tím, že budeme míti na zřeteli hned prostory vícerozměrné (a nikoliv jenom dvojrozměrné, jako jest část roviny anebo souhrn bodů o dvou souřadnicích). Provedu sice příslušné úvahy pouze pro prostory dvojrozměrné, avšak tak, aby byla patrna správnost jejich, jakož i podstata příslušných definic i pro prostory vícerozměrné.

Budiž dáno tedy v rovině množství bodové E konečné (DP 180) nacházející se v pravoúhelníku $(x_0, X; y_0, Y)$. Předpokládejme hned od počátku, že strany pravoúhelníka jsou tak voleny, že nejmenší vzdálenost ze vzdáleností bodů daného množství E od obvodu pravoúhelníka jest větší ($\geqq$) než jisté kladné číslo λ. Rozdělme tento pravoúhelník přímkami rovnoběžnými s osou Y o rovnicích $x = x_1, x = x_2, \ldots, x = x_{m-1}$ a přímkami rovnoběžnými s osou X o rovnicích $y = y_1, y = y_2, \ldots, y = y_{n-1}$ na $m \,.\, n$ pravoúhelníků menších. Při tom nechť jest $x_0 < x_1 < < x_2 < \ldots < x_{m-1} < X$ a $y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < Y$. Jeden takový pravoúhelník jest $(x_{i-1}, x_i;\ y_{j-1}, y_j)$, jeho plocha pak $(x_i - x_{i-1})\,(y_j - y_{j-1}) = \Delta x_i\, \Delta y_j$; všecky dostaneme, probíhá-li i hodnoty $1, 2, \ldots, m$ a j hodnoty $1, 2, \ldots, n$; $x_m = X$, $y_n = Y$. Sečteme-li plochy pravoúhelníků (z celkového počtu $m \,.\, n$ pravoúhelníků), na kterých se nachází jeden aspoň bod z E, dostaneme součet, jejž označíme S. Sečteme-li plochy pravoúhelníků, jejichž veškeré body (incl. hranic) jsou vnitřní body z E, dostaneme nový součet s. Jest

$$(X - x_0)(Y - y_0) > S \geqq s \geqq 0.$$

Při těchto součtech S a s lze použíti tím, že je konstruujeme pro různá rozdělení intervalů (x_0, X), (y_0, Y) v intervaly menší Δx_i, Δy_j, tentýž postup myšlenkový jako na S a s odstavce 85 a následujícího. Zvláště pak lze tvrditi:

1. *Čísla S mají dolní hranici Σ a čísla s mají horní hranici σ, pro kteréžto hranice jest*

$$\Sigma \geqq \sigma.$$

2. *Pro Σ a σ jest*

$$\lim S = \Sigma, \qquad \lim s = \sigma,$$

jestliže $\lim \Delta x_i = 0$, $\lim \Delta y_j = 0$; $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ *a ovšem zároveň* $\lim m = \infty$, $\lim n = \infty$.

3. *Zvláště pak jest patrno, jakožto zvláštní případ právě uvedené věty, pokryjeme-li pravoúhelník sítí čtvercovou vytvořenou rovnoběžkami jednak s osou X, jednak s osou Y, kteréžto čtverce mají strany vesměs rovny $a < \lambda$, že*

$$\Sigma = \lim S_0, \qquad \sigma = \lim s_0,$$
pro ten případ, že $\lim a = 0$.

Při tom jest S_0 součet ploch těch čtverců, jež obsahují vůbec bod z E, s_0 pak součet čtverců, jejichž veškeré body (incl. hranic) jsou vnitřní body z E.

Číslo Σ sluje **zevnější obsah množství** E, σ pak **vnitřní obsah množství** E; obojí ve smyslu definice *Jordanovy.*

Jestliže $\Sigma = \sigma$, sluje množství E **měřitelné** *(podle Jordana)* anebo kratčeji *měřitelné* (J.); $\Sigma = \sigma$ nazývá se pak **obsahem množství.**

POZNÁMKA. Jestliže E jest množství dvojrozměrné spojité omezené spojitou křivkou uzavřenou (spojitými křivkami uzavřenými), nazývá se $\Sigma = \sigma$ též velikostí plošnou množství E (krátce plochou množství E) a shoduje se definice tu podaná s definicí velikosti plošné v užším smyslu podané v předcházejícím odstavci.

Jestliže E jest množství jednorozměrné spojité (t. j. interval), užívá se pojmenování délka. Při množství trojrozměrném spojitém pak v obdobných případech užívá se obvykle pojmenování krychlový obsah.

260. Číslo $\Sigma - \sigma$ jest zevnější obsah množství F skládajícího se z hraničních bodů množství E. Neboť $S - s$ (kteréhožto rozdílu limitou číslo $\Sigma - \sigma$ jest) jest součet všech ploch čtverců ze čtvercové sítě svrchu uvažované, na kterých se nacházejí vůbec hraniční body množství E a tedy body z množství F. Jestliže $\Sigma - \sigma = 0$, jest i vnitřní obsah množství F rovný nule (neboť vnitřní obsah jest $\leqq$ než vnější obsah a zároveň jest $\geqq 0$) a množství F měřitelno (podle Jordana) a o obsahu rovném nule.

Jelikož nutná a postačitelná podmínka, aby množství E bylo měřitelné (J), jest (podle definice) $\Sigma - \sigma = 0$, jest patrno zároveň, že nutná a postačující podmínka, aby množství E bylo měřitelno, jest, aby bylo měřitelno množství F a mělo obsah rovný nule.

Rozdělíme-li konečné množství E na dvě množství bez společných bodů E_1, E_2 a jsou-li zevnější, resp. vnitřní obsahy těchto množství Σ_1, Σ_2 resp. σ_1, σ_2, pak mezi těmito čísly a zevnějším resp. vnitřním obsahem množství E jsou tyto relace (jež vyplývají snadnou úvahou užívající ku příkladu sítě čtvercové o straně a)

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 \geqq \Sigma, \qquad \sigma_1 + \sigma_2 \leqq \sigma,$$
$$\Sigma \geqq \sigma_1 + \Sigma_2 \geqq \sigma, \qquad \Sigma \geqq \Sigma_1 + \sigma_2 \geqq \sigma.$$

Jsou-li dvě z množství E, E_1, E_2 měřitelna (J), jest (jak z těchto relací vyplývá) i třetí měřitelno a jest potom obsah množství E rovný součtu obsahů množství E_1 a E_2.

261. Horní hranici vzdáleností dvou bodů z množství konečného E budeme nazývati **rozměr množství** E.

Množství bodové v následujících úvahách nejčastěji se vyskytující jest dáno oborem spojitým, který budeme v následujícím značiti pomocí písmen Ω, ω (DP 189), a které jest při oborech dvojrozměrných omezeno čarami spojitými uzavřenými, při oborech trojrozměrných plochami spojitými uzavřenými a obdobně při oborech n-rozměrných jest dána hranice „plochou" $(n-1)$ rozměrnou spojitou uzavřenou. U těchto množství (oborů) jest rozměr největší vzdáleností dvou bodů příslušných oboru resp. jeho hranici.

K vymezení čísel Σ, σ příslušných k množství možno, jak jsme svrchu ukázali, používati sítí čtvercových o straně a, při čemž stranu a necháme konvergovati k nule. Místo však, abychom pokrývali rovinu sítí čtvercovou, můžeme ji pokrýti plochami $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$, jejichž rozměry jsou vesměs menší $(<)$ než číslo a a jimž příslušejí, jak budeme předpokládati, obsahy (velikosti plošné, jež stejně značíme. Při tom pokrývání to myslíme si tak, že každý bod roviny jest buď položen uvnitř jedné a jenom jedné plochy ω_k, anebo leží na společné hranici dvou (po případě i více) ploch ω_k; že tedy souhrn ploch ω_k pokrývá rovinu XY — po případě její část, o niž nám jde — jenom jednou a nezanechává na rovině XY mezer. K vůli zjednodušení budeme ještě předpokládati, že obsahy ω_k jsou vesměs větší než ra^2, kde $r > 0$.

Mějmež nyní množství konečné E položené na rovině XY; obsah zevnější toho množství budiž Σ vnitřní σ. Pokryjme rovinu (anebo aspoň pravoúhelníkový obor, na kterém E jest položeno) souhrnem ploch ω_k, jejichž rozměr jest menší než a. Pak platí *věta:*

$$\Sigma = \lim \sum_k \omega''_k, \qquad \sigma = \lim \sum_k \omega'_k$$

$$\text{pro } \lim a = 0.$$

Při tom jsou ω'_k ty z ploch ω_k, jejichž body vesměs patří k vnitřním bodům množství E, ω''_k pak ty z ploch ω_k, jejichž body aspoň zčásti přináleží k E. (Všecky ω'_k jsou též mezi ω''_k).

Abychom tu větu dokázali, budeme uvažovati místo množství E nejprve čtverec $\check{C}$ o straně $b > 2a$. Pro tento čtverec jest patrně

$$\sum_k \omega''_k < (b + 2a)^2, \qquad \sum_k \omega'_k > (b - 2a)^2.$$

[V těchto součtech jsou ω'_k ty z ploch ω_k, jejichž body jsou vesměs vnitřní body čtverce $\check{C}$, to jest ty z ploch ω_k, jež spadnou do nitra čtverce $\check{C}$; poněvadž pak každá z ω_k, která má bod společný se čtvercem $\check{C}_1$ (téhož středu jako $\check{C}$, a o stranách délky $b - 2a$ a rovnoběžných se stranami čtverce $\check{C}$), padne celá do $\check{C}$, jest patrna ihned nerovnina druhá; prvá vyplývá obdobnou úvahou.] Jest tedy

$$b^2 \left(1 - \frac{2a}{b}\right)^2 < \sum_k \omega'_k < b^2 < \sum_k \omega''_k < b^2 \left(1 + \frac{2a}{b}\right)^2.$$

Uvažujme nyní obecné množství E, jemuž jako obsahy příslušejí čísla Σ, σ. Tu lze podle věty svrchu dokázané sestrojiti síť čtvercovou o straně b dosti malé tak, že součet S_0 ploch těch čtverců, jež obsahují ve svém nitru vůbec bod z E, jest číslo z intervalu $(\Sigma, \Sigma + \varepsilon)$ a zároveň, že součet s_0 ploch čtverců, jejichž všecky body jsou body z E, jest číslo intervalu $(\sigma - \varepsilon, \sigma)$. Při tom jest ε číslo kladné (libovolně malé). Ze souhrnu ploch ω_k (o rozměru menším než a) vyberme ty plochy $\overline{\omega'}_k$, jež spadnou cele do některého ze čtverců tvořících součet s_0. I jest podle výsledku pro jeden čtverec právě odvozeného*)

$$s_0\left(1-\frac{2a}{b}\right)^2<\sum_k \overline{\omega'_k}<\sum_k \omega'_k<\sigma.$$

Dále vyberme ze souhrnu ploch ω_k plochy $\overline{\omega''_k}$, jejichž aspoň jeden vnitřní bod přináleží jednomu ze čtverců tvořících součet S_0. Jest (snadnou úvahou) opět

$$S_0\left(1+\frac{2a}{b}\right)^2>\sum_k \overline{\omega''_k}>\sum_k \overline{\omega''_k}>\Sigma.$$

Se zřetelem k tomu, že s_0 resp. S_0 jsou čísla intervalu $(\sigma-\varepsilon, \sigma)$ resp. $(\Sigma, \Sigma+\varepsilon)$, lze tedy psáti

$$(\sigma-\varepsilon)\left(1-\frac{2a}{b}\right)^2<\sum_k \omega'_k<\sigma, \qquad \Sigma<\sum_k \omega''_k<(\Sigma+\varepsilon)\left(1+\frac{2a}{b}\right)^2.$$

Zvolíme-li si a dosti malé, lze tedy docíliti

$$\sigma-2\varepsilon<\sum_k \omega'_k<\sigma, \qquad \Sigma<\sum_k \omega''_k<\Sigma+2\varepsilon.$$

Jelikož pak číslo ε lze hned od počátku si zvoliti tak malé, jak chceme, jest věta dokázána.

Důsledek 1. Nechť jest dáno množství E, jemuž přísluší obsah $\Sigma=\sigma$. Rozdělme si celý obor (v němž E se nachází) na části ω_k o rozměrech $<a$. Na každé části ω_k vytkněme si libovolně bod c_k. Ty z částí ω_k, jejichž c_k patří k E, označme $\omega^{(1)}_k$. Pak jest

$$\lim \sum_k \omega^{(1)}_k=\Sigma=\sigma, \qquad \text{když } \lim a=0.$$

Neboť

$$\sum_k \omega'_k \leqq \sum_k \omega^{(1)}_k \leqq \sum_k \omega''_k.$$

Důsledek 2. Je-li množství E měřitelné a tedy $\Sigma=\sigma$, a označíme-li $\overline{\omega}_k$ ty z ploch ω_k, jež obsahují hraničné body E, pak v důsledku toho, co uvedeno bylo na počátku odstavce 260, jest

$$\lim \sum_k \overline{\omega}_k=0 \qquad \text{při } \lim a=0.$$

---

*) V následujících vztazích přichází vedle znaménka nerovnosti někdy též k platnosti znaménko rovnosti. Jelikož však to nastává v případech zcela výjimečných a jelikož důsledky ze vztahů vyplývající jsou tytéž, ať se uplatňuje znaménko rovnosti či nerovnosti, nebylo pro zjednodušení znaménko rovnosti vůbec v nich uváděno.