X. Užití pojmu integrálního k definici a vyšetřování některých funkcí, zvláště pak gammafunkce

In: Karel Petr (author); Vojtěch Jarník (author): Počet integrální. s dodatkem Úvod do teorie množství. (Czech). : Jednota československých mathematiků a fysiků, 1931. pp. 469--506.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402672

ČÁST TŘETÍ.

NĚKTERÁ UŽITÍ URČITÝCH INTEGRÁLŮ.

X. UŽITÍ POJMU INTEGRÁLNÍHO K DEFINICI A VYŠETŘOVÁNÍ NĚKTERÝCH FUNKCÍ, ZVLÁŠTĚ PAK GAMMAFUNKCE.

1. EULEROVY INTEGRÁLY.

211. Pode jménem Eulerovy integrály vyrozumívají se zpravidla tyto dva integrály

$$\int_0^\infty e^{-x}\, x^{\mu-1}\, dx, \qquad \int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\, dx.$$

První z nich má význam pro všecka reálná $\mu > 0$ a sluje *Eulerův integrál druhého druhu,* hodnota jeho jest funkcí proměnné μ (definovanou daným integrálem ovšem pouze pro $\mu > 0$), jež nazývá se **gammafunkcí argumentu** μ. Značíme tuto funkci $\Gamma(\mu)$ a píšeme

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\mu-1}\, dx, \qquad \mu > 0. \tag{1}$$

Druhý z integrálů nahoře uvedených má význam, když současně $p > 0$, $q > 0$; nazývá se pak *integrálem Eulerovým prvého druhu* a značí se

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\, dx; \qquad p > 0, \qquad q > 0. \tag{2}$$

Z rovnice (1) dostáváme substitucí $x = ax'$ integrál poněkud obecnější

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, x^{\mu-1}\, dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu} \qquad \text{při } a > 0, \qquad \mu > 0. \tag{1'}$$

Kdybychom v téže rovnici byli zavedli proměnnou y rovnicí

$$x = \log \frac{1}{y}, \qquad e^{-x} = y,$$

obdrželi bychom vztah rovněž užívaný

$$\Gamma(\mu) = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{y}\right)^{\mu-1} dy; \qquad \mu > 0. \tag{1''}$$

212. Na integrál stanovící $\Gamma(\mu)$ můžeme užíti integrace částečné; i máme

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{\mu-1}\, dx = \left[\frac{e^{-x} x^\mu}{\mu}\right]_0^\infty + \frac{1}{\mu} \int_0^\infty e^{-x} x^\mu\, dx = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty e^{-x} x^\mu\, dx$$

anebo pomocí označení zavedeného

$$\Gamma(\mu) = \frac{1}{\mu}\Gamma(\mu+1), \qquad \Gamma(\mu+1) = \mu\Gamma(\mu), \qquad \mu > 0, \tag{I}$$

což jest první základní vlastnost gammafunkce (dokázaná ovšem za předpokladu $\mu > 0$).

Jelikož, jak přímým počtem vyplývá, $\Gamma(1) = 1$, *jest podle* (I), *jestliže* μ *jest celé, kladné číslo*

$$\begin{aligned} \Gamma(\mu) &= (\mu-1)(\mu-2)\ldots 1 \\ &= (\mu-1)! \end{aligned}$$

Lze tedy hodnotu gammafunkce pro celé kladné μ snadno udati; podobný výsledek platí i pro $B(p, q)$, jestliže jedno z čísel p, q jest celé. Buď ku příkladu p celé, kladné. Pak jest

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx =$$

$$= -\left[\frac{x^{p-1}(1-x)^q}{q}\right]_0^1 + \frac{(p-1)}{q}\int_0^1 x^{p-2}(1-x)^q\, dx;$$

t. j. jestliže $p > 1$

$$B(p, q) = \frac{p-1}{q} B(p-1,\ q+1), \tag{3}$$

jestliže pak $p = 1$

$$B(1, q) = \frac{1}{q}. \tag{3'}$$

Z rovnic (3) a (3′) pak vyplývá snadno při p celém, kladném

$$B(p, q) = \frac{(p-1)(p-2)\ldots 1}{q(q+1)\ldots(q+p-1)}, \ p \text{ celé kladné.} \tag{4}$$

Stejným počtem bychom dostali pro q celé, kladné

$$B(p,q)=\frac{(q-1)(q-2)\dots 1}{p(p+1)\dots(p+q-1)},\ q \text{ celé, kladné.} \tag{4'}$$

Výsledky (4), (4′) se shodují, jestliže obojí čísla p, q jsou celá, neboť pak lze je psáti

$$B(p,q)=\frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!},\ p,\ q \text{ celá, kladná.}$$

Vztahu tomuto můžeme dáti tvar

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{5}$$

a rovnice tato obsahuje na základě (I) v sobě i (4), (4′). Platna jest, když buď p, anebo q jest celé; později dokážeme ji pro všecka přípustná p, q.

213. Transformujeme-li integrál pro $B(p, q)$ substitucí $x = 1 - y$, dostaneme

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^1 y^{q-1}(1-y)^{p-1}dy,$$

anebo pomocí symbolu $B(p, q)$

$$B(p,q)=B(q,p),\qquad \text{pro } p>0,\quad q>0. \tag{6}$$

Jest tedy $B(p, q)$ symetrická funkce obou argumentů, jakož již vyplývá z (5) ovšem toliko pro případ, že p anebo q jest celé.

Dosadíme-li

$$x=\frac{y}{1+y},\qquad y=\frac{x}{1-x},$$

bude y, když x roste od 0 do 1, růsti od 0 do ∞ a jest

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy;$$

t. j. můžeme též psáti

$$B(p,q)=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx=\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}dx. \tag{7}$$

Z této rovnice plyne integrací částečnou

$$\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}dx=\frac{p+q}{q}\int_0^\infty \frac{x^{q}}{(1+x)^{p+q+1}}dx,$$

t. j.

$$B(p,q)=\frac{p+q}{q}B(p,\ q+1)=\frac{p+q}{p}B(p+1,\ q). \tag{3$_1$}$$

Opětovným použitím této rovnice vyplývá snadno

$$B(p+n,\,q)=\frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}{(p+q)(p+q+1)\ldots(p+q+n-1)}B(p,q), \tag{3$_2$}$$

což jest jisté rozšíření rovnice (4).

214. Gammafunkci můžeme, vycházejíce z určitého integrálu ji definujícího, vyjádřiti nekonečným součinem. Při tom budeme užívati metody již dříve použité k výpočtu Laplaceova integrálu*) (odstavec 152).

Podle definice integrálu, jehož horní mez jest ∞, jest

$$\Gamma(\mu)=\lim_{N=\infty}\int_0^N e^{-x}x^{\mu-1}\,dx, \tag{8}$$

při čemž postačí, necháme-li N probíhati jakoukoliv spočetnou posloupnost vzrůstající nade všecky meze. *Zvolíme si pro N řadu čísel celých, kladných.* Zavedeme-li v posledním integrálu $x=Nx'$, máme dále

$$\Gamma(\mu)=\lim_{N=\infty}N^\mu\int_0^1 e^{-Nx}x^{\mu-1}\,dx. \tag{8'}$$

Avšak (odstavec 119, rovnice 2)

$$1-x<e^{-x}<\frac{1}{1+x}\quad\text{pro } x>0$$

a tedy

$$(1-x)^N<e^{-Nx}<\frac{1}{(1+x)^N}.$$

Jest tudíž

$$N^\mu\int_0^1(1-x)^N x^{\mu-1}\,dx<N^\mu\int_0^1 e^{-Nx}x^{\mu-1}\,dx<N^\mu\int_0^1\frac{x^{\mu-1}}{(1+x)^N}\,dx$$

a tím spíše

$$N^\mu\int_0^1(1-x)^N x^{\mu-1}\,dx<N^\mu\int_0^1 e^{-Nx}x^{\mu-1}\,dx<N^\mu\int_0^\infty\frac{x^{\mu-1}}{(1+x)^{N-\varrho}}\,dx, \tag{9}$$

kde ϱ jest kladné; zvolíme si ϱ tak, *aby $\varrho+\mu$ bylo číslo celé* a při tom ϱ nebylo větší než 1.

Nerovninu poslední lze psáti též ve tvaru (viz (2) a (7))

$$N^\mu B(N+1,\mu)<N^\mu\int_0^1 e^{-Nx}x^{\mu-1}\,dx<N^\mu B(N-\varrho-\mu,\,\mu). \tag{9'}$$

---

*) Integrál Laplaceův dostaneme z integrálu pro gammafunkci, klademe-li $\mu=\frac{1}{2}$; jest totiž $\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=2\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ (substituce $x=x'^2$) a tedy $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

Z pravého křídla této nerovniny následuje (píšeme-li v něm $N+\varrho+\mu+1$ místo N)

$$N_1^{\mu}\int_0^1 e^{-N_1 x} x^{\mu-1}\,dx < N_1^{\mu} B(N+1,\mu),$$

při tom kladli jsme pro krátkost

$$N_1 = N+\varrho+\mu+1.$$

Nerovninu poslední lze psáti též ve tvaru

$$\left(\frac{N}{N_1}\right)^{\mu} N_1^{\mu}\int_0^1 e^{-N_1 x} x^{\mu-1}\,dx < N^{\mu} B(N+1,\mu). \tag{9''}$$

Nerovninu (9'') a levé křídlo nerovniny (9') lze psáti v celku jako řetěz nerovnin

$$\left(\frac{N}{N_1}\right)^{\mu} N_1^{\mu}\int_0^1 e^{-N_1 x} x^{\mu-1}\,dx < N^{\mu} B(N+1,\mu) < N^{\mu}\int_0^1 e^{-Nx} x^{\mu-1}\,dx.$$

Jestliže N, probíhajíc řadu čísel celých kladných, vzrůstá nade všechny meze, vzrůstá též číslo (celé) $N_1 = N+\varrho+\mu+1$ nade všechny meze; jejich poměr konverguje k jedné a obě křídla v posledním řetězu nerovnin mají podle (8') limitu a to touž limitu, jež jest rovna $\Gamma(\mu)$. Má tedy i prostřední článek toho řetězu tuto limitu a *tak můžeme psáti*

$$\Gamma(\mu) = \lim_{N=\infty} N^{\mu} B(N+1,\mu) \tag{II'}$$

anebo podle (4), *jelikož N jest celé,*

$$\Gamma(\mu) = \lim_{N=\infty} \frac{1.2.3\ldots N}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+N)} N^{\mu}. \tag{II}$$

Rovnice tato nám dovoluje dále vyjádřiti $\Gamma(\mu)$ ve tvaru nekonečného součinu; za tím účelem položme

$$u_n = \frac{1.2.3\ldots n}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n)} n^{\mu}, \qquad n = 1,2,3,\ldots, \qquad u_0 = \frac{1}{\mu}.$$

Pak

$$u_n = u_0 \frac{u_1}{u_0}\frac{u_2}{u_1}\cdots\frac{u_n}{u_{n-1}}, \qquad \Gamma(\mu) = \lim_{n=\infty} u_n \text{ (podle (II))}$$

a

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} = \frac{1}{u_0}\frac{u_0}{u_1}\frac{u_1}{u_2}\frac{u_2}{u_3}\cdots\frac{u_k}{u_{k+1}}\cdots$$

a jelikož

$$\frac{u_{k-1}}{u_k} = \left(1+\frac{\mu}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k}\right)^{\mu}, \qquad \frac{u_0}{u_1} = \left(1+\frac{\mu}{1}\right), \qquad k>1,$$

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} = \mu \prod_{k=1}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{\mu}{k}\right) \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{\mu}, \tag{II''}$$

kde čárka u znaménka součinového značí, že v nekonečném součinu ten činitel $(1 - 1/k)^{\mu}$, který přísluší $k = 1$, má býti vynechán. Rovnice tato jenom tvarem a to nepodstatně se liší od (II).

POZNAMKA. Jako příklad k užití rovnice (II) uvádím výpočet limity

$$\lim_{N=\infty} \frac{\Gamma(\mu + N)}{1 . 2 . 3 \ldots (N - 1)} \cdot \frac{1}{N^{\mu}}.$$

Dosadíme-li podle vztahu

$$\Gamma(\mu + N) = \mu(\mu + 1)(\mu + 2) \ldots (\mu + N - 1) \Gamma(\mu)$$

získaného opětovným použitím rovnice (I), máme pro danou limitu výraz

$$\lim_{N=\infty} \frac{\mu(\mu + 1) \ldots (\mu + N - 1)}{1 . 2 . 3 \ldots (N - 1)} \cdot \frac{1}{N^{\mu}} \cdot \Gamma(\mu),$$

což podle (II) jest rovno 1. *Jest tedy daná limita rovna* 1, kterážto okolnost s funkcionální relací (I) postačí k úplné definici funkce gamma; neboť z této vlastnosti a z funkcionální relace naopak vyplývá vyjádření funkce gamma limitou (II).

215. Vztahu (II) můžeme dáti jiný poněkud tvar, který povede nás ještě k jednoduššímu vyjádření gammafunkce **nekonečným součinem.** Můžeme totiž místo (II) též psáti

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} = \lim_{N=\infty} \mu \left(1 + \frac{\mu}{1}\right) \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{\mu}{N}\right) e^{-\mu \log N}$$

aneb po jednoduché přeměně

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} = \lim_{N=\infty} A_N . B_N,$$

kde

$$A_N = \mu \left(1 + \frac{\mu}{1}\right) e^{-\frac{\mu}{1}} \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) e^{-\frac{\mu}{2}} \cdots \left(1 + \frac{\mu}{N}\right) e^{-\frac{\mu}{N}},$$

$$B_N = e^{\mu \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N} - \log N\right)}.$$

Avšak $\lim\limits_{N=\infty} B_N$ existuje, neboť jest

$$\lim B_N = e^{C\mu},$$

kdež

$$C = \lim_{N=\infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N} - \log N \right)$$

a sluje C *Eulerova konstanta**) (DP 38).

Existuje tudíž i $\lim\limits_{N=\infty} A_N$ (jakož lze ostatně dokázati přímo snadným vyšetřením příslušného nekonečného součinu); máme tudíž další vyjádření gammafunkce

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} = \mu e^{C\mu} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\mu}{k}\right) e^{-\frac{\mu}{k}}. \tag{II'''}$$

216. Z vyjádření gammafunkce nekonečným součinem snadno odvodíme vyjádření $B(p, q)$ **pomocí gammafunkcí při libovolných, kladných** p, q. Podle věty o střední hodnotě, užíváme-li ji na druhý integrál v (7), jest při $p > 0$, $q > 0$, při $p_0 > p$ a při N celém, kladném

$$B(N+1, q) > B(N+p+1, q) > B(N+p_0+1, q)$$

a též

$$N^q B(N+1, q) > N^q B(N+p+1, q) > N^q B(N+p_0+1, q). \tag{12}$$

Budiž p_0 celé číslo; pak výraz na pravé straně stojící má touž limitu pro $\lim N = \infty$ jako výraz na levé straně; neboť

$$\lim N^q B(N+p_0+1, q) = \lim_{N=\infty} \left(\frac{N}{N+p_0}\right)^q (N+p_0)^q B(N+p_0+1, q) =$$

$$= \lim_{N=\infty} (N+p_0)^q B(N+p_0+1, q) = \lim_{N=\infty} N^q B(N+1, q)$$

a má tudíž i limitu a to touž limitu výraz $N^q B(N+p+1, q)$ uprostřed (12) se nacházející, takže můžeme psáti podle (II')

$$\lim N^q B(N+p+1, q) = \Gamma(q). \tag{13}$$

Avšak podle (3_2) jest

$$B(N+p+1, q) = \frac{(N+p)(N+p-1)\ldots p}{(N+p+q)(N+p+q-1)\ldots(p+q)} B(p, q)$$

*) Očividně jest též

$$C = \lim_{N=\infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N} - \log(N+k) \right),$$

kde k jest nějaké číslo na N nezávislé. Nejvýhodnější volba jest $k = \frac{1}{2}$; při této volbě totiž výraz

$$\lim_{N=\infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N} - \log(N + \tfrac{1}{2}) \right)$$

konverguje k Eulerově konstantě asi s takovou rychlostí jako $1/12N^2$ k nule Viz asymptotický rozvoj pro C v odstavci 112, příklad 2.

a tedy

$$\lim_{N=\infty} N^q B(N+p+1, q) = B(p,q) \lim_{N=\infty} \frac{p(p+1)\ldots(p+N)}{(p+q)(p+q+1)\ldots(p+q+N)} N^q =$$

$$= B(p,q) \lim_{N=\infty} \frac{1.2\ldots N}{(p+q)(p+q+1)\ldots(p+q+N)} N^{p+q} . \frac{p(p+1)\ldots(p+N)}{1.2\ldots N} N^{-p}$$

t. j. podle (II)

$$\lim N^q B(N+p+1, q) = B(p,q) \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)} . \tag{14}$$

Porovnáním (13) a (14) následuje vztah

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \tag{III}$$

kterýmž dáno hledané vyjádření betafunkce pomocí gammafunkcí.

217. Vyjádřením gammafunkce pomocí nekonečného součinu získali jsme výraz pro gammafunkci podstatně jednodušší než daný integrál. Neboť integrál vyjadřující gammafunkci zastupuje při $\mu > 1$ vlastně dvojí limitní proces. Integrál v konečných mezích z funkce konečné lze pokládati za limitu jisté řady číselné, avšak integrál dávající gammafunkci má za jednu hranici ∞ a lze tento integrál považovati podle definice integrálů, jejichž jedna mez jest nekonečná, za limitu řady číselné, jejíž každý člen jest integrál v mezích konečných. Naproti tomu nekonečný součin zastupuje toliko jednu limitní operaci a lze tudíž právem očekávati, že důkazy různých vět týkajících se gammafunkce mnohem snáze na základě nekonečného součinu lze provésti než na základě omezeného integrálu. Uvádím v té příčině jako příklad odvození rovnice (III). Kdybychom chtěli rovnici tuto dokázati pomocí integrálů příslušné funkce definujících, mohli bychom postupovat takto:

Vyjdeme z integrálu

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx; \qquad p > 0, \quad q > 0.$$

Podle rovnice (1') odstavce 211 však jest

$$\frac{1}{(1+x)^{p+q}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty y^{p+q-1} e^{-y(1+x)} dy$$

a tedy

$$B(p,q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty dx \left(\int_0^\infty x^{p-1} y^{p+q-1} e^{-y(1+x)} dy \right).$$

Jestliže je dovoleno pořad integrační v tomto dvojnásobném integrálu zaměnit, můžeme postupně psáti (užívajíce rovnic (1′) a (1))

$$B(p,q)=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty dy\, y^{p+q-1}\, e^{-y}\,(\int_0^\infty x^{p-1}e^{-yx}\,dx)=$$

$$=\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty y^{q-1}\,e^{-y}\,dy=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

čímž by rovnice (III) byla dokázána postupem zdánlivě jednodušším, než byl dříve provedený. Nesmíme však zapomínati, že jsme při důkaze právě naznačeném předpokládali, že pořad integrační ve dvojnásobném integrálu dá se zaměnit a tuto okolnost ještě dokázati by bylo nezbytno, má-li býti výsledek dosažený pokládán za platný. Lze to učiniti následovně (odstavec 184). Nejprve vyšetříme, zda a v jakém rozsahu jsou splněny podmínky týkající se stejnoměrné konvergence integrálů

$$\int_D^\infty x^{p-1}\,y^{p+q-1}\,e^{-y(1+x)}\,dy,\qquad \int_B^\infty x^{p-1}\,y^{p+q-1}\,e^{-y(1+x)}\,dx, \tag{α}$$

když $p>1$, $q>0$. První integrál konverguje stejnoměrně pro všecka x intervalu $(0, B)$, kde B jest libovolné číslo kladné. Neboť jest

$$0<\int_D^\infty x^{p-1}\,y^{p+q-1}\,e^{-y(1+x)}\,dy<\int_D^\infty B^{p-1}\,y^{p+q-1}\,e^{-y}\,dy;$$

integrál však na pravé straně poslední nerovniny nezávisí na x a konvergence jest tedy stejnoměrná. Druhý z integrálů (α) konverguje stejnoměrně pro všecka y intervalu (ε, D), při čemž kladné číslo ε můžeme si zvoliti libovolně malé; neboť jest

$$0<\int_B^\infty x^{p-1}\,y^{p+q-1}\,e^{-y(1+x)}\,dx<\int_B^\infty D^{p+q-1}\,x^{p-1}\,e^{-\varepsilon(1+x)}\,dx.$$

Zbývá tudíž ještě vyšetřiti, jak se chová druhý z integrálů (α) v okolí bodu $y=0$. Dosadíme-li tam $xy=\xi$, máme

$$\int_B^\infty x^{p-1}\,y^{p+q-1}\,e^{-y(1+x)}\,dx=e^{-y}\,y^{q-1}\int_{By}^\infty \xi^{p-1}\,e^{-\xi}\,d\xi<\Gamma(p)\,y^{q-1};$$

tedy integrál ten se sice může stávati nekonečným, je-li $q<1$, avšak poněvadž $q>0$, řádu menšího než 1. Jest tedy oprávněnost změny pořadu integračního odůvodněna pro $p>1$, $q>0$, neboť podmínka 2 odstavce 184 jest očividně splněna. Rozšíření tohoto odůvodnění i pro případ $1 > p > 0$, $q > 0$ ponechávám čtenáři (použije se podobného obratu jako v druhé části právě podaného důkazu). Ostatně lze tento případ pomocí funkcionálních rovnic (I) a (3_1) převésti na předcházející, takže relace (III) i tímto druhým způsobem jest úplně prokázána. Jest však patrno, že důkaz druhým způsobem provedený jest obtížnější než způsob odstavce předcházejícího.

218. Avšak výhody právě naznačené při používání vyjádření gammafunkce nekonečným součinem nejsou jedinou předností tohoto výrazu. Integrál (1) definoval gammafunkci toliko pro $\mu > 0$, *rovnice* (II) *nám dovoluje rozšířiti definici její* **pro každé μ různé od záporného ($\leqq 0$) celého čísla.** Neboť limita ve (II) pro všechna taková μ vskutku existuje.

Funkce tak definovaná má vlastnost vyslovenou v (I), neboť podle (II) jest

$$\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu)} = \lim_{N=\infty} \mu \frac{N}{\mu + N} = \mu,$$

což shoduje se s rovnicí (I), která tudíž podržuje význam i pro rozšířený právě pojem funkce gamma.

Další vlastnost gammafunkce obdržíme z (II''') dosazením za $\Gamma(\mu)$ a $\Gamma(-\mu)$ do

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} \cdot \frac{1}{\Gamma(-\mu)} = -\mu^2 \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\mu}{k}\right) e^{-\frac{\mu}{k}} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu}{k}\right) e^{\frac{\mu}{k}},$$

odkudž znásobením stejnolehlých členů v nekonečných součinech

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)\,\Gamma(-\mu)} = -\mu^2 \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu^2}{k^2}\right),$$

kteréžto rovnici se zřetelem ke vztahům

$$\Gamma(1-\mu) = -\mu\Gamma(-\mu), \quad \text{(podle I)}$$

$$\sin \pi\mu = \pi\mu \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu^2}{k^2}\right)$$

lze dáti tvar

$$\Gamma(\mu)\,\Gamma(1-\mu) = \frac{\pi}{\sin \pi\mu}. \tag{IV}$$

Rovnice tato odvozena jest pro každé μ (různé od celého čísla); vyplývá rovněž snadno — ovšem toliko pro μ uvnitř intervalu (0, 1) — ze (III). Klademe-li tam $p = \mu$, $q = 1 - \mu$, máme ihned

$$\Gamma(\mu)\,\Gamma(1-\mu) = B(\mu, 1-\mu) = \int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi\mu}$$

podle (7) a odstavce 70, příkladu 5.

Rovnice (I) nám umožňuje výpočet $\Gamma(\mu)$ pro každé μ, známe-li $\Gamma(\mu)$ v intervalu (0, 1); rovnice (IV) nám dovoluje vypočítati $\Gamma(\mu)$ pro interval ($\frac{1}{2}$, 1) z hodnot v intervalu (0, $\frac{1}{2}$) anebo naopak; mají tudíž obě rovnice též praktický význam.

Pro $\mu = \frac{1}{2}$ následuje ze (IV)

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})^2 = \pi \text{ a tedy } \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi},$$

čímž zároveň poznovu stanovena hodnota Laplaceova integrálu.

219. Vedle rovnic (I) a (IV) jest užitečna pro výpočet gammafunkce **relace Gaussova.** Abychom si ji odvodili, položíme pro stručnost

$$\Pi(N, \mu) = \frac{1.2.3\ldots(N-1)}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+N-1)} N^\mu$$

a uvažujeme výraz (m jest celé)

$$\frac{m^{m\mu}\,\Pi(N, \mu)\,\Pi\left(N, \mu+\frac{1}{m}\right)\ldots\Pi\left(N, \mu+\frac{m-1}{m}\right)}{\Pi(mN, m\mu)}. \tag{15}$$

Tento výraz, jak snadným počtem vyplývá, jest nezávislý na μ. Avšak výraz $\Pi(N, \mu)$, když N roste nade všecky meze, má za limitu $\Gamma(\mu)$; neboť liší se od výrazu ve (II) toliko o činitel $N/(\mu+N)$, který konverguje k 1. Necháme-li tedy v (15) N vzrůstati nade všecky meze, vidíme, že limita výrazu (15), jež jest

$$\frac{m^{m\mu}\,\Gamma(\mu)\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{2}{m}\right)\ldots\Gamma\left(\mu+\frac{m-1}{m}\right)}{\Gamma(m\mu)},$$

jest nezávisla na μ. Můžeme tedy psáti

$$\Gamma(\mu)\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{2}{m}\right)\ldots\Gamma\left(\mu+\frac{m-1}{m}\right) = C_m\, m^{-m\mu}\,\Gamma(m\mu), \tag{16}$$

kde C_m nezávisí na μ a závisí toliko na m. Určíme nejprve C_2 (kladouce $m = 2$), za kterýmž účelem učiníme $\mu = 1$,*)

$$\Gamma(1)\,\Gamma(\tfrac{3}{2}) = C_2\, 2^{-2}\,\Gamma(2), \quad \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} = C_2 . \tfrac{1}{4}, \quad C_2 = 2\sqrt{\pi};$$

tedy

$$\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu+\tfrac{1}{2}) = 2\sqrt{\pi}\; 2^{-2\mu}\,\Gamma(2\mu) \tag{17}$$

(*formule Legendrova*).

Abychom ustanovili C_m v (16), položíme tu $\mu + 1/2m$ za μ a rovnici tak vzniklou s rovnicí (16) znásobíme. Na levé straně rovnice násobením získané bude součin $2m$ Γ-funkcí, jejichž argumenty patrně budou

*) Při tom použito okolnosti, že na základě (I) $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; viz předcházející odstavec.

$$\mu,\ \mu+\frac{1}{2m},\ \mu+\frac{2}{2m},\ \mu+\frac{3}{2m},\ \ldots,\ \mu+\frac{2m-1}{2m}.$$

Budeme je psáti v tomto pořádku

$$\Gamma(\mu)\Gamma\left(\mu+\frac{m}{2m}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2m}\right)\Gamma\left(m+\frac{m+1}{2m}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{2}{2m}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{m+2}{2m}\right)\ldots,$$

anebo po jednoduché úpravě

$$\Gamma(\mu)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2m}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2m}+\frac{1}{2}\right)\cdots$$

$$\cdots\Gamma\left(\mu+\frac{m-1}{2m}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{m-1}{2m}+\frac{1}{2}\right).$$

Užijeme-li pak rovnice (17) na každou dvojici činitelů tohoto výrazu, změní se levá strana v

$$2\sqrt{\pi}\,2^{-2\mu}\,\Gamma(2\mu)\,2\sqrt{\pi}\,2^{-2\mu-\frac{1}{m}}\,\Gamma\left(2\mu+\frac{1}{m}\right)\ldots 2\sqrt{\pi}\,2^{-2\mu-\frac{m-1}{m}}\,\Gamma\left(2\mu+\frac{m-1}{m}\right),$$

což jest podle (16) rovno

$$(2\sqrt{\pi})^m\,2^{-2m\mu-\frac{m-1}{2}}\,C_m\,m^{-2m\mu}\,\Gamma(2m\mu).$$

Pravá strana uvažované rovnice však jest

$$C_m^2\,m^{-m\mu}\,\Gamma(m\mu)\,m^{-m(\mu+\frac{1}{2m})}\,\Gamma(m\mu+\tfrac{1}{2})=C_m^2\,m^{-2m\mu-\frac{1}{2}}\,2\sqrt{\pi}\,2^{-2m\mu}\,\Gamma(2m\mu)$$

(podle (17)). Porovnáním obou stran máme konečně

$$C_m=(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\sqrt{m}.$$

Jest tudíž úhrnem při m celém kladném

$$\Gamma(\mu)\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{2}{m}\right)\ldots\Gamma\left(\mu+\frac{m-1}{m}\right)=(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\sqrt{m}\,m^{-m\mu}\,\Gamma(m\mu),\qquad\text{(V)}$$

kterýžto vztah jest znám pode jménem *vztah Gaussův.*

220. Rovnici (II''') lze snadno přetvořiti na rovnice ku praktickému počítání gammafunkce užitečné. Logaritmováním obou stran získáváme pro $\mu>0$ ihned

$$\log\Gamma(\mu)=-\log\mu-C\mu+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu}{k}-\log\left(1+\frac{\mu}{k}\right)\right)\qquad(18)$$

anebo též pro $-1<\mu$

$$\log\Gamma(\mu+1)=-C\mu+\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{\mu}{k}-\log\left(1+\frac{\mu}{k}\right)\right).$$

Rozvineme-li $\log(1+\mu/k)$ v řadu potenční, kladouce

$$\log\left(1+\frac{\mu}{k}\right)=\frac{\mu}{k}-\frac{\mu^2}{2k^2}+\frac{\mu^3}{3k^3}-\ldots,\qquad -k<\mu\leqq k,$$

máme po vhodném uspořádání pro $-1 < \mu \leqq 1$

$$\log \Gamma(\mu+1) = -C\mu + \frac{\mu^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{\mu^3}{3}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^3} + \frac{\mu^4}{4}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^4} - \cdots$$

aneb kratčeji, zavedeme-li označení

$$s_k = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots,$$

$$\log \Gamma(\mu+1) = -C\mu + s_2\frac{\mu^2}{2} - s_3\frac{\mu^3}{3} + s_4\frac{\mu^4}{4} - \ldots, \tag{19}$$

$$-1 < \mu \leqq 1.$$

Řadu tuto lze jednoduchými transformacemi učiniti ještě více konvergentní; zaměníme-li μ v $-\mu$, máme nejprve

$$\log \Gamma(-\mu+1) = C\mu + s_2\frac{\mu^2}{2} + s_3\frac{\mu^3}{3} + s_4\frac{\mu^4}{4} + \ldots,$$

$$-1 \leqq \mu < 1.$$

Sčítáním rovnice této a (19) obdržíme se zřetelem ke vztahu

$$\Gamma(1+\mu)\,\Gamma(1-\mu) = \mu\Gamma(\mu)\,\Gamma(1-\mu) = \frac{\pi\mu}{\sin\pi\mu} \qquad \text{(odst. 218)}$$

rovnici

$$\log\frac{\pi\mu}{\sin\pi\mu} = 2\left(s_2\frac{\mu^2}{2} + s_4\frac{\mu^4}{4} + s_6\frac{\mu^6}{6} + \ldots\right),$$

$$-1 < \mu < 1,$$

jejíž pomocí dostaneme snadno z (19)

$$\log\Gamma(\mu+1) = \tfrac{1}{2}\log\frac{\pi\mu}{\sin\pi\mu} - (C\mu + \tfrac{1}{3}s_3\mu^3 + \tfrac{1}{5}s_5\mu^5 + \tfrac{1}{7}s_7\mu^7 + \ldots),$$

$$-1 < \mu < 1.$$

Tuto přičtením řady

$$0 = -\tfrac{1}{2}\log\frac{1+\mu}{1-\mu} + \tfrac{1}{1}\mu^1 + \tfrac{1}{3}\mu^3 + \tfrac{1}{5}\mu^5 + \ldots,$$

$$-1 < \mu < 1$$

přeměníme na následující, ještě rychleji konvergující

$$\log\Gamma(\mu+1) = \tfrac{1}{2}\log\frac{\pi\mu}{\sin\pi\mu} - \tfrac{1}{2}\log\frac{1+\mu}{1-\mu} + \mu(1-C) -$$

$$-(s_3-1)\frac{\mu^3}{3} - (s_5-1)\frac{\mu^5}{5} - (s_7-1)\frac{\mu^7}{7}\cdots \tag{20}$$

$$-1 < \mu < 1.$$

Rozvoj tento zvláště pro malá μ dovoluje dosti pohodlně vypočísti $\log\Gamma(\mu+1)$. Čísla s_k jsou vypočítána od *Legendrea* pro indexy $k=2$ až $k=35$ na 16 desetinných míst (Exercises de calcul intégral, sv. 2, str. 65), týž sestavil tabulky pro $\log\Gamma(\mu)$ kde μ

postupuje řadou aritmetickou s diferencí 0·001 (tamže sv. 1, str. 302, na 7 desetinných míst, ve svazku 2, str. 86, na 12 d. m.).

Z rovnic napsaných plynou různé výrazy pro Eulerovu konstantu. Tak z (19) pro $\mu = 1$ máme

$$C = \frac{s_2}{2} - \frac{s_3}{3} + \frac{s_4}{4} - \dots$$

Řada (20) jest odvozena sice pro $|\mu| < 1$, avšak řada potenční v μ tam se nacházející konverguje patrně pro $|\mu| < 2$ a jest tedy uvnitř intervalu $(-2, 2)$ spojitou funkcí μ. Platnost rovnice (20) jest proto jenom omezena na interval $(-1, 1)$, jelikož jenom pro ten interval mají první dva členy význam (pro zbytek intervalu $(-2, 2)$, t. j. pro intenvaly $(1, 2)$, $(-2, -1)$, jej ztrácejíce). Sloučíme-li prvé dva členy v jeden, t. j. ve výraz

$$\tfrac{1}{2} \log \frac{\pi\mu(1-\mu)}{(1+\mu)\sin \pi\mu}$$

dostaneme výraz, který má limitu, i když μ konverguje k 1, a jest tato limita $\frac{1}{2} \log \frac{1}{2}$, takže můžeme psáti

$$\log \Gamma(2) = \tfrac{1}{2} \log \tfrac{1}{2} + 1 - C - \tfrac{1}{3}(s_3 - 1) - \tfrac{1}{5}(s_5 - 1) - \tfrac{1}{7}(s_7 - 1) - \dots$$

t. j.

$$C = 1 - \tfrac{1}{2} \log 2 - \tfrac{1}{3}(s_3 - 1) - \tfrac{1}{5}(s_5 - 1) - \tfrac{1}{7}(s_7 - 1) - \dots \tag{22}$$

Položíme-li konečně ve (20) za $\mu = -\frac{1}{2}$, dostaneme

$$C = 1 - \log \tfrac{3}{2} - \frac{1}{2^2 . 3}(s_3 - 1) - \frac{1}{2^4 . 5}(s_5 - 1) - \frac{1}{2^6 . 7}(s_7 - 1) - \dots \tag{21}$$

Pomocí těchto řad a ještě pohodlněji pomocí asymptotického rozvoje, který jsme získali pomocí Euler-Maclaurinova vzorce sumačního, lze Eulerovu konstantu s libovolnou přesností snadno vypočítati.

221. Pomocí Euler-Maclaurinova vzorce můžeme také získati důležitou formuli Stirlingovu pro rozvoj $\log \Gamma(x)$ v řadu asymptotickou. Jest za předpokladu, že $\mu - \nu = p$ jest celé, kladné číslo,

$$\log \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\nu)} = \log \nu + \log(\nu+1) + \log(\nu+2) + \dots + \log \mu\,; \quad \nu > 0$$

Užijeme-li na pravou stranu této rovnice Euler-Maclaurinův vzorec (odstavec 112, rovnice (13)) kladouce $h = 1$, $F(x) = \log x$, $a_0 = \nu$ $a_0 + ph = \mu$, dostaneme ihned

$$\log \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\nu)} = \int_\nu^\mu \log x + \tfrac{1}{2} \log \mu + A + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{2k(2k-1)} \frac{B_k}{\mu^{2k-1}} + r_m,$$

kde r_m jest menší v absolutní hodnotě než první zanedbaný člen asymptotického rozvoje (a znaménka stejného), A pak jest na p nezávislo. Ze vztahu právě uvedeného plyne

$$\log \Gamma(\mu+1) = (\mu+\tfrac{1}{2}) \log \mu - \mu + B + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{2k(2k-1)} \frac{B_k}{\mu^{2k-1}} + r_m,$$

kde $B = A - \nu \log \nu + \nu + \log \Gamma(\nu)$ jest rovněž na p nezávislo. Z rovnice napsané však následuje

$$B = \lim_{\mu=\infty} \log \frac{\Gamma(\mu+1)}{\mu^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\mu}}.$$

Avšak podle poznámky odstavce 214 jest

$$\lim_{p=\infty} \frac{\Gamma(\nu+p+1)}{1.2\ldots p} \frac{1}{(p+1)^\nu} = 1, \qquad 0 < \nu < 1$$

a tedy $(\mu = \nu + p)$

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\mu^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\mu}} = \lim_{p=\infty} \frac{1.2\ldots p\,(p+1)^\nu}{(\nu+p)^{\nu+p+\frac{1}{2}} e^{-\nu-p}} =$$

$$= \lim_{p=\infty} \frac{1.2\ldots p}{e^{-(p+1)}(p+1)^{p+\frac{1}{2}}} \lim_{p=\infty} \frac{(p+1)^{\nu+p+\frac{1}{2}}}{(\nu+p)^{\nu+p+\frac{1}{2}} e^{-\nu+1}}.$$

Ale

$$\frac{(p+1)^{\nu+p+\frac{1}{2}}}{(\nu+p)^{\nu+p+\frac{1}{2}} e^{-\nu+1}} = 1/(1+\frac{\nu-1}{p+1})^{p+1} e^{-\nu+1} (1+\frac{\nu-1}{p+1})^{\nu-\frac{1}{2}}$$

a jest tedy

$$\lim_{p=\infty} \frac{(p+1)^{\nu+p+\frac{1}{2}}}{(\nu+p)^{\nu+p+\frac{1}{2}} e^{-\nu+1}} = 1;$$

poněvadž pak (odstavec 112, příklad 1)

$$\lim_{p=\infty} \frac{1.2\ldots p}{e^{-(p+1)}(p+1)^{p+\frac{1}{2}}} = \lim_{p=\infty} \frac{1.2\ldots p}{e^{-p} p^{p+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi},$$

jest

$$B = \log \sqrt{2\pi}.$$

Máme tedy obecně pro každé $\mu > 1$

$$\log \Gamma(\mu+1) = \log \sqrt{2\pi} + (\mu+\tfrac{1}{2}) \log \mu - \mu + \omega(\mu), \tag{23}$$

de

$$\omega(\mu) = \frac{B_1}{1.2} \frac{1}{\mu} - \frac{B_2}{3.4} \frac{1}{\mu^3} + \frac{B_3}{5.6} \frac{1}{\mu^5} - \ldots + (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k-1)2k} \frac{1}{\mu^{2k-1}} + r_k.$$

Zbytek r_k jest tvaru

$$r_k = \frac{(-1)^k B_{k+1}}{(2k+1)(2k+2)} \frac{\Theta}{\mu^{2k+1}}; \qquad 0 < \Theta < 1. \tag{24}$$

Rozvoj (23) jest velmi vhodný pro počítání $\log \Gamma(\mu)$ pro veliké μ. Jest to rozvoj asymptotický, neboť kdybychom vypsali nekonečnou řadu pro $\omega(\mu)$, vznikla by řada pro každé μ divergentní (srovnej odstavec 112, příklad 1).

Rozvoj odvozený sluje **Stirlingův**. Lze jej psáti také ve tvaru (v důsledku (I))

$$\log \Gamma(\mu) = \log \sqrt{2\pi} + (\mu - \tfrac{1}{2}) \log \mu - \mu + \omega(\mu). \tag{25}$$

POZNÁMKA. Funkce $\omega(\mu)$, jíž lze úplně definovati rovnicí (25), sluje **funkce Binetova.** Později podáme ještě její vyjádření integrální a ve cvičeních uvedeme některé vztahy pro tuto funkci snadno z vyjádření integrálního plynoucí. Zevrubné odvození hlavních z těchto vztahů najde čtenář v 1. vydání Integr. počtu.

222. Funkci $\log \Gamma(\mu)$ možno také vyjádřiti integrálem určitým. Provedu to v následujícím, při čemž nebudu zevrubně dokazovati oprávněnost při všech derivacích integrálů podle parametrů a záměnách pořadů integračních; dokáži splnění takových podmínek k oprávněnosti zmíněné nutných jenom tam, kde by se čtenáři mohly při důkaze vyskytnouti potíže.

Derivujme rovnici

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x}\, dx, \qquad \mu > 0$$

na obou stranách podle μ. Obdržíme snadno

$$\Gamma'(\mu) = \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \log x\, dx.$$

Avšak

$$\log x = \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z}\, dz, \qquad \text{(odstavec 165);}$$

tedy

$$\Gamma'(\mu) = \int_0^\infty dx \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z}\, dz. \tag{+}$$

Pořádek integrací ve výraze právě napsaném lze zaměnit; důkaz tohoto tvrzení stačí provésti pro $\mu > 1$ a tvrzení bude dokázáno i pro $\mu > 0$. Neboť jest integrací částečnou (podle proměnné x, při čemž integrujeme vždy činitel $x^{\mu-1}$)

$$\int_0^\infty dx\, x^{\mu-1} e^{-x} \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z}\, dz =$$

$$= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty dx\, x^\mu e^{-x} \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z}\, dz - \frac{1}{\mu} \int_0^\infty dx\, x^\mu e^{-x} \int_0^\infty e^{-xz}\, dz,$$

$$\int_0^\infty dz \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z} dx =$$

$$= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty dz \int_0^\infty x^\mu e^{-x} \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z} dx - \frac{1}{\mu} \int_0^\infty dz \int_0^\infty x^\mu e^{-x(1+z)} dx.$$

Druhé členy na pravých stranách rovnic vypsaných lze snadno vypočísti, oba jsou rovny $\Gamma(\mu)/\mu$ (podle (1) a (1')). Jsou-li tedy prvé členy sobě rovny, jsou i levé strany sobě rovny; t. j. je-li dovolena záměna pořadu integračního v (+), když $\mu > 1$, jest dovolena v (+) záměna pořadu integračního, když $\mu > 0$.

Předpokládejme tudíž v (+) pro okamžik, že $\mu > 1$. Pak k důkazu záměnnosti pořadu integračního jest podle odstavce 184 postačitelno splnění některých podmínek. Jedna z nich jest, aby integrál

$$I_A = \int_A^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z} dx$$

konvergoval k nule pro lim $A = \infty$, a to stejnoměrně pro všecka z intervalu $(0, \infty)$. Avšak podle formule Taylorovy jest (pro $A > 1$)

$$e^{-z} - e^{-xz} = -z(e^{-\vartheta z} - xe^{-\vartheta xz}), \qquad 0 < \vartheta < 1$$

a tedy pro x v (A, ∞)

$$\left| \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z} \right| < x, \qquad |I_A| < \int_A^\infty x^\mu e^{-x} dx.$$

Vskutku tedy konverguje I_A k nule stejnoměrně pro všecka z; jelikož i ostatní podmínky postačitelné odstavce 184 jsou splněny, můžeme v (+) pořad integrační zaměniti a psáti pro $\mu > 0$

$$\Gamma'(\mu) = \int_0^\infty \frac{dz}{z} \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} (e^{-z} - e^{-xz}) dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left[e^{-z} \int_0^\infty e^{-x} x^{\mu-1} dx - \int_0^\infty e^{-x(z+1)} x^{\mu-1} dx\right]$$

$$= \Gamma(\mu) \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left(e^{-z} - \frac{1}{(z+1)^\mu}\right);$$

(podle (1), (1')).

Integrujeme-li rovnici

$$\frac{\Gamma'(\mu)}{\Gamma(\mu)} = \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left(e^{-z} - \frac{1}{(z+1)^\mu}\right) \tag{A}$$

podle μ v mezích 1, ν ($\nu > 0$) — při čemž můžeme na pravé straně provésti tu integraci za znaménkem integračním, neboť integrál

$$\left|\int_B^\infty \frac{dz}{z}\left(e^{-z} - \frac{1}{(z+1)^\mu}\right)\right| < \int_B^\infty \frac{dz}{z} e^{-z} + \int_B^\infty \frac{dz}{z(z+1)^\varrho}, \ \varrho \text{ menší z čísel } 1, \nu,$$

a tedy integrál na levé straně napsané nerovniny konverguje k nule stejnoměrně pro všecka μ intervalu $(1, \nu)$ — obdržíme

$$\log \Gamma(\nu) = \int_0^\infty \frac{dz}{z}\left[(\nu-1)e^{-z} - \frac{(z+1)^{-1} - (z+1)^{-\nu}}{\log(z+1)}\right]. \tag{++}$$

Dosadíme-li do této rovnice za ν číslo 2, obdržíme na levé straně 0, neboť $\Gamma(2) = 1$; odečteme-li rovnici dosazením vzniklou a znásobenou $\nu - 1$ od rovnice (++), máme po snadné úpravě

$$\log \Gamma(\nu) = \int_0^\infty \left[(\nu-1)(z+1)^{-2} - \frac{(z+1)^{-1} - (z+1)^{-\nu}}{z}\right] \frac{dz}{\log(z+1)};$$

anebo konečně, klademe-li $z = e^x - 1$,

$$\log \Gamma(\nu) = \int_0^\infty \left[(\nu-1)e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-\nu x}}{1 - e^{-x}}\right] \frac{dx}{x} \tag{B}$$

formuli, kterou po prvé *Plana* odvodil.

223. Rozklad výrazu integrálního pro $\log \Gamma(\nu)$. Funkci za znaménkem integračním ve formuli Planově lze rozložiti ve dvě části, z nichž druhá konverguje k nule pro $\lim \nu = \infty$. Rozklad možný (a zároveň nejjednodušší) by byl tento:

$$\frac{1}{x}\left[(\nu-1)e^{-x} - \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right] + \frac{e^{-\nu x}}{(1-e^{-x})x}.$$

Avšak tyto výrazy bychom nemohli integrovati v mezích $0, \infty$; neboť stávají se nekonečnými řádu 2 pro $x = 0$. Ku příkladu pro výraz druhý lze psáti

$$\frac{e^{-\nu x}}{(1-e^{-x})x} = e^{-\nu x}\frac{1}{x(1-e^{-x})} = e^{-\nu x}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x} + \frac{B_1}{2!} - \ldots\right),$$

odkudž tvrzení učiněné jest patrno; zároveň jest jasno, že, odečteme-li od druhého výrazu $e^{-\nu x}(1/x^2 + 1/2x)$ a totéž k prvému přičteme, docílíme rozklad, kde prvý i druhý výraz lze integrovati v mezích $0, \infty$. Dostaneme tak

$$\log \Gamma(\nu) = \Phi(\nu) + \omega(\nu), \tag{C}$$

při čemž

$$\Phi(\nu)=\int_0^\infty\left[\left(\nu-1-\frac{1}{1-e^{-x}}\right)e^{-x}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)e^{-\nu x}\right]\frac{dx}{x}, \qquad (C_1)$$

$$\omega(\nu)=\int_0^\infty\left[\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right]e^{-\nu x}\frac{dx}{x}. \qquad (C_2)$$

$\Phi(\nu)$ lze vypočísti. Nejprve jest

$$\Phi(\nu)-\Phi(1)=\int_0^\infty\left[\left(\nu-1\right)e^{-x}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\nu x}-e^{-x}\right)\right]\frac{dx}{x}=$$

$$=\int_0^\infty\left[\frac{e^{-\nu x}-e^{-x}}{x^2}+(\nu-1)\frac{e^{-x}}{x}\right]dx+\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^{-\nu x}-e^{-x}}{x}dx=\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\log\nu-\nu+1;$$

(odstavec 165)

a zbývá k výpočtu jenom $\Phi(1)$. Výpočet tento provedeme pomocí rovnic

$$\Phi(1)=\int_0^\infty\left[-\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)e^{-x}\right]\frac{dx}{x},$$

$$\Phi(1)=\int_0^\infty\left[-\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{1-e^{-\frac{1}{2}x}}+\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}\right]\frac{dx}{x}, \qquad \text{(substituce } x=\tfrac{1}{2}x')$$

$$\log\sqrt{\pi}=\int_0^\infty\left[-\frac{e^{-x}-e^{-\frac{1}{2}x}}{1-e^{-x}}-\tfrac{1}{2}e^{-x}\right]\frac{dx}{x}$$

(rovnice poslední následuje z poslední rovnice předcházejícího odstavce, klademe-li tam $\nu=\frac{1}{2}$, $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$). Násobíme-li tyto tři rovnice po řadě čísly -2, 1, 1 a sečteme, vypadnou členy s jmenovatelem $1-e^{-x}$ a dostaneme po jednoduché úpravě

$$-\Phi(1)+\log\sqrt{\pi}=\int_0^\infty\left[2\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}x}-e^{-x}}{x}-\tfrac{1}{2}e^{-x}\right)+\tfrac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{2}x}-e^{-x}\right)\right]\frac{dx}{x}$$

$$=(\log\tfrac{1}{2}+2\,.\,\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{2}\log 2=-\log\sqrt{2}+1 \quad \text{(odst. 165).}$$

Jest tedy $\Phi(1)=\log\sqrt{2\pi}-1$ a tudíž

$$\Phi(\nu)=(\nu-\tfrac{1}{2})\log\nu-\nu+\log\sqrt{2\pi}.$$

Porovnáme-li výsledek docílený pro $\log\Gamma(\nu)=\Phi(\nu)+\omega(\nu)$, kde $\Phi(\nu)$ jest vyjádřena rovnicí právě vypsanou, s konečnou rovnicí odstavce 221, vidíme, že funkce tu a v onom odstavci stejně značené písmenem ω jsou identické; že tudíž $\omega(\nu)$ rovnicí (C_2) stanovená jest funkce Binetova.

224. Integrální výraz pro Eulerovu konstantu. Z rovnice (18) odstavce 220 následuje nejprve pro Eulerovu konstantu C

$$C = -\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$$

a tedy podle (A)

$$C = \int_0^\infty \frac{dz}{z}\left(\frac{1}{1+z} - e^{-z}\right).$$

Avšak snadno*) lze dokázati, že

$$\int_0^\infty dz\left[\frac{1}{z(1+z)} - \frac{1}{e^z - 1}\right] = 0.$$

Lze tedy též psáti

$$C = \int_0^\infty dz\left[\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{ze^z}\right]$$

aneb, klademe-li $z = \log 1/t$,

$$C = \int_0^1 dt\left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\log t}\right].$$

225. Binetova funkce. Binetova funkce definovaná rovnicí

$$\omega(\mu) = \log\frac{\Gamma(\mu)}{\sqrt{2\pi}\,\mu^{\mu-\frac{1}{2}}e^{-\mu}} \qquad \text{pro } \mu > 0$$

hoví vztahu $\lim\limits_{x=\infty} \omega(x) = 0$. Vyplývá to ihned z asymptotického rozvoje pro $\omega(x)$ (viz str. 483). Na základě tohoto vztahu lze odvoditi řadu konvergentní pro $\omega(x)$. Z definice plyne pro $\omega(x)$ nejprve funkcionální vztah

$$\omega(x) - \omega(x+1) = (x+\tfrac{1}{2})\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1.$$

Píšeme-li v tomto vztahu místo x postupně $x, x+1, x+2, \ldots, x+n-1$ a relace tak získané sčítáme, obdržíme

*) Jest totiž

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{dz}{z(1+z)} = \int_{\varepsilon'}^\infty \frac{dz}{e^z - 1}$$

(plyne transformací integrálu na levé straně substitucí $z = e^{z'} - 1$), $\varepsilon' = \log(1+\varepsilon)$. Tedy

$$\int_{\varepsilon'}^\infty dz\left[\frac{1}{z(1+z)} - \frac{1}{e^z - 1}\right] = \int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} \frac{dz}{z(1+z)} = \log\frac{\varepsilon(1+\varepsilon')}{\varepsilon'(1+\varepsilon)},$$

odkudž při $\lim \varepsilon = 0$ vyplývá nahoře uvedený vztah (je-li $\lim \varepsilon = 0$, jest i $\lim \varepsilon' = 0$ a $\lim \varepsilon/\varepsilon' = 1$).

$$\omega(x)-\omega(x+n)=\sum_{k=0}^{n-1}[(x+k+\tfrac{1}{2})\log(1+\frac{1}{x+k})-1]$$

aneb

$$\omega(x)=\sum_{k=0}^{n-1}[(x+k+\tfrac{1}{2})\log(1+\frac{1}{x+k})-1]+r_n(x), \tag{p}$$

kde $r_n(x)=\omega(x+n)<1/12(x+n)$ a zároveň $r_n(x)>0$, ovšem stále za podmínky $x>0$.

Rovnici vznikající z (p) tím, že necháme n vzrůstati nade všecky meze, čímž součet změní se v nekonečnou řadu, můžeme derivovati a dostaneme

$$\omega'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\log\frac{x+k+1}{x+k}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+k}+\frac{1}{x+k+1}\right)\right], \qquad x>0, \tag{q}$$

neboť nekonečná řada na pravé straně poslední rovnice jest v intervalu (ε, ∞) stejnoměrně konvergentní. Můžeme také tento vztah psáti ve tvaru

$$\omega'(x)=\frac{1}{2x}-\log x+\lim_{n=\infty}\left[\log(x+n)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k}\right], \tag{r}$$

aneb, značí-li C Eulerovu konstantu,

$$\omega'(x)=-\log x-\frac{1}{2x}-C+x\left(\frac{1}{(x+1)1}+\frac{1}{(x+2)2}+\frac{1}{(x+3)3}+\dots\right).$$

Jestliže x jest celé číslo rovné m, lze této rovnici dáti též tvar

$$-\omega'(m)=C-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{m-1}+\frac{1}{2m}-\log m\right).$$

Derivujeme-li nekonečnou řadu pro $\omega'(x)$ $(k-1)$-kráte, získáme konečně rovnost (opírati se můžeme při tom o (r))

$$\omega^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-2)!}{x^{k-1}}+\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2x^k}+$$
$$+(-1)^k(k-1)!\left(\frac{1}{x^k}+\frac{1}{(x+1)^k}+\frac{1}{(x+2)^k}+\dots\right).$$

226. Veškeré tyto derivace můžeme vyjádřiti pomocí určitého integrálu a asymptotických řad a to, aniž používáme rozvoje (23), který jsme získali pomocí formule Euler-Maclaurinovy. Jest podle (C_2) po jednoduché úpravě

$$\omega(x)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-xv}}{v^2}\left[\frac{v}{2}\,\frac{1+e^{-v}}{1-e^{-v}}-1\right]dv, \qquad x>0. \tag{s}$$

Odtud plyne, jelikož funkce v hranaté závorce jest v intervale integračním kladná a menší než $\frac{1}{12}v^2$,*) že pravou stranu derivujeme podle x, derivujeme-li podle x za znaménkem integračním (odstavec 163, věta 3). Jest tedy

$$\omega^{(k)}(x) = (-1)^k \int_0^\infty v^{k-2} e^{-vx} \left(\frac{v}{2}\frac{1+e^{-v}}{1-e^{-v}} - 1\right) dv.$$

Jest však (pro v reálné)

$$\frac{v}{2}\frac{1+e^{-v}}{1-e^{-v}} - 1 = \frac{B_1 v^2}{2!} - \frac{B_2 v^4}{4!} + \frac{B_3 v^6}{6!} - \dots$$
$$\dots + (-1)^n \frac{B_{n-1} v^{2n-2}}{(2n-2)!} + (-1)^{n+1} \frac{\Theta B_n v^{2n}}{(2n)!},$$

kde $0 < \Theta < 1$.**) Dosadíme-li tento rozvoj do integrálních výrazů pro $\omega(x)$ resp. $\omega^{(k)}(x)$, máme, integrujeme-li jednotlivé členy, při čemž při posledním užíváme věty o střední hodnotě, ihned asymptotické rozvoje pro $\omega(x)$, $\omega^{(k)}(x)$. Asymptotický rozvoj pro $\omega(x)$ takto získaný shoduje se s rozvojem (23) a netřeba jej uváděti, *asymptotické rozvoje pak pro $\omega^{(k)}(x)$ vyplývají z asympto-*

---

*) Neboť jest

$$\frac{v}{2}\frac{1+e^{-v}}{1-e^{-v}} - 1 = \frac{v}{2}\frac{e^{+\frac{1}{2}v}+e^{-\frac{1}{2}v}}{e^{+\frac{1}{2}v}-e^{-\frac{1}{2}v}} - 1 = \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{v}{2}\right)^4\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)+\dots}{\frac{1}{1!}+\left(\frac{v}{2}\right)^2\frac{1}{3!}+\left(\frac{v}{2}\right)^4\frac{1}{5!}+\dots}.$$

Jelikož funkce v hranaté závorce jest kladná a menší než $\frac{1}{12}v^2$, následuje s integrálního výrazu podle věty o střední hodnotě, že

$$0 < \omega(x) < \frac{1}{12x} \qquad \text{pro } x > 0,$$

čímž opětně dokázáno, že $\lim \omega(x) = 0$ pro $\lim x = \infty$.

**) Podle 2. příkladu na str. 321 a také podle DP 159 jest

$$\frac{v}{2}\frac{1+e^{-v}}{1-e^{-v}} - 1 = \sum \frac{2v^2}{v^2+4k^2\pi^2}.$$

Avšak

$$\frac{v^2}{v^2+4k^2\pi^2} = \frac{v^2}{(2k\pi)^2} - \frac{v^4}{(2k\pi)^4} + \frac{v^6}{(2k\pi)^6} - \dots$$
$$\dots + (-1)^n \frac{v^{2n-2}}{(2k\pi)^{2n-2}} + \frac{(-1)^{n-1} v^{2n}}{(2k\pi)^{2n-2}(v^2+4k^2\pi^2)}$$

(podle formule pro součet $n-1$ členů řady geometrické); tedy

$$\frac{v}{2}\frac{1+e^{-v}}{1-e^{-v}} - 1 = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \frac{2v^{2j}}{(2\pi)^{2j}} \left(\frac{1}{1^{2j}} + \frac{1}{2^{2j}} + \frac{1}{3^{2j}} + \dots\right) + r_n,$$

kde

$$r_n = (-1)^{n+1} \frac{2v^{2n}}{(2\pi)^{2n-2}} \left(\frac{1}{1^{2n-2}(v^2+1^2 . 2^2\pi^2)} + \frac{1}{2^{2n-2}(v^2+2^2 . 2^2\pi^2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3^{2n-2}(v^2+3^2 . 2^2\pi^2)} + \dots\right),$$

což podle DP 159, (h) dává svrchu uvedený vztah.

tického rozvoje pro $\omega(x)$, derivujeme-li jej člen za členem podle x, při čemž v posledním členu zbytkovém pokládáme Θ za konstantu (ve skutečnosti jest to funkce proměnné x, o níž víme, že její hodnota jest v intervalu $(0, 1)$, a jež jest různá pro $\omega(x)$ a $\omega^{(k)}(x)$). Máme tak

$$(-1)^k \frac{\omega^{(k)}(x)}{(k-1)!} = \binom{k}{1}\frac{B_1}{2x^{k+1}} - \binom{k+2}{3}\frac{B_2}{4x^{k+3}} + \binom{k+4}{5}\frac{B_3}{6x^{k+5}} - \dots$$

$$\dots + (-1)^n \binom{k+2n-4}{2n-3}\frac{B_{n-1}}{(2n-2)\,x^{k+2n-3}} + r_n^{(k)}(x),$$

kde

$$r_n^{(k)}(x) = (-1)^{n+1}\binom{k+2n-2}{2n-1}\frac{B_n\Theta}{2nx^{k+2n-1}}, \qquad 0 < \Theta < 1.$$

Rovnice tato jest platna pro $x > 0$ a pro $k = 0, 1, 2, \dots, \omega^{(0)}(x) = \omega(x)$.

Porovnáme-li asymptotické rozvoje pro $\omega^{(k)}(x)$ s rozvoji konvergentními dříve získanými, dostaneme

$$\frac{1}{x^k} + \frac{1}{(x+1)^k} + \frac{1}{(x+2)^k} + \dots = \frac{1}{(k-1)x^{k-1}} + \frac{1}{2x^k} + (-1)^k \frac{\omega^{(k)}(x)}{(k-1)!}, \qquad (t)$$

$k = 2, 3, \dots$; vztah tento, používáme-li asymptotického rozvoje pro $\omega^{(k)}(x)$ svrchu vypsaného, jest užitečný pro numerický výpočet řad

$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots, \qquad k = 2, 3, \dots$$

POZNÁMKA. Rovnice (t) byla odvozena za předpokladu, že k jest celistvé. S malou změnou však zůstává v platnosti, i když k jest jakékoliv číslo kladné > 1. Lze totiž psáti pro $\lambda > 1$

$$\frac{1}{x^\lambda} + \frac{1}{(x+1)^\lambda} + \frac{1}{(x+2)^\lambda} + \dots =$$

$$= \frac{1}{(\lambda-1)\,x^{\lambda-1}} + \frac{1}{2x^\lambda} + \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty v^{\lambda-2} e^{-xv}\left[\frac{v}{2}\,\frac{1+e^{-v}}{1-e^{-v}} - 1\right] dv.$$

Důkaz toho provésti lze ku příkladu tím, že dokážeme — označíme-li levou stranu $\varphi(x)$ a pravou $\psi(x)$ — že platí $\varphi(x+1) - \varphi(x) = x^{-\lambda}$ a rovněž $\psi(x+1) - \psi(x) = x^{-\lambda}$.

2. NĚKTERÁ UŽITÍ GAMMAFUNKCE.

227. Výpočet některých integrálů pomocí gammafunkce. Nejprve lze integrál

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\,dx, \quad p > 0, \quad q > 0$$

substitucí $x^m = y$ transformovati na integrál

$$\frac{1}{m}\int_0^1 y^{\frac{p}{m}-1}(1-y)^{q-1}\,dy = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{m\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}$$

a jest tedy

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{m\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}. \tag{1}$$

V této rovnici jsou obsaženy hodnoty některých eliptických integrálů. Tak ku příkladu

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 (1-x^4)^{\frac{1}{2}-1}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\sqrt{\pi}}{4\pi\sqrt{2}}$$

a tedy

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{4\sqrt{2\pi}}. \tag{2}$$

Podobně

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}. \tag{3}$$

Jest tedy součin integrálů (2) a (3) rovný $\frac{1}{4}\pi$.

228. Integrál

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x\,dx, \quad m > 0, \quad n > 0$$

se vypočte pomocí (1), provedeme-li napřed substituci

$$\sin x = y; \qquad dx = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Dostaneme

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x\,dx = \int_0^1 y^{m-1}(1-y^2)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^1 y^{m-1}(1-y^2)^{\frac{1}{2}n-1}\,dy.$$

I jest tedy podle (1)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}. \tag{4}$$

Specielně jest

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{m-1} x\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{m-1} x\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}. \tag{5}$$

Kdybychom kladli ve (4) $n = m$ a užili formule $2 \sin x \cos x = \sin 2x$, dostali bychom

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2\Gamma(m)} = \frac{1}{2^{m-1}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{m-1} 2x\,dx = \frac{1}{2^m}\int_0^{\pi} \sin^{m-1} z\,dz = \frac{1}{2^{m-1}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{m-1} z\,dz.$$

Porovnáním obou výsledků dosažených pro integrál $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{m-1} z\,dz$ máme

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} = \frac{2^{m-1}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2\Gamma(m)}$$

aneb
$$\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu+\tfrac{1}{2}) = 2^{-2\mu+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\mu),$$

což jest relace *Legendreova* (odstavec 219); $(\mu = \frac{1}{2}m)$.

229. Integrál

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(a+bx)^{\alpha+\beta}}\,dx, \quad a>0, \quad a+b>0, \quad \alpha>0, \quad \beta>0$$

lze rovněž snadno převésti na betafunkci a to substitucí

$$y = \frac{(a+b)x}{a+bx}, \qquad 1-y = \frac{a(1-x)}{(a+bx)}, \qquad dy = \frac{a(a+b)\,dx}{(a+bx)^2};$$

tedy jest

$$y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\,dy = \frac{(a+b)^\alpha a^\beta x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(a+bx)^{\alpha+\beta}}\,dx$$

a jelikož podle předpokladu o číslech a, $a+b$ číslo $-a/b$ není obsaženo v intervalu $(0, 1)$,

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(a+bx)^{\alpha+\beta}}\,dx = (a+b)^{-\alpha} a^{-\beta}\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\,dy =$$
$$= \frac{1}{(a+b)^\alpha a^\beta}\cdot\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

230. Integrály

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^m}\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^n}\,dx, \quad 0<m<1, \quad 0<n<2, \quad b>0$$

lze též jednoduše vyjádřiti pomocí funkce gamma. Proveďme počet ku příkladu pro první integrál. Jest (odstavec 211, (1′))

$$\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^\infty z^{m-1} e^{-zx}\,dz$$

a tedy
$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^m}\,dx = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \cos bx\; z^{m-1} e^{-zx}\,dz\right)dx.$$

Pořad integrací jest dovoleno zaměniti, čímž dostaneme

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^m}\,dx = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^\infty dz\left(\int_0^\infty \cos bx\; z^{m-1} e^{-zx}\,dx\right) = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^\infty \frac{z^m}{b^2+z^2}\,dz.$$

Klademe-li ještě $z^2 = b^2 u$, máme

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^m}\,dx = \frac{b^{m-1}}{2\Gamma(m)}\int_0^\infty \frac{u^{\frac{1}{2}(m+1)-1}}{u+1}\,du = \frac{\pi b^{m-1}}{2\Gamma(m)\cos\frac{1}{2}m\pi},$$

$$0 < m < 1$$

a podobně
$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^n}\,dx = \frac{\pi b^{n-1}}{2\Gamma(n)\sin\frac{1}{2}n\pi}, \qquad 0 < n < 2.$$

Jako zvláštní případy posledního vztahu dostáváme hodnoty integrálů

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} = \int_0^\infty \frac{\cos bx}{\sqrt{x}}\,dx$$

dříve již vypočtené.

231. Výpočet řady hypergeometrické pro $x = 1$. Pod řadou hypergeometrickou vyrozumíváme tuto řadu

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{\gamma.1}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1).1.2}x^2 + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2).1.2.3}x^3 + \dots$$

Člen obecný u_n, jenž jest

$$u_n = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+n-1).1.2\ \dots\ n}x^n,$$

jest součinem dvou faktorů

$$n^{\alpha+\beta-\gamma-1}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^n . \frac{n^{-\alpha}\Gamma(\alpha+n).n^{-\beta}\Gamma(\beta+n)}{n^{-\gamma}\Gamma(\gamma+n)\Gamma(n)}.$$

Druhý činitel, když n roste nade všecky meze, konverguje k 1 (odstavec 214, poznámka), takže můžeme klásti

$$u_n = \lambda_n n^{\alpha+\beta-\gamma-1}x^n,$$

kde $\lim_{n=\infty}\lambda_n = \Gamma(\gamma)/\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$. Z tohoto vyjádření obecného členu jest patrno, že řada hypergeometrická jest konvergentní vždy, když $|x| < 1$; je-li $x = -1$, jest konvergentní pro $\alpha+\beta-\gamma-1 < 0$, jelikož v tomto případě u_n aspoň od jistého indexu počínajíc stále klesá; je-li konečně $x = 1$, konvergentní pro $\alpha+\beta-\gamma < 0$ (DP 44). Nejsou-li podmínky při $x = \pm 1$ vytčené splněny, jest řada divergentní.

Pro $x = 1$ lze řadu hypergeometrickou vyjádřiti pomocí gammafunkcí, což provedeme v následujícím, používajíce integrálů Eulerových. Nejprve jest podle věty binomické

$$(1-x)^{-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}x^2 + \dots$$

Násobíme-li obě strany rovnice $x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-\beta-1}$ a integrujeme-li v mezích $(0, 1)$, což jest přípustno toliko za předpokladů $\beta > 0$, $\gamma-\beta > 0$, $\gamma-\alpha-\beta > 0$, dostaneme pro obecný člen pravé strany (odstavec 213, (3_2))

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{1.2\dots n}\int_0^1 x^{\beta+n-1}(1-x)^{\gamma-\beta-1}\,dx =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots n.\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} \int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-\beta-1}\,dx.$$

Prvý činitel pravé strany jest právě obecný člen u_n řady hypergeometrické při $x=1$, druhý činitel jest betafunkce na n nezávislá; dostáváme tedy na pravé straně naznačeným násobením a potomní integrací součet řady hypergeometrické při $x=1$ násobený betafunkcí $B(\beta, \gamma-\beta)$. Vyjádříme-li tuto betafunkci, jakož i betafunkci na levé straně integrací vzniklou pomocí gammafunkcí, máme ihned po jednoduché úpravě

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma-\beta-\alpha)\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}, \tag{A}$$

čímž žádané vyjádření provedeno, ovšem za předpokladů $\beta>0$, $\gamma-\beta>0$, $\gamma-\alpha-\beta>0$. Jelikož však α a β mohou se v řadě hypergeometrické zaměniti, platí toto odvození též za supposic $\alpha>0$, $\gamma-\alpha>0$, $\gamma-\beta-\alpha>0$. Vztah (A) jest platný však pro všecka α, β, γ, pro něž $\gamma-\alpha-\beta>0$. V tomto rozsahu však pouze pomocí integrálů Eulerových přímo dokázán býti nemůže, jelikož Eulerovy integrály $B(p, q)$ při reálné proměnné integrační mají význam toliko při $p>0$, $q>0$.*)

232. Abychom vypočetli integrál

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos a v \cos^\beta v\, dv$$

pomocí gammafunkce — užívajíce metody *Kummerem* vyložené —, budeme používati formule pro $\cos av$ odvozené v DP 156, poznámka. Podle (2) jest

*) Snadno bychom mohli platnost vztahu (A) rozšířiti použitím vztahů mezi tak zv. „funkcemi styčnými" (u Gausse, který je zavedl, „functiones contiguae"). Platí ku příkladu tento vztah

$$\gamma[(\gamma-1)-(2\gamma-\alpha-\beta-1)x]\,F(\alpha, \beta, \gamma; x) + (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\,x\,F(\alpha, \beta, \gamma+1; x) - \\ -\gamma(\gamma-1)(1-x)\,F(\alpha, \beta, \gamma-1; x) = 0,$$

kterýž snadno dosazením příslušných rozvojů hypergeometrických se odůvodní a ze kterého vyplývá pro $x=1$

$$\gamma(\gamma-\alpha-\beta)\,F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\,F(\alpha, \beta, \gamma+1; 1). \tag{+}$$

Vztah tento jest na základě věty (I) o funkci gamma v souhlase s vyjádřením (A). Na pravé straně vztahu toho však vyskytuje se jakožto třetí argument $\gamma+1$; užijeme-li jej n-kráte po sobě, dospějeme k $F(\alpha, \beta, \gamma+n; 1)$, při čemž, volíme-li n dosti veliké, můžeme docíliti, aby $\gamma+n-\beta>0$ i $\gamma+n-\alpha>0$ a tak v důsledku toho postačí ku platnosti vztahu (A), aby vedle $\gamma>\alpha+\beta$ bylo buď $\beta>0$ aneb $\alpha>0$. Užijeme-li však relaci

$$(\beta-\gamma+1)\,F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = (\beta+\alpha-\gamma+1)\,F(\alpha, \beta+1, \gamma; 1),$$

kteráž stejně jako (+) se odvodí, rozšíří se platnost relace (A) podobně i na případ, že by $\beta<0$ i $\alpha<0$.

Ostatně plyne bez potíží relace (A) na základě opětovného použití rovnice (+), pak okolnosti, že

$$\lim_{n=\infty} F(\alpha, \beta, \gamma+n; 1) = 1,$$

a vztahu (II) vyjadřujícího gammafunkci jakožto limitu součinu.

$$\cos av = 1 - \frac{a^2}{2!}\sin^2 v + \frac{(a^2-2^2)\,a^2}{4!}\sin^4 v - \frac{(a^2-4^2)(a^2-2^2)\,a^2}{6!}\sin^6 v + \dots$$

Násobme obě strany této rovnice výrazem $\cos^\beta v$ a integrujme v mezích 0, $\frac{1}{2}\pi$. Na pravé straně bude tento součet tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(a^2-4(k-1)^2)(a^2-4(k-2)^2)\dots a^2}{(2k)!}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2k} v\cos^\beta v\,dv.$$

Avšak podle (4) odstavce 228 jest

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2k} v\cos^\beta v\,dv = \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(k+1+\frac{\beta}{2}\right)} =$$

$$= \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 1\,.\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\,\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{2^{k+1}.\left(\frac{\beta}{2}+k\right)\left(\frac{\beta}{2}+k-1\right)\cdots\left(\frac{\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}+1\right)}.$$

Dosadíme-li výraz tento do posledního součtu, máme po jednoduché úpravě

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\beta}{2}+1\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{a}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{a}{2}+k-1\right)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;.\;.\;k}\times$$

$$\times\frac{-\frac{a}{2}\left(-\frac{a}{2}+1\right)\left(-\frac{a}{2}+2\right)\cdots\left(-\frac{a}{2}+k-1\right)}{\left(\frac{\beta}{2}+1\right)\left(\frac{\beta}{2}+2\right)\left(\frac{\beta}{2}+3\right)\cdots\left(\frac{\beta}{2}+k\right)}.$$

Výraz však se znaménkem součtovým jest $F(\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}\beta+1; 1)$ (odstavce 231) a jest tedy

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^\beta v\cos av\,dv = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\beta}{2}+1\right)}F\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{\beta}{2}+1;\ 1\right)$$

za předpokladu ovšem, že $\beta > -1$. Anebo konečně podle (A) odstavec 231

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^\beta v\cos av\,dv =$$

$$= \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\beta}{2}+1\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}+1\right)^2}{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}-\frac{a}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}+\frac{a}{2}+1\right)} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{\beta+1}}\,\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}-\frac{a}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}+\frac{a}{2}+1\right)} \qquad \text{(podle Legendreovy relace).}$$

Výsledek tento můžeme psáti též ve tvaru

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^\beta v \cos av\, dv = \frac{\pi}{2^\beta} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}-\frac{a}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}+\frac{a}{2}+1\right)}.$$

Z této rovnice a z rovnice samozřejmé (viz odstavec 90, poznámka 1)

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^\beta v \sin av\, dv = 0$$

dostáváme snadno tyto vztahy

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^\beta v \cos a\,(v-\tfrac{1}{2}\pi)\, dv = \frac{\pi\cos\frac{1}{2}a\pi}{2^\beta} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}-\frac{a}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}+\frac{a}{2}+1\right)},$$

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^\beta v \sin a\,(\tfrac{1}{2}\pi-v)\, dv = \frac{\pi\sin\frac{1}{2}a\pi}{2^\beta} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}-\frac{a}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}+\frac{a}{2}+1\right)},$$

z kterýchž substitucí $v=\frac{1}{2}\pi-v'$ následuje (stále při $\beta>-1$)

$$\int_0^\pi \sin^\beta v \cos av\, dv = \frac{\pi\cos\frac{1}{2}a\pi}{2^\beta} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}-\frac{a}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}+\frac{a}{2}+1\right)},$$

$$\int_0^\pi \sin^\beta v \sin av\, dv = \frac{\pi\sin\frac{1}{2}a\pi}{2^\beta} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}-\frac{a}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}+\frac{a}{2}+1\right)}.$$

3. LOGARITMUS INTEGRÁL A JINÉ FUNKCE DEFINOVANÉ URČITÝMI INTEGRÁLY.

233. Již v odstavci 53 byla řeč o funkci zvané *logaritmus integrál* — anebo též pojmenované jedním slovem *integrállogaritmus* — stanovené tam až na konstantu. Určitým integrálem můžeme tu funkci definovati úplně a položíme

$$\operatorname{li}(e^{-x}) = -\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt, \qquad x>0 \tag{1}$$

(čtouce značku $\operatorname{li}(e^{-x})$ obšírně logaritmus integrál argumentu e^{-x}). Kdybychom v rovnici předcházející kladli zavádějíce novou proměnnou integrační $u=e^{-t}$, dostali bychom pro meze nového integrálu hodnoty $e^{-x}=\xi$, 0 a

$$\operatorname{li}\xi = \int_0^\xi \frac{du}{\log u}, \qquad 0\leqq\xi<1. \tag{1'}$$

Z rovnic (1) a (1') plyne pro derivaci integrállogaritmu

$$[\mathrm{li}(e^{-x})]' = \frac{e^{-x}}{x}, \qquad [\mathrm{li}\,\xi]' = \frac{1}{\log \xi}, \tag{2}$$

při čemž se ve vztahu prvním vztahuje znaménko derivace ku proměnné x, v druhém ke ξ.

234. Vycházejíce z rovnice (1) a užívajíce vztahů odvozených při projednávání gammafunkce, odvodíme si pro $\mathrm{li}(e^{-x})$ rozvoj nekonečný vždy konvergující. Nejprve jest (v následujícím předpokládáno x jakožto kladné číslo)

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x}\,dx = \int_0^x x^{\mu-1} e^{-x}\,dx + \int_x^\infty x^{\mu-1} e^{-x}\,dx, \qquad \mu > 0$$

a tedy

$$-\int_x^\infty x^{\mu-1} e^{-x}\,dx = -\Gamma(\mu) + \int_0^x e^{-x} x^{\mu-1}\,dx, \qquad \mu > 0.$$

Levá strana této rovnice jest spojitou funkcí μ pro všecka μ (i záporná) a redukuje se pro $\mu = 0$ právě na $\mathrm{li}(e^{-x})$. Pravá strana má význam pouze pro $\mu > 0$. Můžeme tudíž psáti

$$\mathrm{li}(e^{-x}) = \lim_{\mu=0}\,[-\Gamma(\mu) + \int_0^x e^{-x} x^{\mu-1}\,dx], \tag{3}$$

kdež ovšem necháváme μ konvergovati k nule hodnotami kladnými. Jest však

$$e^{-x} x^{\mu-1} = x^{\mu-1} - \frac{x^\mu}{1!} + \frac{x^{\mu+1}}{2!} - \frac{x^{\mu+2}}{3!} + \ldots$$

a poněvadž řada tato aspoň od druhého členu počínajíc jest při $\mu \geqq 0$ řadou funkcí spojitých stejnoměrně konvergentní pro všecka x intervalu $(0, a)$, kde a jest libovolné číslo kladné, jest pro $\mu > 0$

$$\int_0^x e^{-x} x^{\mu-1}\,dx = \frac{x^\mu}{\mu} - \frac{x^{\mu+1}}{(\mu+1)\,.\,1!} + \frac{x^{\mu+2}}{(\mu+2)\,.\,2!} - \frac{x^{\mu+3}}{(\mu+3)\,.\,3!} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{\mu} + \left[\frac{x^\mu - 1}{\mu} - \frac{x^{\mu+1}}{(\mu+1)\,.\,1!} + \frac{x^{\mu+2}}{(\mu+2)\,.\,2!} - \ldots\right]. \tag{4}$$

Hranatá závorka má limitu, když μ konverguje k nule (neboť jednotliví členové mají limitu pro $\lim \mu = 0$ a nadto jest to řada stejnoměrně konvergentní v intervalu pro μ obsahujícím bod $\mu = 0$). Její limitu se zřetelem ku právě uvedené vlastnosti obdržíme, utvoříme-li limity jednotlivých členů a je sečteme; dostaneme pro tuto limitu

$$\log x - \frac{x}{1.1!} + \frac{x^2}{2.2!} - \frac{x^3}{3.3!} + \dots$$

a tudíž podle (3) a (4)

$$\mathrm{li}(e^{-x}) = \lim_{\mu=0}\left[\frac{1}{\mu} - \Gamma(\mu)\right] + \log x - \frac{x}{1.1!} + \frac{x^2}{2.2!} - \frac{x^3}{3.3!} + \dots$$

Avšak

$$\lim_{\mu=0}\left[\Gamma(\mu) - \frac{1}{\mu}\right] = \lim_{\mu=0}\frac{\mu\Gamma(\mu)-1}{\mu} = \lim_{\mu=0}\frac{\Gamma(1+\mu)-\Gamma(1)}{\mu} = \Gamma'(1);$$

podle odstavce 220, (19) však jest $\Gamma'(1) = -C$, při čemž C jest Eulerova konstanta. Máme tak celkem

$$\mathrm{li}(e^{-x}) = C + \log x - \frac{x}{1.1!} + \frac{x^2}{2.2!} - \frac{x^3}{3.3!} + \dots, \qquad x > 0, \tag{5}$$

čímž dána řada konvergentní pro funkci integrálem (1) definovanou.

235. Pravá strana rovnice (5) podrží význam, nahradíme-li $\log x$ výrazem $\log|x|$, i *když jest x záporné.* V tomto případě ($x < 0$) bude pravá strana definovati novou funkci, *již stejně budeme nazývati a značiti*, a budeme tudíž psáti (zahrnujíce v jednu rovnici i rovnici (5) i rovnici, která z této vznikne změnou x v $-x$)

$$\mathrm{li}(e^{x}) = C + \log|x| + \frac{x}{1.1!} + \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^3}{3.3!} + \dots, \qquad x \lessgtr 0. \tag{5'}$$

Funkce takto nově při $x > 0$ definovaná nedá se však pomocí určitého integrálu z funkce $e^{-t}t^{-1}$ vyjádřiti, jako tomu jest, když x jest záporné (viz (1)). Pro případ, že x jest kladné, lze však dokázati toto vyjádření

$$\mathrm{li}(e^{x}) = -\text{ hlavní hodnotě } \int_{-x}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt, \qquad x > 0. \tag{6}$$

Při tom značí hlavní hodnota integrálu z funkce e^{-t}/t v mezích $-x$, ∞ limitu

$$\lim_{\varepsilon=0}\left[\int_{-x}^{-\varepsilon}\frac{e^{-t}}{t}\,dt + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right], \qquad \varepsilon > 0.$$

Abychom to dokázali, uvažme nejprve, že podle (5′)

$$\mathrm{li}(e^{x}) - \mathrm{li}(e^{-x}) = 2\left(\frac{x}{1.1!} + \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^5}{5.5!} + \dots\right).$$

Dále jest (pro $x > 0$)

$$-\text{hlavní hodnota}\int\limits_{-x}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt+\int\limits_{x}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt=-\text{hlavní hodnota}\int\limits_{-x}^{x}\frac{e^{-t}}{t}\,dt=$$

$$=\lim_{\varepsilon=0}\left[-\int\limits_{-x}^{-\varepsilon}\frac{e^{-t}}{t}\,dt-\int\limits_{\varepsilon}^{x}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right]=\lim_{\varepsilon=0}\left[\int\limits_{\varepsilon}^{x}\frac{e^{t}}{t}\,dt-\int\limits_{\varepsilon}^{x}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right]=$$

$$=\int\limits_{0}^{x}\frac{e^{t}-e^{-t}}{t}\,dt=2\left(\frac{x}{1.1!}+\frac{x^3}{3.3!}+\dots\right).$$

Jest tedy pro $(x>0)$

$$-\text{hlavní hodnota}\int\limits_{-x}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt+\int\limits_{x}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt=\operatorname{li}(e^{x})-\operatorname{li}(e^{-x}),$$

čímž se zřetelem k (1) rovnice (6) dokázána.

Z rovnice (5′) následuje

$$(\operatorname{li}(e^{x}))'=\frac{e^{x}}{x}\qquad\text{pro } x\gtrless 0. \tag{7}$$

Kdybychom zavedli v (5′) proměnnou ξ rovnicí $e^{x}=\xi$, dostali bychom relaci

$$\operatorname{li}\xi=C+\log|\log\xi|+\frac{\log\xi}{1.1!}+\frac{\log^2\xi}{2.2!}+\frac{\log^3\xi}{3.3!}+\dots,\quad \xi>0,\quad \xi\neq 1 \tag{8}$$

a

$$(\operatorname{li}\xi)'=\frac{1}{\log\xi}; \tag{9}$$

rovnice pak (6) by se změnila (po snadném počtu při substitucí $e^{-t}=u$)

$$\operatorname{li}\xi=\text{hlavní hodnota}\int\limits_{0}^{\xi}\frac{du}{\log u}\qquad\text{pro } \xi>1, \tag{6′}$$

kde při $\xi>1$

$$\text{hlavní hodnota}\int\limits_{0}^{\xi}\frac{du}{\log u}=\lim_{\varepsilon=0}\left[\int\limits_{0}^{1-\varepsilon}\frac{du}{\log u}+\int\limits_{1+\varepsilon}^{\xi}\frac{du}{\log u}\right].$$

Rovnici (5′) můžeme konečně též psáti ve tvaru

$$\operatorname{li}(e^{x})=C+\log|x|+\int\limits_{0}^{x}\frac{e^{x}-1}{x}\,dx,\qquad x\neq 0. \tag{7}$$

236. Můžeme však též podati vyjádření integrállogaritmu pomocí integrálu, kde proměnná nebude mezí integrálu jako v rovnici (1), nýbrž parametrem. K tomu cíli budeme se zabývati integrálem

$$J(x)=-\int\limits_{0}^{\infty}e^{-x}\,\frac{t\cos t+x\sin t}{t^2+x^2}\,dt;\qquad x>0.$$

Derivací podle x na obou stranách si zjednáme

$$J'(x)=+\int\limits_{0}^{\infty}e^{-x}\left[\frac{t\cos t+x\sin t}{t^2+x^2}-\frac{\sin t}{t^2+x^2}+\frac{2xt\cos t+2x^2\sin t}{(t^2+x^2)^2}\right]dt$$

aneb po úpravě a snadném počtu

$$J'(x) = e^{-x}\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\frac{t \sin t - x \cos t}{t^2 + x^2}\right) dt = e^{-x}\left[\frac{t \sin t - x \cos t}{t^2 + x^2}\right]_0^\infty$$

t. j.

$$J'(x) = \frac{e^{-x}}{x}, \qquad \text{odkudž podle (2) } J(x) = \mathrm{li}(e^{-x}) + \text{konst.},$$

je-li ovšem $x > 0$. K určení konstanty postačí si uvědomiti jednak, že $\lim\limits_{x=\infty} J(x) = 0$, jednak, že podle (1) $\lim\limits_{x=\infty} \mathrm{li}(e^{-x}) = 0$; i jest tudíž konst. $= 0$ a

$$\mathrm{li}(e^{-x}) = -\int_0^\infty e^{-x} \frac{t \cos t + x \sin t}{t^2 + x^2} dt \qquad \text{pro } x > 0. \tag{8}$$

Počtem úplně stejným vyplývá

$$\mathrm{li}(e^{x}) + K = -\int_0^\infty e^{x} \frac{t \cos t - x \sin t}{t^2 + x^2} dt \qquad \text{pro } x > 0; \tag{9}$$

nemůžeme však uzavírati bez bližšího šetření, že konstanta $K = 0$; neboť funkce $\mathrm{li}(e^x)$ jest nekonečnou pro $x = 0$, a co odvozeno bylo pro konstantu při $x < 0$, nemusí byti správné při $x > 0$. Abychom i v (9) ustanovili konstantu, utvoříme rozdíl obou rovnic (9) a (8), při čemž rovnici (9) násobíme dříve výrazem e^{-x}, rovnici pak (8) násobíme e^x. Dostaneme vztah

$$e^{-x}\,\mathrm{li}(e^{x}) - e^{x}\,\mathrm{li}(e^{-x}) + Ke^{-x} = x\int_0^\infty \frac{2 \sin t}{t^2 + x^2} dt, \qquad x > 0. \tag{10}$$

Limita levé strany této rovnice pro $\lim x = 0$ jest K; neboť

$$\lim_{x=0} (C + \log|x|)(e^{-x} - e^{x}) = 0.$$

Abychom si vypočetli limitu pravé strany, píšeme ji ve tvaru součtu

$$x\int_0^\infty \frac{2 \sin t\, dt}{t^2 + x^2} = x\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2 \sin t\, dt}{t^2 + x^2} + x\int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{2 \sin t\, dt}{t^2 + x^2}. \tag{11}$$

Integrál v druhém členu na pravé straně poslední rovnice jest spojitou funkcí x v každém intervalu, jak čtenář snadno na základě kriterií odstavce 160 dokáže;*) i jest tedy limita druhého členu pro

*) Ostatně lze ihned psáti podle věty o střední hodnotě při $x > 0$

$$x\left|\int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{2 \sin t}{t^2 + x^2} dt\right| < x\int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{2dt}{t^2} = 4x,$$

z kteréžto nerovniny vyplývá rovněž, že limita druhého členu pravé strany rovnice (11) jest rovna nule.

lim $x=0$ rovna nule. Pro první člen máme integrací částečnou

$$x\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2\sin t\,dt}{t^2+x^2}=x\left[\log(t^2+x^2)\,\frac{\sin t}{t}\right]_0^{\frac{1}{2}}-x\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)'\log(t^2+x^2)\,dt.$$

Pro integrál naposled uvedený lze psáti (podle věty o střední hodnotě), je-li x ku příkladu v intervalu $(0, \frac{1}{2})$,

$$\left|\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)'\log(t^2+x^2)\,dt\right|<\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\left(\frac{\sin t}{t}\right)'\log t^2\right|dt.$$

Jest tedy i limita prvého členu pravé strany rovnice (11) rovna nule a tudíž i pravé strany rovnice (10), následkem čehož jest $K=0$. Máme tak rovnici

$$\mathrm{li}(e^x)=-\int_0^\infty e^x\,\frac{t\cos t-x\sin t}{t^2+x^2}\,dt \qquad \text{pro } x\lessgtr 0 \tag{12}$$

(pro $x>0$ jest to rovnice (9), pro $x<0$ pak rovnice (8)).

Zároveň jsme získali hodnotu těchto integrálů

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{x\sin t}{t^2+x^2}\,dt&=\tfrac{1}{2}[e^{-x}\,\mathrm{li}(e^x)-e^x\,\mathrm{li}(e^{-x})] \qquad \text{pro } x\lessgtr 0,\\ \int_0^\infty\frac{t\cos t}{t^2+x^2}\,dt&=-\tfrac{1}{2}[e^{-x}\,\mathrm{li}(e^x)+e^x\,\mathrm{li}(e^{-x})] \qquad \text{pro } x\lessgtr 0.\end{aligned} \tag{13}$$

237. Pro funkci $\mathrm{li}(e^x)$ vedle konvergentního vyjádření (5′) lze podati vyjádření asymptotická. Snadno toto vyjádření odvodíme pro $x<0$; to jest pro funkci $\mathrm{li}(e^{-x})$ při $x>0$. Tu dostáváme ihned částečnou integrací (podobně jako pro $\int_0^x e^{-x^2}dx$ v odstavci 73)

$$\begin{aligned}\mathrm{li}(e^{-x})&=-\int_x^\infty\frac{e^{-t}}{t}\,dt=-\frac{e^{-x}}{x}+1\,.\int_x^\infty\frac{e^{-t}}{t^2}\,dt\\&=-\frac{e^{-x}}{x}+\frac{1\,.\,e^{-x}}{x^2}-1\,.\,2\,.\int_x^\infty\frac{e^{-t}}{t^3}\,dt\\&=-e^{-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1\,!}{x^2}+\frac{2\,!}{x^3}\right)+3\,!\int_x^\infty\frac{e^{-t}}{t^4}\,dt\end{aligned}$$

a obecně

$$\begin{aligned}\mathrm{li}(e^{-x})=-e^{-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1\,!}{x^2}+\frac{2\,!}{x^3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)\,!}{x^n}\right)+\\+(-1)^{n+1}\,n\,!\int_x^\infty\frac{e^{-t}}{t^{n+1}}\,dt.\end{aligned} \tag{14}$$

Je-li v této rovnici $x > 0$, jest

$$0 < \int_x^{x} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt < \frac{1}{x^{n+1}} \int_x^{\infty} e^{-t} dt = \frac{e^{-x}}{x^{n+1}}$$

a tedy

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt = \frac{\Theta e^{-x}}{x^{n+1}}, \qquad 0 < \Theta < 1.$$

Máme tedy tento výsledný rozvoj

$$\mathrm{li}(e^{-x}) = -e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} + (-1)^n \frac{\Theta n!}{x^{n+1}}\right); \tag{14'}$$
$$x > 1, \qquad 0 < \Theta < 1,$$

který při velikém x může býti pro výpočet integrállogaritmu $\mathrm{li}(e^{-x})$ užitečný. Jest to rozvoj asymptotický a to druhu, se kterým jsme se až doposud setkávali (znaménka členů se střídají, zbytek jest co do absolutní hodnoty menší než první zanedbaný aneb než poslední podržený člen.*)

238. Abychom odvodili asymptotický rozvoj pro $\mathrm{li}(e^x)$ při $x > 0$, použijeme formule (12), do které dosadíme $t = t'x$ (za předpokladu $x > 0$). Obdržíme (vynechávajíce čárku u integrační proměnné)

$$\mathrm{li}(e^x) = e^x \int_0^{\infty} \frac{\sin(tx) - t\cos(tx)}{1 + t^2} dt. \tag{15}$$

Mohli bychom při tomto výraze užívati integrace částečné — integrujíce vždy $\sin(tx)$, $\cos(tx)$ — a obdrželi bychom žádaný asymptotický rozvoj. Aby však zbytek objevil se ve tvaru co nejjednodušším, zavedeme ještě jednou novou integrační proměnnou substitucí $t = \mathrm{tg}\,\varphi$, čímž (15) se změní v

$$\mathrm{li}(e^x) = e^x \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin[x\,\mathrm{tg}\,\varphi - \varphi] \cos^{-1}\varphi\, d\varphi. \tag{16}$$

Proveďme nyní integraci částečnou na integrále

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin[x\,\mathrm{tg}\,\varphi - k\varphi] \cos^{k-2}\varphi\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[\frac{\sin(x\,\mathrm{tg}\,\varphi)}{\cos^2\varphi} \cos k\varphi - \frac{\cos(x\,\mathrm{tg}\,\varphi)}{\cos^2\varphi} \sin k\varphi\right] \cos^k\varphi\, d\varphi,$$

*) Pro zbytek totiž též plyne podle věty o střední hodnotě

$$n! \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt = n!\, e^{-x'} \int_x^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} = (n-1)! \frac{e^{-x'}}{x^n} = \Theta \,.\, e^{-x} \frac{(n-1)!}{x^n};$$

při tom jest x' jisté číslo větší než x a $0 < \Theta < 1$.

integrujíce vždy výrazy (znaménko derivační vztahuje se k derivaci podle φ)

$$\frac{\sin(x \operatorname{tg}\varphi)}{\cos^2\varphi} = -\left[\frac{\cos(x \operatorname{tg}\varphi)}{x}\right]', \qquad \frac{\cos(x \operatorname{tg}\varphi)}{\cos^2\varphi} = \left[\frac{\sin(x \operatorname{tg}\varphi)}{x}\right]'.$$

Vznikne po snadném počtu formule

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin[x \operatorname{tg}\varphi - k\varphi] \cos^{k-2}\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{k}{x}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin[x \operatorname{tg}\varphi - (k+1)\varphi] \cos^{k-1}\varphi \, d\varphi \qquad \text{pro } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Užijeme-li této formule postupně na integrál v rovnici (16), ve kterém $k = 1$, dostaneme

$$\operatorname{li}(e^x) = e^x \left[\frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{(n-1)!}{x^n} + \frac{n!}{x^n}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin[x \operatorname{tg}\varphi - (n+1)\varphi] \cos^{n-1}\varphi \, d\varphi \right]. \tag{17}$$

Zbytek mající v tomto rozvoji asymptotickém tvar integrálu odhadneme dvojím způsobem. Nejprve jest identicky

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin[x \operatorname{tg}\varphi - (n+1)\varphi] \cos^{n-1}\varphi \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin[x \operatorname{tg}\varphi - (n+1)\varphi] \cdot \left(\frac{x}{\cos^2\varphi} - (n+1)\right) \frac{\cos^{n+1}\varphi \, d\varphi}{x - (n+1)\cos^2\varphi}.$$

Jestliže $x > n + 1$, jest funkce

$$\frac{\cos^{n+1}\varphi}{x - (n+1)\cos^2\varphi}$$

v intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$ funkcí stále klesající a konečnou a můžeme užíti druhé věty o střední hodnotě (odstavec 106, (11)). Podle ní jest

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin[x \operatorname{tg}\varphi - (n+1)\varphi] \cos^{n-1}\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{x-(n+1)}\int_0^{\varphi_0} \sin[x \operatorname{tg}\varphi - (n+1)\varphi] \left(\frac{x}{\cos^2\varphi} - (n+1)\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{x-(n+1)}\left[-\cos[x \operatorname{tg}\varphi - (n+1)\varphi]\right]_0^{\varphi_0} = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}[x \operatorname{tg}\varphi_0 - (n+1)\varphi_0]}{x-(n+1)}.$$

Při tom jest φ_0 jisté číslo intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$. *Jest tedy zbytek řady v hranaté závorce rovnice* (17) *se vyskytující v celku rovný*

$$\frac{2 \cdot n! \, \Theta}{x^n(x-(n+1))}, \qquad 0 \leqq \Theta \leqq 1.$$

Zbytek tento — odvozený za předpokladu $x > n + 1$ — *jest jistě kladný*. Přibíráním stále nových členů přibližujeme se tedy stále více hodnotě funkce, pokud $n < x - 1$. Jestliže $n \leq \frac{1}{2}(x-1)$, jest zbytek menší než poslední podržený člen řady v hranaté závorce.

Zbytek lze dále odhadnouti podle prvé věty o střední hodnotě. Funkce $\cos^{n-1}\varphi$ jest v intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$ stále kladná. Můžeme tedy psáti

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(x \operatorname{tg}\varphi - \overline{n+1}\,\varphi)\cos^{n-1}\varphi\, d\varphi = \sin(x \operatorname{tg}\varphi'_0 - (n+1)\varphi'_0)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{n-1}\varphi\, d\varphi.$$

Integrál na pravé straně můžeme sice vypočítati přesně (odstavec 68); můžeme však k vůli jednoduchosti, je-li n dosti veliké, nahraditi hodnotu toho integrálu přibližnou jeho hodnotou, jež jest

$$\sqrt{\frac{\pi}{2(n-1)}}$$

(viz rovnici (12), odstavec 68), čímž dostaneme pro zbytek hodnotu

$$\frac{n!}{x^n}\,.\,\Theta'\,.\sqrt{\frac{\pi}{2(n-1)}}, \qquad -1 < \Theta' < 1,$$

při čemž udané hranice pro Θ' jsou do jisté míry správny jenom v případě, že n jest dosti veliké. Na základě obou výsledků pro zbytek lze s úspěchem asymptotické formule (17) použíti pro numerický výpočet integrállogaritmů i při $x > 0$; zvláště pak lze s jejich pomocí ukázati, že počítajíce pomocí rozvoje (17) se nejvíce hodnotě integrállogaritmu přiblížíme, sčítáme-li rozvoj ten až ke členu ν-tému, kde $\nu = x + \vartheta$; při tom jest ϑ jisté malé číslo kladné, jež odhadnouti jest v každém případě zvlášť. Člen ν-tý jest zároveň v blízkém okolí nejmenšího členu.

239. Integrállogaritmus $\operatorname{li}(x)$ při $x > 0$ má jistou důležitost v číselné teorii. Jeho hodnota totiž udává přibližně počet prvočísel menších nežli jest x a tato souvislost počtu prvočísel s hodnotou integrállogaritmu byla předmětem prací četných autorů, z nichž zejména jest uvésti *Gausse* a *Riemanna*.*)

Uvádím v té příčině malou tabulku vyňatou z Nielsenova spisu „Theorie des Integrallogarithmus". V ní značí $\pi(x)$ počet prvočísel menších nežli x.

*) Podrobný výklad o Riemannově práci jakož i o pracích s ní souvisících nalezne čtenář v obsažném pojednání p. *B. Hostinského* „Riemannova theorie o počtu prvočísel v daných mezích", Časopis 39 (1910), str. 25—36, 146—155, 245—255, 395—416.

x	li(x)	$\pi(x)$	li$(x)-\pi(x)$
100	30·12614	26	4·1
200	50·19217	47	3·2
300	68·33361	63	5·3
400	85·41789	79	6·4
1000	177·60966	169	8·6
10000	1246·13725	1230	16·1
100000	9629·80904	9593	36·8
200000	18036·05216	17983	53·1
300000	26086·69223	25997	89·7
400000	33922·62200	33859	63·6
1000000	78627·54928	78493	134·5

240. Integrállogaritmus jakož i funkci počítanou v odstavci 73 a známou pode jménem *Krampova* transcendenta

$$L(x)=\int_x^\infty e^{-x^2}\,dx=\tfrac{1}{2}\int_{x^2}^\infty e^{-t}\,t^{-\frac{1}{2}}\,dt,\qquad (x^2=t),\tag{p}$$

lze pokládati jako specielní případ funkce, k jejímuž zavedení dala podnět teorie funkce gamma; totiž funkce

$$Q(x,\nu)=\int_x^\infty e^{-x}\,x^{\nu-1}\,dx,$$

odkudž vysvětluje se totožnost způsobů, kterými lze počítati integrállogaritmus a integrál (p). Lze totiž metody k výpočtu těchto funkcí zevšeobecniti pro výpočet funkce $Q(x, \nu)$. Zejména platí pro tuto funkci tento asymptotický rozvoj (kterýž získáme podobně jako u zvláštních případů integrací částečnou)

$$Q(x,\nu)=e^{-x}\,x^{\nu-1}\left[1+\frac{\nu-1}{x}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{x^2}+\ldots\right].$$

Obor platnosti této formule se zřetelem k intervalům pro ν resp. pro x jakož i vyšetření zbytku (které se obdobně dá provésti jako při integrállogaritmu) opomíjím.