VIII. O INTEGRÁLECH Z FUNKCÍ ZÁVISLÝCH NA PARAMETRU.

1. VYŠETŘOVÁNÍ SPOJITOSTI TĚCH FUNKCÍ.

153. Budeme se v následujícím zabývati integrály z funkcí, které vedle toho, že jsou závisly na proměnné integrační, závisí ještě na jiné proměnné, které budeme říkati *parametr* (odst. 9); tedy integrály tvaru

$$\int_a^b f(x, \alpha)\, dx,$$

kde $f(x, \alpha)$ jest funkce dvou proměnných x, α. Takovéto integrály, mají-li význam, definují funkci závislou na α. Na příklad

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha}.$$

Budeme pak vyšetřovati různé vlastnosti funkcí tak definovaných určitými integrály, při čemž především omezíme se na takové funkce $f(x, \alpha)$, *jež při hodnotách α v úvahu vzatých jsou podle x integrace schopny v intervalu* (a, b).

Nejprve zabývati se budeme případem, že a, b *jsou určitá čísla* (*konečné meze*) *nezávislá na parametru α a že zároveň $f(x, \alpha)$ jest funkcí konečnou pro všecka x v* (a, b), *a to při všech α v počet přibraných.* Za této supposice pišme

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx.$$

Zvolme si jednoduše spočetnou řadu hodnot $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ majících limitu α', t. j. $\lim\limits_{n=\infty} \alpha_n = \alpha'$. Dostaneme jednoduše spočetnou řadu hodnot funkce $F(\alpha)$

$$F(\alpha_n) = \int_a^b f(x, \alpha_n)\, dx.$$

Klademe si nyní tuto otázku: Za jakých podmínek existuje $\lim F(\alpha_n)$ pro $\lim n = \infty$? K tomu nám nejobecnější odpověď dává nejprve věta Bolzano-Cauchyova, pravící, že nutná a postačující podmínka tu jest, aby ke každému kladnému číslu ε příslušelo číslo N takové, že

$$|F(\alpha_{k'}) - F(\alpha_{k''})| = |\int_a^b (f(x, \alpha_{k'}) - f(x, \alpha_{k''}))\,dx| < \varepsilon$$

pro všecka k', k'', pro něž $k' > N$, $k'' > N$; (DP 28). Této podmínce očividně bude vyhověno, jestliže číslo N jest takové, že nerovnina

$$|f(x, \alpha_{k'}) - f(x, \alpha_{k''})| < \varepsilon_1, \quad \text{kde } \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|b-a|} \tag{1}$$

jest splněna pro všecka x intervalu (a, b) a všecka k', $k'' > N$. V tomto případě však také existuje limita $\lim\limits_{m=\infty} f(x, \alpha_m)$, a to stejnoměrně pro všecka x v (a, b) (viz DP 124**). Přejdeme-li tedy v (1) k limitě pro $\lim k'' = \infty$, předpokládajíce ovšem, že (1) jest splněna v uvedeném rozsahu, máme tedy dále (píšíce n místo k')

$$|f(x, \alpha_n) - \lim_{m=\infty} f(x, \alpha_m)| \leqq \varepsilon_1 \tag{2}$$

pro všecka x v (a, b) a všecka $n > N$.

Z této nerovniny, dále z podmínky, aby funkce byla v (a, b) integrace schopna (odst. 87), a konečně z předpokladu, že $f(x, \alpha_n)$ jest v (a, b) integrace schopna, následuje nejprve snadno, že funkce $\lim\limits_{m=\infty} f(x, \alpha_m)$ jest v (a, b) integrace schopna*), a lze dále v důsledku té nerovniny psáti, že

$$|F(\alpha_n) - \int_a^b \lim_{m=\infty} f(x, \alpha_m)\,dx| = |\int_a^b [f(x, \alpha_n) - \lim_{m=\infty} f(x, \alpha_m)]\,dx| \leqq \varepsilon_1 |b-a| = \varepsilon \tag{3}$$

pro všecka $n > N$. Můžeme pak vysloviti větu: *Postačující podmínka, aby existovala limita*

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(x, \alpha_n)\,dx$$

*) Neboť, je-li oscilace funkce $f(x, \alpha_n)$ v intervalu Δx_k rovna $O^{(n)}{}_k$, oscilace pak funkce $\lim\limits_{m=\infty} f(x, \alpha_m)$ v témž intervalu O_k, jest, je-li $n > N$, podle (2) $|O_k - O^{(n)}{}_k| < 2\varepsilon_1$ a tedy

$$|\sum_k O_k \Delta x_k - \sum_k O^{(n)}{}_k \Delta x_k| < 2\varepsilon_1 |b-a|, \quad \text{je-li } n > N$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots, \nu; \; \Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_\nu = b - a.$$

Označení v této poznámce shoduje se s označením v odstavci 87, jenom místo n (které tu jest v jiném významu) použito ν.

jest, aby existovala $\lim_{n=\infty} f(x, \alpha_n)$, *a to stejnoměrně pro všecka* x *v* (a, b). *Podle* (3) *pak jest*

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(x, \alpha_n)\, dx = \int_a^b \lim_{n=\infty} f(x, \alpha_n)\, dx. \tag{4}$$

Jestliže jest

$$\lim_{n=\infty} f(x, \alpha_n) = f(x, \lim_{n=\infty} \alpha_n) = f(x, \alpha')$$

(a to stále stejnoměrně pro všecka x v (a, b)), můžeme poslední rovnost psáti

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(x, \alpha_n)\, dx = \int_a^b f(x, \alpha')\, dx.$$

Postačující podmínku pro platnost této rovnice (podmínku pro stejnoměrnou konvergenci řady čísel $f(x, \alpha_n)$ k $f(x, \alpha')$, kde $\alpha' = \lim_{n=\infty} \alpha_n$), lze pak psáti ve tvaru: Nerovnina

$$|f(x, \alpha_k) - f(x, \alpha')| < \varepsilon_1 \tag{5}$$

jest splněna pro všecka $k > N$ a všecka x v (a, b); při tom jest ε_1 číslo kladné libovolně zvolené a N číslo kladné vhodně k ε_1 stanovené.

POZNÁMKA. V předcházejícím odvozena zároveň věta pro integraci řad. Klademe-li totiž

$$f(x, n) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

tu jest patrně $\lim_{n=\infty} f(x, n)$ rovno součtu nekonečné řady $u_1(x) + u_2(x) + \ldots$, která jest konvergentní (neexistuje-li limita právě uvedená, nekonečná řada jest divergentní). Označíme-li součet té nekonečné řady $S(x)$, lze vztah (4) psáti ve tvaru

$$\lim_{n=\infty} \left[\int_a^b u_1(x)\, dx + \int_a^b u_2(x)\, dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\, dx \right] = \int_a^b S(x)\, dx$$

anebo též ve tvaru

$$\int_a^b S(x)\, dx = \int_a^b u_1(x)\, dx + \int_a^b u_2(x)\, dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\, dx + \ldots$$

Postačující podmínkou ku platnosti této rovnice (vedle požadavku, aby uvedené integrály z funkcí $u_k(x)$ měly význam) jest, aby $f(x, n)$ k své limitě $S(x)$ konvergovala stejnoměrně pro všecka x intervalu (a, b), t. j. *aby nekonečná řada* $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots$ *konvergovala pro všecka* x *v* (a, b) *stejnoměrně.* Tím odvozena jedna ze základních vět pro integraci nekonečných řad (viz odstavec 69) poznovu, a to pro integrály *Cauchy-Riemannovy*.

154. Je-li podmínka (3) stejnoměrné konvergence splněna, ať zvolíme si jakoukoli jednoduše spočetnou posloupnost $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, konvergující k α', říkáme, že funkce $f(x, \alpha)$ jest v bodě α' spojitou funkcí parametru α *stejnoměrně* vzhledem k x intervalu (a, b). Toto stanovení jest patrně podstatně stejné s následujícím: *Funkce $f(x, \alpha)$ jest v bodě α' spojitou funkcí α stejnoměrně vzhledem k x intervalu (a, b), jestliže ke každému číslu kladnému ε lze nalézti číslo kladné η té vlastnosti, aby nerovnina*

$$|f(x, \alpha') - f(x, \alpha)| < \varepsilon$$

byla splněna pro všecka $|\alpha - \alpha'| < \eta$ a všecka x intervalu (a, b).

Na základě předcházejícího můžeme pak vysloviti větu: *Postačující podmínka, aby bylo*

$$\lim_{\alpha = \alpha'} \int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \int_a^b f(x, \alpha')\, dx,$$

jest, aby $f(x, \alpha)$ jakožto funkce α byla v bodě $\alpha = \alpha'$ funkcí spojitou, a to stejnoměrně vzhledem k x v intervalu (a, b).

Tím získali jsme, vyjádříme-li to jinými slovy, postačující podmínku pro to, *aby*

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

byla spojitou funkcí α v bodě $\alpha = \alpha'$.

Při tom se samozřejmě předpokládá, že $f(x, \alpha)$ jest funkce podle x v mezích a, b integrace schopna při všech α v okolí bodu α'.

PŘÍKLAD 1. Nechť jest funkce $f(x, \alpha)$ dána těmito vztahy

$$f(x, \alpha) = \frac{2xe^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}}{\alpha^2} \qquad \text{pro } \alpha \gtrless 0,$$

$$f(x, 0) = 0.$$

Pak funkce $f(x, \alpha)$ jest v mezích ku př. $(0, 1)$ integrace schopna a pro $\alpha > 0$ jest

$$\int_0^1 f(x, \alpha)\, dx = \int_0^1 \frac{2xe^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}}{\alpha^2}\, dx = 1 - e^{-\frac{1}{\alpha^2}}$$

a pro $\alpha = 0$

$$\int_0^1 f(x, 0)\, dx = \int_0^1 0 \,.\, dx = 0.$$

Tudíž

$$\lim_{\alpha=0}\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx = \lim_{\alpha=0}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha^2}}\right) = 1$$

a

$$\int_0^1 \lim_{\alpha=0} f(x,\alpha)\,dx = \int_0^1 f(x,0)\,dx = 0$$

a nejsou obě limity stejny, jak by jistě byly, kdyby $f(x,\alpha)$ byla v bodě $\alpha = 0$ spojitou funkcí α stejnoměrně vzhledem k x v intervalu $(0, 1)$. Že není funkce daná funkcí v bodě $\alpha = 0$ spojitou stejnoměrně pro všecka x intervalu $(0, 1)$, můžeme dokázati přímo takto. Kdyby byla $f(x,\alpha)$ funkcí takovou, bylo by lze ke každému číslu ε libovolně malému stanoviti číslo kladné η nezávislé na x tak, aby

$$|f(x,\alpha) - f(x,0)| = \left|\frac{2xe^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}}{\alpha^2} - 0\right| = \frac{2\,|x|\,e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}}{\alpha^2} < \varepsilon \qquad (p)$$

pro *všecka* α, pro něž $|\alpha - 0| = |\alpha| < \eta$, a pro všecka x intervalu $(0, 1)$. Dejme pak tomu, že takové číslo η vskutku existuje a zvolme si α kladné a menší než η. Vedle toho pak ještě požadujme $\alpha < 1$, což není v odporu s nerovninou $|\alpha| < \eta$. Nadto učiňme $x = \alpha$, čímž jsme přisoudili proměnné x hodnotu v intervalu $(0, 1)$. Dosadíme-li však do nerovniny (p), která má býti splněna pro všecka $|\alpha| < \eta$ a pro všecka x intervalu $(0, 1)$, $x = \alpha$, dostáváme pro α podmínku

$$\alpha > \frac{2e^{-1}}{\varepsilon},$$

ze které vidíme, že nerovnina (p) nemůže býti splněna pro všecka α, pro něž $|\alpha| < \eta$. Není tedy podmínka stejnoměrné konvergence pro naši funkci splněna.

PŘÍKLAD 2. Integrál

$$\int_0^A \frac{\alpha\,dx}{x^2+\alpha^2} = \operatorname{arctg}\frac{A}{\alpha} \qquad \text{pro } \alpha \neq 0;$$

přisuzujeme-li funkci za znaménkem integračním pro $\alpha = 0$ hodnotu 0 pro všecka x intervalu $(0, A)$ [pro hodnotu $x = 0$, $\alpha = 0$ není totiž funkce ta definována], má integrál při $\alpha = 0$ hodnotu 0. Hodnota integrálu jest funkcí nespojitou v bodě $\alpha = 0$, neboť (budiž $A > 0$) jest

$$\lim_{\alpha=0} \operatorname{arctg}\frac{A}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{při } \alpha \text{ kladném},$$

$$\lim_{\alpha=0} \operatorname{arctg}\frac{A}{\alpha} = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{při } \alpha \text{ záporném}.$$

Funkce za znaménkem integračním není však také stejnoměrně spojitou v bodě $\alpha = 0$ pro x intervalu $(0, A)$. Neboť pro stejnoměrnou spojitost se vyžaduje, aby

$$\left|\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2} - 0\right| < \varepsilon, \qquad \text{t. j. aby } |\alpha| < \varepsilon\,(x^2+\alpha^2)$$

pro všecka x v intervalu $(0, A)$ a pro *všecka* α, pro něž $|\alpha| < \eta$, kde η má býti číslo vhodně zvolitelné. To jest však nemožno splniti, neboť ku př. pro $x < \alpha$ uvedená podmínka nám praví $|\alpha| > 1/2\varepsilon$, tudíž číslo η zmíněné vlastnosti není.

PŘÍKLAD 3. Integrál

$$\int_0^\pi \frac{2\cos x + 2r}{1 + 2r\cos x + r^2}\, dx$$

jest nespojitou funkcí parametru r v okolí bodů ± 1. Viz cvičení po odst. 68, př. 9. Podrobné vyšetření podle kriteria tu dokázaného opomíjím.

155. Používáme-li pojmů a vět vztahujících se k funkcím spojitým o dvou proměnných, můžeme v důsledku předcházejících úvah vysloviti věty dovolující nám častokráte na prvý pohled odvoditi vlastnosti funkce $F(\alpha)$. Zvláště pak jest platno následující: Jestliže $f(x, y)$ jest spojitou funkcí dvou proměnných x, y v každém bodu uzavřeného a spojitého oboru Ω, jest funkce $f(x, y)$ v Ω stejnoměrně spojitou: t. j. lze ke každému číslu kladnému ε nalézti číslo kladné η té vlastnosti, že splněna jest nerovnina

$$|f(x', y') - f(x, y)| < \varepsilon \tag{6}$$

pro všecky body (x', y'), (x, y) daného oboru Ω, pro něž

$$|x' - x| < \eta, \quad |y' - y| < \eta.$$

(DP 191.) Specielně zvolíme si za obor Ω pravoúhelník omezený přímkami $x = x_0$, $x = x_1$, $y = y_0$, $y = y_1$. Učiníme-li ještě v nerovnině (6) $x = x'$, jest splněna nerovnina

$$|f(x, y') - f(x, y)| < \varepsilon$$

pro všecka x intervalu (x_0, x_1) a pro všecka y', y intervalu (y_0, y_1), pro něž $|y' - y| < \eta$, t. j. $f(x, y)$ jest spojitou funkcí proměnné y v intervalu (y_0, y_1) *stejnoměrně vzhledem k x intervalu* (x_0, x_1).

Na základě těchto pojmů a vět vyplývá z vět odstavce předcházejícího věta: *Funkce $F(\alpha)$ definovaná omezeným integrálem*

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx \tag{7}$$

jest spojitou funkcí α v intervalu (α_1, α_2), jestliže $f(x, \alpha)$ jest spojitou funkcí obou proměnných v pravoúhelníku $(a, b; \alpha_1, \alpha_2)$. Neboť funkce mající tuto vlastnost jest v každém α' nacházejícím se v intervalu (α_1, α_2) spojitou funkcí α stejnoměrně vzhledem k x intervalu (a, b).

Věta tato se dá rozšířiti i pro případ, že *meze a, b nejsou nezávisly na α, nýbrž, že jsou spojité funkce parametru α.* Klaďme

$$F_1(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx \tag{8}$$

a předpokládejme, že $f(x, \alpha)$ jest spojitou funkcí v oboru pravoúhelníkovém $(A, B; \alpha_1, \alpha_2)$, ve kterém také nechť probíhají spojité čáry $x = a(\alpha)$, $x = b(\alpha)$, v nichž α jest proměnná v (α_1, α_2). Pak, je-li α_0 libovolná hodnota intervalu (α_1, α_2), snadno si dokážeme, že $F_1(\alpha)$ jest spojitou funkcí proměnné α v bodě α_0. Neboť jest

$$F_1(\alpha) - F_1(\alpha_0) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx - \int_{a(\alpha_0)}^{b(\alpha_0)} f(x, \alpha_0)\, dx =$$

$$= \int_{a(\alpha)}^{a(\alpha_0)} f(x, \alpha)\, dx + \int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx + \int_{a(\alpha_0)}^{b(\alpha_0)} [f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0)]\, dx.$$

V tomto výrazu, předpokládáme-li $|\alpha - \alpha_0| < \eta$, můžeme, zvolíme-li vhodně kladné číslo η, docíliti, aby první a druhý sčítanec byl každý menší v absolutní hodnotě než $\frac{1}{3}\varepsilon$ (podle věty o střední hodnotě, neboť $a(\alpha)$, $b(\alpha)$ jsou spojité funkce v okolí bodu α_0 a $|f(x, \alpha)|$ má v pravoúhelníku $(A, B; \alpha_1\ \alpha_2)$ horní hranici) a rovněž, aby absolutní hodnota třetího sčítance byla menší než $\frac{1}{3}\varepsilon$ (podle věty právě dokázané). Jest tedy

$$|F_1(\alpha) - F_1(\alpha_0)| < \varepsilon \quad \text{pro všecka } \alpha, \text{ pro něž } |\alpha - \alpha_0| < \eta,$$

t. j. $F_1(\alpha)$ *jest spojitou funkcí proměnné α v α_0 a tudíž v celém intervalu* (α_1, α_2).

Výsledek tento se rozšiřuje ihned i pro případ, že $f(x, \alpha)$ jest spojitou funkcí bodu $[x, \alpha]$ v *uzavřeném* oboru — pásu — omezeném čarami $\alpha = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$, $x = a(\alpha)$, $x = b(\alpha)$. Neboť, je-li $f(x, \alpha)$ spojitá v tom pásu, můžeme v ostatních bodech pravoúhelníku $(A, B; \alpha_1, \alpha_2)$ funkci $f(x, \alpha)$ přisouditi takové hodnoty, že $f(x, \alpha)$ tak vznikající stane se spojitou funkcí v celém pravoúhelníku. Na hodnotu integrálu (8) však mají vliv hodnoty funkce $f(x, \alpha)$, jichž nabývá právě v tom pásu.

156. V důsledku věty dokázané můžeme výsledek svrchu dokázaný pro integrál (7) poněkud zevšeobecniti. Budeme předpokládati, že $f(x, \alpha)$ jest funkce dvou proměnných x, α v pravoúhelníku $(a, b; \alpha_1, \alpha_2)$ konečná, takže v tom pravoúhelníku $|f(x, \alpha)| \leq \mathfrak{M}$; dále budiž funkcí spojitou v uzavřeném oboru, který z pravoúhelníka $(a, b; \alpha_1, \alpha_2)$ zbude, odejmeme-li z pravoúhelníka konečný počet ku př. m pásů definovaných rovnicemi

$$\varphi_i(\alpha) < x < \psi_i(\alpha), \quad i = 1, 2, 3, \ldots m,^{*)} \quad \varphi_i, \psi_i \text{ jsou spojité funkce proměnné } \alpha \text{ v } (\alpha_1, \alpha_2), \tag{9}$$

čímž integračnímu intervalu (a, b) jsou odňaty intervaly

$$(\varphi_1(\alpha), \psi_1(\alpha)), (\varphi_2(\alpha), \psi_2(\alpha)), \ldots, (\varphi_m(\alpha), \psi_m(\alpha))$$

a při čemž celková délka těchto odňatých intervalů jest menší než kladné číslo ε, jež možno si zvoliti tak malé, jak chceme.**)

Označíme-li totiž součet integrálů z funkce $f(x, \alpha)$, jejichž intervaly integrační jsou po řadě všecky intervaly, jež z (a, b) zůstanou, odejmeme-li z (a, b) intervaly $(\varphi_1(\alpha), \psi_1(\alpha)), \ldots, (\varphi_m(\alpha), \psi_m(\alpha))$, stručně

$$\int_{D(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx, \tag{10}$$

můžeme nejprve psáti, je-li α_0 v (α_1, α_2) a $\varepsilon_1 > 0$,

$$\left| \int_{D(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx - \int_{D(\alpha_0)} f(x, \alpha_0)\, dx \right| < \frac{\varepsilon_1}{3} \quad \text{pro všecka } \alpha, \text{ pro něž } |\alpha - \alpha_0| < \eta.$$

Neboť podle věty právě dokázané jest každý sčítanec, ve který se rozpadá (10), integrál tvaru (8) a tedy na základě předpokladů spojitou funkcí proměnné α v (α_1, α_2); platno jest to tedy i pro celý součet (10) a můžeme tudíž ke každému číslu $\varepsilon_1/3$ nalézti kladné číslo η, aby právě napsaná nerovnina byla splněna.

Dále jest

$$\left| \int_a^b f(x, \alpha)\, dx - \int_{D(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx \right| < \mathfrak{M}\varepsilon, \qquad \left| \int_a^b f(x, \alpha_0) dx - \int_{D(\alpha_0)} f(x, \alpha_0)\, dx \right| < \mathfrak{M}\varepsilon.$$

Volíme tedy ε tak, aby $\mathfrak{M}\varepsilon < \varepsilon_1/3$, máme v důsledku posledních tří nerovnin ihned

$$\left| \int_a^b f(x, \alpha)\, dx - \int_a^b f(x, \alpha_0)\, dx \right| < \varepsilon_1 \quad \text{pro všecka } \alpha, \text{ pro něž } |\alpha - \alpha_0| < \eta,$$

čímž tvrzení o spojitosti funkce $F(\alpha)$ i v tomto obecnějším případě dokázáno.

157. Vyšetřování funkce $F(\alpha)$ můžeme však i rozšířiti pro případ, že $f(x, \alpha)$ jest funkcí proměnné x, kterážto funkce jest

*) Pás i-tý jest omezen čarami o rovnicích $x = \varphi_i(\alpha)$, $x = \psi_i(\alpha)$, kde α probíhá interval (α_1, α_2) a přímkami $\alpha = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$; při tom mohou $\varphi_i(\alpha)$, $\psi_i(\alpha)$ býti i konstanty, jež po případě i splývají s a resp. b.

**) Při tom, zmenšujeme-li postupně číslo ε, může se objeviti nutným zvětšovati číslo m (počet pásů).

nekonečnou v intervalu (a, b). K vůli zjednodušení zavedu pak předpoklad, že $f(x, \alpha)$ jakožto funkce bodu $[x, \alpha]$ definovaná v pravoúhelníku $(a, b; \alpha_1, \alpha_2)$ stává se tam nekonečnou toliko v bodech čáry o rovnici $x = \varphi(\alpha)$, kde $\varphi(\alpha)$ jest spojitá. I vyjmu zase z pravoúhelníka toho pás P_δ stanovený nerovninami $\varphi(\alpha) - \delta' < x < \varphi(\alpha) + \delta''$, kde čísla δ', δ'' jsou čísla kladná a taková, že $\delta' + \delta'' < \delta$ a budu dále (stále k vůli zjednodušení) předpokládati, že $a < \varphi(\alpha) - \delta' < \varphi(\alpha) + \delta'' < b$ pro všecka α v (α_1, α_2). Pak jest

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \int_a^{\varphi(\alpha)-\delta'} f(x, \alpha)\, dx + \int_{\varphi(\alpha)+\delta''}^{b} f(x, \alpha)\, dx + \int_{\varphi(\alpha)-\delta'}^{\varphi(\alpha)+\delta''} f(x, \alpha)\, dx.$$

První dva integrály na pravé straně jsou funkce spojité proměnné α, jestliže $f(x, \alpha)$ jest ve zbytku vzniklém z pravoúhelníka $(a, b; \alpha_1, \alpha_2)$ po odejmutí pásu P_δ buď funkcí spojitou obou proměnných aneb aspoň má vlastnosti předpokládané v odstavci předcházejícím, a to ať kladné číslo δ zvolíme si jakkoliv malé. Jestliže tedy třetí integrál můžeme učiniti menším než libovolné číslo kladné ε, volíme-li δ dosti malé, a to pro všecka α intervalu (α_1, α_2) jest očividně $F(\alpha)$ funkcí spojitou proměnné α v intervalu (α_1, α_2). Můžeme následkem toho vysloviti větu: *Jestliže funkce $f(x, \alpha)$ dvou proměnných jest funkcí spojitou obou proměnných x, α v každém bodu pravoúhelníka $(a, b; \alpha_1, \alpha_2)$ s výjimkou bodů čáry $x = \varphi(\alpha)$, v nichž stává se nekonečnou, pak $F(\alpha)$ jest funkcí spojitou proměnné α v intervalu (α_1, α_2), lze-li ke každému kladnému číslu ε nalézti číslo δ tak, aby integrál*

$$\left|\int_{\varphi(\alpha)-\delta'}^{\varphi(\alpha)+\delta''} f(x, \alpha)\, dx\right| < \varepsilon \quad \textit{pro všecka } \delta', \delta'', \textit{ pro něž } \delta' + \delta'' < \delta \tag{11}$$

a pro všecka α intervalu (α_1, α_2). Při tom se samozřejmě předpokládá, že integrál z $f(x, \alpha)dx$ v mezích $\varphi(\alpha) - \delta'$, $\varphi(\alpha) + \delta''$ má význam.

Věta tato připouští i rozšíření ve smyslu odstavce 156.

Jestliže je vyhověno podmínce svrchu vytčené a požadující splnění nerovniny (11) za jistých podmínek (k libovolnému kladnému ε lze nalézti kladné číslo δ tak, že nerovnina ta jest splněna pro všecka kladná δ', δ'', pro něž $\delta' + \delta'' < \delta$, a pro všecka α intervalu (α_1, α_2)), říkáme, že integrál

$$\int_{\varphi(\alpha)-\delta'}^{\varphi(\alpha)+\delta''} f(x, \alpha)\, dx \qquad \delta' + \delta'' < \delta \tag{11'}$$

konverguje k nule zároveň s δ, a to stejnoměrně pro všecka α intervalu (α_1, α_2).

158. Na podkladě tohoto pojmu rozšířeného na případ obecný můžeme dospěti téměř bezprostředně k tomuto výroku: Jestliže funkce $f(x, \alpha)$ proměnných $[x, \alpha]$ jest spojitou funkcí bodu $[x, \alpha]$ v oboru uzavřeném, který vzniká z oboru omezeného čarami

$$x = a(\alpha), \quad x = b(\alpha), \quad \text{kde } \alpha \text{ probíhá interval } (\alpha_1, \alpha_2),$$

a přímkami $\alpha = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$, odejmeme-li z tohoto oboru jistý počet, ku příkladu m pásů, omezených dvojicemi čar $x = \varphi_i(\alpha)$, $x = \psi_i(\alpha)$, kde α probíhá interval (α_1, α_2) a $i = 1, 2, \ldots, m$ (uvnitř kterýchžto pásů funkce $f(x, \alpha)$ může býti nekonečna), pak lze tvrditi: Funkce $F_1(\alpha)$ daná integrálem

$$F_1(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx$$

jest spojitou funkcí proměnné α, jestliže lze číslo Δ_α, kde

$$\Delta_\alpha = (\psi_1(\alpha) - \varphi_1(\alpha)) + (\psi_2(\alpha) - \varphi_2(\alpha)) + \ldots + (\psi_m(\alpha) - \varphi_m(\alpha)),$$

učiniti vhodnou volbou pásů libovolně malým a jestliže zároveň lze ke každému kladnému ε nalézti číslo δ tak, aby

$$\left|\int_{\Delta_\alpha} f(x, \alpha)\, dx\right| < \varepsilon, \quad \text{pro všecky pásy naznačených vlastností, při nichž } \Delta_\alpha < \delta.$$

Při tom jest

$$\int_{\Delta_\alpha} f(x, \alpha)\, dx = \int_{\varphi_1(\alpha)}^{\psi_1(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx + \int_{\varphi_2(\alpha)}^{\psi_2(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx + \ldots + \int_{\varphi_m(\alpha)}^{\psi_m(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx \qquad (12)$$

a předpokládáno mlčky, že v intervalu (α_1, α_2) jsou funkce $a(\alpha)$, $b(\alpha)$, $\varphi_1(\alpha)$, $\psi_1(\alpha), \ldots$ spojity a splňují nerovniny

$$a(\alpha) \leqq \varphi_1(\alpha) \leqq \psi_1(\alpha) \leqq \varphi_2(\alpha) \leqq \psi_2(\alpha) \leqq \ldots \leqq \varphi_m(\alpha) \leqq \psi_m(\alpha) \leqq b(\alpha).$$

Vlastnost právě vytčenou stručně vyznačujeme pravíce, že *výraz* $\int_{\Delta_\alpha} f(x, \alpha)\, dx$ *konverguje zároveň s číslem δ k nule, a to stejnoměrně pro všecka α intervalu* (α_1, α_2).

POZNÁMKA. Počet pásů m jest nutno obecně zvětšovati, jestliže zmenšujeme číslo δ. V tom případě ovšem, kdy funkce $f(x, \alpha)$ stává se nekonečnou v bodech konečného počtu ku př. μ čar o rovnicích tvaru $x = \chi_i(\alpha)$, vystačíme s μ pásy, ať si δ volíme jakkoliv malé, a rovnice čar pásy ty omezujících můžeme předpokládati ve tvaru $x = \chi_i(\alpha) - \delta'_i$, $x = \chi_i(\alpha) + \delta''_i$, $i = 1, 2, \ldots, \mu$.

Viz odstavec předcházející, kde za konstantních mezí probrán případ $\mu = 1$.

Jestliže ovšem $f(x, \alpha)$ stává se nekonečnou v bodech čáry $x = a(\alpha)$, t. j. pro dolní mez integrálu pak první pás bude stanoven nerovninami $a(\alpha) \leqq x < a(\alpha) + \delta''_1$ (bude tedy omezen křivkami $x = a(\alpha)$, $x = a(\alpha) + \delta''_1$, kde α probíhá interval (α_1, α_2)).

Ve zvláštních případech, jež mohou nastávati v rozmanitosti velmi značné, snadno lze zpravidla obecné předpisy svrchu podané zjednodušiti; tak zejména, nastává-li případ v poznámce vytčený, že $f(x, \alpha)$ stává se nekonečnou v bodech μ čar o rovnicích $x = \chi_i(\alpha)$, můžeme podmínku, požadující, aby (12) konvergovalo stejnoměrně k nule, nahraditi μ podmínkami požadujícími, aby integrály tvaru (11′) konvergovaly k nule, anebo ještě jednodušeji, aby integrály

$$\int_{\chi_i(\alpha)-\delta}^{\chi_i(\alpha)} f(x, \alpha)\,dx, \qquad \int_{\chi_i(\alpha)}^{\chi_i(\alpha)+\delta} f(x, \alpha)\,dx, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, \mu$$

konvergovaly k nule s δ a to stejnoměrně pro všecka α intervalu (α_1, α_2).

PŘÍKLAD. Uvažujme ku př. integrál

$$F(\alpha) = \int_0^a \frac{f(x, \alpha)}{x^m}\,dx, \quad \text{kde } a > 0, \quad m > 0$$

a $f(x, \alpha)$ jest spojitou funkcí proměnných $[x, \alpha]$ v pravoúhelníku $(0, a; \alpha_1, \alpha_2)$ včetně hranic. Pak funkce za integračním znaménkem stává se nekonečnou nejvýše v bodech čáry $x = 0$. Aby $F(\alpha)$ bylo spojitou funkcí proměnné α, k tomu postačí stejnoměrná konvergence integrálu

$$\int_0^\delta \frac{f(x, \alpha)}{x^m}\,dx \qquad \delta > 0 \tag{+}$$

k nule. Jelikož v důsledku předpokladu spojitosti funkce $f(x, \alpha)$ jest funkce ta v pravoúhelníku $(0, a; \alpha_1, \alpha_2)$ konečnou, má její absolutní hodnota horní hranici $\mathfrak{M}$ a můžeme tudíž psáti

$$\left|\int_0^\delta \frac{f(x, \alpha)\,dx}{x^m}\right| < \mathfrak{M}\int_0^\delta \frac{dx}{x^m},$$

odkudž vyplývá, že, je-li $m < 1$, integrál v (+) konverguje s δ k nule a to stejnoměrně pro všecka α intervalu (α_1, α_2). I jest pak $F(\alpha)$ funkcí spojitou v (α_1, α_2).

Jestliže však funkce $f(x, \alpha)$ jest spojitou funkcí bodu $[x, \alpha]$ toliko v pravoúhelníku $(0 + 0, a; \alpha_1, \alpha_2)$, t. j. ve všech bodech pravoúhelníku, jehož strany mají rovnice $\alpha = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$, $x = 0$, $x = a$, z něhož však vylučujeme tu část ohraničení, jež jest položeno na straně $x=0$, pak jediná postačující podmínka k tomu, aby $F(\alpha)$ byla spojitou funkcí v (α_1, α_2), jež jest nám v důsledku předcházejících úvah známa, spočívá v požadavku, aby integrál (+) konvergoval zároveň s δ k nule, a to stejnoměrně vzhledem k všem α intervalu (α_4, α_2).

159. Kriterium pro stejnoměrnou konvergenci integrálů k nule. Máme-li integrál tvaru

$$\int_{\varphi(\alpha)-\delta'}^{\varphi(\alpha)+\delta''} f(x, \alpha)\, dx \qquad \delta' + \delta'' \leqq \delta; \; \delta' > 0, \; \delta'' > 0 \tag{8}$$

a je-li uloženo vyšetřiti, zda tento integrál konverguje k nule pro $\lim \delta = 0$ stejnoměrně pro všecka α intervalu (α_0, α_1), zavedeme nejprve do integrálu novou proměnnou substitucí $x = \varphi(\alpha) + x'$. Tím obdržíme integrál

$$\int_{-\delta'}^{\delta''} f(x' + \varphi(\alpha), \alpha)\, dx' = \int_{-\delta'}^{\delta''} F(x', \alpha)\, dx',$$

takže postačí tímto integrálem se zabývati. Dovedeme-li konstruovati funkci $\Phi(x)$ nezávislou na α (jež však může záviseti na hranicích intervalu pro α, totiž na číslech α_0, α_1) takovou, že pro všecka α intervalu (α_0, α_1) a pro všecka x' intervalu $(-\delta'_0, \delta''_0)$ jest

$$|F(x', \alpha)| < \Phi(x'),$$

pak jest, má-li zároveň integrál z $\Phi(x')$ v intervalu $(-\delta'_0, \delta''_0)$ význam,

$$\left|\int_{-\delta'}^{\delta''} F(x', \alpha)\, dx'\right| < \int_{-\delta'}^{\delta''} \Phi(x')\, dx', \qquad -\delta'_0 < -\delta' < \delta'' < \delta''_0$$

a daný integrál konverguje k nule stejnoměrně (vzhledem ke všem α v (α_0, α_1); srovnej obdobné kriterium pro stejnoměrnou konvergenci nekonečných řad: DP str. 177 dole).

Tak ku př. je-li $\Phi(x') = \dfrac{M}{|x'|^{\sigma}}$, při čemž M jest číslo nezávislé na α, pak, je-li kladné číslo $\sigma < 1$, nastává konvergence k nule a konvergence jest stejnoměrná. V tomto případě stává se $f(x, \alpha)$ nekonečnou řádu σ (po případě i nižšího) podél čáry $x = \varphi(\alpha)$.

Stává-li se tedy $f(x, \alpha)$ v bodech čáry $x = \varphi(\alpha)$ nekonečnou řádu $\sigma < 1$ právě naznačeným způsobem, jest konvergence integrálu (8) *k nule pro $\lim \delta = 0$ stejnoměrná vzhledem ke všem α intervalu (α_0, α_1).*

Zcela obdobné kriterium lze odvoditi pro stejnoměrnou konvergenci výrazu integrálního

$$\lim_{B=\infty} \int_B^\infty f(x, \alpha)\, dx, \qquad B > A > 0 \tag{8_1}$$

k nule. Tento výraz konverguje vždy k nule, když $f(x, \alpha)$ jest v intervalu (A, ∞) podle x integrace schopna; říkáme pak, že konverguje k nule stejnoměrně vzhledem k α intervalu (α_0, α_1), *lze-li ke každému kladnému číslu* ε (libovolně malému) *udati číslo* B_0 *nezávislé na* α (jež však záviseti může na hranicích intervalu pro α, t. j. na číslech α_0, α_1) *tak, aby*

$$\left|\int_B^\infty f(x, \alpha)\, dx\right| < \varepsilon \qquad \textit{pro všecka } B > B_0$$

a pro všecka α *intervalu* (α_0, α_1). Tato podmínka stejnoměrné konvergence jistě bude splnitelna, dovedeme-li sestrojiti funkci $\varphi(x)$ nezávislou na α (jež však záviseti může na α_0, α_1) takovou, že pro všecka α intervalu (α_0, α_1) a všecka $x > A$ jest

$$|f(x, \alpha)| < \varphi(x), \tag{\mu}$$

a zároveň takovou, aby v intervalu (A, ∞) byla integrace schopna. Pak jest totiž

$$\left|\int_B^\infty f(x, \alpha)\, dx\right| < \int_B^\infty \varphi(x)\, dx \quad \text{pro } B > A,$$

odkudž stejnoměrná konvergence výrazu (8_1) jest patrna. Je-li ku př. $\varphi(x) = M/x^\sigma$, kde M jest konstanta na α nezávislá, pak, je-li kladné číslo $\sigma > 1$, jest $\varphi(x)$ v (A, ∞) integrace schopno a nastává tedy při (8_1) konvergence stejnoměrná. V tomto případě jest $f(x, \alpha)$ pro $x = \infty$ nekonečně malou řádu σ (po případě vyššího; buď pro některá α daného intervalu; buď vůbec, kdyby podmínce (μ) vyhovovala také jiná funkce $\varphi_1(x) = M_1 x^{-\sigma_1}$, kde $\sigma_1 > \sigma$). *Stává-li se tedy* $f(x, \alpha)$ *pro* $x = \infty$ *nekonečně malou řádu* $\sigma > 1$ *právě naznačeným způsobem, jest konvergence výrazu* (8_1) *k nule stejnoměrná vzhledem ke všem* α *intervalu* (α_0, α_1).

160. O vyšetřování spojitosti funkce dané integrálem určitým, jehož jedna mez jest $\pm\infty$. Jest snadno na základě předcházejícího udati postačující podmínky pro spojitost funkce dané integrálem omezeným i v tom případě, že interval integrační stává se nekonečným. Nechť jest ku př. dán integrál

$$\int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx.$$

Omezíme se pro jednoduchost majíce zřetel k tomu, že horní mez jest ∞, v tomto případě jenom na funkce $f(x, \alpha)$, u nichž lze při vhodné volbě kladného čísla A docíliti, aby $|f(x, \alpha)| < \mathfrak{M}$ pro všecka $x > A$ a pro všecka α intervalu (α_0, α_1) a aby zároveň $f(x, \alpha)$ byla pro všecka $x > A$ a všecka α intervalu (α_0, α_1) funkcí spojitou obou proměnných x, α. (Při tom může číslo A záviseti na α, v tomto případě pak nechť jest A spojitou funkcí α a stále větší než jisté kladné číslo.) Daný integrál rozložíme pak na dva, kladouce

$$\int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx = \int_a^A f(x, \alpha)\, dx + \int_A^\infty f(x, \alpha)\, dx.$$

Vyšetření prvého integrálu pravé strany právě podáno; v druhém pak integrálu provedeme substitucí $x = 1/x'$. Tím změní se druhý integrál ve výraz

$$\int_0^{\frac{1}{A}} f\left(\frac{1}{x'}, \alpha\right) \frac{dx'}{x'^2}. \tag{ε}$$

Funkce $f\left(\frac{1}{x'}, \alpha\right) \frac{1}{x'^2}$ jest podle předpokladů spojitou funkcí proměnných x', α v oboru omezeném čarami $x' = 0$, $x' = A^{-1}$; $\alpha = \alpha_0$, $\alpha = \alpha_1$ až na body čáry $x' = 0$, v jichž okolí se ta funkce stávati může i nekonečnou. Podle kriterií daných větou odst. 157. viz také příklad k odst. 158. bude tudíž integrál (ε) funkcí spojitou α v intervalu (α_0, α_1), jestliže

$$\int_0^\delta f\left(\frac{1}{x'}, \alpha\right) \frac{dx'}{x'^2}$$

konverguje pro $\lim \delta = 0$ k nule stejnoměrně vzhledem ke všem α intervalu (α_0, α_1). Anebo vrátíme-li se k původní proměnné x píšíce místo $1/\delta$ krátce B, vyžaduje se, aby výraz

$$\lim_{B=\infty} \int_B^\infty f(x, \alpha)\, dx$$

konvergoval k nule stejnoměrně pro všecka α intervalu (α_0, α_1).

Máme tedy větu: *Postačující podmínky, aby integrál*

$$\int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx$$

byl spojitou funkcí parametru α, jsou:

1. *Aby byly splněny podmínky věty* odst. 155 a násl. *pro spojitost integrálu*

$$\int_a^B f(x, \alpha)\, dx$$

při $B > a$ *a jinak libovolně velikém.*

2. *Aby výraz*

$$\int_B^\infty f(x, \alpha)\, dx$$

konvergoval k nule stejnoměrně pro všecka α *intervalu* (α_0, α_1), *když* B *vzrůstá nade všecky meze.*

Obdobné věty platí, je-li dolní mez $\pm\infty$, anebo běží-li o integraci v mezích $(-\infty, \infty)$.

PŘÍKLAD. Uvažujeme-li integrál $F(\alpha) = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2 x}\, dx$, tož postačí pro spojitost funkce $F(\alpha)$, jelikož $\alpha e^{-\alpha^2 x}$ jest spojitou funkcí obou proměnných x, α v každém intervalu, aby

$$\lim_{B=\infty} \int_B^\infty \alpha e^{-\alpha^2 x}\, dx = 0 \tag{π}$$

stejnoměrně vzhledem ke všem α uvažovaného intervalu. Zvolme si interval (α_0, α_1), kde $0 < \alpha_0 < \alpha_1$; pak

$$0 < \int_B^\infty \alpha e^{-\alpha^2 x} dx < \int_B^\infty \alpha_1 e^{-\alpha_0^2 x}\, dx,$$

a výraz (π) konverguje stejnoměrně k nule pro všecka α intervalu (α_0, α_1). Funkce totiž $\alpha_1 e^{-\alpha_0^2 x}$ nezávisí na α a integrál na pravém křídle vypsané nerovniny konverguje k nule pro $\lim B = \infty$. Jest tedy $F(\alpha)$ v intervalu (α_0, α_1), kde $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$, spojitou funkcí α.

Není tomu však tak, je-li $\alpha_0 < 0$, $\alpha_1 > 0$. Výraz (π) konverguje sice k nule pro každé α toho intervalu, konvergence však nemůže býti stejnoměrná, jelikož funkce $F(\alpha)$ jest v tom intervalu nespojitá (dokonce nekonečná). Neboť jest, jak snadným počtem zjistíme,

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2 x} dx = \frac{1}{\alpha} \qquad \text{pro } \alpha \gtrless 0,$$

$$F(0) = 0.$$

2. DERIVACE INTEGRÁLŮ PODLE PARAMETRU.

161. Na základě vět odstavců předcházejících rovněž lze odvoditi některé věty, které nás poučují o tom, zda funkce

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx \tag{9}$$

má derivaci podle α. Buďtež (a, b) nejprve meze konečné a nezávislé na α. Pak derivace v bodě α_0 jest dána limitou výrazu

$$\frac{F(\alpha_0+h)-F(\alpha_0)}{h}=\int_a^b \frac{f(x, \alpha_0+h)-f(x, \alpha_0)}{h}\, dx$$

pro $\lim h=0$. Na pravé straně jest integrál závislý na h, kteréž můžeme pokládati za parametr, a bude tedy derivace existovati, jestliže integrál ten jest spojitou funkcí parametru h v bodě $h=0$. Užijeme-li pak naň věty odstavce 154, máme větu:

Funkce $F(\alpha)$ daná v (9) má derivaci v bodě α_0, jestliže výraz

$$\frac{f(x, \alpha_0+h)-f(x, \alpha_0)}{h} \quad \text{pro } \lim h=0 \tag{9'}$$

má limitu, ke které konverguje stejnoměrně vzhledem k x intervalu (a, b). Limita ta jest patrně derivací funkce $f(x, \alpha)$ podle α v bodě α_0. Zavedeme-li pro krátkost označení

$$\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}=f_\alpha(x, \alpha), \quad \left[\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=\alpha_0}=f_\alpha(x, \alpha_0),$$

máme dále na základě věty odstavce 154, *je-li právě uvedená podmínka stejnoměrné konvergence splněna, pro derivaci tu rovnost*

$$F'(\alpha_0)=\int_a^b f_\alpha(x, \alpha_0)\, dx, \tag{10}$$

kterýžto integrál má jistě význam, má-li jej integrál (9) *pro všecka α v okolí α_0.**)

162. Můžeme však ještě jednodušší podmínky udati. Podle věty o střední hodnotě počtu dif. jest, existuje-li derivace $f_\alpha(x, \alpha)$ v okolí bodu $\alpha=\alpha_0$, — α_0+h nechť jest bod toho okolí —

$$\frac{f(x, \alpha_0+h)-f(x, \alpha_0)}{h}=f_\alpha(x, \alpha_0+\Theta h),$$

$0<\Theta<1$ a tedy

$$\frac{F(\alpha_0+h)-F(\alpha_0)}{h}=\int_a^b f_\alpha(x, \alpha_0+\Theta h)\, dx. \tag{11}$$

Aby nyní existovala derivace funkce $F(\alpha)$ v bodě α_0, k tomu podle rovnice právě napsané jest nutno a postačitelno, aby existovala $\lim\limits_{h=0} \int_a^b f_\alpha(x, \alpha_0+\Theta h)dx$; k tomu však postačí, aby funkce $f_\alpha(x, \alpha)$ proměnných x, α, existující podle předpokladu pro

*) Obdobné věty lze snadno vysloviti pro derivaci zprava, resp. zleva, což ponechávám čtenáři.

všechna x v (a, b) a pro všechna α v okolí bodu α_0, byla jednak konečnou v tomto oboru dvou proměnných, jednak aby byla jakožto funkce proměnné α spojitá v bodě α_0 a to stejnoměrně pro všecka x v (a, b). Neboť pak lze ke každému kladnému číslu ε udati kladné číslo δ té vlastnosti, že

$$|f_\alpha(x, \alpha_0 + h) - f_\alpha(x, \alpha_0)| < \varepsilon \text{ pro všechna } h, \text{ pro něž } |h| < \delta$$

a pro všechna x z (a, b), a tedy podle věty o střední hodnotě

$$\left|\int_a^b f_\alpha(x, \alpha_0 + \theta h)\,dx - \int_a^b f_\alpha(x, \alpha_0)\,dx\right| < |b - a|\,\varepsilon,$$

pro všechna h, pro něž $|h| < \delta$*). Tím jest tvrzení, že existuje limita svrchu vytčená, dokázáno a zároveň dokázáno, že limita ta se shoduje s pravou stranou rovnice (10). Můžeme tedy vysloviti větu: *Jestliže funkce* $f(x, \alpha)$ *má pro všechna* x *v* (a, b) *a pro všechna* α *v jistém okolí bodu* α_0 *jakož i v bodě* α_0 *samém derivaci podle* α, *pak postačující podmínka pro existenci derivace funkce*

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\,dx$$

v bodě α_0 *jest, aby funkce* $f_\alpha(x, \alpha)$ *byla ohraničena pro všechna* x *v* (a, b) *a pro všechna* α *v okolí bodu* α_0, *a dále aby* $f_\alpha(x, \alpha)$ *byla v bodě* α_0 *funkcí spojitou proměnné* α *a to stejnoměrně pro všechna* x *v* (a, b).

Podmínky ve větě právě dokázané jistě jsou splněny, jestliže $f_\alpha(x, \alpha)$ jest spojitou funkcí obou proměnných v pravoúhelníku $(a, b; \alpha_1, \alpha_2)$, t. j. když proměnné x resp. α jsou omezeny na intervaly (a, b) resp. (α_1, α_2). Máme tak větu:

Věta 1. Postačující podmínka, aby $\int_a^b f(x, \alpha)\,dx$ *měl derivaci podle* α *v bodě* α_0 *nacházejícím se uvnitř intervalu* (α_1, α_2) *jest, aby* $f_\alpha(x, \alpha)$ *existovala a byla spojitou funkcí obou proměnných* x, α *pro intervaly* (a, b), *resp.* (α_1, α_2).

Větu tuto lze rozšířiti pro případ, že $f_\alpha(x, \alpha)$ jakožto funkce proměnné x jest nekonečnou v (a, b) v konečném počtu bodů, jejichž poloha nezávisí na α; postačí provésti toto rozšíření pro případ, že stává se nekonečnou pro horní mez b (budiž $a < b$).

*) Že existuje integrál z funkce $f_\alpha(x, \alpha_0)$, plyne z toho, že $f_\alpha(x, \alpha_0 + \theta h) = \dfrac{f(\alpha_0 + h) - f(\alpha_0)}{h}$ je funkce integrace schopná, jež pro $\lim h = 0$ konverguje *stejnoměrně* k funkci $f_\alpha(x, \alpha_0)$; viz odst. 153, poznámku pod čarou.

Budiž tedy $f_\alpha(x, \alpha)$ funkce spojitá obou proměnných v pravoúhelníku $(a, b-\varepsilon; \alpha_1, \alpha_2)$, ať ε jest jakékoliv číslo kladné, menší než $b-a$. Pak integrály

$$s_n = \int_a^{b-\varepsilon_n} f(x, \alpha)\, dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad b-a > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots > 0$$

mají derivaci podle α, je-li α uvnitř intervalu $(\alpha_1\ \alpha_2)$. Derivace ty jsou

$$s'_n = \int_a^{b-\varepsilon_n} f_\alpha(x, \alpha)\, dx.$$

Budiž dále $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$. Pak z věty o derivování nekonečných řad (viz str. 174, základní větu) vyplývá ihned, že existuje-li $\lim\limits_{n=\infty} s'_n = s'$ a konvergují-li s'_n k této limitě stejnoměrně pro všechna α v intervalu (α_1, α_2), pak s' jest derivací funkce $\lim\limits_{n=\infty} s_n = s$. Avšak

$$s = \lim_{n=\infty} s_n = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx, \qquad s' = \lim_{n=\infty} s'_n = \int_a^b f_\alpha(x, \alpha)\, dx,$$

existují-li integrály vypsané. Podmínky uvedené pro existenci derivace daného integrálu podle α uvnitř intervalu (α_1, α_2) v případě uvažovaném lze očividně vysloviti takto: Existují integrály z funkcí $f(x, \alpha)$, $f_\alpha(x, \alpha)$ v mezích a, b, dále integrál

$$\int_{b-\varepsilon}^{b} f_\alpha(x, \alpha)\, dx$$

má pro $\lim \varepsilon = 0$ za limitu nulu, ke které konverguje stejnoměrně pro všechna α z (α_1, α_2).

Obecněji vyplývá z uvedeného věta:

Věta 2. Postačující podmínky, aby $\int_a^b f(x, \alpha)\, dx$ *měl derivaci podle α v bodě α_0 nacházejícím se uvnitř intervalu (α_1, α_2) jsou:*

1. *Aby $f_\alpha(x, \alpha)$ existovala a bylo spojitou funkcí obou proměnných x, α pro intervaly resp. (a, b), (α_1, α_2) vyjma v bodech konečného počtu přímek $x = c_i$; c_i nezávislo na α.* (V bodech těchto přímek derivace $f_\alpha(x, \alpha)$ může stávati se i nekonečnou.)

2. *Aby*

$$\int_{c_i-\varepsilon}^{c_i} f_\alpha(x, \alpha)\, dx, \qquad \int_{c_i}^{c_i+\varepsilon} f_\alpha(x, \alpha)\, dx \qquad (\varepsilon > 0)$$

existovaly a konvergovaly k nule pro lim $\varepsilon = 0$ *stejnoměrně pro všecka α intervalu* (α_1, α_2).

Věta 3. Jestliže jedna mez, ku příkladu b, se stává ∞, přistupuje k těmto podmínkám, jež mají býti splněny pro interval (a, B) *proměnné x, kde $B > a$ a libovolně veliké, podmínka další: Výraz*

$$\int_B^\infty f_\alpha(x, \alpha)\, dx$$

má význam a konverguje pro lim $B = \infty$ *k nule stejnoměrně pro všecka α intervalu* (α_1, α_2).

I tato věta vyplývá jakožto důsledek věty o derivování nekonečných řad stejně jako věta předcházející. Jsou-li pak splněny podmínky v těchto větách vyslovované, jest derivace funkce $F(\alpha)$ vždy dána rovnicí (10).

163. Derivace integrálu podle parametru, závisí-li též meze integrálu na parametru. Budiž dán integrál

$$F(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx \tag{13}$$

v němž meze jsou funkce α mající pro $\alpha = \alpha_0$ derivace. Abychom vyšetřili jeho derivaci podle α v bodě α_0, pišme

$$\begin{aligned} \frac{F(\alpha_0 + h) - F(\alpha_0)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\int_{a(\alpha_0+h)}^{b(\alpha_0+h)} f(x, \alpha_0 + h)\, dx - \int_{a(\alpha_0)}^{b(\alpha_0)} f(x, \alpha_0)\, dx\right] = \\ &= \int_{a(\alpha_0)}^{b(\alpha_0)} \frac{f(x, \alpha_0 + h) - f(x, \alpha_0)}{h}\, dx + \frac{1}{h}\int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha_0+h)} f(x, \alpha_0 + h)\, dx - \\ &\quad - \frac{1}{h}\int_{a(\alpha_0)}^{a(\alpha_0+h)} f(x, \alpha_0 + h)\, dx. \end{aligned} \tag{14}$$

Budiž $f(x, \alpha)$ spojitou funkcí bodu $[x, \alpha]$, když tento bod jest jednak v okolí bodu $[b(\alpha_0), \alpha_0]$, jednak v okolí bodu $[a(\alpha_0), \alpha_0]$; pak můžeme podle věty o střední hodnotě psáti, je-li h dosti malé,

$$\frac{1}{h}\int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha_0+h)} f(x, \alpha_0 + h)\, dx = \frac{1}{h}\,[b(\alpha_0 + h) - b(\alpha_0)]\, f\,[b(\alpha_0) + \beta, \alpha_0 + h],$$

kde $|\beta| < |b(\alpha_0 + h) - b(\alpha_0)|$, a tedy

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h}\int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha_0+h)} f(x, \alpha_0 + h)\, dx = b'(\alpha_0)\, f\,[b(\alpha_0), \alpha_0]\,; \tag{15}$$

obdobně jest

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h} \int\limits_{a(\alpha_0)}^{a(\alpha_0+h)} f(x, \alpha_0 + h)\, dx = a'(\alpha_0) f[a(\alpha_0), \alpha_0]. \tag{16}$$

Limita prvého členu výrazu (12) pro lim $h = 0$ jest derivací integrálu daného v bodě α_0, jsou-li meze konstantní a rovny $a(\alpha_0)$, $b(\alpha_0)$. Jestliže i tato limita existuje, což rozhodnouti můžeme obyčejně na základě pravidel odstavců předcházejících, má výraz

$$\frac{F(\alpha_0 + h) - F(\alpha_0)}{h}$$

pro lim $h = 0$ limitu a existuje tudíž derivace funkce $F(\alpha)$ v bodě α_0. Výsledky v tomto odstavci dosažené můžeme shrnouti ve větu:

Postačující podmínky, aby integrál (13) *měl derivaci podle α v bodě $\alpha = \alpha_0$, jsou:*

1. *Aby byly splněny podmínky věty* odst. 161 resp. 162 *pro integrál z dané funkce v mezích $a(\alpha_0)$, $b(\alpha_0)$.*

2. *Aby $f(x, \alpha)$ byla spojitá funkce bodu $[x, \alpha]$, když $[x, \alpha]$ jest buď v okolí bodu $[a(\alpha_0), \alpha_0]$ aneb bodu $[b(\alpha_0), \alpha_0]$.*

Pro derivaci tu máme pak tento výraz (podle (14), (15), (16) a věty odst. 161 a 162)

$$F'(\alpha_0) = \int\limits_{a(\alpha_0)}^{b(\alpha_0)} f_\alpha(x, \alpha_0)\, dx + b'(\alpha_0) f(b(\alpha_0), \alpha_0) - a'(\alpha_0) f(a(\alpha_0), \alpha_0). \tag{17}$$

K tomuto výsledku jsme dospěli — ovšem za předpokladů méně obecných — jiným způsobem již v odst. 56.

3. UŽITÍ VĚT O SPOJITOSTI A DERIVACI INTEGRÁLŮ ZÁVISLÝCH NA PARAMETRU K VÝPOČTU INTEGRÁLŮ.

164. Vět v odstavcích předcházejících lze často s výhodou použíti k výpočtu integrálů omezených. V odstavcích následujících vypočteny, aby obraty při tom se vyskytující byly objasněny, některé jednoduché a zároveň důležité integrály.

Vyjdeme od integrálu

$$J(r) = \int_0^\pi \log(1 + 2r\cos x + r^2)\, dx, \tag{o}$$

jehož derivace jest

$$J'(r) = \int_0^\pi \frac{2\cos x + 2r}{1 + 2r\cos x + r^2}\, dx.$$

Formule tato jest správna pro všecky intervaly (r_0, r_1) proměnné r, *jež neobsahují* ± 1; neboť funkce

$$\frac{2\cos x + 2r}{1 + 2r\cos x + r^2} \tag{p}$$

jest spojitou funkcí obou proměnných x, r v oboru definovaném nerovninami $0 \leqq x \leqq \pi$, $r_0 \leqq r \leqq r_1$ ((r_0, r_1) neobsahuje ± 1)*).

Jest tedy (odst. 68, cvičení př. 9, (16'))

$J'(r) = 0$, v intervalech (r_0, r_1), jež obsahují r, pro něž $|r| < 1$.

$J'(r) = 2\pi/r$, v intervalech (r_0, r_1), jež obsahují r, pro něž $|r| > 1$.

Tedy

$$\int_0^\pi \log(1 + 2r\cos x + r^2)\, dx = c, \qquad \text{pro } |r| < 1,$$

kde c nezávisí na r; dosadíme-li ku př. $r = 0$, máme ihned $c = 0$ a

$$\int_0^\pi \log(1 + 2r\cos x + r^2)\, dx = 0, \qquad \text{pro } |r| < 1; \tag{q}$$

podobně

$$\int_0^\pi \log(1 + 2r\cos x + r^2)\, dx = 2\pi \log|r|, \qquad \text{pro } |r| > 1. \tag{q'}$$

Jelikož (o) jest spojitou funkcí r i v okolí bodů $r = \pm 1$ (odst. 157), máme, dosadíme-li do jedné z formulí (q), (q') za r hodnoty ± 1, snadným počtem

$$\int_0^\pi \log\sin\frac{x}{2}\, dx = -\pi\log 2, \quad \int_0^\pi \log\cos\frac{x}{2}\, dx = -\pi\log 2, \tag{q''}$$

aneb konečně, zavedeme-li proměnnou x' rovnicí $x = 2\pi x'$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log\sin\pi x\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \log\cos\pi x\, dx = -\tfrac{1}{2}\log 2. \tag{q''_1}$$

165. Počítejme integrál

$$\varphi(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx, \qquad a > 0,\ b > 0.$$

Jest

$$\varphi'(a) = -\int_0^\infty e^{-ax}\, dx = -\frac{1}{a},$$

---

*) Kdyby (r_0, r_1) obsahoval některý nebo oba body ± 1, stávala by se funkce (p) v oboru uvedeném nekonečnou. Naproti tomu jest poznamenati, že funkce (p) jest konečnou funkcí (jedné) proměnné x, ať si zvolíme r jakkoliv (třebas i $r = \pm 1$).

neboť při $\varepsilon > 0$ jest

$$0 < \int_B^\infty e^{-ax}\,dx \leqq \int_B^\infty e^{-\varepsilon x}\,dx, \qquad \text{je-li } a \text{ v } (\varepsilon, \infty),$$

odkudž jest patrno, že integrál $\int_B^\infty e^{-ax}\,dx$ stejnoměrně konverguje k nule pro všecka a intervalu (ε, ∞). Jest tedy $\varphi(a) = -\log a + C$ pro všecka $a > 0$. Konstantu C určíme při $b > 0$, klademe-li $a = b$; dostaneme $\varphi(b) = 0$ a tudíž $C = \log b$. Máme tak celkem

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \log\frac{b}{a}, \qquad a > 0,\ b > 0.$$

Stejně se odvodí i tento výsledek

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x^2} + (a - b)\frac{e^{-bx}}{x}\right)dx = a\log\frac{a}{b} - (a - b).$$

166. Integrál

$$J(b) = \int_0^\infty \frac{x^{b-1}}{1+x}\,dx \qquad 0 < b < 1$$

má derivaci podle b, je-li b v intervalu (b_1, b_2), kde $0 < b_1 < b_2 < 1$. To vyplývá ihned z věty odst. 162.

Neboť jest při $B > 1$

$$0 < \int_B^\infty \frac{x^{b-1}\log x}{1+x}\,dx < \int_B^\infty \frac{x^{b_2-1}\log x}{1+x}\,dx$$

a tedy výraz

$$\lim_{B=\infty} \int_B^\infty \frac{x^{b-1}\log x}{1+x}\,dx$$

konverguje stejnoměrně k nule pro všecka b intervalu (b_1, b_2). (Jest totiž výraz za znaménkem limitním menší než výraz nezávislý na b, který pro $\lim B = \infty$ konverguje k nule.)

Rovněž

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_0^\varepsilon \frac{x^{b-1}\log x}{1+x}\,dx$$

konverguje stejnoměrně k nule, jelikož

$$0 < -\int_0^\varepsilon \frac{x^{b-1}\log x}{1+x}\,dx < -\int_0^\varepsilon \frac{x^{b_1-1}\log x}{1+x}\,dx \quad \text{při } 0 < \varepsilon < 1.$$

Tedy derivace existuje a jest

$$J'(b) = \int_0^\infty \frac{x^{b-1}\log x}{1+x}\,dx.$$

Aneb užijeme-li známé nám hodnoty pro $J(b)$, jest

$$\int_0^\infty \frac{x^{b-1}\log x}{1+x}\,dx = -\frac{\pi^2\cos\pi b}{(\sin\pi b)^2}.$$

Kdybychom do integrálu $J(b)$ zavedli ještě parametr a substitucí $x = x'/a$, dostali bychom při $a > 0$

$$\int_0^\infty \frac{x^{b-1}}{a+x}\,dx = J(a, b) = \frac{\pi a^{b-1}}{\sin\pi b} \qquad a > 0,\ 0 < b < 1.$$

Že tento integrál má derivaci podle a, je-li toto v intervalu (a_1, a_2), kde $0 < a_1 < a_2$, dokáže se stejně, jako jsme dokázali existenci derivace podle b. Dostaneme ku př.

$$\int_0^\infty \frac{x^{b-1}}{(a+x)^2}\,dx = -\frac{(b-1)\,\pi a^{b-2}}{\sin\pi b}$$

a obecněji

$$\int_0^\infty \frac{x^{b-1}}{(a+x)^{k+1}}\,dx = (-1)^k\binom{b-1}{k}\frac{\pi a^{b-k-1}}{\sin\pi b}.$$

Tento vztah platí doposud pro $0 < b < 1$, dá se však úplnou indukcí snadno dokázati, že jest správný i pro $0 < b < k+1$. Výraz na pravé straně stává se sice neurčitým pro b celistvé, v tomto případě jest však pravou stranu tak doplniti, aby byla funkcí spojitou.

167. Vypočítati jest integrál

$$J(b) = \int_0^\infty e^{-Ax^2}\cos bx\,dx; \qquad A > 0.$$

Integrál jest funkcí parametru b mající derivaci. Neboť derivace funkce za integračním znaménkem podle b jest spojitou funkcí obou proměnných x a b (pro všecka x a všecka b) a nadto

$$\left| -\int_B^\infty e^{-Ax^2}x\sin bx\,dx \right| < \int_B^\infty e^{-Ax^2}x\,dx.$$

Konverguje tedy integrál z té derivace vzatý v mezích (B, ∞) stejnoměrně vzhledem ku b (v libovolném intervalu) k nule. Jest tedy, jelikož všecky podmínky jsou splněny,

$$J'(b) = -\int_0^\infty e^{-Ax^2} x \sin bx\, dx.$$

Integrací částečnou však vyplývá

$$-\int_0^\infty e^{-Ax^2} x \sin bx\, dx = \frac{1}{2A}\left[e^{-Ax^2} \sin bx\right]_0^\infty - \frac{b}{2A}\int_0^\infty e^{-Ax^2} \cos bx\, dx,$$

tudíž

$$J'(b) = -\frac{b}{2A} J(b),$$

odkudž (dělením $J(b)$ a potomní integrací obou stran podle b; viz odst. 8, př. 4)

$$\frac{J'(b)}{J(b)} = -\frac{b}{2A}, \qquad \log J(b) = -\frac{b^2}{4A} + C, \qquad J(b) = C_1 e^{-\frac{b^2}{4A}},$$

kde C resp. C_1 jsou konstanty (vzhledem ku b). K určení jejich stačí integrál stanoviti pro zvláštní hodnotu b: klademe-li $b = 0$, máme ihned

$$J(0) = C_1 = \int_0^\infty e^{-Ax^2} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{A}};$$

i jest

$$\int_0^\infty e^{-Ax^2} \cos bx\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{A}}\, e^{-\frac{b^2}{4A}}.$$

168. Abychom vypočetli integrál

$$J(a, b) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin bx}{x}\, dx, \qquad a > 0,$$

převedeme si jej derivováním na integrál známý. Derivaci podle b integrál tento má. Neboť derivace funkce za znaménkem integračním jest $e^{-ax} \cos bx$, funkce to spojitá obou proměnných x, b v libovolných intervalech. Se zřetelem pak k podmínce nastupující následkem toho, že horní mez jest nekonečná, jest zprvu zřejmo

$$\left|\int_B^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx\right| < \int_B^\infty e^{-ax}\, dx = \frac{e^{-aB}}{a}.$$

Jelikož pak pravá strana této nerovniny konverguje k nule pro $\lim B = \infty$ (při $a > 0$) nezávisle na b, jest patrno, že též

$$\lim_{B=\infty} \int_B^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx = 0, \qquad a > 0$$

a že konvergence tohoto výrazu jest stejnoměrná v každém intervalu pro b.

Tedy jest

$$\frac{\partial J(a, b)}{\partial b} = \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx \, dx,$$

anebo podle odstavce 51, příkl. 1

$$\frac{\partial J(a, b)}{\partial b} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

a tudíž integrací podle b

$$J(a, b) = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + C,$$

kde C jest konstanta vzhledem ku b (t. j. číslo nezávislé na b).

Dostali jsme tudíž pro každé b

$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + C, \qquad a > 0.$$

Konstantu C stanovíme, dovedeme-li integrál pro některou hodnotu b vyčísliti. Pro $b = 0$ integrál jest rovný 0. Tedy jest

$$0 = \operatorname{arctg} 0 + C,$$

t. j. $C = 0$. Máme tedy definitivně

$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}; \qquad a > 0. \tag{m}$$

Srovn. odst. 71, kde tento integrál stanoven rozvojem v řadu, avšak toliko za předpokladu $|b/a| = 1/\alpha < 1$.

169. Z posledního integrálu lze vypočítati důležitý pro analysi integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} dx; \qquad b \gtrless 0.$$

Ten dostaneme z integrálu příkladu předcházejícího, položíme-li $a = 0$. Ve výsledku (m) však klásti $a = 0$ nejsme oprávněni, neboť výsledek ten byl odvozen za předpokladu $a > 0$; nemělo by to také žádného smyslu, neboť pravá strana rovnice (m) nemá pro $a = 0$ významu. Nicméně můžeme předložený nyní integrál vypočítati na základě (m), dokážeme-li, že integrál

$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx \qquad b \gtrless 0 \tag{n}$$

jest spojitou funkcí parametru a v intervalu $(0, A)$, kde A jest kladné. Za znaménkem integračním jest spojitá funkce obou proměnných $[a, x]$, když a jest v intervalu $(0, A)$ a x v intervalu $(0, B)$. Zbývá tedy jenom podmínka vzhledem k horní mezi ∞. Ta jest, že

$$\lim_{B=\infty} \int_B^\infty e^{-ax} \frac{\sin bx}{x}\, dx \tag{p}$$

konverguje k nule stejnoměrně vzhledem k a v intervalu $(0, A)$. Výraz

$$\int_B^\infty e^{-ax} \frac{\sin bx}{x}\, dx \tag{q}$$

jest spojitou funkcí dolní meze B mající stále derivaci podle B, jež jest $-e^{-aB}\frac{\sin bB}{B}$, (odst. 82). Derivace ta jest rovna nule, když

$$B = \frac{k\pi}{b}; \quad k = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ldots$$

Poněvadž pro tyto hodnoty jest druhá derivace výrazu (q) různa od nuly, nabývá pro ně (q) a jenom pro ně hodnot maximálních, resp. minimálních. Je-li tudíž B položeno mezi čísly

$$\frac{k\pi}{|b|}, \quad \frac{(k+1)\pi}{|b|},$$

jest (q) položeno mezi čísly

$$\int_{\frac{k\pi}{|b|}}^\infty e^{-ax} \frac{\sin bx}{x}\, dx, \quad \int_{\frac{(k+1)\pi}{|b|}}^\infty e^{-ax} \frac{\sin bx}{x}\, dx.$$

Avšak

$$\int_{\frac{k\pi}{|b|}}^\infty e^{-ax} \frac{\sin bx}{x}\, dx = \int_{\frac{k\pi}{|b|}}^{\frac{(k+1)\pi}{|b|}} + \int_{\frac{(k+1)\pi}{|b|}}^{\frac{(k+2)\pi}{|b|}} + \int_{\frac{(k+2)\pi}{|b|}}^{\frac{(k+3)\pi}{|b|}} + \ldots \tag{r}$$

Na pravé straně stojící integrály jsou čísla se střídavými znaménky, neboť funkce $e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}$ (již jsme pro stručnost v (r) nevpisovali) má v intervalu $\left(\frac{k\pi}{|b|}, \frac{(k+1)\pi}{|b|}\right)$ stále znaménko jako $(-1)^k$, v následujícím znaménko $(-1)^{k+1}$, atd. Nadto každý integrál je menší co do absolutní hodnoty než předcházející, jelikož funkce e^{-ax}/x s rostoucím x se umenšuje (konvergujíc k nule) a druhý činitel $\sin bx$ probíhá nehledě k znaménku v každém intervalu integračním tytéž hodnoty.

Jest tedy levá strana rovnice (r) v absolutní hodnotě menší než prvý člen pravé strany (DP 48), t. j.

$$\left|\int\limits_{\frac{k\pi}{|b|}}^{\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx\right| < \left|\int\limits_{\frac{k\pi}{|b|}}^{\frac{(k+1)\pi}{|b|}} e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx\right|,$$

anebo užijeme-li na integrál na pravé straně se nacházející věty o střední hodnotě

$$\left|\int\limits_{\frac{k\pi}{|b|}}^{\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx\right| < \frac{e^{-a\xi}}{\xi}\left|\int\limits_{\frac{k\pi}{|b|}}^{\frac{(k+1)\pi}{|b|}} \sin bx\,dx\right| = \frac{2e^{-a\xi}}{|b|\,\xi},$$

kde ξ jest mezi $\frac{k\pi}{|b|}, \frac{(k+1)\pi}{|b|}$, tedy tvaru $\frac{(k+\Theta)\pi}{|b|}$, $0<\Theta<1$. Vynecháme-li na pravé straně $e^{-a\xi}$, což jest číslo buď rovné 1 (pro $a=0$) anebo menší než 1 (pro $a>0$), máme konečně

$$\left|\int\limits_{\frac{k\pi}{|b|}}^{\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx\right| < \frac{2}{(k+\Theta)\pi}$$

a podobně

$$\left|\int\limits_{\frac{(k+1)\pi}{|b|}}^{\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx\right| < \frac{2}{(k+1+\Theta_1)\pi}.$$

Je-li tudíž B v intervalu $\left(\frac{k\pi}{|b|}, \frac{(k+1)\pi}{|b|}\right)$, jest

$$\left|\int\limits_{B}^{\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx\right| < \frac{2}{(k+\Theta)\pi} < \frac{2}{k\pi}. \tag{s}$$

Z této nerovniny vyplývá ihned, že (q) vskutku konverguje k nule stejnoměrně vzhledem k a v intervalu $(0, A)$; neboť její pravá strana nezávisí na a.

Tím jest tedy spojitost funkce proměnné a dané integrálem (n) dokázána v intervalu $(0, A)$ včetně hranic a jest tedy

$$\lim_{a=0}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx = \int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin bx}{x}\,dx \qquad \text{při } b \gtrless 0.$$

Z rovnice (m) pak usuzujeme, nechajíce a na obou stranách konvergovati k nule,

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \pm\frac{\pi}{2} \qquad \text{při } b \gtrless 0,$$

kdež znaménko horní jest při b kladném, dolní při b záporném. Je-li $b = 0$, jest, jak bezprostředně patrno, daný integrál rovný nule. Můžeme, jak jest obvyklo, všecky tyto vztahy shrnouti v rovnici

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}\,b,$$

kdež sign $b = +1, -1, 0$ podle toho, je-li b kladné, záporné, či nula.

Metodou zde užitou vyplývá očividně též věta obecnější: *Výraz*

$$\lim_{B=\infty}\int_B^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\sin bx\,dx \qquad b \gtrless 0 \tag{t}$$

konverguje k nule, jsou-li $P(x)$, $Q(x)$ *mnohočleny v* x, *prvý stupně o jednotku nižšího. Konvergence tato jest stejnoměrná vzhledem ku parametrům, na nichž polynomy* $P(x)$, $Q(x)$ *závisí, pokud ovšem ty parametry jsou v takových intervalech, že integrál v* (t) *se vyskytující od jistého* B *počínaje má stále význam.*

170. Vezmeme v úvahu integrály

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2}\,dx, \qquad \int_0^\infty \frac{x\sin bx}{a^2+x^2}\,dx.$$

Při tom nechť jest $a > 0$. Klademe-li v prvním $x = ax'$, dostaneme

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\cos abx}{1+x^2}\,dx.$$

První integrál jest tedy jistá funkce součinu ab násobená $1/a$. Podobně se o druhém integrálu dokáže, že to jest funkce součinu ab. Můžeme tedy psáti

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}f_1(a\,.\,b), \qquad \int_0^\infty \frac{x\sin bx}{a^2+x^2}\,dx = f_2(a\,.\,b).$$

Derivujeme-li v prvním integrálu funkci za integračním znaménkem podle b, dostaneme za integračním znaménkem spojitou funkci proměnných b, x. Poněvadž pak jest podle věty předch. odst. splněn se zřetelem k horní mezi ∞ požadavek stejnoměrné konvergence v každém intervalu, jenž neobsahuje hodnotu $b = 0$, obdržíme derivováním za integračním znaménkem podle b derivaci integrálu podle b a tedy

$$\int_0^\infty \frac{-x \sin bx}{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{a} \cdot a f'_1(a \,.\, b),$$

odkudž plyne první vztah mezi funkcemi f_1, f_2:

$$f'_1(a \,.\, b) = -f_2(a \,.\, b) \quad \text{anebo} \quad f'_1(\xi) = -f_2(\xi)$$

platný pro každé ξ od nuly různé. Derivujeme-li podobně druhý integrál podle a (při čemž předpokládáme je v intervalu (a_1, a_2), $0 < a_1 < a_2$), dostaneme podobnou úvahou

$$\int_0^\infty \frac{-2ax \sin bx}{(a^2+x^2)^2}\, dx = b f'_2(a \,.\, b).$$

Integrací per partes však máme

$$\int_0^\infty \frac{-2ax \sin bx}{(a^2+x^2)^2}\, dx = \left[\frac{a \sin bx}{a^2+x^2}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{ab \cos bx}{a^2+x^2}\, dx = -\, ab \int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2}\, dx;$$

tedy

$$b f'_2(a \,.\, b) = -\, ab \,.\, \frac{1}{a} f_1(a \,.\, b)$$

aneb při $b \lesseqgtr 0$

$$f'_2(a \,.\, b) = -f_1(a \,.\, b); \qquad f'_2(\xi) = -f_1(\xi),$$

což jest druhý vztah mezi funkcemi f_1 a f_2. Násobením obou vztahů vyplývá

$$f'_1(\xi) f_1(\xi) = f'_2(\xi) f_2(\xi),$$

což integrováno podle ξ dává

$$f_1^2(\xi) = f_2^2(\xi) + \text{konst.}$$

Roste-li však a nade všecky meze při $b \lesseqgtr 0$, konverguje druhý integrál k nule, a i prvý násobený a konverguje k nule; t. j. funkce $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, roste-li ξ co do absolutní hodnoty nade všecky meze, blíží se libovolně nule a tudíž konst. v poslední rovnici jest rovna nule. Jest tedy

$$f_1^2(\xi) = f_2^2(\xi) \quad \text{aneb} \quad f_1(\xi) = \pm f_2(\xi).$$

Poněvadž však $f_2(\xi) = -f'_1(\xi)$, jest dále

$$\frac{f'_1(\xi)}{f_1(\xi)} = \mp 1, \qquad \log f_1(\xi) = \mp \xi + c$$

$$f_1(\xi) = c_1 e^{\mp \xi}, \quad f_2(\xi) = \pm c_1 e^{\mp \xi}.$$

Výsledky těmito, které jsou platny pro každé ξ různé od nuly (neboť intervaly, ve kterých buď b anebo a jsou rovny nule, byly v předcházejících úvahách vyloučeny), stanoveny jsou $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ až na znaménko $\mp$ a konstantu c_1. Znaménko však vyplývá ihned z okolnosti již užité, že $f_1(\xi)$ (a rovněž i $f_2(\xi)$) konverguje k nule, když ξ roste co do absolutní hodnoty nade všecky meze. Jest tedy v exponentu čísla e bráti znaménko —, je-li $\xi > 0$, znaménko $+$, je-li $\xi < 0$. Konstantu c_1 stanovíme z prvního integrálu. Ten jest funkcí spojitou čísla b pro každou hodnotu čísla b i pro $b = 0$. Neboť integrál

$$\left| \int_B^\infty \frac{\cos bx}{a^2 + x^2}\, dx \right| < \int_B^\infty \frac{dx}{a^2 + x^2}$$

konverguje (jak z napsané právě nerovniny vyplývá) pro $\lim B = \infty$ k nule stejnoměrně vzhledem k libovolnému intervalu proměnné b. Tedy jest

$$\lim_{b=0} \int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2 + x^2}\, dx = \int_0^\infty \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2a} = \lim_{b=0} c_1 \frac{1}{a} e^{-|ab|} = \frac{c_1}{a}.$$

Jest tedy $c_1 = \frac{1}{2}\pi$.

Můžeme tudíž psáti

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ab}, \qquad \int_0^\infty \frac{x \sin bx}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-|ab|} \operatorname{sign} b.$$

V posledním vztahu užili jsme označení sign b v předcházejícím příkladě vysvětleného v důsledku okolnosti, že druhý integrál jest rovný nule pro $b = 0$. Výsledky docílené odvozeny za předpokladu, že $a > 0$. Poněvadž však integrály tam se vyskytující svoji hodnotu nemění, zaměníme-li a v $-a$, platny jsou i pro $a < 0$, nahradíme-li ve jmenovateli výrazu udávajícího hodnotu prvního integrálu a číslem $|a|$.

Druhý integrál jest spojitou funkcí parametru a v každém intervalu (podle věty předcházejícího odstavce). Klademe-li tedy v rovnici poslední $a = 0$, máme opětně

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} b.$$

171. Uvažujme integrály

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx^2\, dx = \varphi(a, b), \quad \int_0^\infty e^{-ax^2} \sin bx^2\, dx = \psi(a, b)$$

za předpokladu, že a jest číslo kladné. Funkce těmito integrály definované jsou funkce spojité proměnné a, jakož i proměnné b a mají také podle těchto proměnných derivace. Jest

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = -\varphi_1(a, b), \quad \frac{\partial \psi}{\partial a} = -\psi_1(a, b), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b} = -\psi_1(a, b), \quad \frac{\partial \psi}{\partial b} = \varphi_1(a, b),$$

při čemž

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} \cos bx^2\, dx = \varphi_1(a, b), \quad \int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} \sin bx^2\, dx = \psi_1(a, b).$$

Integrací částečnou jest dále

$$\varphi(a, b) = 2a\, \varphi_1(a, b) + 2b\, \psi_1(a, b), \qquad \psi(a, b) = -2b\, \varphi_1(a, b) + 2a\, \psi_1(a, b).$$

Užijeme-li k zjednodušení počtů čísel komplexních, máme nejprve z posledních dvou rovnic

$$\varphi(a, b) + i\psi(a, b) = 2(a - ib)\,(\varphi_1(a, b) + i\psi_1(a, b)).$$

Dále máme, značí-li symbol D totální diferenciál vzhledem k proměnným a, b*)

$$D(\varphi(a, b) + i\psi(a, b)) = -(\varphi_1(a, b) + i\psi_1(a, b))\,(da - idb)$$

aneb se zřetelem k předcházející rovnici (vynecháváme-li za znaménky funkčními znaky proměnných)

$$\frac{D(\varphi + i\psi)}{\varphi + i\psi} = -\frac{da - idb}{2(a - ib)}$$

$$D \log(\varphi + i\psi) = -\tfrac{1}{2} D \log(a - ib), \qquad \varphi + i\psi = \frac{C}{\sqrt{a - ib}},$$

kde C jest číslo na a, b nezávislé a tedy numerická konstanta; klademe-li $b = 0$, $a = 1$, pak $\varphi + i\psi = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (odst. 152) a tedy $C = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Tím integrály předložené úplně stanoveny. Jest tedy (vypočítáme-li z rovnice dávající $\varphi + i\psi$ obě funkce φ i ψ) — viz cvičení k odst. 18m, příkl. 1 —

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^2 + b^2}}\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \sin bx^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^2 + b^2}}\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \cdot \operatorname{sign} b.$$

Použitím funkce exponenciální při proměnné komplexní lze výsledky právě odvozené vypisovati takto v jedné rovnici:

*) Funkce $\varphi(a, b)$, $\psi(a, b)$ jakož i jejich derivace podle a, b (t. j. funkce $\varphi_1(a, b)$, $\psi_1(a, b)$) jsou spojité funkce bodu $[a, b]$ v oboru definovaném vztahy vymezeném nerovninou $a > 0$, což čtenář snadno dokáže. Důkaz provádí se stejně jako při funkcích závislých pouze na jednom parametru.

$$\int_0^\infty e^{-Ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{A}}, \qquad A = a + bi, \qquad a > 0.$$

Výsledky docílené zůstanou v platnosti i když $a = 0$. Neboť integrály uvažované jsou spojité funkce proměnné a i pro $a=0$ z prava, jakož snadno lze ukázati metodou použitou v odstavci 169. Úvahy příslušné by se poněkud zjednodušily, kdyby integrály se dříve trasformovaly substitucí $x^2 = y$. Klademe-li ve výsledcích svrchu uvedených $a = 0$, dostaneme za předpokladu $b > 0$ rovnice

$$\int_0^\infty \cos bx^2\,dx = \int_0^\infty \sin bx^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}, \tag{X}$$

které nám udávají hodnotu integrálů zvaných *integrály Fresnelovy.*

172. Ke konci budeme se zabývati těmito čtyřmi integrály

$$J = \int_0^\infty \sin\left(x^2 - \frac{\beta^2}{x^2}\right)dx, \qquad J_1 = \int_0^\infty \cos\left(x^2 - \frac{\beta^2}{x^2}\right)dx,$$

$$K = \int_0^\infty \sin\left(x^2 + \frac{\beta^2}{x^2}\right)dx, \qquad K_1 = \int_0^\infty \cos\left(x^2 + \frac{\beta^2}{x^2}\right)dx.$$

Všecky tyto integrály jsou spojité funkce parametru β. Dokažme to ku příkladu o integrálu J. Funkce $\sin(x^2 - \beta^2/x^2)$ jest spojitou funkcí obou proměnných x, β pro všecka x, β vyjma v bodech čáry $x = 0$. Avšak tu jest funkce ta konečná (jsouc co do absolutní hodnoty stále menší než 1, po případě rovna 1). Integrál pak

$$\int_B^\infty \sin\left(x^2 - \frac{\beta^2}{x^2}\right)dx$$

konverguje k nule pro $\lim B = \infty$ a to stejnoměrně pro všecka β jistého konečného intervalu; neboť jest (při $B > |\beta|$)

$$\left|\int_B^\infty \sin\left(x^2 - \frac{\beta^2}{x^2}\right)dx\right| = \left|\int_B^\infty \sin x^2 \cos\frac{\beta^2}{x^2}\,dx - \int_B^\infty \cos x^2 \sin\frac{\beta^2}{x^2}\,dx\right| \leqq \tag{a}$$

$$\leqq \left|\int_B^\infty \sin x^2 \cos\frac{\beta^2}{x^2}\,dx\right| + \left|\int_B^\infty \cos x^2 \sin\frac{\beta^2}{x^2}\,dx\right| < \left|\int_{\sqrt{\lambda\pi}}^{\sqrt{(\lambda+1)\pi}} \sin x^2\,dx\right| +$$

$$+ \left|\int_{\sqrt{(\lambda_1+\frac{1}{2})\pi}}^{\sqrt{(\lambda_1+\frac{3}{2})\pi}} \cos x^2\,dx\right| < \left(\sqrt{\lambda+1} - \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda_1+\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\lambda_1+\tfrac{1}{2}}\right)\sqrt{\pi} < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1+\frac{1}{2}}},$$

kde λ, λ_1 jsou tak voleny, aby

$$\sqrt{\lambda\pi} \leqq B < \sqrt{(\lambda+1)\pi}, \quad \sqrt{(\lambda_1+\tfrac{1}{2})\pi} \leqq B < \sqrt{(\lambda_1+\tfrac{3}{2})\pi}.$$

Jelikož pak výraz $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1+\frac{1}{2}}}$ konverguje k nule pro $\lim B=\infty$ a to nezávisle na β, vidíme, že integrál (a) konverguje k nule a to stejnoměrně pro všecka β daného intervalu. Tím jest tvrzení, že J jest spojitou funkcí β (v každém intervalu), dokázáno.

Dokážeme si dále, že J má derivaci podle β v každém bodě různém od $\beta=0$. Derivujeme-li při J funkci za integračním znaménkem podle β, obdržíme

$$\int_0^\infty -\frac{2\beta}{x^2}\cos\left(x^2-\frac{\beta^2}{x^2}\right)dx\,;$$

za integračním znaménkem v tomto výraze jest funkce spojitá obou proměnných β, x, vyjma v bodech čáry $x=0$, kde stává se nekonečnou. Jest tudíž dokázati, že výraz

$$\int_0^\varepsilon -\frac{2\beta}{x^2}\cos\left(x^2-\frac{\beta^2}{x^2}\right)dx \tag{b}$$

konverguje k nule stejnoměrně pro všecka β intervalu neobsahujícího bod $\beta=0$. Avšak provedeme-li v (b) substituci $x=|\beta|/x'$, máme

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_0^\varepsilon -\frac{2\beta}{x^2}\cos\left(x^2-\frac{\beta^2}{x^2}\right)dx=\mp 2\lim_{B=\infty}\int_B^\infty\cos\left(x'^2-\frac{\beta^2}{x'^2}\right)dx',\qquad B=\frac{|\beta|}{\varepsilon},$$

odkudž jest stejnoměrná konvergence výrazu (b) na základě předcházejícího patrna.

Se zřetelem k horní mezi ∞ zbývá ještě dokázati, že výraz

$$\int_B^\infty -\frac{2\beta}{x^2}\cos\left(x^2-\frac{\beta^2}{x^2}\right)dx$$

konverguje k nule stejnoměrně pro všecka β uvažovaného intervalu, což jest snadno; (buďto užijeme postupu pro (a) naznačeného aneb právě provedené substituce $x=|\beta|/x'$; konečně jest to bezprostředně patrno z okolnosti, že funkce za integračním znaménkem stává se pro $x=\infty$ nekonečně malou řádu 2 ve smyslu odst. 159).

Máme tudíž

$$\frac{dJ}{d\beta}=\int_0^\infty -\frac{2\beta}{x^2}\cos\left(x^2-\frac{\beta^2}{x^2}\right)dx$$

aneb pro $\beta>0$, zavedeme-li novou proměnnou $x'=\beta/x$,

$$\frac{dJ}{d\beta}=-2\int_0^\infty\cos\left(x^2-\frac{\beta^2}{x^2}\right)dx=-2J_1. \tag{c}$$

Podobně se dokáže

$$\frac{\partial J_1}{\partial\beta}=-2J\qquad \beta>0 \tag{c'}$$

a

$$\frac{dK}{d\beta}=+2K_1,\quad \frac{dK_1}{d\beta}=-2K.\qquad \beta>0 \tag{d}$$

Užijeme-li však vztahu (A) odst. 151, př. 2, máme

$$K = \int_0^\infty \sin\left(x^2 + \frac{\beta^2}{x^2}\right) dx = \int_0^\infty \sin(x^2 + 2\beta)\, dx = \cos 2\beta \int_0^\infty \sin x^2\, dx + \sin 2\beta \int_0^\infty \cos x^2\, dx$$

$$K_1 = \int_0^\infty \cos\left(x^2 + \frac{\beta^2}{x^2}\right) dx = \int_0^\infty \cos(x^2 + 2\beta)\, dx = \cos 2\beta \int_0^\infty \cos x^2\, dx - \sin 2\beta \int_0^\infty \sin x^2\, dx.$$

Tyto dvě relace jsou patrně současně splněny s (d); dále jest podle rovnice (X) odstavce předcházejícího

$$\int_0^\infty \cos x^2\, dx = \int_0^\infty \sin x^2\, dx = \alpha, \tag{e}$$

kdež α jest jistá numerická konstanta udávající nám společnou hodnotu obou integrálů (Fresnelových).

Z (c) a (c') následuje

$$\frac{dJ}{d\beta} J - \frac{dJ_1}{d\beta} J_1 = 0$$

anebo integrací

$$J^2 - J_1^2 = \text{konst.} \tag{f}$$

Vztah tento platný jest pro každé β kladné, poněvadž však J a J_1 jsou spojité funkce proměnné β, jest platný i pro $\beta = 0$. Dosadíme-li do něho za $\beta = 0$, změní se J a J_1 v integrály (e) sobě rovné a jest tudíž v (f) konst. $= 0$, takže jest

$$J = \pm J_1. \tag{g}$$

Pro $\beta = 0$ jest bráti znaménko $+$ (neboť $\alpha > 0$) a se zřetelem k spojitosti obou funkcí J a J_1 jest i v jistém okolí bodu $\beta = 0$ bráti znaménko $+$, následkem čehož vyplývá z (c) a (g) pro toto okolí bodu $\beta = 0$

$$\frac{dJ}{d\beta} = -2J \quad \text{aneb} \quad \frac{d \log J}{d\beta} = -2$$

a integrací

$$\log J = -2\beta + \text{konst.}, \quad J = Ce^{-2\beta}.$$

Jelikož pak pro $\beta = 0$ se J redukuje na druhý z integrálů (e), který rovná se α, jest $C = \alpha$ a máme aspoň v jistém okolí bodu $\beta = 0$

$$J = J_1 = \alpha e^{-2\beta}. \tag{h}$$

Tento výsledek však platí, pokud v rovnici (g) jest na místě znaménko horní; platí však pro libovolně veliké β, neboť kdyby pro některé β v (g) bylo bráti znaménko dolní, nemohla by vzhledem k (h) býti zachována spojitost funkcí J a J_1, kterou jsme dokázali. Výraz na pravé straně (h) nerovná se totiž nule pro žádné β.

Shrneme-li všecky výsledky, máme

$$\int_0^\infty \sin\left(x^2 - \frac{\beta^2}{x^2}\right) dx = \int_0^\infty \cos\left(x^2 - \frac{\beta^2}{x^2}\right) dx = \alpha e^{-2\beta},$$

$$\int_0^\infty \sin\left(x^2 + \frac{\beta^2}{x^2}\right) dx = \alpha(\cos 2\beta + \sin 2\beta), \qquad \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\int_0^\infty \cos\left(x^2 + \frac{\beta^2}{x^2}\right) dx = \alpha(\cos 2\beta - \sin 2\beta).$$

4. O INTEGRACI INTEGRÁLŮ PODLE PARAMETRU. INTEGRÁLY DVOJNÁSOBNÉ.

173. Dokázali jsme, že, je-li $\partial f(x, \alpha)/\partial\alpha$ v intervalech (a, b), (α_1, α_2) pro proměnné x resp. α funkcí spojitou obou proměnných, že z rovnice

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

následuje

$$F'(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha}\, dx \quad \text{pro všecka } \alpha \text{ intervalu } (\alpha_1, \alpha_2).$$

Klademe-li $\partial f(x, \alpha)/\partial\alpha = \varphi(x, \alpha)$, $F'(\alpha) = \Phi(\alpha)$, vidíme naopak, že z rovnice

$$\Phi(\alpha) = \int_a^b \varphi(x, \alpha)\, dx, \tag{1}$$

je-li $\varphi(x, \alpha)$ spojitou funkcí obou proměnných x, α v intervalech (a, b), (α_1, α_2), následuje

$$\int \Phi(\alpha)\, d\alpha = \int_a^b \left[\int \varphi(x, \alpha)\, d\alpha\right] dx;$$

anebo integrujeme-li v určitých mezích, třeba α_1, α_2,

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Phi(\alpha)\, d\alpha = \int_a^b \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi(x, \alpha)\, d\alpha\right] dx.$$

Rovnici tu lze psáti na základě (1) ve tvaru

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\int_a^b \varphi(x, \alpha)\, dx\right] d\alpha = \int_a^b \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi(x, \alpha)\, d\alpha\right] dx,$$

kterýžto vztah psává se poněkud jednodušeji bez závorek takto

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_a^b \varphi(x, \alpha)\, dx = \int_a^b dx \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi(x, \alpha)\, d\alpha. \tag{I}$$

V rovnici této jest na pravé straně provedena na funkci $\varphi(x, \alpha)$ integrace podle α v mezích (α_1, α_2) a na funkci tak vzniklou integrace podle x v mezích a, b; na levé straně provedeny jsou tytéž operace v pořádku obráceném. Budeme nazývati sled dvou integrací v určitých mezích podle dvou různých proměnných x, α, jenž se má provésti na funkci $\varphi(x, \alpha)$, **dvojnásobný integrál** z funkce $\varphi(x, \alpha)$. Užíváme-li k značení druhé proměnné místo písmene α značku y a pozměníme-li také obdobně označení mezí, můžeme vysloviti větu vyjadřující vztah (I):

Hodnota dvojnásobného integrálu z funkce $f(x, y)$ v mezích (a, b) resp. (c, d) (vzhledem ku proměnné x resp. y) nezávisí, je-li $f(x, y)$ ve všech bodech pravoúhelníku $(a, b; c, d)$ spojitou funkcí obou proměnných, na pořádku, v jakém integrace provádíme.

Bylo by snadno větu tuto vysloviti za obecnějších podmínek pro $f(x, y)$ na podkladě vyšetřování již provedených; místo toho jest však účelnější podati samostatný důkaz věty obecnější a neopírati se o věty pro derivování integrálu podle parametru, jako jsme to právě učinili; to jest tím spíše na místě, že nyní obě proměnné jsou proměné integrační.

K tomu cíli uplatníme v následujícím pojem stejnoměrné konvergence v poněkud jiném směru. *Budu pak předpokládati k vůli jednoduchosti stále, že $a < b$, $c < d$.*

174. Nechť jest funkce $f(x, y)$ funkcí bodu $[x, y]$ v pravoúhelníku $(a, b; c, d)$ a budiž v tom pravoúhelníku funkcí *konečnou.* Předpokládejme dále, že $f(x, y)$ jest v mezích a, b podle x integrace schopno, nechť jest y jakákoliv hodnota intervalu (c, d).

Výraz tudíž

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, y)\Delta x_k = (x_1 - a)f(\xi_1, y) + (x_2 - x_1)f(\xi_2, y) + \ldots + (b - x_{n-1})f(\xi_n, y); \qquad (A)$$
$$a \leqq \xi_1 \leqq x_1 \leqq \xi_2 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{n-1} \leqq \xi_n \leqq b$$

konverguje k hodnotě $\int_a^b f(x, y)dx$, když n roste nade všecky meze a délky všech intervalů $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ konvergují k nule. Zvolíme-li si tedy pro y určitou nějakou hodnotu v (c, d), lze ke každému kladnému ε udati číslo kladné η tak, aby bylo

$$\left|\int_a^b f(x, y)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, y)\,\Delta x_k\right| < \varepsilon, \qquad (B)$$

jestliže je

$$\Delta x_k < \eta, \quad k = 1, 2, 3, \ldots n.$$

Lze-li k libovolnému ε udati číslo η nezávislé na y tak, aby nerovnina (B) byla splněna pro všecka y intervalu (c, d), říkáme, že součet (A) konverguje stejnoměrně vzhledem k y intervalu (c, d).

V této definici jsme předpokládali, že meze integrační a, b jsou konstanty nezávislé na y; jest však patrno, že *podržuje svůj význam i tenkráte, když a, b jsou funkce proměnné y definované pro y intervalu (c, d) a konečné.*

Podle věty o střední hodnotě jest (s označením užitým v (A))

$$\int_a^b f(x, y)\,dx = (x_1 - a)\mu_1 + (x_2 - x_1)\mu_2 + \ldots + (b - x_{n-1})\mu_n, \qquad (2)$$

kde μ_k jest jisté číslo obsažené mezi horní a dolní hranicí funkce $f(x, y)$, když y má danou hodnotu a x probíhá interval (x_{k-1}, x_k). Označíme-li tyto hranice a jejich rozdíl (oscilaci), abychom jejich závislost na y zřejmou učinili, $M_k^{(y)}$, $m_k^{(y)}$, $O_k^{(y)}$, můžeme psáti na základě (2)

$$\left|\int_a^b f(x, y)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, y)\,\Delta x_k\right| \leqq \sum (M_k^{(y)} - m_k^{(y)})\,\Delta x_k = \sum O_k^{(y)}\,\Delta x_k,$$

kteráž nerovnina jest užitečná k vyšetřování stejnoměrné konvergence výrazu (A) k hodnotě integrálu.

175. Budiž dána nyní funkce $f(x, y)$, jež jest schopna integrace podle y v intervalu (c, d), ať jest x jakákoliv hodnota intervalu (a, b). Pak integrál v mezích (c, d) podle y z dané funkce jest jistou funkcí x (pokud jest x v (a, b)) a můžeme tudíž psáti

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy. \tag{5}$$

Rozdělme si interval (a, b) na n menších intervalů pomocí čísel $x_1, x_2, x_3, \ldots$ a nechť značí ξ_k libovolnou hodnotu intervalu $x_{k-1}, x_k)$. Pak jest na základě (5)

$$\sum_k F(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_c^d \left(\sum_k f(\xi_k, y)\,\Delta x_k\right) dy \qquad k = 1, 2 \ldots n. \tag{6}$$

Předpokládejme dále, že $f(x, y)$ jest také integrace schopno podle x v mezích a, b, když y jest v (c, d), a že $\sum_k f(\xi_k, y)\,\Delta x_k$ stejnoměrně (vzhledem k y) konverguje k $\int_a^b f(x, y)\,dx$. Tu můžeme patrně klásti podle (B)

$$\sum_k f(\xi_k, y)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x, y)\,dx + \varepsilon_y,$$

při čemž ε_y jest jistá funkce proměnné y, jež pro všecka y intervalu (c, d) jest stále menší co do absolutní hodnoty než ε, zvolíme-li si (jakož učiníme) $\Delta x_k < \eta$, kdež η jest číslo kladné vhodně volené.

Dosadíme-li tento výraz do (6), máme*)

*) Ku psaní této rovnice jsme však ve skutečnosti jenom tenkráte oprávněni, když $\int_a^b f(x,y)\,dx$ jest funkce proměnné y v (c, d) integrace schopná. Neboť pak jest, jelikož i $\sum_k f(\xi', y)\,\Delta x_k$ jest v (c, d) podle y integrace schopno podle

$$\sum_k F(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy + \int_c^d \varepsilon_y\,dy. \tag{7}$$

Anebo (poněvadž $\left|\int_c^d \varepsilon_y\,dy\right| < (d-c)\,\varepsilon$)

$$\left|\sum_k F(\xi_k)\,\Delta x_k - \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy\right| < (d-c)\,\varepsilon, \quad \text{při } |\Delta x_k| < \eta, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

kteroužto nerovninu také takto můžeme vysloviti:

$$\lim \sum_k F(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy,$$

když $\lim \Delta x_k = 0$ a ať jest ξ_k *jakákoliv hodnota intervalu* Δx_k; $k = 1, 2, \ldots, n$. Následkem toho jest levá strana integrál z $F(x)$ v mezích a, b a můžeme tudíž psáti

---

předpokladů, též ε_y integrace schopno a rozklad integrálu rovnice (6) ve dva integrály rovnice (7) oprávněn.

Okolnost však, že funkce y daná integrálem $\int_a^b f(x,y)\,dx$ jest podle y v (c, d) integrace schopna, dá se takto dokázati. Integrály horní a dolní (odst. 87, pozn. 3) existují při každé funkci; i jest (na základě jejich definic)

$$\begin{aligned} \overline{\int_c^d}\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy + \underline{\int_c^d} \varepsilon_y\,dy &\leqq \overline{\int_c^d}\left(\int_a^b f(x,y)\,dx + \varepsilon_y\right) dy \leqq \overline{\int_c^d}\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy + \overline{\int_c^d} \varepsilon_y\,dy, \\ \underline{\int_c^d}\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy + \underline{\int_c^d} \varepsilon_y\,dy &\leqq \underline{\int_c^d}\left(\int_a^b f(x,y)\,dx + \varepsilon_y\right) dy \leqq \underline{\int_c^d}\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy + \overline{\int_c^d} \varepsilon_y\,dy. \end{aligned} \tag{8}$$

Avšak, jelikož $\int_a^b f(x,y)\,dx + \varepsilon_y$ jest podle předpokladů podle y v (c, d) integrace schopno, splývá dolní i horní integrál z té funkce; jelikož dále $|\varepsilon_y| < \varepsilon$ pro všecka y intervalu (c, d), jest

$$\left|\overline{\int_c^d} \varepsilon_y\,dy\right| < \varepsilon(d-c), \quad \left|\underline{\int_c^d} \varepsilon_y\,dy\right| < \varepsilon(d-c)$$

a tudíž na základě vztahů (8) a těchto nerovnin jest

$$\overline{\int_c^d}\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy - \underline{\int_c^d}\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy < 2\varepsilon\,(d-c).$$

Poněvadž však ε můžeme si zvoliti libovolně malé, jest

$$\overline{\int_c^d}\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy = \underline{\int_c^d}\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy\,;$$

t. j. funkce $\int_a^b f(x,y)\,dx$ jest podle y v intervalu (c, d) integrace schopna.

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy$$

anebo se zřetelem k (5)

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy. \qquad (\mathrm{I}')$$

Tento základní vztah byl odvozen za těchto předpokladů:

1. funkce $f(x, y)$ jest konečná v pravoúhelníku $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$,

2. $f(x, y)$ jest podle x v (a, b) integrace schopna, ať jest y jakákoliv hodnota v (c, d),

3. $f(x, y)$ jest podle y v (c, d) integrace schopna, ať jest x jakákoliv hodnota v (a, b),

4'. $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, y)\,\Delta x_k$ konverguje k $\int_a^b f(x, y)\,dx$ stejnoměrně vzhledem ke všem y v intervalu (c, d).

Podmínku 4' mohli bychom (měníce roli obou proměnných x, y) nahraditi podmínkou

4''. $\sum_{k=1}^{n} f(x, \eta_k)\,\Delta y_k$ konverguje k $\int_c^d f(x, y)\,dy$ stejnoměrně vzhledem ke všem x v intervalu (a, b); při tom jest η_k libovolná hodnota intervalu Δy_k.

176. Příklady funkcí, při nichž součet (A) stejnoměrně konverguje.

a) Funkce spojitá obou proměnných x, y v pravoúhelníku daném nerovninami $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$.

Při takové funkci totiž lze ke každému ε_1 stanoviti číslo η, aby

$$|f(x', y') - f(x, y)| < \varepsilon_1 \quad \text{pro všecka} \quad |x' - x| < \eta, |y' - y| < \eta, \qquad (4)$$

jsou-li (x', y'), (x, y) body daného pravoúhelníka. Učiníme-li nejprve $\varepsilon_1 = \varepsilon/(b-a)$, kde ε jest jiné číslo kladné libovolně dané, a pak volíme $\Delta x_k < \eta$, jest

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k^{(y)} - m_k^{(y)})\,\Delta x_k < \varepsilon_1 \sum \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon,$$

tedy podle (3) podmínka (B) splněna, při čemž η dáno nezávisle na y.

b) Funkce $f(x, y)$ konečná a spojitá v pravoúhelníku

$$(a \leqq x \leqq b, \quad c \leqq y \leqq d),$$

vyjmeme-li obory v konečném počtu a takové, že čáry je ohraničující můžeme tak upraviti, aby odnětím těch oborů z daného pravoúhelníka byly z každé přímky $y =$ konst. *odňaty úsečky, jejichž celková délka jest menší než libovolně malé, kladné číslo ε_2 a jejichž počet nepřevyšuje jisté celé číslo λ* (kteréžto číslo může ovšem záviseti na ε_2 a s ε_2 konvergujícím k nule vzrůstati nade všecky meze).

Neboť vyjmeme-li z pravoúhelníka daného obory takové, jak větou vytčeno a zvolíme-li si číslo η tak, aby ve zbytku oboru splněno (4), dostáváme snadno vztah (ve kterém $\mathfrak{M}$ značí horní hranici $|f(x, y)|$ v pravoúhelníku)

$$\sum_{k=1}^{n} O_k^{(y)} \Delta x_k < (b-a)\varepsilon_1 + 2\mathfrak{M}\varepsilon_2 + 4\mathfrak{M}\lambda\eta.$$

Zvolíme-li

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{6\mathfrak{M}}, \text{ pak } \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

a učiníme-li zároveň

$$\eta < \frac{\varepsilon}{12\mathfrak{M}\lambda},$$

(čímž platnost (4) nebude dotčena, neboť je-li (4) splněna pro jisté η, tím spíše jest splněna pro η menší), bude

$$\sum_k O_k^{(y)} \Delta x_k < \varepsilon \quad \text{pro} \quad \Delta x_k < \eta$$

a tedy podmínka (B) splněna při η nezávislém na y.

Podle věty dokázané mají uvažovanou vlastnost *konečné funkce proměnných x, y v pravoúhelníku daném spojité, vyjmeme-li body čar, jež protínají přímky $y =$* konst. *v konečném počtu bodů* (a obecněji, vyjmeme-li body čar, jež lze uzavříti v pásy, jejichž celkovou šířkou měřenou ve směru osy x lze učiniti menší než kladné číslo ε_2).

c) Funkce $f(x, y)$ konečná v pravoúhelníku ($a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$) a mající, když ji pokládáme za funkci jedné proměnné x, v (a, b) variaci konečnou a stále menší než jisté číslo V, ať zvolíme si y jakkoliv v (c, d).

Neboť pak jest

$$\sum_k (M_k^{(y)} - m_k^{(y)}) < V$$

a tedy

$$\sum_k (M_k^{(y)} - m_k^{(y)}) \Delta x_k < V\eta.$$

Postačí tedy zvoliti $\eta < \varepsilon/V$, aby podmínka (B) byla splněna nezávisle na y.

Důkazy, že funkce v případech *a), b), c)* uvedené patří mezi funkce, při nichž součet (A) stejnoměrně konverguje, byly podány za předpokladu, že a, b jsou konstanty. S nepatrnými změnami zůstávají v platnosti i tenkráte, když a, b jsou spojité funkce proměnné y, definované v intervalu (c, d) a konečné; značme je $a(y)$, $b(y)$. Pak ovšem místo pravoúhelníka nastupuje obor omezený čarami $x = a(y)$, $x = b(y)$ a přímkami $y = c$, $y = d$. K rozšíření tomuto dospěje se snadno metodou použitou v odstavci následujícím.

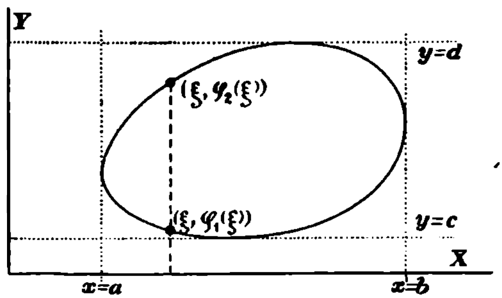
177. Pojem dvojnásobného integrálu se dá rozšířiti. Buď K uzavřená křivka omezující jistou část roviny XY a položená uvnitř pravoúhelníka (a, b; c, d). Předpokládejme pak pro jednoduchost, že každá pořadnice probíhající mezi přímkami $x = a$, $x = b$ protíná K ve dvou bodech (viz obr. 5), tak na př. $x = \xi$, kde

ξ jest číslo intervalu (a, b), nechť protíná křivku v bodech $[\xi, \varphi_1(\xi)]$, $[\xi, \varphi_2(\xi)]$. Rovněž každá přímka rovnoběžná s osou x o rovnici $y = \eta$, kde η jest číslo intervalu (c, d), nechť protíná křivku K ve dvou bodech o souřadnicích $[\psi_1(\eta), \eta]$, $[\psi_2(\eta), \eta]$. — Označení budiž tak voleno, že $\varphi_1(\xi) < \varphi_2(\xi)$ a $\psi_1(\eta) < \psi_2(\eta)$.

Budeme pak uvažovati tyto dva integrály

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\right] dx, \quad \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx\right] dy \tag{9}$$

za těchto předpokladů:



Obr. 5.

1. *Funkce $f(x, y)$ jest definována v oboru omezeném křivkou K včetně hranic a jest to funkce konečná,*

2. *$f(x, y)$ jest podle y v mezích $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ integrace schopna, ať jest x jakákoliv hodnota v (a, b),*

3. *$f(x, y)$ jest podle x v mezích $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ integrace schopna, ať jest y jakákoliv hodnota v (c, d),*

4'. $\sum_k f(\xi_k, y)\, \Delta x_k$, kde Δx_k *jsou intervaly vzniklé rozdělením intervalu $(\psi_1(y), \psi_2(y))$, konverguje k $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$ stejnoměrně vzhledem ke všem y intervalu (c, d).*

Za těchto předpokladů můžeme tvrditi, že

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx\right] dy. \tag{II}$$

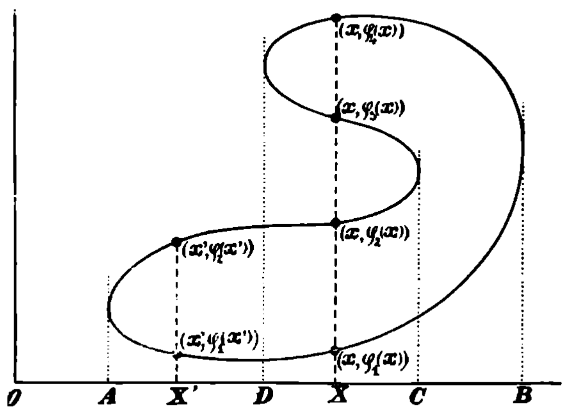
Důkaz toho jest snadný; neboť tato věta jest obsažena v předcházející, kterou stačí užíti na funkci $\mathfrak{f}(x, y)$ takto definovanou

$\mathfrak{f}(x, y) = f(x, y)$ pro body uvnitř a na obvodě K,
$\mathfrak{f}(x, y) = 0$ pro body vně křivky K a uvnitř pravoúhelníka $(a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d)$.

Jelikož pak v důsledku podmínek splněných podle předpokladu pro funkci $f(x, y)$ jsou splněny pro $\mathfrak{f}(x, y)$ předpoklady 1, 2, 3, 4′ věty odstavce předcházejícího, jest pro funkci $\mathfrak{f}(x, y)$ splněn vztah (I′); ten však ve skutečnosti jest identický (na základě definice funkce $\mathfrak{f}(x, y)$) se vztahem (II), který tudíž dokázán.

Podmínku 4′ můžeme nahraditi (jako svrchu) podmínkou:

4″. $\sum_k f(x, y_k)\, \Delta y_k$, *kde* Δy_k *jsou intervaly vzniklé rozdělením intervalu* $(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ *a o délce konvergující k nule, konverguje k* $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy$ *stejnoměrně vzhledem ke všem* x *intervalu* (a, b).



Obr. 6.

178. Obor omezený křivkou K značiti budeme zkrátka Ω a nazývati jej **oborem integračním.** Integrály (9) budeme nazývati *dvojnásobné integrály v oboru* Ω a budeme je též psáti v tomto jednodušším tvaru

$$\int_\Omega dx \int f(x, y)\, dy, \quad \int_\Omega dy \int f(x, y)\, dx.$$

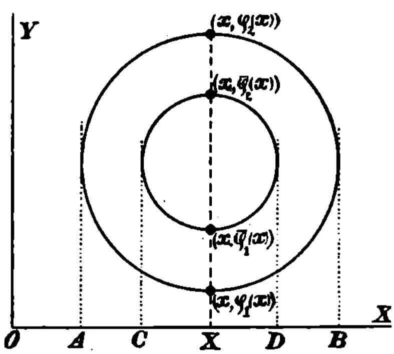
Při tomto zjednodušeném označení máme však jenom takové dvojnásobné integrály na mysli, které vypsány byvše ve tvaru (9) *mají při první i druhé integraci horní mez větší než dolní.*

179. Není nutno, aby obor Ω omezen byl křivkou, již protíná každá pořadnice nejvýše ve dvou bodech, anebo aby omezen byl toliko jedinou křivkou. Tak ku př. dvojnásobný integrál vzhledem k oboru Ω obr. 6 je (značíme-li $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$, $OX = x$, $OX' = x'$)

$$\int_\Omega dx \int f(x, y)\,dy = \int_a^d dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy +$$

$$+ \int_d^c dx \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy + \int_{\varphi_3(x)}^{\varphi_4(x)} f(x, y)\,dy \right) + \int_c^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

Integrál vzhledem k mezikruží (obr. 7) jest (při označení jasném z předcházejícího a z obrázku)



Obr. 7.

$$\int_\Omega dx \int f(x, y)\,dy =$$

$$= \int_a^c dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy + \int_c^d dx \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\overline{\varphi}_1(x)} f(x, y)\,dy + \int_{\overline{\varphi}_2(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) + \int_d^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$$

a podobně v případech jiných. Budeme uvažovati hlavně takové obory, kde přímky rovnoběžné s osami X, Y protínají v konečném počtu bodů křivku K (anebo souhrn křivek K) omezující obor Ω.

Pro integrály dvojnásobné zůstává i při těchto oborech Ω věta odst. 177 v platnosti, jakož z důkazu jejího tam provedeného ihned vyplývá. Lze však ji snadno rozšířiti i pro obory Ω obecnější.

180. Pro dvojnásobné integrály jest platna následující téměř samozřejmá věta: *Nemají-li obory Ω_1, Ω_2 bodů společných — leda na společné hranici — jest*

$$\int_{\Omega_1} dx \int f(x, y)\,dy + \int_{\Omega_2} dx \int f(x, y)\,dy = \int_{\Omega_1 + \Omega_2} dx \int f(x, y)\,dy. \tag{10}$$

Při tom jest $\Omega_1 + \Omega_2$ obor vzniklý sloučením oborů Ω_1, Ω_2 v jeden. Větu tuto můžeme pojímati jednak jako důsledek, jednak jako jisté rozšíření rovnice (II) odst. 96. Jiný důkaz vyplývá následující úvahou. Definujme si dvě funkce $\mathfrak{f}_1(x, y)$, $\mathfrak{f}_2(x, y)$ těmito vztahy

$$\mathfrak{f}_1(x, y) = f(x, y) \text{ na } \Omega_1, \quad \mathfrak{f}_1(x, y) = 0 \text{ na } \Omega_2;$$
$$\mathfrak{f}_2(x, y) = 0 \text{ na } \Omega_1, \quad \mathfrak{f}_2(x, y) = f(x, y) \text{ na } \Omega_2$$

s dodatkem, že na společné hranici oborů Ω_1, Ω_2 jest ku př.

$$\mathfrak{f}_1(x, y) = f(x, y), \quad \mathfrak{f}_2(x, y) = 0.$$

Pak jest patrně $\mathfrak{f}_1(x, y) + \mathfrak{f}_2(x, y) = f(x, y)$ pro všecky body oboru $\Omega_1 + \Omega_2$ a

$$\int_{\Omega_1} dx \int f(x, y)\, dy = \int_{\Omega_1} dx \int \mathfrak{f}_1(x, y)\, dy = \int_{\Omega_1+\Omega_2} dx \int \mathfrak{f}_1(x, y)\, dy;$$
$$\int_{\Omega_2} dx \int f(x, y)\, dy = \int_{\Omega_2} dx \int \mathfrak{f}_2(x, y)\, dy = \int_{\Omega_1+\Omega_2} dx \int \mathfrak{f}_2(x, y)\, dy;$$
$$\int_{\Omega_1+\Omega_2} dx \int \mathfrak{f}_1(x, y)\, dy + \int_{\Omega_1+\Omega_2} dx \int \mathfrak{f}_2(x, y)\, dy =$$
$$= \int_{\Omega_1+\Omega_2} dx \int (\mathfrak{f}_1(x, y) + \mathfrak{f}_2(x, y))\, dy = \int_{\Omega_1+\Omega_2} dx \int f(x, y)\, dy.$$

Z rovnic právě napsaných však následuje ihned vztah (10).

181. Integrály dvojnásobné nevlastní. Přistoupíme nyní k dvojnásobným integrálům, v nichž funkce $f(x, y)$ buď není v některých bodech oboru integračního definována (jsouc tam neurčitou) anebo jest v okolí některých bodů integračního oboru nekonečnou anebo konečně není vůbec ani na podkladě definice Cauchy-Riemannovy rozšířené pojmem integrálů nevlastních funkce $f(x, y)$ v příslušných intervalech integračních integrace schopna podle té proměnné, podle které se nejprve má provésti integrace.

Vezměme v úvahu dvojnásobný integrál

$$\int_{\Omega} dx \int f(x, y)\, dy;$$

aby mohl tento integrál míti význam, nesmí integrace podle y býti pro všecky body x jistého konečného intervalu spadajícího do intervalu integračního bezvýznamná; neboť pak by funkce, jež se podle x má integrovati, nebyla v tom intervalu dána a integrál podle x (a tudíž i daný dvojnásobný integrál) by neměl smyslu. Naproti tomu, nastane-li ta okolnost (že integrace podle y jest bezvýznamná) buď pro jistý konečný počet hodnot proměnné x a to pro $x=\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, aneb obecněji v bodech množství bodového (ξ) délky nulové (podle J), potomní integrace podle x může podržeti význam. Neboť pak jest sice funkce proměnné x, která integrací podle y vzniká a která podle vymezení tady přijatých jest součtem integrálů tvaru

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy, \tag{1}$$

v těch bodech neurčitá, po případě v okolí jejich i nekonečná, avšak integrál z takové funkce může míti význam. Jest tedy nutným důsledkem rozšířené definice Cauchy-Riemannovy (o integrály nevlastní), že do úvah o dvojnásobných integrálech takové funkce $f(x, y)$ jest přibrati, pro které výraz (1) ve vyjádření dvojnásobných integrálů se vyskytující stává se neurčitým resp. nekonečným v bodech množství bodového (ξ) délky nulové položeného v intervalu integračním podle x.

Předcházející vývody platí také, zaměníme-li vzájemně proměnné x, y, uvažujeme-li tedy integrály dvojnásobné, kde první integrace vztahuje se k proměnné x. Integrály dvojnásobné, ve kterých funkce $f(x, y)$ má vlastnosti právě vyznačené budeme nazývati *dvojnásobné integrály nevlastní.*

Objasním pojem dvojnásobného integrálu nevlastního na příkladech.

PŘÍKLAD 1.

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy.$$

Integrál

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy = \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{při } x \lesseqgtr 0$$

má pro $x \neq 0$ význam (jeho hodnota jest rovnicí napsanou vypočtena). Klademe-li ve funkci za znaménky integračními $x=0$, dostaneme funkci $-1/y^2$, která se stává nekonečnou druhého řádu v bodě $y=0$ intervalu $(0, 1)$ a jest tedy integrál

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy$$

pro $x=0$ bez významu. Funkce tímto integrálem definovaná jest tedy určena v celém intervalu $(0, 1)$ vyjma v bodě 0, kde jest neurčita. Integrace druhá podle x význam má, neboť funkce, která se má integrovati, není dána toliko v bodě $x=0$, v celém ostatním intervalu $(0, 1)$ jest konečná a spojitá; máme tudíž podle příslušné definice integrálu nevlastního

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Kdybychom zaměnili pořádek integrační, dostali bychom obdobně

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{-dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4},$$

výsledek rozdílný od předcházejícího.

Jest patrno zároveň z příkladu počítaného, pocházejícího od *Cauchyho*, že změna pořadu integračního při integrále dvojnásobném z funkce, která v oboru integračním stává se nekonečnou toliko v jediném bodě (totiž v bodě [0, 0]) a ve všech ostatních bodech jest spojitou funkcí bodu $[x, y]$, může míti za následek změnu hodnoty toho integrálu.

PŘÍKLAD 2. Uvažujme integrál

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{dy}{x^2+y^2}. \tag{b}$$

I zde integrál

$$\int_0^1 \frac{dy}{x^2+y^2} = \left[\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

stanoví funkci proměnné x pro všecka x vyjma pro $x=0$. Avšak integrace

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx$$

nemá významu, neboť funkce za znaménkem integračním jest určitě nekonečnou řádu 1 pro dolní mez.

Nemá tudíž integrál (*b*) rovněž významu.

PŘÍKLAD 3. Uvažujme integrál

$$I_\varepsilon = \int_{\omega_\varepsilon} dx \int \frac{dy}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{\frac{1}{2}\sigma}},$$

kde ω_ε jest část roviny XY omezená kružnicí o rovnici $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\varepsilon^2$. Máme rozhodnouti nejprve, zda integrál daný má význam, a v tom případě, že význam má, vypočítati lim I_ε pro lim $\varepsilon=0$. K zjednodušení daného integrálu zavedeme nejprve proměnné $y-y_0=\varepsilon\,.\,\eta$, $x-x_0=\varepsilon\,.\,\xi$, kteréžto substituce se provedou podle známých nám pravidel o zavádění nových proměnných do integrálů jednoduchých (odst. 107). Dostaneme

$$I_\varepsilon = \varepsilon^{2-\sigma}\int_\omega d\xi \int \frac{d\eta}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}\sigma}} = \varepsilon^{2-\sigma}\int_{-1}^{1} d\xi \int_{-\sqrt{1-\xi^2}}^{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{d\eta}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}\sigma}} = 4\varepsilon^{2-\sigma}\int_0^1 d\xi \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{d\eta}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}\sigma}};$$

ω jest obor bodů $[\xi, \eta]$ vyplňujících vnitřek kružnice $\xi^2+\eta^2=1$. Zaveďme ještě místo η proměnnou t rovnicí $\eta=\xi t$. Obdržíme snadným počtem

$$I_\varepsilon = 4\varepsilon^{2-\sigma}\int_0^1 \frac{d\xi}{\xi^{\sigma-1}} \int_0^{a_\xi} \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}\sigma}}, \qquad a_\xi = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}.$$

Předpokládejme nejprve $\sigma > 1$; pak funkce proměnné ξ

$$\frac{1}{\xi^{\sigma-1}} \int_0^{a_\xi} \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}\sigma}} \tag{+}$$

jest v bodě $\xi = 0$ určitě nekonečnou řádu $\sigma - 1$; neboť jest

$$\lim_{\xi=0} \xi^{\sigma-1} \frac{1}{\xi^{\sigma-1}} \int_0^{a_\xi} \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}\sigma}} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}\sigma}}.$$

Má tedy, když $\sigma > 1$, integrál (+) tenkrát a jenom tenkrát význam, když $\sigma - 1 < 1$, t. j. když $\sigma < 2$. Jestliže však $0 < \sigma < 1$, tu již o funkci

$$\int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{d\eta}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}\sigma}}$$

proměnné ξ (jež se má integrovati v (0, 1)) bezprostředně jest patrno, že jest konečná, monotonní v intervalu (jest to funkce s ξ rostoucím klesající a pro $\xi = 0$ má hodnotu $1/(1-\sigma)$) a tedy integrace schopna; rovněž pro $\sigma = 1$ ku příkladu přímým počtem dokáže čtenář, že existuje nevlastní integrál v (0, 1).

Můžeme tedy psáti

$$I_\varepsilon = 4\varepsilon^{2-\sigma} . a, \qquad \text{jestliže } 0 < \sigma < 2.$$

kde a jest hodnota číselná (na ε nezávislá). I jest

$$\lim I_\varepsilon = 0, \qquad \text{jestliže } 0 < \sigma < 2 \tag{α}$$

PŘÍKLAD 4. Jest rozhodnouti, zda integrál

$$\int_\Omega dx \int dy \frac{1}{(ax^2+bxy+cy^2)^{\frac{1}{2}\sigma}}, \qquad \text{kde } b^2 - 4ac < 0, \quad a > 0, \quad \sigma > 0$$

má význam, je-li Ω obor ku příkladu daný kruhem o středu [0, 0] a poloměru R. Funkce za integračním znaménkem jest nekonečná pouze v bodě [0, 0]. Nejprve lze nalézti dvě čísla kladná, že jest

$$\frac{p}{x^2+y^2} < \frac{1}{ax^2+bxy+cy^2} < \frac{q}{x^2+y^2}, \tag{$\times$}$$

z kterýchž nerovnin snadno následuje, že integrál daný má význam tenkráte a jenom tenkráte, když $\sigma < 2$. Zároveň jest (je-li $\sigma < 2$)

$$\int_\Omega dx \int \frac{dy}{(ax^2+bxy+cy^2)^{\frac{1}{2}\sigma}} = \int_\Omega dy \int \frac{dx}{(ax^2+bxy+cy^2)^{\frac{1}{2}\sigma}}; \tag{β}$$

neboť rovnice tato jest platna pro obor $\Omega - \omega_\varepsilon$, kde ω_ε jest obor omezený kružnicí o středu [0, 0] a poloměru ε, v mezikruží $\Omega - \omega_\varepsilon$ pak funkce $f(x, y)$ jest spojitá funkce bodu $[x, y]$. Pro obor ω_ε však v důsledku ($\times$) a (α) příkladu předcházejícího však následuje, že, ať jest δ jakékoliv číslo kladné, můžeme docíliti, aby

$$0 < \int_{\omega_\varepsilon} dx \int \frac{dy}{(ax^2+bxy+cy^2)^{\frac{1}{2}\sigma}} < \delta, \qquad 0 < \int_{\omega_\varepsilon} dy \int \frac{dx}{(ax^2+bxy+cy^2)^{\frac{1}{2}\sigma}} < \delta$$

zvolíme-li ε dosti malé. Z kterýchžto okolností ihned tvrzení (β) následuje.

182. PŘÍKLAD 5. **Gaussův důkaz fundamentální věty algebry.** Vezměme v úvahu libovolný mnohočlen n-tého stupně

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \tag{c}$$

kde $|a_n| > 0$, a dosadíme za $x = \varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde i jest imaginární jednotka ($i^2 = -1$). Tím mnohočlen obdrží tvar $P + Qi$, kde P i Q jsou mnohočleny reálné a budou rovny podle Moivreovy věty (jsou-li $a_1, a_2, \ldots a_n$ čísla reálná)

$$P = \varrho^n \cos n\varphi + a_1 \varrho^{n-1} \cos(n-1)\varphi + a_2 \varrho^{n-2} \cos(n-2)\varphi + \ldots + a_{n-1}\varrho\cos\varphi + a_n,$$
$$Q = \varrho^n \sin n\varphi + a_1 \varrho^{n-1} \sin(n-1)\varphi + \ldots + a_{n-1}\varrho\sin\varphi.$$

Položíme

$$V = \operatorname{arctg}\frac{P}{Q}$$

a utvoříme derivace

$$\frac{\partial V}{\partial\varrho} = \frac{Q\dfrac{\partial P}{\partial\varrho} - P\dfrac{\partial Q}{\partial\varrho}}{P^2 + Q^2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = \frac{Q\dfrac{\partial P}{\partial\varphi} - P\dfrac{\partial Q}{\partial\varphi}}{P^2 + Q^2},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\varphi} = \frac{S}{(P^2 + Q^2)^2},$$

kde S jest mnohočlen o členech tvaru $a\varrho^k \cos l\varphi \sin m\varphi$.

Dokážeme si, že oba integrály dvojnásobné

$$\int_0^R d\varrho \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\varphi}\,d\varphi, \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\varphi}\,d\varrho \tag{d}$$

mají různou hodnotu, učiníme-li R dosti veliké.

První integrál se rovná 0. Neboť integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\varphi}\,d\varphi \tag{f}$$

ztráceti může význam nejvýše pro n hodnot ϱ; totiž pro ty, pro které funkce $\partial^2 V/\partial\varrho\,\partial\varphi$ stává se nekonečnou a tudíž $P^2 + Q^2$ stává se nulou. Tyto hodnoty jsou pak absolutní hodnoty kořenů rovnice $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, jichž nejvýše jest n. Pro tyto hodnoty v počtu nejvýše n (existují-li vůbec kořeny té rovnice) jest výraz (f) neurčitý (funkce integrovaná se totiž stává nekonečnou určitě řádu 2 po případě ještě vyššího, má-li (c) kořeny mnohonásobné); pro všecky ostatní hodnoty ϱ má výraz (f) hodnotu zcela určitou a dokonce stále nule rovnou, neboť jest pro ty hodnoty

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\, \partial \varphi}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right) d\varphi = \left[\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0.$$

Jest tedy funkce, která se v prvním dvojnásobném integrálu (d) má podle ϱ integrovati, stále nule rovna, vyjma snad pro konečný počet hodnot ϱ v počtu nejvýše n; tudíž první z integrálů (d) jest vskutku rovný nule.

Pro druhý z integrálů (d) máme podobnou úvahou

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\, \partial \varphi}\, d\varrho = \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right]_{\varrho=0}^{\varrho=R}.$$

Avšak vypočteme-li nejvyšší členy v R u čitatele a jmenovatele výrazu $[\partial V/\partial \varphi]_{\varrho=R}$ (výraz $[\partial V/\partial \varphi]_{\varrho=0} = 0$), dostaneme

$$\left[\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right]_{\varrho=R} = \frac{-nR^{2n} + \ldots}{R^{2n} + \ldots}$$

a vidíme, že výraz tento, když R roste nade všecky meze, konverguje k $-n$ a že tedy můžeme R si tak zvoliti, aby bylo

$$\left[\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right]_{\varrho=R} = -n + \varepsilon_{R,\varphi}, \qquad |\varepsilon_{R,\varphi}| < \varepsilon,$$

kde ε jest číslo kladné libovolně stanovené. Jest tedy druhý integrál roven

$$\int_0^{2\pi} (-n + \varepsilon_{R,\varphi})\, d\varphi = -2\pi n + 2\pi\varepsilon\Theta, \qquad -1 < \Theta < 1,$$

což jest veličina, učiníme-li R tak veliké, aby $\varepsilon < n$, jistě od nuly různá.

Kdyby výraz $P^2 + Q^2$ pro žádnou hodnotu proměnných ϱ, φ nebyl rovný nule, byla by funkce $\partial^2 V/\partial \varrho\, \partial \varphi$ spojitou funkcí obou proměnných v integračním oboru integrálů (d) a oba ty integrály podle odst. 177 by měly tytéž hodnoty. Poněvadž však jsme dokázali, že při dosti velikém R mají integrály (d) hodnoty různé, jest jistě aspoň jedna hodnota (ϱ, φ), pro kterou $P^2 + Q^2 = 0$, t. j. pro kterou i $P = 0$, i $Q = 0$. Jest tedy aspoň jedno číslo $x = \varrho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, které dosazeno byvši do výrazu (c) jej činí rovným nule, t. j. *každá rovnice algebraická má aspoň jeden kořen.*

Zároveň máme nový příklad, že, stává-li se funkce v oboru integračním nekonečnou, pořádek integrací při integrálu dvojnásobném může míti vliv na hodnotu toho integrálu.

183. Nebudeme se zabývati v následujícím podmínkami, za kterých jest dovoleno v integrálu dvojnásobném nevlastním pořad integrací zaměniti. V příkladě 4 jsem stručně naznačil, jak lze při řešení takové otázky v případě určitém postupovati, postup ten pak lze snadno zevšeobecniti, čímž ve většině prakticky důležitých případů dojdeme k cíli. Ostatně později při vyšetřování integrálů t. zv. dvojných k zodpovědění otázky právě naznačené budeme míti prostředky značně účinnější. Pojednám v následujícím jenom ještě o **dvojnásobných integrálech v oborech nekonečných** a o podmínkách pro záměnu pořadí integračního v takovýchto integrálech dvojnásobných. Při tom omezím se pouze na obory pravoúhelníkové, t. j. budu vyšetřovati integrály dvojnásobné tvaru

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy,$$

kde jedno nebo i více z čísel a, b, c, d jest $\pm\infty$.

Buďtež nejprve dány integrály

$$\int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)\, dy, \qquad \int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx \tag{1}$$

a předpokládejme, že integrály tyto mají význam; vedle toho učiníme předpoklad, že pro každé $B > a$ jest

$$\int_a^B dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^B f(x, y)\, dx. \tag{2}$$

Avšak jest

$$\begin{aligned} \int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)\, dy &= \int_a^B dx \int_c^d f(x, y)\, dy + \int_B^\infty dx \int_c^d f(x, y)\, dy, \\ \int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx &= \int_c^d dy \int_a^B f(x, y)\, dx + \int_c^d dy \int_B^\infty f(x, y)\, dx. \end{aligned} \tag{3}$$

Poněvadž však existuje prvý z integrálů (1), existuje limita

$$\lim_{B=\infty} \int_B^\infty dx \int_c^d f(x, y)\, dy = 0 \quad \text{(odst. 144 poznámka)} \tag{4}$$

a ze stejné příčiny existuje i limita levé strany rovnice (2) a tudíž i pravé strany téže rovnice, kteráž však jest prvým členem pravé strany rovnice (3); existuje i limita druhého členu té pravé strany (stále pro $\lim B = \infty$), t. j.

$$\lim_{B=\infty} \int_c^d dy \int_B^\infty f(x, y)\, dx.$$

Mají-li však oba integrály (1) sobě býti rovny, musí tato limita býti rovna nule, jak z rovnic (2), (3) a (4) ihned vyplývá. A naopak, je-li tato limita, jejíž existenci jsme prokázali, rovna nule, vyplývá z rovnic (2), (3) a (4) rovnost integrálů (1).

Tak máme větu: *Nutná a postačující podmínka, aby*

$$\int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx,$$

jest za předpokladu, že tyto integrály mají význam a že jest splněna (2) pro každé B, *aby*

$$\lim_{B=\infty} \int_c^d dy \int_B^\infty f(x, y)\, dx = 0. \tag{5}$$

Podmínka (5) *bude jistě splněna za předpokladu, že*

$$\int_B^\infty f(x, y)\, dx$$

konverguje k nule pro $\lim B = \infty$ *a to stejnoměrně vzhledem ke všem* y *intervalu* (c, d). Neboť pak, zvolíme-li si ε libovolně, lze udati číslo B_0 tak, aby bylo

$$\left| \int_B^\infty f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon,$$

pro všecka $B > B_0$ a pro všecka y intervalu (c, d), a jest tedy výraz

$$\left| \int_c^d dy \int_B^\infty f(x, y)\, dx \right| < \int_c^d \varepsilon\, dy = (d - c)\, \varepsilon,$$

t. j. jest menší než číslo libovolně malé, zvolíme-li si jenom B dosti veliké, čímž tvrzení, že splněn jest vztah (5), dokázáno.

Avšak i tenkráte bude splněn vztah (5), když integrál

$$\int_B^\infty f(x, y)\, dx$$

konverguje k nule stejnoměrně vzhledem k y intervalu (c, d), *vyjmeme-li z tohoto intervalu konečný počet intervalů tvaru* $(y_0 - \eta, y_0 + \eta)$, *kde* η *jest číslo kladné, jež lze si zvoliti libovolně malé, jestliže jenom funkce*

$$\varphi(y) = \int_B^\infty f(x, y)\, dx$$

jest v okolí bodu $y=y_0$ konečnou pro všecka $B > B_1 \geqq a$ anebo aspoň v okolí bodu y_0 jest stále

$$|\varphi(y)| \leqq \frac{\beta}{|y-y_0|^\sigma} \quad \text{pro všecka } B > B_1,$$

kde $0 < \sigma < 1$; B_1 jest číslo vhodně zvolené větší, po případě rovné a, β číslo kladné nezávislé na B.

Neboť pak lze psáti — je-li pro jednoduchost jediná taková hodnota y_0 v (c, d) —

$$\int_c^d dy \int_B^\infty f(x, y)\, dx = \int_c^{y_0-\eta} \varphi(y)\, dy + \int_{y_0-\eta}^{y_0+\eta} \varphi(y)\, dy + \int_{y_0+\eta}^d \varphi(y)\, dy.$$

Prostřední integrál pravé strany lze učiniti libovolně malým co do absolutní hodnoty, zvolíme-li si η dosti malé (na základě předpokládané vlastnosti funkce $\varphi(y)$), první a třetí rovněž, zvolíme-li si B dosti veliké, na základě toho, že $\varphi(y)$ konverguje stejnoměrně ve zbytku intervalu (c, d) (to jest v součtu intervalů $(c, y_0-\eta) + (y_0+\eta, d)$) k nule pro $\lim B = \infty$.

Jest tedy levá strana číslo libovolně malé, zvolíme-li si B dosti veliké, t. j. jest splněn vztah (5). Jak by úvahu právě provedenou bylo upraviti, kdyby y_0 splývalo buď s c anebo s d, jest jasno.

PŘÍKLAD.

$$\int_1^\infty dx \int_0^1 \frac{1-y^2x^2}{(1+y^2x^2)^2}\, dy.$$

Zde k rozhodnutí, zda jest dovoleno pořad integrační zaměnit, vezmeme v úvahu integrál

$$\int_0^1 dy \int_B^\infty \frac{1-y^2x^2}{(1+y^2x^2)^2}\, dx.$$

Jestliže tento integrál konverguje k nule pro $\lim B = \infty$ a existuje-li daný integrál dvojnásobný, pak lze pořad integrační obrátiti. Integrál

$$\varphi(y) = \int_B^\infty \frac{1-y^2x^2}{(1+y^2x^2)^2}\, dx \tag{a}$$

konverguje k nule stejnoměrně vzhledem k y intervalu $(\eta, 1)$, kdež kladné číslo $\eta < 1$ můžeme si zvoliti libovolně malé. Abychom si objasnili, jak chová se $\varphi(y)$ v okolí bodu $y=0$ (v němž porušena stejnoměrná konvergence), můžeme si $\varphi(y)$ vypočísti a dostaneme

$$\varphi(y) = \frac{B}{1+B^2y^2} = \frac{1}{y}\,\frac{By}{1+B^2y^2},$$

ze kteréžto rovnice následuje pro všecka $B > 0$ platná nerovnost

$$|\varphi(y)| \leqq \frac{1}{2y}.$$

Jest tedy číslo σ předcházejícího odstavce rovno 1. Na tento případ uvedená kriteria se nevztahují a záměnnost integrací jest následkem toho pochybná.

V příkladě daném ovšem snadno rozhodneme přímým výpočtem. Jest

$$\int_0^1 \frac{1-y^2x^2}{(1+y^2x^2)^2}\,dy = \left[\frac{y}{1+y^2x^2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\int_1^\infty dx \int_0^1 \frac{1-y^2x^2}{(1+y^2x^2)^2}\,dy = \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Postupujeme-li v pořádku obráceném, jest

$$\int_0^1 dy \int_1^\infty \frac{1-y^2x^2}{(1+y^2x^2)^2}\,dx = \int_0^1 \left[\frac{x}{1+y^2x^2}\right]_{x=1}^{x=\infty} dy = -\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Vskutku dostáváme výsledky různé.

184. Vezměme v úvahu nyní integrály

$$\int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y)\,dy, \qquad \int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx$$

a předpokládejme, že tyto integrály mají význam a že pro každé $D > c$ jest splněn vztah

$$\int_a^\infty dx \int_c^D f(x, y)\,dy = \int_c^D dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx \tag{1}$$

(což rozhodnouti lze pomocí pravidla odstavce předcházejícího). Avšak jest

$$\int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y)\,dy = \int_a^\infty dx \int_c^D f(x, y)\,dy + \int_a^\infty dx \int_D^\infty f(x, y)\,dy,$$

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_c^D dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx + \int_D^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx.$$

Podobně jako v odstavci předcházejícím vyplývá bezprostředně z předpokladu, že

$$\lim_{D=\infty} \int_D^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx = 0,$$

následkem čehož následuje z požadavku, aby dané integrály byly sobě rovny (právě jako v odstavci předcházejícím), jakožto nutná a postačitelná podmínka, aby

$$\lim_{D=\infty} \int_a^\infty dx \int_D^\infty f(x, y)\,dy = 0.$$

Tato podmínka patrně bude splněna, když

$$\lim_{D=\infty}\int_a^B dx\int_D^\infty f(x, y)\, dy = 0, \qquad \lim_{D=\infty}\int_B^\infty dx\int_D^\infty f(x, y)\, dy = 0.$$

Ku platnosti rovnice (1) pak se vyžaduje jakožto nutná (a za jistých předpokladů postačitelná) podmínka podle (5) odstavce předcházejícího vztah

$$\lim_{B=\infty}\int_c^D dy\int_B^\infty f(x, y)\, dx = 0.$$

Provedeme-li tytéž úvahy, měníce roli proměnných x, y, vidíme, že *postačující podmínky, aby splněna byla rovnost*

$$\int_a^\infty dx\int_c^\infty f(x, y)\, dy = \int_c^\infty dy\int_a^\infty f(x, y)\, dx,$$

jsou za předpokladu, že tyto integrály mají význam a že jest splněna rovnost

$$\int_a^B dx\int_c^D f(x, y)\, dy = \int_c^D dy\int_a^B f(x, y)\, dx$$

pro každé $B > a$ a $D > c$, *tyto:*

1. $$\lim_{B=\infty}\int_c^D dy\int_B^\infty f(x, y)\, dx = 0, \qquad \lim_{D=\infty}\int_a^B dx\int_D^\infty f(x, y)\, dx = 0.$$

2. Buď jest

$$\lim_{D=\infty}\int_B^\infty dx\int_D^\infty f(x, y)\, dy = 0 \quad \text{anebo jest} \quad \lim_{B=\infty}\int_D^\infty dy\int_B^\infty f(x, y)\, dx = 0$$

při libovolně velikém B resp. D.

Aby splněny byly podmínky 1, k tomu *postačí*, jakož v odstavci 183 obšírně bylo vyloženo, *aby integrál* $\int_B^\infty f(x, y) dx$ pro lim $B = \infty$ *konvergoval stejnoměrně k nule pro všecka y intervalu* (c, D) *a též aby integrál* $\int_D^\infty f(x, y) dy$ *konvergoval k nule* pro lim $D = \infty$ *stejnoměrně pro všecka x intervalu* (a, B).

Ba postačí, když tato stejnoměrná konvergence bude splněna pro interval (c, D) (resp. interval (a, B)), vyjmeme-li z něho konečný počet intervalů menších, jejichž celkovou délku lze učiniti libovolně malou a ve kterýchžto intervalech částečných existují hodnoty y_0 (resp. x_0), v jejichž okolí jest stejnoměrná konvergence porušena, ba pro něž integrál

$$\int_B^\infty f(x, y_0)\,dx \quad \text{resp. integrál} \quad \int_D^\infty f(x_0, y)\,dy$$

nemusí míti význam, má-li jenom funkce

$$\varphi(y) = \int_B^\infty f(x, y)\,dx \quad \text{resp.} \quad \psi(x) = \int_D^\infty f(x, y)\,dy$$

v okolí bodu $y = y_0$ (resp. $x = x_0$) vlastnost v odstavci 183 obšírně popsanou. V okolí těchto výminečných hodnot má býti totiž pro všecka B resp. D větší než libovolná vhodně volená čísla B_1 resp. D_1

$$|\varphi(y)| < \frac{\beta}{|y - y_0|^\sigma} \quad \text{resp.} \quad |\psi(x)| < \frac{\gamma}{|x - x_0|^\tau}, \tag{2}$$

kde kládné číslo σ (resp. τ) jest číslo nezávislé na B (resp. D) a $\sigma < 1$ (resp. $\tau < 1$).

Rozhodnutí, zda splněna jest podmínka 2, zpravidla nečiní potíží. Jestliže ku příkladu

$$|f(x, y)| < \frac{K}{x^\lambda y^\mu} \qquad \lambda > 1,\ \mu > 1$$

pro všecka $x > B$, $y > D$ (kde B, D si můžeme zvoliti libovolně veliké), jest i první i druhá z limit v podmínce 2 uvedených rovna nule (jak integrací výrazu na pravé straně a z věty o střední hodnotě ihned následuje).

Tak v příkladech řešených v dalším v odst. 186, 187, 188 jsou funkce, o které běží (s poněkud jiným označením proměnných),

$$e^{-x^2(1+y^2)}, \quad \sin x \,.\, e^{-xy^2}, \quad e^{-ax-ky}\frac{\sin yx \cos y}{y}; \qquad a > 0,\ k > 0;$$

ty pak jsou pro $y > 1$, $x > 0$ co do absolutní hodnoty vesměs menší (DP 167 (příkl. 2), 168) než výrazy

$$\frac{1}{x^4 y^2}, \quad \frac{2}{x^2 y^4}, \quad \frac{4}{a^2 k^2 x^2 y^3},$$

tudíž podle právě uvedeného podmínka 2 splněna a nebrán k ní více v citovaných odstavcích zřetel.

Že podmínka 2 není snad již zahrnuta v předpokladu, že příslušné dvojné integrály mají význam, a v podmínce 1, vyplývá z příkladu následujícího. Jest (viz bližší počty v odstavci 181)

$$\int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dy = -\int_1^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = -\frac{\pi}{4},$$

$$\int_1^\infty dy \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \int_1^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{4}.$$

V příkladě tomto změna pořadu integračního má vliv na hodnotu integrálu. Nemohou býti tudíž svrchu uvedené podmínky 1 a 2 splněny. Avšak podmínka 1 jest splněna, neboť jest ku příkladu

$$\int_1^D dy \int_B^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \int_1^D \frac{B\,dy}{B^2+y^2} = \operatorname{arctg} \frac{D}{B} - \operatorname{arctg} \frac{1}{B},$$

tedy

$$\lim_{B=\infty} \int_1^D dy \int_B^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = 0$$

a stejný výsledek jest i při druhé limitě v podmínce 1. Následkem toho jistě není splněna podmínka 2, jak čtenář ostatně snadno dokáže přímým počtem.

5. PŘÍKLADY PRO VÝPOČET OMEZENÝCH INTEGRÁLŮ ZÁMĚNOU POŘADU INTEGRAČNÍHO.

185. Stanovili jsme (odst. 168)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin(xy)}{x}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{y}{a} \quad \text{při } a > 0.$$

Integrujeme-li tuto formuli podle y v mezích (b_1, b_2), dostaneme

$$\int_{b_1}^{b_2} dy \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin(xy)}{x}\,dx = \int_{b_1}^{b_2} \operatorname{arctg}\frac{y}{a}\,dy.$$

Avšak na levé straně pořad integrace můžeme zaměnit, jelikož k tomu postačující podmínka jest (podle odstavce 163), aby integrál

$$\int_B^\infty e^{-ax} \frac{\sin(xy)}{x}\,dx$$

konvergoval pro $\lim B = \infty$ k nule stejnoměrně pro všecka y intervalu (b_1, b_2). Podmínka ta jest splněna, neboť jest pro všecka y $(B > 0)$

$$\left|\int_B^\infty e^{-ax} \frac{\sin xy}{x}\,dx\right| < \int_B^\infty \frac{e^{-ax}}{x}\,dx; \qquad a > 0, \quad B > 0.$$

Zaměníme-li tedy na levé straně pořad integrační a provedeme-li pak na obou stranách integraci podle y v mezích (b_1, b_2), obdržíme

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}(\cos b_1x - \cos b_2x)}{x^2}\,dx = b_2 \operatorname{arctg}\frac{b_2}{a} - b_1 \operatorname{arctg}\frac{b_1}{a} - \frac{a}{2}\log\frac{a^2+b_2^2}{a^2+b_1^2}.$$

Formule tato jest odvozena za předpokladu $a > 0$; zůstává však v platnosti, když $a = 0$, neboť levá strana jest spojitá funkce a pro $a \geqq 0$ (čehož důkaz přenechávám čtenáři). Necháme-li konvergovati a k nule, dostaneme

$$\int_0^\infty \frac{\cos b_1x - \cos b_2x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}(b_2 \operatorname{sign} b_2 - b_1 \operatorname{sign} b_1) = \frac{\pi}{2}(|b_2| - |b_1|).$$

Snadnými transformacemi dostaneme z této rovnice při

$$\int_0^\infty \frac{\sin(px)\sin(qx)}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}(|p+q| - |p-q|).$$

186. Integrál Laplaceův vypočteme jednoduše ze dvojnásobného integrálu

$$I = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dy.$$

Označíme-li

$$J = \int_0^\infty e^{-y^2}dy = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx, \tag{α}$$

jest I, ať provedeme integraci v pořádku naznačeném anebo opačném, rovno J^2. Dosaďme do integrálu, který vznikne z I, když dolní mez 0 při integraci podle x nahradíme číslem kladným ε, za y proměnnou t rovnicí $y = xt$. Dostaneme (meze integrálu podle t budou 0, ∞)

$$I_\varepsilon = \int_\varepsilon^\infty dx \int_0^\infty e^{-x^2(1+t^2)}\,x\,dt. \tag{β}$$

Abychom dokázali, že pořad integrací v tomto integrálu lze zaměniti, vyjdeme nejprve od nerovnin následujících platných pro $x > \varepsilon$ (ve kterých kladeno $tx = \tau$)

$$0 < \int_D^\infty e^{-x^2(1+t^2)}\,x\,dt < \int_D^\infty e^{-\varepsilon^2-x^2t^2}\,x\,dt = e^{-\varepsilon^2}\int_{Dx}^\infty e^{-\tau^2}d\tau < e^{-\varepsilon^2}\int_{D\varepsilon}^\infty e^{-\tau^2}\,d\tau;$$

poslední však výraz nezávisí na x a konverguje k nule pro $\lim D = \infty$. Jest tedy konvergence u limity

$$\lim_{D=\infty} \int_D^\infty e^{-x^2(1+t^2)}\,x\,dt = 0$$

stejnoměrná vzhledem k x intervalu (ε, B). Obdobně jest i u integrálu

$$\int_B^\infty e^{-x^2(1+t^2)}\, x\, dx \leqq \int_B^\infty e^{-x^2}\, x\, dx$$

pro $\lim B = \infty$ konvergence stejnoměrná vzhledem k t intervalu $(0, D)$.

Jsou tedy podmínky postačitelné, aby bylo vyhověno podmínce 1 odstavce 184, splněny (že i podmínka 2 jest tu splněna, bylo již v odstavci 184 vytčeno) a můžeme tudíž v (β) pořad integrační zaměniti a psáti

$$I_\varepsilon = \int_0^\infty dt \int_\varepsilon^\infty x e^{-x^2(1+t^2)}\, dx. \tag{γ}$$

V obou rovnicích (β) a (γ) lze na pravé straně první integraci provésti (v prvé na základě (α), kterouž lze psáti

$$J = \int_0^\infty e^{-y^2}\, dy = \int_0^\infty e^{-x^2 t^2}\, x\, dt;$$

v druhé na základě toho, že známe primitivní funkci podle x u funkce $xe^{-x^2(1+t^2)}$). Provedeme-li ji v obou případech a porovnáme-li výsledky, obdržíme

$$I_\varepsilon = J \int_\varepsilon^\infty e^{-x^2}\, dx = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-\varepsilon^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt.$$

Integrály v poslední rovnici se vyskytující jsou spojité funkce ε v každém intervalu (odstavec 98, 160). Rovnost byla odvozena pro každé $\varepsilon > 0$, platí tedy (následkem právě vytčené spojitosti) i pro $\varepsilon = 0$. Položíme-li však $\varepsilon = 0$, dostáváme

$$J \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = J^2 = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

a

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

čímž známý nám již výsledek znova odvozen.

187. Integrály Fresnelovy. K výpočtu integrálu

$$I = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$$

můžeme použíti vztahu plynoucího z rovnice

$$\int_0^\infty e^{-\beta^2} d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(odstavec předcházející) substitucí $\beta = \alpha\sqrt{x}$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x}\, d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x}\, d\alpha. \tag{δ}$$

Tak jest

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dx \int_0^\infty \sin x e^{-\alpha^2 x}\, d\alpha.$$

Kdyby bylo dovoleno pořad integrační zaměnit, mohli bychom psáti (odstavec 51, příklad 1)

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \sin x e^{-\alpha^2 x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^4 + 1}$$

a konečně (odstavec 151, příklad 2 aneb odstavec 18, příklad 2)

$$I = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{ε}$$

K vyšetření záměnnosti pořadu integračního vezmeme v úvahu integrály

$$\varphi(\alpha) = \int_B^\infty \sin x e^{-\alpha^2 x}\, dx, \qquad \psi(x) = \int_D^\infty \sin x e^{-\alpha^2 x}\, d\alpha$$

a budeme vyšetřovati jejich stejnoměrnou konvergenci. Pro prvý z nich jest, je-li $\alpha \geqq \varepsilon > 0$,

$$\left|\int_B^\infty \sin x e^{-\alpha^2 x}\, dx\right| < \int_B^\infty e^{-\varepsilon^2 x}\, dx$$

a jest tedy patrno, že integrál $\varphi(\alpha)$ konverguje k nule stejnoměrně pro všecka $\alpha > \varepsilon$ (t. j. pro interval (ε, ∞)). Pro $\alpha = 0$ nemá $\varphi(\alpha)$ význam, jest však bezprostředně jasno, že

$$|\varphi(\alpha)| < 2 \qquad \text{pro } \alpha \gtrless 0$$

pro všecka B. Jest tedy prvnímu požadavku (2) odstavce 184 vyhověno ($\beta = 2$, $\sigma = 0$).

I druhý integrál $\psi(x)$ konverguje stejnoměrně k nule pro všecka $x > \varepsilon' > 0$. Neboť jest

$$\left|\int_D^\infty \sin x e^{-\alpha^2 x}\, d\alpha\right| < \int_D^\infty e^{-\alpha^2 \varepsilon'}\, d\alpha.$$

Abychom vyšetřili, jak $\psi(x)$ se chová v okolí bodu $x=0$, dosadíme do $\psi(x)$ $\alpha = \alpha'/\sqrt{x}$ a obdržíme

$$\psi(x) = \int_D^\infty \sin x e^{-\alpha^2 x}\, d\alpha = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \int_{D\sqrt{x}}^\infty e^{-\alpha^2}\, d\alpha,$$

a jest tedy

$$\psi(x) < \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{x}} .$$

Tudíž i druhý požadavek (2) odstavce 184 splněn a oprávněnost záměny pořadu integračního a tudíž i správnost výsledku (ε) dokázána.

Cestou shodnou získáme rovněž

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} .$$

Zavedeme-li do integrálů těchto novou proměnnou x' rovnicí $x = x'^2$, dostáváme integrály t. zv. *Fresnelovy*

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\, dx = \int_0^\infty \sin(x^2)\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} .$$

POZNÁMKA. Integrál poněkud obecnější než daný

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-Ax} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx, \qquad A > 0$$

lze vypočísti z výrazu

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-Ax-\alpha^2 x} \sin x\, d\alpha .$$

Dostáváme tu podobně jako svrchu

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-Ax} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{(\alpha^2+A)^2+1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{A^2+1}-A}{A^2+1}} ;$$

podrobné provedení příslušných úvah, jež jsou se zřetelem k činiteli e^{-Ax} jednodušší než v případě zvláštním, a výpočtu přenechávám čtenáři. Ostatně viz též odstavec 171.

188. Proveďme záměnou pořadu integračního výpočet integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\cos y}{a^2+y^2}\, dy, \qquad a > 0$$

který jsme již dříve vypočetli (odstavec 170).

Jest (odstavec 51, příklad 1)

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin yx \, dx = \frac{y}{a^2 + y^2}$$

a tedy jest pro daný integrál

$$\int_0^\infty \frac{\cos y}{a^2 + y^2} dy = \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin yx \cos y}{y} dx.$$

Podmínka pro záměnnost integrací se zřetelem k horní mezi ∞ při integraci podle x jest splněna;

$$\left| \int_B^\infty e^{-ax} \frac{\sin yx \cos y}{y} dx \right| < \int_B^\infty e^{-ax} x \, dx$$

a konverguje tudíž ten integrál pro $\lim B = \infty$ k nule stejnoměrně vzhledem ke všem y intervalu $(0, \infty)$. Naproti tomu rozhodnutí, zda výraz

$$\int_D^\infty e^{-ax} \frac{\sin yx \cos y}{y} dy \quad \text{pro } \lim D = \infty$$

konverguje k nule stejnoměrně vzhledem ke všem x intervalu $(0, \infty)$ (s vyloučením po případě konečného počtu bodů x), zdá se býti nesnadné. Následkem toho vezmeme v úvahu raději tento obecnější integrál dvojnásobný

$$\int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-ax-ky} \frac{\sin yx \cos y}{y} dx, \qquad a > 0, \quad k > 0,$$

při čemž záměna pořadu integračního, jak téměř na první pohled patrno, jest dovolena. Dostaneme, integrujeme-li napřed podle x a pak podle y a potom provedeme integrace v pořádku obráceném,

$$\int_0^\infty e^{-ky} \frac{\cos y}{a^2 + y^2} dy = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \left(\operatorname{arctg} \frac{x+1}{k} + \operatorname{arctg} \frac{x-1}{k} \right) e^{-ax} dx.\text{*)}$$

Integrál na levé straně jest spojitou funkcí k pro $k \geqq 0$. Avšak i integrál na pravé straně jest spojitou funkcí k pro $k \geqq 0$, nahradíme-li funkci $\operatorname{arctg} [(x+1)/k] + \operatorname{arctg} [(x-1)/k]$, když $k = 0$, limitou té funkce pro $\lim k = 0$. Jest však (pro $k > 0$)

*) Neboť $\int_0^\infty e^{-ky} \frac{\sin yx \cos y}{y} dy = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-ky}}{y} (\sin y(x-1) + \sin y(x+1)) dy$;
dále viz odstavec 168.

$$\lim_{k=0}\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{k}+\operatorname{arctg}\frac{x-1}{k}\right)=0 \qquad \text{pro } x<1$$

$$\lim_{k=0}\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{k}+\operatorname{arctg}\frac{x-1}{k}\right)=\pi \qquad \text{pro } x>1$$

a tedy

$$\int_0^\infty \frac{\cos y}{a^2+y^2}\,dy=\frac{\pi}{2}\int_1^x e^{-ax}\,dx=\frac{\pi}{2a}\,e^{-a},$$

což se shoduje s výsledkem dříve dosaženým.

6. ROZŠÍŘENÍ VĚT O INTEGRÁLECH Z FUNKCÍ ZÁVISLÝCH NA PARAMETRU.

Věty vztahující se k spojitosti funkce parametru dané určitým integrálem z funkce závislé na tom parametru lze poněkud rozšířiti, opíráme-li se o jednu větu z nauky o množstvích číselných. Jelikož pak věta ta má základní důležitost i při jiných vyšetřováních a důkaz její jest snadný, podám nejprve její důkaz.

189. Věta Borelova. *Existuje-li skupina intervalů o nekonečném počtu členů a taková, že každý bod uzavřeného intervalu* (*a*, *b*) *jest vnitřním bodem jednoho aspoň z intervalů té skupiny, pak můžeme vybrati z oné skupiny intervalů konečný počet intervalů, jež dohromady dávají skupinu intervalů téže vlastnosti, že totiž každý bod intervalu* (*a*, *b*) *jest vnitřním bodem aspoň jednoho z intervalů obsaženého v této druhé skupině o konečném počtu členů.**)

Pokrývají tedy intervaly v té druhé skupině celý interval (*a*, *b*), zčásti dvojnásobně, po případě i vícenásobně.

Důkaz věty patrně provedeme, dokážeme-li, že lze rozděliti interval (*a*, *b*) na konečný počet částečných intervalů vyplňujících celý interval (*a*, *b*), majících celkovou délku $|b-a|$ a takových, že každý z těch částečných intervalů jest položen uvnitř *jednoho* aspoň z intervalů dané skupiny intervalů o nekonečném počtu členů. K tomu cíli rozdělme daný interval postupně na 2, 2^2, 2^3, ..., 2^n, ... stejných částí. Tu jest dvojí možnost; buď lze udati číslo *n* tak, že ze 2^n stejných intervalů vzniklých rozdě-

*) Pojmenování „skupina" užito tu v témž smyslu jako má slovo „množství" a voleno tu odchylné slovo z té příčiny, aby v zevšeobecnění té věty slovo množství se neopakovalo. Opakování to mohlo by býti překážkou snadného porozumění větě příslušné. Vedle toho budu ještě užívati pojmenování *souhrn* intervalů, při čemž budu míti rovněž na mysli jisté množství intervalů, avšak takových, že žádné dva z toho souhrnu nemají společné body.

lením intervalu (a, b) má každý již tu vlastnost (že totiž každý z těch 2^n stejných intervalů jest položen uvnitř . . .), aneb ať n volíme jakkoliv veliké, nedospějeme nikdy ke 2^n stejným intervalům takovým, aby každý z nich měl tu vlastnost. Nastane-li první možnost, pak v případě tom věta Borelova jest dokázána. Druhá možnost však nastati nemůže. Kdyby totiž nastávala druhá možnost, mohli bychom vybrati z těch intervalů vznikajících postupným dělením intervalu (a, b) na 2^n intervalů stejných (kde $n = 1, 2, \ldots$) řadu intervalů o nekonečném počtu členů, totiž intervaly $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots, \alpha_n, \ldots$ z nichž každý má délku poloviční než předcházející (t. j. α_n má délku $(b - a)/2^n$) a žádný z intervalů α_k není obsažen uvnitř jednoho (aspoň) z intervalů dané skupiny intervalů o nekonečném počtu členů. Označme střed intervalu α_k znakem M_k. Pak body $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$, jichž jest nekonečný počet, mají aspoň jeden bod zhuštění M na (a, b); M však jakožto bod na (a, b) jest podle předpokladu větou daného obsažen uvnitř aspoň jednoho z intervalů dané skupiny intervalů o nekonečném počtu členů; i jest uvnitř tohoto intervalu obsaženo také nekonečné množství z bodů M_k, ku příkladu body $M_{\lambda_1}, M_{\lambda_2}, \ldots, M_{\lambda_k}, \ldots$ (neboť jest to bod zhuštění bodů M_k) a tudíž, je-li λ_k dosti veliké, aby M_{λ_k} bylo dosti blízké k M, a zároveň α_{λ_k} dosti malé, jest uvnitř onoho intervalu obsažen také celý interval α_{λ_k}, což však odporuje předpokladu učiněnému při výběru intervalů $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ Druhá možnost tedy vskutku nikdy nenastává a věta Borelova vůbec dokázána.

190. Větu právě dokázanou lze zevšeobecniti pro množství číselná uzavřená, nacházející se na intervalu (a, b). Množství bodové nazýváme uzavřeným, přináležejí-li všecky hraniční body množství k tomu množství. Naproti tomu sluje množství, z jehož hraničních bodů žádný nepřináleží k tomu množství, množstvím plně otevřeným, množství konečně, jemuž z hraničních jeho bodů některé přináležejí, jiné nepřináležejí, nazváno množstvím otevřeným (DP 189).

Budiž dáno množství čísel E, které jest na intervalu (a, b), $a < b$, a jest *plně otevřené* (neobsahuje tedy body a, b; neboť tyto body, kdyby je E obsahovalo, byly by jistě body hraniční). Pak lze tvrditi: *Množství E plně otevřené jest souhrn intervalů plně otevřených (bez společných bodů) buď v počtu konečném aneb jednoduše spočetném* (odstavec 63).

Abychom to dokázali, zvolme si libovolný bod p množství E. Bod p jest bodem vnitřním toho množství (jiné body množství E

nemá). Nejbližší k bodu p hraniční body oboru E nalevo a napravo od p nechť jsou π', π''. Pak jsou všecky body intervalu $(\pi'+0, \pi''-0)$ obsahujícího bod p body množství E a tedy interval $(\pi'+0, \pi''-0)$ součástí množství E. Kdybychom za body p brali nyní postupně ku příkladu všechna čísla racionální, pokud jsou na E, při čemž bychom si je napřed uspořádali v řadu (odstavec 63), dostali bychom rozklad množství E na součet intervalů $(\pi'+0, \pi''-0)$ ležících na (a, b). Při tom ovšem čísla racionální, která jsou v intervalu $(\pi'+0, \pi''-0)$ a která jsou různá od čísla racionálního, jež ke konstrukci intervalu $(\pi'+0, \pi''-0)$ způsobem naznačeným dalo podnět, jest třeba vždy ve svrchu uvedené řadě čísel racionálních (sloužících za podklad ke konstrukci intervalů $(\pi'+0, \pi''-0)$) potlačiti (neboť všecka ta čísla vedou k témuž intervalu otevřenému). Dostáváme tudíž tímto způsobem buď konečný anebo jednoduše spočetný počet intervalů $(\pi'+0, \pi''-0)$, jak bylo dokázati.

Kdyby množství E ležící na (a, b) nebylo plně otevřené, avšak z hraničních bodů by k němu příslušely body nejvýše dva a to a, b, jež však by nebyly isolované, nýbrž takové, že kdybychom k množství E přidali (při kladném ε) intervaly $(a-\varepsilon, a-0)$, $(b+0, b+\varepsilon)$, body a, b, pokud by patřily k E, by byly vnitřní body množství E, pak by byla platna táž věta, jako právě dokázána, jenom s tím rozdílem, že interval, který by obsahoval a a příslušel k E, byl by tvaru $(a, \pi''-0)$ a podobně interval obsahující b a příslušný k E by byl tvaru $(\pi'+0, b)$.

Máme-li na (a, b) dáno množství bodové E, pak všecky body na (a, b) se nacházející a nepřináležející k E tvoří nové množství, jež se nazývá **doplňkovým množstvím k E na (a, b)** a značí CE aneb obšírněji $C_{(a,b)}E$. Je-li E množstvím uzavřeným obsahující též body a, b, jest CE patrně množstvím plně otevřeným. Je-li E množstvím uzavřeným, avšak neobsahuje bod a, po případě b, jest CE množstvím sice otevřeným, ne však plně otevřeným, avšak z hraničních bodů přináleží množství tomu pouze bod a, po případě b.

POZNÁMKA. Věta o množstvích plně otevřených svrchu dokázaná má za důsledek větu o množstvích uzavřených. Poněvadž doplňkové množství k uzavřenému množství E obsahujícímu jakožto krajní body a, b jest množství plně otevřené, můžeme v důsledku té věty tvrditi: *Množství uzavřené E položené na intervalu (a, b) lze vždy vytvořiti, potlačíme-li na intervalu (a, b)*

body v souhrnu intervalů plně otevřených (bez společných bodů). Souhrn ten může býti množstvím intervalů buď konečným aneb jednoduše spočetným. Při tom ku příkladu intervaly $(c+0, d-0)$, $(d+0, e-0)$, kde $c<d<e$, pokládáme za intervaly nemající společných bodů; neboť bod d nepatří ani k prvému, ani k druhému z těch intervalů.

191. To předeslavše vyslovíme **zevšeobecněnou větu Borelovu**: *Budiž E množství čísel uzavřené, zdola i shora ohraničené, a nechť existuje skupina intervalů o nekonečném počtu členů taková, že každý bod množství E jest vnitřním bodem aspoň jednoho z intervalů té skupiny. Pak můžeme vybrati z oné skupiny intervalů konečný počet intervalů dohromady tvořících skupinu intervalů o konečném počtu členů mající tutéž vlastnost, že totiž každý bod množství E jest vnitřním bodem aspoň jednoho z intervalů obsaženého v této skupině o konečném počtu členů.*

Označme, abychom podali důkaz této věty, danou skupinu intervalů o nekonečném počtu členů S a budiž dále a dolní, b horní hranice uzavřeného množství E. Sestrojme doplňkové množství k E na (a, b), to označíme E_1. I jest E_1 množství plně otevřené a podle věty svrchu pro množství plně otevřená dokázané jest E_1 dáno souhrnem intervalů S_1 plně otevřených (takže každý bod množství E_1 jest uvnitř jednoho z intervalů v S_1. Množství E a E_1 dohromady dávají všecky body intervalu (a, b), skupina intervalů S a souhrn S_1 dávají dohromady skupinu intervalů, již označíme krátce $S+S_1$. Každý bod intervalu (a, b) jest vnitřním bodem aspoň jednoho z intervalů v $S+S_1$, lze tedy podle základní věty Borelovy z $S+S_1$ vybrati konečný počet intervalů tvořících skupinu intervalů o konečném počtu členů, již označíme $s+s_1$, že každý bod v (a, b) jest obsažen aspoň uvnitř jednoho intervalu z $s+s_1$. Při tom jsou s_1 intervaly vybrané mezi S_1 a obsahující ve svém nitru jenom body z E_1 (a žádné body z E). Jsou tedy všechny body daného uzavřeného množství obsaženy uvnitř intervalů ze skupiny s (která obsahuje intervaly vybrané z S) a věta Borelova zevšeobecněná dokázána.

192. Věty, důkazy a pojmy tu podané bez jakékoliv potíže *rozšiřují se na množství bodová konečná v prostoru vícerozměrném.* Místo intervalu nastupují tu obory pravoúhelníkové (DP, 175, 187), tak ku příkladu v oboru trojrozměrném obor značený $(a, b, c; a', b', c')$. Dělení postupné takového trojrozměrného oboru na menší obory pravoúhelníkové (kteréžto dělení se vyskytuje při důkazu základní Borelovy věty) provádí se tak, že se půlí vždy současně všecky tři rozměry pravoúhelníkového oboru. Tak vzniká z daného trojrozměrného pravoúhelníkového oboru postupně $2^3, 2^6, 2^9, \ldots, 2^{3n}, \ldots$ oborů pravoúhelníkových částečných.

Dále jest míti na mysli, že doplňkové množství k množství bodovému trojrozměrnému E uzavřenému, nacházejícímu se v $(a, b, c; a', b', c')$ — doplňkové se zřetelem tomuto právě pravoúhelníkovému oboru — jest množství otevřené, jemuž však z hraničních bodů přináležejí pouze body na hranici oboru pravoúhelníkového $(a, b, c; a', b', c')$, pokud nepatří k oboru E. Body ty pak jsou takové, že, zvětšíme-li ono doplňkové množství o body, které jsou položeny mezi povrchy pravoúhelníkových oborů $(a-\varepsilon, b-\varepsilon, c-\varepsilon, a'+\varepsilon, b'+\varepsilon, c'+\varepsilon)$, $(a, b, c; a', b', c')$, kde ε při $a < a'$, $b < b'$, $c < c'$ jest číslo kladné, stanou se vnitřními body z oboru tak vzniklého.

193. Budeme uvažovati nyní řadu množství číselných $E_1, E_2, E_3, \ldots$ takových, že každé jest v následujícím obsaženo,*) což vyznačovati budeme pomocí symbolu $<$ a tedy psáti

$$E_1 < E_2 < E_3 < \ldots$$

Délku zevnější (podle Jordana, viz odstavec 90) množství E_k označíme A_k. I jest tedy $A_1 \leqq A_2 \leqq A_3 \leqq \ldots$ Dále zavedeme množství E, jež obsahuje všecky body nacházející se ve všech množstvích E_k a žádné jiné, pro kteréžto množství tedy platí v symbolice snadno srozumitelné

$$\lim_{n=\infty} E_n = E.$$

Budeme vyšetřovati délku zevnější množství E za předpokladu, že E jest množství uzavřené a oboustranně ohraničené. K tomu cíli užijeme věty Borelovy a sestrojíme nejprve skupinu intervalů o nekonečném počtu členů (jednoduše spočetnou) a takovou, že každý bod množství E bude obsažen aspoň uvnitř jednoho členu té skupiny.

Nejprve lze (v důsledku definice délky zevnější) udati souhrn konečného počtu intervalů — značme jej $\mathbf{i}_1$ — o úhrnné délce menší než $A_1 + \varepsilon_1$ a takových, že každý bod z E_1 jest uvnitř jednoho intervalu z toho souhrnu. Budiž dále $\mathbf{k}$ souhrn

*) T. j. každé číslo (bod) nacházející se v E_n nachází se také v E_{n+1} a tedy též v $E_{n+2}, \ldots$ (tudíž ve všech E_k, pro něž $k > n$).

konečného počtu intervalů obdobně utvořený vzhledem k E_2 (každý bod z E_2 jest uvnitř jednoho intervalu z **k**). Od intervalů v **k** obsažených odlučme společné části intervalům v $\mathbf{i}_1$ a v **k**. Tímto odloučením vznikne z **k** nový souhrn konečného počtu intervalů, jejichž celková délka bude aspoň o A_1 menší než celková délka intervalů v **k**. V novém souhrnu budou obsaženy všecky body množství E_2, jež nejsou v $\mathbf{i}_1$; aby pak ty body byly vesměs uvnitř jednotlivých intervalů nového souhrnu, prodloužíme, je-li to třeba, každý jednotlivý interval jeho, avšak tak, aby celkové prodloužení všech intervalů bylo menší než $\frac{1}{2}\varepsilon_2$. Vznikne tak nový souhrn intervalů $\mathbf{i}_2$; je-li celková délka intervalů v **k** menší než $A_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2$ (a takový souhrn intervalů obsahující E_2 podle definice zevnější míry jistě existuje), bude celková délka intervalů v $\mathbf{i}_2$ menší než $A_2 - A_1 + \varepsilon_2$. Stejně můžeme postupovati dále a sestrojiti souhrn konečného počtu intervalů $\mathbf{i}_3$ o celkové délce menší než $A_3 - A_2 + \varepsilon_3$, jež obsahuje všecky body množství E_3, jež nejsou v $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, a t. d. až do nekonečna. Tím sestrojena skupina intervalů jednoduše spočetná sestávající ze souhrnů intervalů $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \ldots$ taková, že každý bod z E_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, t. j. že každý bod z E jest obsažen uvnitř aspoň jednoho z intervalů té skupiny. Na základě však věty Borelovy lze vybrati z té skupiny konečný počet intervalů tvořící skupinu intervalů **I** takovou, že již **I** má vzhledem k E vlastnost právě vytčenou u skupiny jednoduše spočetné. Vyšetřme nejprve nerovniny, kterými jest vázána celková délka intervalů v **I**. K tomu cíli jest třeba kladná čísla $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ dosud libovolná pevně si zvoliti. Volíme je tak, aby řada $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots$ byla konvergentní a její součet byl ε; ku příkladu klademe $\varepsilon_k = \varepsilon/2^k$. Pak celková délka intervalů nacházejících se v **I** — značme ji d — hoví podmínkám

$$d < (A_1 + \varepsilon_1) + (A_2 - A_1 + \varepsilon_2) + \ldots + (A_m - A_{m-1} + \varepsilon_m)$$

aneb

$$d < A_m + \varepsilon \quad \text{pro všecka } m > N,$$

kde N jest číslo celé takové, že v souhrnech $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_N$ se všecky intervaly skupiny **I** nacházejí. Přejdeme-li v nerovnině poslední k limitě pro lim $m = \infty$, dostáváme, že $d \leqq A' + \varepsilon$, kde $A' = \lim A_m$ pro lim $m = \infty$. Označíme-li zevnější délku množství E znakem A, máme, jak očividno, nejdříve $A \geqq A_m$, tedy $A \geqq A'$; z nerovniny $d \leqq A' + \varepsilon$ pak následuje dále $A \leqq A' + \varepsilon$. Tudíž celkem $A' \leqq A \leqq A' + \varepsilon$; avšak, poněvadž A jest nezávislo na ε a toto můžeme si zvoliti libovolně malé, jest $A = A'$, t. j. $A = \lim A_m$ pro lim $m = \infty$.

Máme tak větu *(Jarníkovu)*: *Budiž* $E_1 < E_2 < E_3 < \ldots$ *a* $\lim\limits_{n=\infty} E_n = E$, *kde* E *jest množství bodové uzavřené a ohraničené; pak jest*

$$\lim_{n=\infty} l_z E_n = l_z E.$$

Při tom značí $l_z E$ zevnější délku množství bodového E (podle Jordana).

194. Z věty Jarníkovy vyplývají některé důsledky pro určité integrály.

1. *Důsledek. Budiž pro* $a \leqq x \leqq b$

(předpoklad 1) $\quad f_1(x) \geqq f_2(x) \geqq f_3(x) \geqq \ldots$

(předpoklad 2) $\quad \lim\limits_{n=\infty} f_n(x) = 0, \quad f_n(x) \leqq M$

Pak jest

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = 0. \tag{α}$$

Neboť, zvolíme-li si kladné číslo ε libovolně a označíme-li množství bodů, pro které v (a, b) jest

$$f_k(x) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

symbolem E_k, jest v důsledku předpokladu 1 $E_1 < E_2 < E_3 < \ldots$ a v důsledku předpokladu 2 $\lim\limits_{n=\infty} E_n = (a, b)$. Na základě věty Jarníkovy tedy jest $\lim l_z E_n = b - a$ a tedy

$$l_z E_n > b - a - \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{pro všecka } n > n_0(\varepsilon),$$

kde $n_0(\varepsilon)$ jest jisté číslo kladné na ε závislé.

Budiž $n > n_0(\varepsilon)$, a sestrojme dolní součet S_n, příslušný funkci f_n a jistému libovolnému rozdělení intervalu (a, b); ony intervaly, v nichž je dolní hranice $f_n(x)$ menší než $\varepsilon/2(b-a)$ obsahují rozhodně všechny body z E_n*) a je tedy jejich délka celkem $> b - a - \varepsilon/2M$; jejich příspěvek k S_n je $< \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{1}{2}\varepsilon$. Ostatní intervaly rozdělení mají tedy celkovou délku $< \varepsilon/2M$, a tedy je jejich příspěvek k S_n menší než $\frac{1}{2}\varepsilon$. Tedy je $S_n < \varepsilon$ při *libovolném* rozdělení intervalu (a, b), a tedy

*) Při tom, slučujeme-li vždy intervaly sousedící, mající společný hraniční bod (a takové, že dolní hranice $f_n(x)$ jest v nich menší než $\varepsilon/2(b-a)$) v jediný celkový interval, jsou body z E_n uvnitř tak vznikajících intervalů. Vyjmuty jsou pouze body a, b, přináležejí-li k E_n.

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \leqq \varepsilon \qquad \text{pro } n > n_0(\varepsilon),$$

což se právě má dokázati.

2. *Důsledek. Budiž pro* $a \leqq x \leqq b$

$$|f_k(x)| < M, \quad \lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Pak jest (o významu symbolů $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$ viz DP, 29)

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \leqq 0, \tag{1}$$

$$\underline{\lim_{n=\infty}} \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \geqq 0. \tag{2}$$

Nejprve jest patrno, že (2) plyne z (1), kladu-li v této $-f_n$, $-f$ místo f_n, f. Stačí tedy dokázati (1). Položme k tomu cíli

$F_k(x) =$ horní hranici množství čísel: $f_k(x) - f(x),\ f_{k+1}(x) - f(x), \ldots f_n(x) - f(x), \ldots$

Jest tedy

$$0 \leqq F_k(x) \leqq 2M, \quad F_k(x) \geqq F_{k+1}(x), \quad \lim_{n=\infty} F_n(x) = 0,$$

a tedy podle 1. důsledku

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b F_n(x)\,dx = 0.$$

Ježto však $F_k(x) \geqq f_k(x) - f(x)$, jest

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \leqq 0$$

a druhý důsledek jest dokázán.

3. *Důsledek. (Věta* **Arzelàova***). Budiž stále pro* $a \leqq x \leqq b$

$$|f_k(x)| < M, \quad \lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$$

a $f_k(x)$, $f(x)$ *v* (a, b) *integrace schopny,* $k = 1, 2, 3, \ldots$. *Pak jest*

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Následuje ihned z (1) a (2) druhého důsledku a z okolností, že vždy $\overline{\lim}\, B_n \geqq \underline{\lim}\, B_n$.*)

*) Věta Jarníkova jakož i všecky tři důsledky a příslušné důkazy byly mně písemně sděleny *p. V. Jarníkem.* Důkazy tu podané se v podstatě (a u důsledků téměř doslovně) shodují s jeho důkazy.

POZNÁMKA. Nejjednodušší důkaz věty Arzelàovy dosud podaný (Landau, Math. Zeitschrift, 2. Bd., 1918, str. 350) opírá se o tuto větu o množstvích číselných: Dána-li jest řada nekonečná souhrnů intervalů vesměs položených na (a, b) a taková, že celková délka intervalů v každém jednotlivém souhrnu se nacházejících jest větší než kladné číslo A, pak existuje aspoň jeden bod, který přináleží nekonečně mnohým z daných souhrnů intervalových. Tuto větu — přirozeně — můžeme naopak odvoditi z úvah svrchu podaných. Dejme tomu, že by tvrzení větou učiněné nebylo správno a značme pro krátkost souhrny dané $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \ldots$. Pak můžeme definovat řadu funkcí $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ rovnicí

$$f_k(x) = 1 - \frac{1}{1+X_k}, \qquad x \text{ v } (a, b)$$

kde X_k nám udává, kolikrát se vyskytuje bod x v souhrnech $\mathbf{j}_{k+1}, \mathbf{j}_{k+2}, \ldots$ *in inf.* X_k jest určité číslo celé $\geqq 0$. Pak jest patrně $f_{k+1}(x) \leqq f_k(x)$, $0 \leqq f_k(x) < 1$ a $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x) = 0$; na základě důsledku 1 jest tedy splněno (α). Avšak jest (jak snadno čtenář zjistí v důsledku okolnosti, že v $\mathbf{j}_{n+1}$ jest celková délka intervalů $> A$ a v těchto intervalech jistě $f_n(x) \geqq \frac{1}{2}$)

$$\int_a^b f_n(x)\,dx > \frac{A}{2} > 0 \qquad \text{pro všecka } n$$

a nemůže býti limita levé strany této nerovniny býti rovna nule. Že by tedy věta vyslovená nebyla správná nelze připustiti.

Můžeme dokonce větu onu doplniti výrokem: Zevnější délka množství bodového obsahujícího všecky body, jež přináležejí nekonečně mnohým ze souhrnů $\mathbf{j}_k$, jest $\geqq A$. Důkaz podá snadno čtenář.

195. Věta Arzelàova má obdobné důsledky pro integrály (definované podle C.-R.) z nekonečných řad, z funkcí závislých na parametrech a pro integrály dvojnásobné jako věta odstavce 153. Nebudu tyto důsledky zevrubně odvozovati, stačí ponejvíce, abych poukázal k příslušnému odstavci, kde právě obdobná věta zevrubně byla dokázána na základě věty odstavce 153, neboť obojí odvození jsou totožná a bude odvozování následujících vět na větě Arzelàově se zakládající vhodným cvičením pro čtenáře.

1. *Věta* **o integraci nekonečných řad.** *Je-li nekonečná řada*

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

kde funkce $u_1(x), u_2(x), \ldots$ jsou funkce integrace schopné v (a, b), v intervalu (a, b) konvergentní, majíc tam za součet funkci $S(x)$

rovněž v (a, b) *integrace schopnou, jsou-li dále součty částečné* $s_k(x)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ $(s_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots u_k(x))$, *takové, že* $|s_k(x)| < M$, *kde* M *jest číslo kladné* (pro všecka k totéž), *pak*

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \int_a^b u_3(x)\,dx + \ldots$$

K důkazu viz poznámku odstavce 153.

Cvičení.

1. Budiž odvozena věta pro integraci nekonečných řad shodná s větou právě odvozenou až na to, že předpoklad o konvergenci nekonečné řady jest nahrazen předpokladem, že řada $u_1(x) + u_2(x) + \ldots$ konverguje v (a, b) s výjimkou bodů z množství bodového míry nulové.

2. Čtenář nechť podá rozšíření věty, za předpokladu, že $S(x)$ jest nekonečnou v α) okolí jednoho bodu, β) v okolí bodů z množství bodového míry nulové.

2. *Věta.* **Kriterium pro spojitost funkce** *dané integrálem z funkce závislé na parametru.* Jestliže $f(x, \alpha)$ jest podle x v (a, b) integrace schopna, když α jest libovolné číslo intervalu $(\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$, je-li dále v pravoúhelníku $(a, b; \alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$ stále $|f(x, \alpha)| < M$, a konečně, je-li $f(x, \alpha)$ funkcí proměnné α spojitou v bodě α_0 při každém x v (a, b), pak jest integrál

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\,dx$$

funkcí spojitou proměnné α v bodě α_0 (viz odstavec 154).

3. *Věta.* **Derivace funkce** *dané integrálem z funkce závislé na parametru.* Jestliže jsou splněny předpoklady věty předcházející, existuje-li dále derivace funkce $f(x, \alpha)$ podle α v bodě α_0 a je-li tato derivace $f'_\alpha(x, \alpha_0)$ podle x v (a, b) integrace schopna a podíl funkce $[f(x, \alpha_0 + h) - f(x, \alpha_0)]/h$ oboustranně ohraničený, když $[x, h]$ jest v pravoúhelníku $(a, -\delta; b, \delta)$, pak

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\,dx$$

má podle α v bodě α_0 derivaci, pro niž

$$F'(\alpha_0) = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha_0)\,dx.$$

(Viz odstavec 161.) Při tom δ můžeme si zvoliti libovolně malé, a jedná-li se jenom ku příkladu o derivaci zprava, stačí místo pravoúhelníka $(a, -\delta; b, \delta)$ uvažovati pravoúhelník $(a, 0; b, \delta)$.

4. *Věta* **o integrálech dvojnásobných.** Jestliže

1. funkce $\mathfrak{f}(x, y)$ jest funkcí konečnou bodu $[x, y]$ v pravoúhelníku $(a, b; c, d)$,

2. funkce $\mathfrak{f}(x, y)$ jest funkcí proměnné x, která jest integrace schopna v (a, b), ať jest y jakákoliv hodnota intervalu (c, d),

3. funkce $\mathfrak{f}(x, y)$ jest funkcí proměnné y, která jest integrace schopna v (c, d), ať jest x jakákoliv hodnota intervalu (a, b),

4. funkce $\int_c^d \mathfrak{f}(x, y)\, dy$ proměnné x jest podle x v (a, b) integrace schopna,

pak jest i $\int_a^b \mathfrak{f}(x, y)\, dx$ funkce proměnné y, jež jest v (c, d) integrace schopna, a jest

$$\int_a^b dx \int_c^d \mathfrak{f}(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b \mathfrak{f}(x, y)\, dx.$$

Jelikož důkaz věty obdobné k této v odstavci 175 podaný neopírá se bezprostředně o větu odstavce 153 (ze které by však snadno vyplynul), naznačím aspoň stručně důkaz této, jak plyne z věty Arzelàovy. Klaďme (za předpokladu $c < d$)

$$F(y) = \int_a^b \mathfrak{f}(x, y)\, dx, \qquad f_k(x) = \sum_{i=1}^{i=\nu_k} \mathfrak{f}(x, \eta_i^{(k)})\, \Delta y_i^{(k)}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$y_0^{(k)} = c, \quad y_{\nu_k}^{(k)} = d, \quad y_0^{(k)} < y_1^{(k)} < y_2^{(k)} < \ldots < y_{\nu_k}^{(k)}, \quad \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \ldots < \nu_k < \ldots,$$

dále jest $\eta_i^{(k)}$ nějaká hodnota intervalu $(y_{i-1}^{(k)}, y_i^{(k)})$, jehož délka značena $\Delta y_i^{(k)}$. Nejprve jest podle předpokladu 3

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = \int_c^d \mathfrak{f}(x, y)\, dy \qquad \text{při} \lim_{n=\infty} \Delta y_i^{(n)} = 0$$

a tedy podle věty Arzelàovy (v důsledku (1) jsou $|f_k(x)| \leqq \mathfrak{M}(d-c)$, kde $\mathfrak{M}$ jest horní hranice absolutních hodnot $f(x, y)$ v pravoúhelníku $(a, b; c, d)$) jest

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d \mathfrak{f}(x, y)\, dy.$$

aneb, dosadíme-li za $f_n(x)$ na levé straně a použijeme-li zároveň svrchu zavedeného symbolu $F(y)$, máme

$$\lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{i=\nu_n} F(\eta_i^{(n)})\, \Delta y_i^{(n)} = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

Jelikož limita na levé straně existuje, ať si jakkoliv volíme (při zachovávání podmínek ovšem svrchu uvedených) čísla ν_k, $\eta_i^{(k)}$, jest $F(y)$ integrace schopno a věta svrchu uvedená plně dokázána.

196. Věty právě podané bylo by možno různými způsoby rozšířiti, a to ve směru, jaký naznačen byl ve cvičení připojeném k větě 1. Rozšíření to by se mohlo provésti ku příkladu tak, jak to bylo učiněno v odstavci 157, 158, 162, kde věty pro integrály z funkce $f(x, \alpha)$, jež jest spojitou funkcí bodu $[x, \alpha]$ v jistém oboru Ω, rozšířeny byly pro případ, že funkce ta stává se nekonečnou podél čáry (čar) o rovnicích tvaru $x = g(\alpha)$ probíhající oborem Ω. S věcí touto však nebudu se již zabývati a upozorním jenom na to, že věty uvedené dají se také rozšířiti tak, že místo funkcí závislých — vedle proměnné integrační — na parametru α uvažujeme funkce závislé na několika parametrech. K tomu, abych objasnil, jak lze při odvozování příslušných vět postupovati, zajisté postačí, uvedu-li jednu takovou větu zároveň s jejím důkazem.

5. *Věta.* **Totální diferenciál** *určitého integrálu z funkce závislé na dvou parametrech.* Jestliže $f(x, \alpha, \beta)$ jest podle x v (a, b) integrace schopna, ať $[\alpha, \beta]$ jest jakýkoliv bod čtverce $(\alpha_0 - \varepsilon, \beta_0 - \varepsilon;\ \alpha_0 + \varepsilon, \beta_0 + \varepsilon)$, je-li v pravoúhelníkovém oboru $(a, \alpha_0 - \varepsilon, \beta_0 - \varepsilon;\ b, \alpha_0 + \varepsilon, \beta_0 + \varepsilon)$ stále $|f(x, \alpha, \beta)| < M$, je-li dále $f(x, \alpha, \beta)$ funkcí bodu $[\alpha, \beta]$ mající v $[\alpha_0, \beta_0]$ totální diferenciál (podle proměnných α, β) a konečně, jsou-li derivace částečné té funkce podle α, β v bodě $[\alpha_0, \beta_0]$, t. j. funkce $f'_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0)$, $f'_\beta(x, \alpha_0, \beta_0)$, integrace schopny v (a, b), pak funkce bodu $[\alpha, \beta]$

$$F(\alpha, \beta) = \int_a^b f(x, \alpha, \beta)\, dx \qquad (+)$$

má v bodě $[\alpha_0, \beta_0]$ totální diferenciál, který jest

$$dF(\alpha, \beta) = d\alpha \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0)\, dx + d\beta \int_a^b f'_\beta(x, \alpha_0, \beta_0)\, dx.$$

za předpokladu dalšího níže uvedeného.

Neboť, klademe-li $\alpha = \alpha_0 + d\alpha$, $\beta = \beta_0 + d\beta$, jest podle definice totálního diferenciálu (DP 194)

$$f(x, \alpha, \beta) = f(x, \alpha_0, \beta_0) + f'_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0)\, d\alpha + f'_\beta(x, \alpha_0, \beta_0)\, d\beta + \varepsilon_{x, d\alpha, d\beta}\,(|d\alpha| + |d\beta|),$$

kde $\varepsilon_{x, d\alpha, d\beta}$ jest funkcí čísel $x, d\alpha, d\beta$ konvergující k nule, když $d\alpha$, $d\beta$ konvergují k nule. Předpokládejme nyní, že $\varepsilon_{x, d\alpha, d\beta}$ jest oboustranně ohraničenou pro všecka $x, d\alpha, d\beta$ pravoúhelníkového oboru $(a, -\delta, -\delta'; b, \delta, \delta')$. Dosadíme-li podle poslední rovnice do (+), máme ihned

$$F(\alpha,\beta) - F(\alpha_0,\beta_0) = d\alpha \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha_0,\beta_0)\,dx + d\beta \int_a^b f'_\beta(x,\alpha_0,\beta_0)\,dx + (|d\alpha| + |d\beta|) \int_a^b \varepsilon_{x,d\alpha,d\beta}\,dx,$$

neboť funkce $\varepsilon_{x, d\alpha, d\beta}$ jest funkce v (a, b) integrace schopná (je-li jenom bod $[\alpha_0 + d\alpha, \beta_0 + d\beta]$ ve čtverci $(\alpha_0 - \varepsilon, \beta_0 - \varepsilon;\ \alpha_0 + \varepsilon, \beta_0 + \varepsilon)$. Jelikož pak $\lim \varepsilon_{x, d\alpha, d\beta} = 0$, když $d\alpha$, $d\beta$ konvergují k nule, jelikož dále $|\varepsilon_{x,d\alpha,d\beta}|$ jest stále menší než jisté číslo kladné závislé na M, je-li bod $[x, \alpha, \beta]$ v pravoúhelníkovém oboru trojrozměrném, ve větě zmíněném, jest podle věty Arzelàovy limita posledního integrálu na pravé straně poslední rovnice pro případ, že $\lim d\alpha = 0$, $\lim d\beta = 0$, rovna nule a věta dokázána (DP 194).