III. INTEGRÁLY Z FUNKCÍ IRACIONÁLNÍCH.

1. NĚKTERÉ PŘÍPADY JEDNODUCHÉ.

19. V odstavcích předcházejících bylo ukázáno, že lze integrál každé racionální funkce vyjádřiti pomocí součtu známých funkcí (t. j. racionálních funkcí a elementárních transcendent). V následujícím zabývati se budeme nejprve hlavními skupinami integrálů funkcí iracionálních, jež lze substitucí převésti na integrály z racionálních funkcí proměnné t.

První takovou skupinou jsou integrály tvaru

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p'}{q'}}, \ldots\right] dx,$$

kde $R[x, y, z, \ldots]$ jest racionální funkce proměnných $x, y, z \ldots$ a p, q; $p', q', \ldots$ jsou čísla celá. Označíme nejmenší spol. násobek čísel $q, q', \ldots$, písmenou s a klademe

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s,$$

odkud

$$x = \frac{dt^s - b}{-ct^s + a} \qquad \frac{dx}{dt} = s\,\frac{ad-bc}{(-ct^s+a)^2}\,t^{s-1}.$$

Tím se změní daný integrál ve výraz

$$s\,(ad-bc)\int R\left[\frac{dt^s-b}{-ct^s+a},\ t^{ps/q},\ t^{p's/q'}, \ldots\right]\cdot\frac{t^{s-1}}{(-ct^s+a)^2}\,dt,$$

t. j. v integrál racionální funkce (s/q, s/q' . . . jsou podle volby čísla s celá čísla.)

PŘÍKLAD 1. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$; tu klademe, je-li x kladné, $x = t^2$, čímž obdržíme

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \qquad \int\frac{dx}{x-\sqrt{x}} = 2\int\frac{t\,dt}{t^2-t} = 2\int\frac{dt}{t-1} = 2\log|t-1| + C$$

a tedy

$$\int\frac{dx}{x-\sqrt{x}} = 2\log|\sqrt{x}-1| + C.$$

PŘÍKLAD 2. V integrálu

$$(\varkappa)\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)\,(x-b)}}=\int\frac{dx}{|x-a|}\sqrt{\frac{x-a}{x-b}},\qquad \frac{x-a}{x-b}>0$$

klademe za předpokladu, že x jest vně intervalu (a, b), $a<b$

$$(\lambda)\qquad \frac{x-b}{x-a}=t^2\quad,\quad x=\frac{b-at^2}{1-t^2}\quad,\quad x-a=\frac{b-a}{1-t^2}.$$

Diferencováním první z posledních tří rovnic následuje

$$\frac{b-a}{(x-a)^2}\,dx=2t\,dt.$$

Vedle toho budeme předpokládati (k tomu cíli, aby rovnice (λ) dávající t, určovala t jednoznačně a abychom zároveň v ($\varkappa$) zbavili se při počítání nepohodlné absolutní hodnoty $|x-a|$) že $t>0$, je-li $x>b$; je-li pak $x<a$, že $t<0$. Po dosazení dostaneme ihned

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)\,(x-b)}}=\int\frac{2\,(x-a)\,dt}{b-a}=2\int\frac{dt}{1-t^2}=\log\frac{1+t}{1-t}$$

aneb, vrátíme-li se k původní proměnné, po snadném počtu výsledek obecně platný, když x jest vně (a, b)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)\,(x-b)}}=\log\left|2x-a-b+2\sqrt{(x-a)\,(x-b)}\right|+C.$$

Kdybychom místo integrálu daného byli vzali v úvahu integrál

$$(\mu)\qquad I=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)\,(b-x)}}\qquad \text{pro } x \text{ uvnitř } (a, b),$$

dostali bychom obdobně

$$(\nu)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{b-x}{x-a}=t'^2,\qquad x=\dfrac{b+at'^2}{1+t'^2},\qquad x-a=\dfrac{b-a}{1+t'^2},\qquad t'>0\\[2ex] \qquad\qquad \dfrac{a-b}{(x-a)^2}\,dx=2t'dt', \end{array}\right.$$

$$(\pi)\qquad \begin{aligned} I&=-2\int\frac{dt'}{1+t'^2}=-2\,\mathrm{arc\,tg}\,t'+C=-\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2t'}{1-t'^2}+C'=\\ &=\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1-t'^2}{2t'}+C''=+\,\mathrm{arc\,sin}\,\frac{1-t'^2}{1+t'^2}+C''.\,*) \end{aligned}$$

Znaménko $+$ v posledním článku tohoto řetězu rovnic vyplývá z předpokladu $t'>0$.

T. j.

$$(\varrho)\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)\,(b-x)}}=\mathrm{arc\,sin}\,\frac{2x-a-b}{b-a}+k.$$

*) Čísla C', C'' nejsou konstanty pro celý interval $(-\infty, \infty)$, nýbrž toliko v intervalech částečných $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$ a měli bychom tudíž užívati v rovnici (π) poněkud obšírnějšího vypisování. Jelikož však tato věc nemá vlivu na konečný výsledek, nezabýval jsem se jí podrobněji v textu.

PŘÍKLAD 3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(a-x)^2\,(b-x)}}$.

Substitucí $\displaystyle\frac{a-x}{b-x}=t^3$

mění se daný integrál

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(a-x)^2\,(b-x)}} = 3\int \frac{dt}{t^3-1} = \int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt =$$

$$= \log|t-1| - \tfrac{1}{2}\log(t^2+t+1) - \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \tfrac{3}{2}\log\left|\sqrt[3]{x-a} - \sqrt[3]{x-b}\right| - \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{b-x}}{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{b-x}} + C'.$$

POZNÁMKA. V příkladě 1 a 2 byla integrační proměnná x omezena na intervaly, ve kterých funkce integrovaná nabývá hodnot reálných. Můžeme však, když jsme v odst. 18a definovali integrál z funkce nabývající hodnot komplexních, vyšetřovati integrály i v těch intervalech pro x, ve kterých odmocniny tam se nacházející jsou odmocniny z čísel záporných a tedy odmocniny ty čísla imaginární. Uvažujeme na př. integrál prvý ($\varkappa$) př. 2, a to pro x intervalu (a, b). Pro tento interval jest (odmocninám přisuzujeme vždycky hlavní hodnotu)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} = \int \frac{dx}{i\sqrt{(x-a)(b-x)}},$$

kteroužto rovnicí integrál ($\varkappa$) převeden na (μ) a máme tudíž v důsledku obou svrchu uvedených výsledků

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} = \log\left(2x-a-b+2\sqrt{(x-a)(x-b)}\right) + C \quad \text{pro } x \text{ vně } (a, b).$$

$$= -\,i \arcsin\frac{2x-a-b}{b-a} + C \quad \text{pro } x \text{ uvnitř } (a, b).$$

Avšak pro x uvnitř (a, b) také jest

$$\overline{\log}\left(2x-a-b+2\sqrt{(x-a)(x-b)}\right) = \overline{\log}\left(2x-a-b+i\,.\,2\sqrt{(x-a)(b-x)}\right) =$$

$$= i\arccos\frac{2x-a-b}{b-a} + k = -\,i\arcsin\frac{2x-a-b}{b-a} + k'.^{*)}$$

Jsou tedy oba výsledky př. 2 obsaženy v jediném vztahu

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} = \overline{\log}\left(2x-a-b+2\sqrt{(x-a)(x-b)}\right) + C$$

platném pro každý interval proměnné x neobsahující body a a b.

---

*) Užito rovnice $\overline{\log}(A+iB) = \log\sqrt{A^2+B^2} + i\arccos\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, platné vždy v případě, že $B > 0$, a plynoucí z definice logaritmu komplexního čísla a významu funkcí arc cos, log.

Můžeme k tomuto důsledku však ještě jinou cestou dospěti. Substituce, kterých jsme v obou případech př. 2 užívali, jsou v podstatě tyto:

$$t = \frac{\sqrt{(x-a)(x-b)}}{x-a}, \qquad t' = \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{x-a}$$

a jest pro x v (a, b) patrně $t' = -it$. Dosadíme-li tedy do integrálu, na který se substitucí prvou redukuje integrál ($\varkappa$), místo t výraz it' (a ovšem též idt' místo dt), obdržíme — když jsme ještě provedli násobení činitelem i, o který se liší právě integrál (μ) od integrálu ($\varkappa$), je-li x v (a, b). — integrál, na který se redukuje integrál (μ) substitucí druhou. Vyjádříme-li tedy integrál ($\varkappa$) jakožto funkci t, stačí ve výsledku t nahraditi $+it'$ a násobiti i, abychom dostali výraz pro integrál (μ).*) Výsledek ten lze značně zevšeobecniti, neboť integrály

$$J = \int R(x) \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}, \qquad J' = \int R(x) \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},$$

kde $R(x)$ jest racionální funkce proměnné x, transformují se týmiž substitucemi na integrály funkcí racionálních proměnné t resp. t'. Lze pak vysloviti větu: *Jestliže jest*

$$J = \Phi\left(\frac{\sqrt{(x-a)(x-b)}}{x-a}\right) + k, \qquad x \text{ vně } (a, b),$$

jest

$$J' = i\,\Phi\left(\frac{i\sqrt{(x-a)(b-x)}}{x-a}\right) + k', \qquad x \text{ uvnitř } (a, b).$$

Ve výraze Φ jest ovšem nahraditi logaritmické a cyklometrické funkce komplexních argumentů pomocí funkcí reálné proměnné podle příslušných definic.

20. Integrály binomické. Nejjednodušší z integrálů funkcí iracionálních jsou t. zv. *integrály binomické.* Pod pojmenováním tím vyrozumíváme integrály tvaru

$$\int x^{\gamma} (a + b x^{\delta})^{\beta}\, dx,$$

kde β, γ, δ jsou čísla racionální. Integrál ten lze zjednodušit nejprve substitucí $x^{\delta} = t$, čímž dostaneme integrál

$$\frac{1}{\delta} \int t^{\alpha} (a + bt)^{\beta}\, dx, \qquad \alpha = \frac{\gamma + 1}{\delta} - 1.$$

O něm jest platná věta: *Integrál*

$$J_{\alpha,\beta} = \int t^{\alpha} (a + bt)^{\beta}\, dx \tag{1}$$

*) Viz př. 3 v odst. 18b pro případ, že $a = i$.

dá se převésti na integrály z funkcí racionálních (a tudíž vyjádřiti pomocí algebraických funkcí a elementárních transcendent), *když aspoň jedno z čísel $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ jest číslo celé.*

Je-li α celé, lze funkci za znaménkem integračním psáti ve tvaru

$$t^\alpha (a+bt)^\beta = R(t, (a+bt)^\beta),$$

kde $R(x, y)$ jest racionální funkce obou argumentů. Je-li β celé, lze podobně psáti

$$t^\alpha (a+bt)^\beta = R(t, t^\alpha),$$

a je-li konečně $\alpha+\beta$ celé:

$$t^\alpha (a+bt)^\beta = t^{\alpha+\beta}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^\beta = R\left(t, \left(\frac{a+bt}{t}\right)^\beta\right).$$

Vyplývá tudíž ve všech třech případech podle předch. odst. správnost vyslovené věty.

Čebyšev (Sur l'intégration des différentielles irrationelles. Journal pour math. p. et ap., t. 18, 1853) dokázal, že pouze v těchto třech uvedených případech dá se integrál vyjádřiti pomocí elementárních transcendent a algebraických funkcí.

POZNÁMKA 1. Každý integrál binomický tvaru (1) lze převésti vhodnou substitucí na integrál

$$\int \cos^\mu \varphi \sin^\nu \varphi \, d\varphi,$$

a to, jsou-li $a+bt$ a a znaménka stejného, položíme

$$\text{buď} \quad \frac{a+bt}{a} = \cos^2 \varphi, \qquad \text{je-li} \quad \frac{a+bt}{a} < 1,$$

$$\text{anebo} \quad \frac{a+bt}{a} = \frac{1}{\cos^2 \varphi}, \qquad \text{je-li} \quad \frac{a+bt}{a} > 1;$$

jsou-li pak $a+bt$ a a znamének opačných, klademe

$$\frac{a+bt}{a} = -\operatorname{tg}^2 \varphi.$$

POZNÁMKA 2. Jestliže β v (1) jest celé kladné, pak postačí rozvinouti $(a+bt)^\beta$ podle binomické věty a integrovati člen za členem.

Je-li α celé kladné, položíme nejprve $a+bt=u$ a máme případ předcházející.

Je-li konečně $\alpha+\beta+2$ celé záporné, dostaneme substitucí $t = 1/u$ zase případ předešlý.

21. Redukční vzorce pro integrály binomické. Jest užitečno odvoditi si vzorce, které převádějí výpočet integrálu (1) na integrál stejného tvaru, kde však α nebo β jest o 1 menší (po případě i o 1 větší), a to v případech zvláštních (když jedno z čísel α, β, $\alpha+\beta$ jest celé) pro zjednodušení výpočtu, v případě pak obecném ke zjednodušení integrálu. V případě obecném, když žádné z čísel α, β, $\alpha+\beta$ není číslem celým, lze pomocí zmíněných vzorců integrál (1) převésti na integrál, kde obě čísla α i β jsou mezi 0 a 1.

Vzorce ty vyplývají z identit

$$t^{\alpha}(a+bt)^{\beta+1} = at^{\alpha}(a+bt)^{\beta} + bt^{\alpha+1}(a+bt)^{\beta},$$
$$[t^{\alpha+1}(a+bt)^{\beta+1}]' = (\alpha+1)\,t^{\alpha}(a+bt)^{\beta+1} + (\beta+1)\,bt^{\alpha+1}(a+bt)^{\beta}.$$

Integrujeme-li rovnice ty podle t a eliminujeme-li jednou $J_{\alpha+1,\beta}$, po druhé $J_{\alpha,\beta+1}$, dostaneme

$$a\cdot J_{\alpha,\beta} = -\frac{t^{\alpha+1}(a+bt)^{\beta+1}}{\beta+1} + \frac{\alpha+\beta+2}{\beta+1}J_{\alpha,\beta+1}, \qquad (a)$$

$$a\cdot J_{\alpha,\beta} = +\frac{t^{\alpha+1}(a+bt)^{\beta+1}}{\alpha+1} - \frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+1}\,b\cdot J_{\alpha+1,\beta}. \qquad (b)$$

Přemístěním integrálů na obou stranách a umenšením β v prvé rovnici o 1, α v druhé rovnici rovněž o 1 obdržíme další dva vztahy

$$J_{\alpha,\beta} = \frac{t^{\alpha+1}(a+bt)^{\beta}}{\alpha+\beta+1} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+1}\,a\cdot J_{\alpha,\beta-1}, \qquad (c)$$

$$b\cdot J_{\alpha,\beta} = \frac{t^{\alpha}(a+bt)^{\beta+1}}{\alpha+\beta+1} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\,a\,J_{\alpha-1,\beta}. \qquad (d)$$

Konečně buďtež uvedeny dvě relace, jež vyplynou jako bezprostřední důsledek formule pro částečnou integraci (odst. 7):

$$J_{\alpha,\beta} = \frac{t^{\alpha+1}(a+bt)^{\beta}}{\alpha+1} - \frac{\beta}{\alpha+1}\,b\cdot J_{\alpha+1,\beta-1}, \qquad (e)$$

$$b\,J_{\alpha,\beta} = \frac{t^{\alpha}(a+bt)^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{\alpha}{\beta+1}\cdot J_{\alpha-1,\beta+1}. \qquad (f)$$

Formule (*e*) a (*f*) jsou však též jednoduchý důsledek formulí (*c*), (*b*) a (*d*), (*a*).

Rovnice (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) jsou čtyři *formule redukční*, jež v obecném případě svrchu vytčeném vskutku převádějí integrál (1) na integrál, kde čísla α, β jsou obě v intervalu 0, 1. V případech zvláštních (jedno z čísel α, β, $\alpha+\beta$ celé) lze jimi docíliti především toho, že jedno z čísel α, β, $\alpha+\beta$ se redukuje buď na 0 nebo -1.

Cvičení.

1. Odvoditi jest redukční formule ($X = ax^2 + bx + c$, m, n jsou v tomto a násl. př. libovolná čísla reálná s omezením, jež leží na snadě v každém jednotlivém případě)

$$\int \frac{x^n\,dx}{X^m} = -\frac{x^{n-1}}{a(2m-n-1)X^{m-1}} - \frac{b(m-n)}{a(2m-n-1)}\int \frac{x^{n-1}}{X^m}\,dx + \\ + \frac{c(n-1)}{a(2m-n-1)}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{X^m}.$$

$$\int \frac{dx}{X^m} = \frac{2ax+b}{(m-1)\Delta . X^{m-1}} + \frac{2a(2m-3)}{(m-1).\Delta}\int \frac{dx}{X^{m-1}}, \qquad \Delta = 4ac - b^2.$$

2. Z první rovnice předch. cvič. následuje substitucí $x = x'^{-1}$ a záměnou čísel n, a, c v čísla $n + 2m - 2$, c, a další redukční vzorec

$$\int \frac{dx}{x^n X^m} = \frac{-1}{(n-1)c \,.\, x^{n-1} X^{m-1}} - \frac{b(m+n-2)}{c(n-1)}\int \frac{dx}{x^{n-1} X^m} - \\ - \frac{a(2m+n-3)}{c(n-1)}\int \frac{dx}{x^{n-2} X^m}.$$

2a. Odvoďte

$$\int \frac{dx}{(x^2+b^2)\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{b\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{x^2+a^2}} + c. \qquad a^2 > b^2$$

$$= \frac{1}{b\sqrt{b^2-a^2}} \log \frac{b\sqrt{x^2+a^2} + x\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{x^2+b^2}} + c. \qquad a^2 < b^2$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+b^2)\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{b\sqrt{a^2+b^2}} \log \frac{b\sqrt{x^2-a^2} + x\sqrt{b^2+a^2}}{\sqrt{x^2+b^2}} + c,$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+b^2)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{b\sqrt{a^2+b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{b\sqrt{a^2-x^2}} + c.$$

Návod. Nejprve substituce $x^2 = 1/y$. Ukažte, že všechny čtyři výsledky jsou shodny a dají se odvoditi na př. z třetího, připustíme-li pro a a pro odmocniny imaginární hodnoty.

3. Vypočtěte integrály (používajíce výsledků uvedených v odst. 19 př. 2 a v pozn.)

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(x-a)(x-b)}} = \frac{2}{b-a}\,\frac{\sqrt{(x-a)(x-b)}}{x-a} + C. \qquad b \neq a$$

$$\int \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}\,dx = \sqrt{(x-a)(x-b)} + \frac{b-a}{2}\log|2x-a-b+ \\ + 2\sqrt{(x-a)(x-b)}| + C.$$

3a. Dokažte, že v intervalech, ve kterých levá strana jest spojitou (komplexní) funkcí reálné proměnné x,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-a}\sqrt{x-b}} = 2\log(\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}) + k = -2\log(\sqrt{x-a} - \sqrt{x-b}) + k'.$$

Při tom jsou obecně a, b čísla komplexní (různá). (Vztah téměř bezprostředně evidentní.)

3b. Dokažte (na základě předch. př.) za předpokladu, že $a = a_1 + a_2 i$, $b = b_1 + b_2 i$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} = 2\varepsilon \log(\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}) + k.$$

Při tom jest $\varepsilon = +1$, jsou-li a_2, b_2 protivného znaménka. Jsou-li a_2, b_2 znaménka stejného, jest

$$\varepsilon = +1, \text{ jestliže } x > \frac{a_2 b_1 + b_2 a_1}{a_2 + b_2}; \ \varepsilon = -1, \text{ když } x < \frac{a_2 b_1 + b_2 a_1}{a_2 + b_2}.$$

Jsou-li a, b čísla reálná, jest $\varepsilon = -1$, jestliže x jest menší než menší z obou čísel a, b; jinak $\varepsilon = +1$.

Návod. Následuje z porovnání funkcí $\sqrt{(x-a)(x-b)}$, $\sqrt{x-a} \cdot \sqrt{x-b}$ reálné proměnné x.

4. Ukažte, že integrály

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\, dx,$$

$$\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{mx+n}}, \sqrt{\frac{cx+d}{mx+n}}\right) dx,$$

kde R jest racionální funkce, lze převésti vhodnou substitucí na integrály racionálních funkcí jedné proměnné. První integrál na př. substitucí

$$x = -\frac{b}{4a}(t + t^{-1})^2 + \frac{d}{4c}(t - t^{-1})^2.$$

Druhý lze převésti na prvý substitucí $t\,(mx+n) = 1$.

2. INTEGRÁLY $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$.

22. První metoda pro jejich výpočet. Integrály tvaru

$$\int R(x, y)\,dx, \qquad \text{kde} \qquad y = \sqrt{ax^2+bx+c}, \qquad a \neq 0$$

a kde $R(x, y)$ jest racionální funkce obou argumentů x, y, lze dvojím způsobem převésti na integrály jednodušší nebo nám známé. První metoda, jež bývá také nejúčelnější při praktickém provádění výpočtu, spočívá v tom, že za x zavedeme novou proměnnou t tak volenou, aby odmocnina vypadla a my dostali integrál z racionální funkce proměnné t. Úkol ten však z veliké části jsme již řešili, a to v odst. 19, př. 2 pro případ, že ax^2+bx+c jest rozložitelno v reálné kořenové činitele. Jestliže $ax^2+bx+c = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$, $\alpha_1 < \alpha_2$, vede v tomto případě k cíli substituce

$$\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-\alpha_1} = t \cdot \sqrt{a},$$

kterou netřeba se však obírati, jelikož byla zevrubně vyšetřena na uvedeném místě (rozdíl spočívá pouze v označení: α_1, α_2 bylo tam značeno a, b; zde pak a, b, c má jiný význam).

Není-li však trojčlen ax^2+bx+c rozložitelný v reálné kořenové činitele, má stále stejné znaménko, a to znaménko buď čísla a nebo čísla c (jež jsou v tomto případě stejná) a můžeme předpokládati, že $a > 0$.*) Tu položíme

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = -\sqrt{a}\,x + t. \tag{s}$$

odkudž
$$x = \frac{-c+t^2}{b+2\sqrt{a}\,t}, \qquad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{c\sqrt{a}+bt+\sqrt{a}\,t^2}{b+2\sqrt{a}\,t},$$

$$dx = 2\cdot\frac{c\sqrt{a}+bt+\sqrt{a}\,t^2}{(b+2\sqrt{a}\,t)^2}\cdot dt \qquad \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{2\,dt}{b+2\sqrt{a}\,t}.$$

---

*) Kdyby $a < 0$, měli bychom $\sqrt{ax^2+bx+c} = i\sqrt{-ax^2-bx-c}$, čímž by se tento případ redukoval na případ $a > 0$.

Píšeme-li tedy — ke zjednodušení – v daném integrálu $R_1(x, y)/y$ místo $R(x, y)$, máme

$$\int R_1(x, y)\frac{dx}{y} = \int R_1\left(\frac{-c+t^2}{b+2\sqrt{a}\,t}, \frac{c\sqrt{a}+bt+\sqrt{a}\,t^2}{b+2\sqrt{a}\,t}\right)\frac{2\,dt}{b+2\sqrt{a}\,t}, \tag{s'}$$

čímž integrál k vyšetřování předložený je vyjádřen jakožto integrál z racionální funkce proměnné $t = \sqrt{a}\,x + \sqrt{ax^2+bx+c}$, kterýž můžeme pokládati za známý.

Máme tak větu: *Integrál z racionální funkce x a $\sqrt{ax^2+bx+c}$ dá se vždy, zavedeme-li za x vhodnou racionální funkci proměnné t, přeměniti na integrál racionální funkce proměnné t.* Proměnná t pak sama jest jednoduchou racionální funkcí x a $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

POZNÁMKA 1. Substitucí převádějících $\int R_1(x,y)dx/y$ na integrál racionální funkce proměnné t jest nekonečné množství, jak později seznáme, až budeme o věci jednati s obecnějšího stanoviska. Dvě substituce dosud vyložené jsou ovšem nejjednodušší a nejčastěji užívané. Z nich druhou můžeme ještě poněkud zjednodušiti, kladouce

$$2t\sqrt{a}+b = t_1 \quad , \quad \text{tedy} \quad t_1 = 2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}$$

(stále za předpokladu $a > 0$). Vztah (s') se redukuje v tomto případě na vztah

$$\int R_1(x, y)\frac{dx}{y} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int R_1\left(\frac{1}{4a}t_1 - \frac{b}{2a} + \frac{D}{4at_1}, \frac{1}{4\sqrt{a}}\left(t_1 - \frac{D}{t_1}\right)\right)\frac{dt_1}{t_1}, \quad D = b^2-4ac.$$

POZNÁMKA 2. Úvahy podané podrží platnost i v případě, že racionální funkce $R(x, y)$ má za koeficienty čísla komplexní na podkladě stanovení odst. 18a, 18b. *Ovšem čísla a, b, c — koeficienty polynomu druhého stupně pod odmocninou — jsou v předcházející úvaze nutně čísla reálná.* Neboť tyto koeficienty jsou ve vztazích mezi x a t a integrační proměnné jsou pro nás čísla reálná.

POZNÁMKA 3. Substituce (s) vede k cíli i v tom případě, že výraz ax^2+bx+c jest rozložitelný v reálné kořenové činitele, jenom když $a>0$ a proměnná x jest omezena na interval, pro který $ax^2+bx+c>0$ (t. j. na intervaly vně (α_1, α_2)).

PŘÍKLAD 1. Substituce (s) užitá na $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $a>0$ dává

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = 2\int\frac{dt}{b+2\sqrt{a}\,t} = \frac{1}{\sqrt{a}}\log\left|b+2\sqrt{a}\,t\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\log\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right| + C'. \tag{τ}$$

Výsledek ten je ve shodě s výsledkem odvozeným v odst. 19, př. 2 za předpokladu, že kořeny α_1, α_2 rovnice $ax^2+bx+c=0$ jsou reálné a x jest vně (α_1, α_2).

Je-li $a<0$ a kořeny α_1, α_2 jsou komplexní, jest podle právě napsaného vztahu

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{dx}{i\sqrt{-ax^2-bx-c}}=$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{-a}}\log\left|-2ax-b+2\sqrt{-a}\sqrt{-ax^2-bx-c}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\log\left|-2ax-b-2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\log\left(2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right)+C',$$

takže výsledek (τ) je i tu správný. Zavedeme-li logaritmus komplexní proměnné, můžeme dokonce psáti v důsledku výsledků právě odvozených a výsledků v příkl. 2 odst. 19, jakož i poznámky toho odst. (po snadné úvaze)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\,\overline{\log}\,(2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c})+C. \qquad (\tau')$$

formuli to platnou, ať reálné hodnoty a, b, c nabývají jakýchkoli hodnot, je-li jenom $a\neq 0$ a x v intervalu, do kterého nespadají kořeny rovnice $ax^2+bx+c=0$. Konstantě C nutno po případě přisuzovati hodnoty komplexní.

Jestliže $a<0$, α_1, α_2 pak reálné a x uvnitř (α_1, α_2), můžeme substitucí poněkud jinou, než svrchu uvedené, rychleji dospěti k výsledku. Tu jest $4ac-b^2<0$.

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Klademe-li tedy

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{-2a}\,y,$$

dostaneme ihned

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin y+C=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+C.$$

POZNÁMKA 4. Uvažujme za předpokladu, že α, β, γ jsou čísla komplexní, funkci

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\overline{\log}\,(2\alpha x+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}).$$

Funkce ta by měla, kdyby α, β, γ byla čísla reálná, derivaci podle x rovnou výrazu $1/\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ a to v důsledku rovnice (τ'). Jsou-li nyní α, β, γ čísla komplexní, jest funkce ta komplexní funkcí reálné proměnné x mající derivaci, jež však se přesně podle týchž pravidel vypočte, jako kdyby daná funkce byla reálnou funkcí proměnné x (při čemž by byly parametry α, β, γ čísla reálná a hověly by ještě některým podmínkám, jako na př.

$a > 0$): obdržíme pak při derivování podle x týž výsledek, ať a, β, γ jsou parametry reálné (hovící jistým podmínkám) aneb parametry komplexní. T. j. *rovnice*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \log (2\alpha x + \beta + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}) + C$$

jest platna, i když α, β, γ jsou komplexní čísla, $\alpha \neq 0$. Proměnná (reálná) x jest omezena při tom na vhodný interval (tak, aby funkce na pravé straně byla v něm (kompl.) funkcí spojitou) proměnné x.

Poznámka tato má *zásadní důležitost* a lze podobným způsobem rozšířiti platnost mnoha formulí počtu integrálního, kde funkce za znaménkem integračním závisí vedle proměnné na jednom nebo několika reálných parametrech, i pro případ, že parametry ty jsou čísla komplexní.

PŘÍKLAD 2. Uvažujme ještě integrál (nazývaný někdy *Aronholdův základní integrál*)

$$\omega = \int \frac{1}{y - px - q} \frac{dx}{y},$$

kde p, q jsou konstanty. K jeho výpočtu zavedeme podle pozn. 1 proměnnou t_1. Dostaneme ihned

$$\omega = 4\sqrt{a} \int \frac{dt_1}{t_1^2(\sqrt{a} - p) + t_1(2bp - 4aq) - D(\sqrt{a} + p)}.$$

Abychom dali výrazu pro něj co nejúčelnější tvar, označím kořeny rovnice v t_1

$$t_1^2 (\sqrt{a} - p) + t_1 (2bp - 4aq) - D (\sqrt{a} + p) = 0$$

α_1, α_2, při čemž je volba indexů tak učiněna, aby $(\alpha_1 - \alpha_2)(\sqrt{a} - p) = + \sqrt{\Delta}\, 4\sqrt{a}$. Tu jest $16a\Delta$ diskriminant oné rovnice druhého stupně; jest rovný

$$16a\, [\tfrac{1}{4} D + aq^2 - bpq + cp^2].$$

Diskriminant ten pokládáme za různý od nuly. Podle odst. 18, př. 1 můžeme pak ihned psáti

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \log \frac{t_1 - \alpha_1}{t_1 - \alpha_2} + k.$$

Zavedeme-li místo proměnné t_1 proměnnou x rovnicí

$$t_1 = 2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} = 2ax + b + 2\sqrt{a}\, y,$$

při čemž obdobně i za α_1, resp. α_2 dosadíme $2a\xi_1 + b + 2\sqrt{a}\,\eta_1$, resp. $2a\xi_2 + b + 2\sqrt{a}\,\eta_2$, kdež ξ_1, η_1, resp. ξ_2, η_2 jsou hodnoty přiřazené x, y, když t_1 — pomocí něhož jsou x, y racionálně vyjádřitelny*) — nabývá hodnoty α_1, resp. α_2, máme konečně

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \log \frac{\sqrt{a}(x - \xi_1) + y - \eta_1}{\sqrt{a}(x - \xi_2) + y - \eta_2} + k.$$

---

*) Mezi ξ_1, η_1 jest relace $\eta_1 = p\xi_1 + q$ a táž relace jest mezi ξ_2, η_2; neboť výraz $y - px - q$ vymizí i pro $t = \alpha_1$ i pro $t = \alpha_2$. Čísla ξ_1, ξ_2 jsou dána ostatně — jakožto nulové body výrazu $y - px - q$ — také rovnicí kvadratickou $(a\xi^2 + b\xi + c) - (p\xi + q)^2 = 0$, jejížto diskriminant jest 4Δ.

Výsledek ten jest odvozen za předpokladu, že $a > 0$ a b, c reálná; ale p, q mohou býti libovolná čísla komplexní. Lze však jej rozšířiti nejprve pro $a < 0$, potom i pro případ, že a, b, c jsou čísla komplexní, $a \neq 0$ a ve všech těch případech stále za předpokladu $\Delta \neq 0$ (viz př. 1 a pozn. 4).

Pro $\Delta = 0$ plyne snadno (úvahou obdobnou právě provedené, pouze v př. 1 odst. 1d užívá se případu 3)

$$\omega = \frac{2}{p - \sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}(x - \xi_1) + y - \eta_1}.$$

23. Druhá metoda *k výpočtu integrálů* $\int R(x, y)\,dx$ upravuje (rozkládá) nejprve vhodným způsobem funkci, jež se má integrovati. K tomu cíli uvažujeme nejprve racionální funkci $r(t)$ proměnné t, pro kterou platí $r(t) = r(-t)$; je tedy $r(t)$ racionální funkce sudá. Označíme-li jejího čitatele a jmenovatele $p(t)$, $q(t)$, jest podle předpokladů (nemají-li $p(t)$ a $q(t)$ za společného dělitele t)

$$r(t) = \frac{p(t)}{q(t)} = \frac{p(-t)}{q(-t)} = \frac{p(t) + p(-t)}{q(t) + q(-t)} = \frac{p_1(t^2)}{q_1(t^2)},$$

t. j. *racionální funkce sudá proměnné t jest racionální funkcí jejího čtverce t^2.*

Pišme, abychom tohoto výsledku užili na $R(x, y)$, nejprve

$$R(x, y) = \frac{1}{2}\Big[R(x, y) + R(x, -y)\Big] + \frac{1}{2}\Big[R(x, y) - R(x, -y)\Big] y \cdot \frac{1}{y}.$$

Avšak $[R(x, y) + R(x, -y)]$, $[R(x, y) - R(x, -y)]\,y$ jsou sudé funkce (racionální) proměnné y; jsou tedy racionální funkce výrazu y^2 (a x), y^2 však jest rovno $ax^2 + bx + c$; jsou tedy ony výrazy (provedeme-li dosazení $y^2 = ax^2 + bx + c$) racionální funkce pouhého x. Lze tedy psáti

$$R(x, y) = r_1(x) + r_2(x)\,\frac{1}{y}$$

a integrál z funkce $R(x, y)$ se redukuje na integrál z racionální funkce $r_1(x)$, který pokládáme v důsledku vyložených metod za známý, a na integrál

$$\int \frac{r_2(x)\,dx}{y} = \int \frac{r_2(x)\,dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \tag{1}$$

který zbývá vyšetřovati.

Abychom jej vypočetli, rozložíme si nejprve racionální funkci $r_2(x)$ ve zlomky částečné na tvar (5) odst. 11, z kteréhožto rozkladu ihned vyplývá, že integrál (1) se převádí na výpočet integrálů tvaru

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \qquad \int \frac{dx}{(x - \alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}. \tag{2}$$

V posledním z obou integrálů číslo α může býti i komplexní a bude tudíž při něm nutno uvažovati obě možnosti (α reálné, α komplexní). Oba integrály (2) lze počítati vzorci redukčními. Pro prvý ihned vyplývá z rovnice

$$\frac{d}{dx}(x^n\sqrt{ax^2+bx+c}) = nx^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{x^n(ax+\frac{1}{2}b)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$=\frac{(n+1)\,ax^{n+1}+(n+\frac{1}{2})\,bx^n+ncx^{n-1}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Z ní plyne integrací obou stran

$$(n+1)\,a\,J_{n+1}+(n+\tfrac{1}{2})\,b\,J_n+nc\,J_{n-1}=x^n\sqrt{ax^2+bx+c}, \tag{3}$$

kde jsme značili

$$J_n=\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Pomocí tohoto vztahu platného pro $n \geq 0$ lze vyjádřiti všecka J_n, kde n celé a kladné, integrálem J_0, který jsme svrchu vypočetli, a výrazem, který jest součinem polynomu stupně $n-1$ v x a odmocniny $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Rovněž pro integrál

$$Y_n=\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

lze odvoditi cestou úplně shodnou obdobné formule redukční, totiž derivujeme-li výraz

$$-\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{(x-\alpha)^n}$$

podle x; výraz tak vzniklý lze psáti ve tvaru

$$\frac{nA}{(x-\alpha)^{n+1}\sqrt{ax^2+bx+c}}+\frac{(n-\frac{1}{2})\,B}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}+\frac{(n-1)\,C}{(x-\alpha)^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

kde $A=a\alpha^2+b\alpha+c$, $B=2a\alpha+b$, $C=a$. Máme tudíž redukční vztah

$$nA\,.\,Y_{n+1}+(n-\tfrac{1}{2})\,B\,.\,Y_n+(n-1)\,C\,.\,Y_{n-1}=-\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{(x-\alpha)^n}, \tag{4}$$

který jest beze změny platný, ať α jest číslo reálné či komplexní, a který nám dovoluje všecky integrály Y_n vyjádřiti:

1. Je-li $A=a\alpha^2+b\alpha+c\neq 0$,*) integrálem

$$Y_1=\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

a součinem odmocniny $\sqrt{ax^2+bx+c}$ s polynomem stupně $n-1$ v $(x-\alpha)^{-1}$.

---

*) T. j. není-li $x-\alpha$ kořenovým činitelem výrazu ax^2+bx+c.

2. Je-li $A=0$ (pak $B\neq 0$, neboť jinak by ax^2+bx+c bylo čtvercem výrazu lineárního v x), součinem odmocniny $\sqrt{ax^2+bx+c}$ s polynomem stupně n v $(x-a)^{-1}$.

Integrál Y_1 lze snadno, je-li nejprve a reálné, přeměniti na integrál nám již známý, a to substitucí

$$x=\frac{1}{t}+a.$$

Tu máme
$$Y_1=\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}=\mp\int\frac{dt}{\sqrt{At^2+Bt+C}}.$$

Znaménko horní jest při $t>0$, dolní při $t<0$; význam A, B, C jest týž jako svrchu v rovnici (4). I jest při $A\neq 0$

$$Y_1=\mp\frac{1}{\sqrt{A}}\log(2At+B+2\sqrt{A}\sqrt{At^2+Bt+C})+k.$$

Vrátíme-li se k původní proměnné x, obdržíme konečně

$$Y_1=\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{-1}{\sqrt{aa^2+ba+c}}\log\left(\frac{(2aa+b)x+(ba+2c)}{x-a}+\right.$$
$$\left.+\frac{2\sqrt{aa^2+ba+c}\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-a}\right),$$

vzorec platný pro každé reálné a, pro něž $aa^2+ba+c\neq 0$, jakož i pro všecka x v intervalech neobsahujících bod a a body a_1, a_2 (nulové body trojčlenu ax^2+bx+c).

K témuž výsledku mohli bychom dospěti i jinou cestou, a to metodou odst. 22. Tu bychom substitucí nové proměnné za x odstranili odmocninu a převedli integrál na integrál z funkce racionální. Avšak substituce ta jest nezávislá na a a jest táž, ať jest a číslo reálné aneb komplexní, a tudíž výsledek svrchu pro Y_1 uvedený (který rovněž nezávisí v podstatě své na cestě, po jaké jsme k němu dospěli) jest *platný, ať jest a jakékoliv číslo reálné anebo komplexní, hovící podmínce $aa^2+ba+c\neq 0$.*

Tím vyloženy jsou úplně prostředky, jichž pomocí lze integrály (2) a tedy i každý integrál (1) pomocí elementárních transcendent a funkcí algebraických vypočítati.

PŘÍKLAD. Dokažte, že výraz, který jsme získali pro integrál Y_1, — značme výraz ten opět Y_1 — hoví vztahu

$$\lim_{a=\infty}(-aY_1)=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

24. Užijeme výsledku pro Y_1 nejprve k výpočtu tohoto jednoduchého integrálu:

$$\int\frac{dx}{(x-i)\sqrt{Ax^2+C}},\quad \text{je-li } C>A \text{ a } Ax^2+C>0.$$

Dosadíme-li do vzorce svrchu získaného, máme

$$\int \frac{dx}{(x-i)\sqrt{Ax^2+C}} = \frac{-1}{\sqrt{C-A}} \log \frac{2Aix+2C+2\sqrt{C-A}\,\sqrt{Ax^2+C}}{x-i} + k.$$

Násobím-li v čitateli i jmenovateli argumentu funkce log výrazem $x+i$ (a potlačím-li v čitateli 2, čím se mění toliko integrační konstanta), dostanu po snadném počtu výsledek

$$\frac{-1}{\sqrt{C-A}} \cdot \log \frac{[\sqrt{C-A}+\sqrt{Ax^2+C}]\,[x\sqrt{C-A}+i\sqrt{Ax^2+C}]}{(x^2+1)} + k' =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{C-A}} \log \left(\frac{\sqrt{C-A}}{\sqrt{x^2+1}} + \sqrt{\frac{Ax^2+C}{x^2+1}} \right) + \frac{-i}{\sqrt{C-A}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{Ax^2+C}}{x\sqrt{C-A}} + k''$$

(čitatel argumentu logaritmu byl rozštěpen ve dva činitele, jmenovatele jsme rovněž psali $x^2+1 = \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{x^2+1}$ atd.).

V prvním vydání Integr. počtu (str. 39) byl tento výsledek psán ve tvaru ($H=1$, $K=i$)

$$= \frac{-1}{\sqrt{C-A}} \left[\log(y+\sqrt{y^2-A}) \pm i \arcsin \frac{y}{\sqrt{C}} \right] + k. \qquad (u')$$

kde horní znaménko jest při $x>0$, dolní při $x<0$; y pak jest dáno rovnicí

$$y = \sqrt{\frac{Ax^2+C}{x^2+1}}.$$

Čtenář snadno zjistí shodu obou výsledků; pro nás poslední bude východiskem dalších úvah. Jestliže $C<A$, jest obdobně

$$\int \frac{dx}{(x-i)\sqrt{Ax^2+C}} = \frac{1}{\sqrt{A-C}} \left[\arcsin \frac{y}{\sqrt{A}} \pm i \log(y+\sqrt{y^2-C}) \right]. \qquad (u'')$$

K formuli (u'), (u'') lze však dojíti jinou značně jednodušší cestou. V podstatě běží totiž o výpočet dvou integrálů

$$\int \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{Ax^2+C}}\,dx; \qquad \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{Ax^2+C}}.$$

První z nich substitucí $x^2=y$ mění se ihned na

$$\frac{1}{2}\int \frac{dy}{(y+1)\sqrt{Ay+C}}$$

který se snadno vypočte; druhý substitucí $x=1/x'$ změní se v

$$\mp \int \frac{x'\,dx'}{(x'^2+1)\sqrt{Cx'^2+A}},$$

což jest však v podstatě integrál prvý. Viz také v odst. 10 cvič. 3 a v odst. 21 cvičení 3.

25. V odst. 23 byl sice podán výpočet integrálu Y_1 i pro komplexní a platný, avšak výsledek tam udaný není zvláště výhodný k použití. Abychom dospěli k výhodnějšímu, podám výpočet integrálu

$$(v) \qquad \int \frac{(Hx+K)^{\mathbf{`}}.\,dx}{(b_0x^2+2b_1x+b_2)\sqrt{a_0x^2+2a_1x+a_2}}, \qquad a_0 \mp 0, \quad b_0>0,$$

kde $b_0, b_1, b_2, a_0, a_1, a_2, H, K$ jsou reálné konstanty a kde $b_0 b_2 - b_1^2 > 0$, $a_0 a_2 - - a_1^2 \neq 0$. Zavedu pro stručnost tato označení:

$$b_0 b_2 - b_1^2 = \Delta, \qquad a_0 a_2 - a_1^2 = D, \qquad a_0 b_2 + a_2 b_0 - 2a_1 b_1 = \Theta,$$
$$\varphi = a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2, \qquad \psi = b_0 x^2 + 2b_1 x + b_2,$$
$$\vartheta = (a_0 b_1 - a_1 b_0) x^2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0) x + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = \tfrac{1}{2}\varphi'\psi - \tfrac{1}{2}\psi'\varphi.$$

Kdybychom do daného integrálu zavedli proměnnou x' substitucí

$$x = \frac{px' + q}{rx' + s}, \qquad ps - qr \neq 0,$$

změnil by se na integrál stejného tvaru, pouze místo x by bylo v něm x' a místo $H, K, a_0, a_1, \ldots$ nové hodnoty $H', K', a'_0, a'_1, \ldots$ Při tom jsou na př. koeficienty a'_0, a'_1, a'_2 definovány vztahem

$$a_0 (px' + q)^2 + 2a_1 (px' + q)(rx' + s) + a_2 (rx' + s)^2 = a'_0 x'^2 + 2a'_1 x' + a'_2;$$

tedy polynom φ transformuje se stejně v polynom φ jako kvadratická *forma* $a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2$ ve formu $a'_0 x'^2 + 2a'_1 x' y' + a'_2 y'^2$ substitucí $x = px' + qy'$, $y = rx' + sy'$. A obdobně se transformuje polynom ψ a $Hx + K$ (jako forma 2. a 1. stupně). Poněvadž integrál (*v*) přešel lineární substitucí v integrál téhož tvaru až na to, že mnohočleny φ, ψ, $Hx + K$ (a proměnná) jsou nahrazeny novými mnohočleny, avšak právě těmi, které z nich vznikají lineární substitucí (prováděnou obdobně jako na formách stejného stupně), vidíme, že integrál jest invariantem polynomů (forem) φ, ψ, $Hx + K$ k obecné lineární substituci. Lineární substitucí můžeme však dvě kvadratické formy přeměniti na součet čtverců (DP 251) vždy, je-li aspoň jedna definitní. Tak je tomu právě v našem případě ($\Delta > 0$) i můžeme proto převésti lineární substitucí zároveň formy φ, ψ na formy $Ax^2 + C$, $x^2 + 1$ a tím integrál (*v*) na integrály předch. odstavce. Vyskytují-li se pak ve výrazech pro integrály odst. předch. nějaké útvary invariantní forem φ, ψ, stejné útvary budou i ve výraze pro integrál (*v*). Výrazy pro integrály v odst. předch. skládají se ze dvou funkcí, a to funkcí tvaru

$$(w) \qquad \log\left(y + \sqrt{y^2 - m}\right), \quad \arcsin \frac{y}{\sqrt{n}}, \quad \text{kde } y = \sqrt{\frac{Ax^2 + C}{x^2 + 1}}$$

a kde m, n jsou konstanty. Avšak y jest invariantem polynomů φ, ψ; je to odmocnina z podílu obou forem. Proto i integrál (*v*) jest vyjádřitelný funkcemi (*w*), kde $y = \sqrt{\varphi \cdot \psi^{-1}}$; m, n pak jsou vhodné konstanty (rovněž invarianty, avšak nezávislé na proměnné x). Abychom stanovili konstanty m, n a rovněž i faktory, jimiž funkce (*w*) se musí násobiti, aby součet výrazů tak vzniklých dal integrál (*v*), utvoříme si za předpokladu, že $y = \varphi^{\frac{1}{2}} \cdot \psi^{-\frac{1}{2}}$, derivace funkcí (*w*). Derivace ty jsou

$$(z) \qquad \frac{\vartheta}{\sqrt{\varphi - m\psi}} \cdot \frac{1}{\psi\sqrt{\varphi}}, \qquad \frac{\vartheta}{\sqrt{n\psi - \varphi}} \cdot \frac{1}{\psi\sqrt{\varphi}}.$$

Jelikož má býti možno funkci za integračním znaménkem ve (*v*) složiti z těchto dvou výrazů, a to lineárně s konstantními součiniteli, jest nutno, aby mnohočleny druhého stupně $\varphi - m\psi$, $n\psi - \varphi$ byly úplnými čtverci mnohočlenů prvého stupně, kteréžto mnohočleny by byly zase děliteli polynomu ϑ. Diskriminant polynomu $\varphi - m\psi = x^2(a_0 - mb_0) + 2x(a_1 - mb_1) + a_2 - mb_2$ jest

$m^2\Delta - m\Theta + D$; je tedy m a stejně n kořenem rovnice $\Delta\xi^2 - \Theta\xi + D = 0$. Výrazu $\Theta^2 - 4\Delta D$, který jest diskriminantem rovnice v ξ, lze dáti v koeficientech také tvar $(a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 - 4(a_0 b_1 - a_1 b_0)(a_1 b_2 - a_2 b_1)$, kterýžto výraz — vyjádříme-li jej pomocí nulových bodů polynomů φ, ψ, jež označíme λ_1, λ_2; μ_1, μ_2 (a pro které jest $2a_1 = -a_0(\lambda_1 + \lambda_2)$, $a_2 = a_0 \lambda_1 \lambda_2$, atd.) — lze nahraditi výrazem $a_0^2 b_0^2 (\lambda_1 - \mu_1)(\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_1)(\lambda_2 - \mu_2)$. Jest to tedy zároveň resultant polynomů φ, ψ. Poněvadž μ_1, μ_2 jsou podle předpokladu čísla komplexní sdružená a poněvadž můžeme a budeme předpokládati, že φ a ψ nemají společné míry, jest to číslo kladné. Je-li $D < 0$ (podle předpokladu jest $\Delta > 0$), jest jeden kořen rovnice v ξ kladný, druhý záporný. *Je-li $D > 0$, učiníme další předpoklad, že $a_0 > 0$*; pak jest $\Theta > 0$*) a rovnice v ξ má dva kořeny kladné.

Volíme-li za n větší z obou kořenů rovnice pro ξ, menší pak za m, jest n vždycky kladné. Touto volbou je docíleno, že $\sqrt{n}$ ve (w) jest reálná. Jelikož $\sqrt{\varphi - m\psi}$, $\sqrt{n\psi - \varphi}$ jsou lineární výrazy v x bez společné míry (neboť i jich kvadráty jsou bez společné míry), dělí jejich součin ϑ a $(\varphi - m\psi)(n\psi - \varphi)$ dělí ϑ^2; vskutku jest platno — jak snadným počtem lze se přesvědčiti — identicky

$$\vartheta^2 \equiv -\varphi^2 \Delta + \varphi\psi\Theta - \psi^2 D \equiv \Delta(\varphi - m\psi)(n\psi - \varphi), \tag{α}$$

identita to odjinud známá. Můžeme tedy položiti**)

$$\varphi - m\psi = (\alpha_1 x + \beta_1)^2, \qquad n\psi - \varphi = (\alpha_2 x + \beta_2)^2,$$

$$\vartheta = \sqrt{\Delta}(\alpha_1 x + \beta_1)(\alpha_2 x + \beta_2). \tag{β}$$

Při tom můžeme znaménko $\pm$ u jednoho z čísel $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ voliti libovolně, u ostatních vypsanými identitami jest stanoveno.

Výrazy (z) se v důsledku těchto vztahů redukují na

$$(z') \qquad \pm \frac{\alpha_2 x + \beta_2}{\psi\sqrt{\varphi}} \sqrt{\Delta} \quad , \quad \pm \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{\psi\sqrt{\varphi}} \sqrt{\Delta},$$

funkcím (w) pak po snadné úpravě lze dáti, nehledě k znaménku, tvar

$$(\omega) \qquad \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{\varphi} + (\alpha_1 x + \beta_1)}{\sqrt{\varphi} - (\alpha_1 x + \beta_1)} \quad , \quad \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\varphi}}{\alpha_2 x + \beta_2}.$$

Derivujeme-li tyto dvě funkce, abychom stanovili znaménka v (z')***) tak, aby derivace výrazů v (ω) byly rovny výrazům v (z'), vidíme snadno, že v (z') jest u prvního i druhého výrazu bráti znaménko $+$. Násobíme-li nyní

---

*) Neboť $\Theta = a_0 b_0 (\mu_1 \mu_2 + \lambda_1 \lambda_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2))$, což jest číslo kladné; jsou-li jednak λ_1, λ_2, jednak μ_1, μ_2 čísla komplexní sdružená.

**) Neboť aspoň jedno z čísel $a_0 - mb_0$, $nb_0 - a_0$ jest kladné (druhé pak jest vzhledem k identitě (α) $\geqq 0$). Je-li $D < 0$ a $a_0 > 0$, je to prvé číslo, jelikož $m < 0$; jestliže $D < 0$ a $a_0 < 0$, je to druhé číslo. Je-li $D > 0$, pak, kdyby nebylo žádné z nich kladné, bylo by $a_0 \leqq mb_0$, $nb_0 \leqq a_0$ a tedy (b_0 jest kladné) $n \leqq m$, což odporuje učiněnému stanovení.

***) Derivaci na př. druhé funkce nejsnáze počítáme, když derivujeme $\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{\varphi}/\varepsilon_2\sqrt{n\psi - \varphi})$, a obdobně je tomu i u prvé funkce. Při tom jest $\varepsilon_2 = \pm 1$, tak aby $\alpha_2 x + \beta_2 = \varepsilon_2 \sqrt{n\psi - \varphi}$.

prvou funkci (ω) A, druhou B a A i B volíme tak, aby součet funkcí násobením vzniklých měl derivaci $(Hx+K)/\psi\sqrt{\varphi}$, dostaneme dvě lineární rovnice pro A, B.

Tak dospíváme konečně k formuli*)

$$\int \frac{(Hx+K)\,dx}{\psi\sqrt{\varphi}} = \frac{(H\beta_1 - K\alpha_1)}{-2\sqrt{R}} \log \frac{\sqrt{\varphi} + (\alpha_1 x + \beta_1)}{\sqrt{\varphi} - (\alpha_1 x + \beta_1)} + $$
$$+ \frac{(H\beta_2 - \alpha_2 K)}{\sqrt{R}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\varphi}}{\alpha_2 x + \beta_2},$$

kde $R = \Theta^2 - 4D\Delta$.

Výsledek ten jest odvozen za předpokladů $R > 0$, $\Delta > 0$, $b_0 > 0$, $D \neq 0$ a, je-li $D > 0$, pak i $a_0 > 0$. Jest platný zejména se zřetelem k intervalu (intervalům), ve kterém (ve kterých) jest $\varphi > 0$. Lze však snadno ukázati, že jest platný i pro interval, ve kterém $\varphi < 0$ a že, nahradíme-li funkce log a arctg komplexních argumentů v tomto případě příslušnými funkcemi (log a arctg) reálných argumentů, dostaneme — nehledě ovšem k činiteli i — výsledek shodný s tím, který vyplývá z daného, píšeme-li v něm $\sqrt{-\varphi}$ místo $\sqrt{\varphi}$ a zaměníme-li zároveň dvojici čísel $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_2, \beta_2]$. Avšak i předpoklady $b_0 > 0$, $a_0 > 0$, je-li $D > 0$, jsou málo podstatné pro platnost výsledků, kterou lze bez potíže rozšířiti i pro tyto vyloučené případy.

26. Přehled výsledků. Shrneme-li výsledky docílené v odst. 25 pro integraci integrálu (1) obdobně, jako jsme to učinili v odst. 17 pro integraci funkcí racionálních, vidíme, že můžeme vysloviti tento výrok: Jsou-li $p(x)$, $q(x)$ dva mnohočleny proměnné x bez společné míry, pak lze psáti

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{p_0(x)}{q_0(x)} \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad \text{(A)}$$

kde $p_1(x)$, $p_0(x)$, $q_1(x)$, $q_0(x)$ jsou rovněž mnohočleny proměnné x, a to těchto vlastností:

1. $q_0(x)$ má pouze nulové body prvního řádu a ty mohou býti pouze v bodech, ve kterých $q(x)$ má nulové body a $ax^2 + bx + c$ jest od nuly různo. Stupeň polynomu $p_0(x)$ jest buď nižší než stupeň mnohočlenu $q_0(x)$ aneb jest jemu roven.

2. Nulové body mnohočlenu $q_1(x)$ mohou býti nejprve v bodech α_1, α_2, nulových bodech výrazu $ax^2 + bx + c$ a jsou tam tenkráte a jenom tenkráte, když také $q(x)$ má tyto nulové body.

---

*) β_1/α_1, β_2/α_2 jsou podle (β) záporně vzaté kořeny rovnice $\vartheta = 0$ a jest, je-li $a_0 b_1 - a_1 b_0 \neq 0$,

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{a_0 b_2 - a_2 b_0 - \sqrt{R}}{2(a_0 b_1 - a_1 b_0)}, \qquad \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{a_0 b_2 - a_2 b_0 + \sqrt{R}}{2(a_0 b_1 - a_1 b_0)}.$$

Tudíž $\sqrt{\Delta}\,(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) = \sqrt{R}$; neboť $\sqrt{\Delta}\,\alpha_1 \alpha_2 = (a_0 b_1 - a_1 b_0)$.

Při tom bylo ke stanovení znaménka před $\sqrt{R}$ užito ještě okolnosti, že

$$(a_1 - mb_1)/(a_0 - mb_0) = \beta_1/\alpha_1, \quad (nb_1 - a_1)/(nb_0 - a_0) = \beta_2/\alpha_2.$$

Řády jich ve $q_1(x)$ a $q(x)$ jsou si pak rovny. Jinak jsou nulové body mnohočlenu $q_1(x)$ pouze tam, kde $q(x)$ má nulové body řádu vyššího než 1, a má $q_1(x)$ v bodě a (různém od α_1, α_2) *vždy* nulový bod řádu $\nu - 1$, má-li $q(x)$ v a nulový bod řádu ν. Je tedy $q_1(x)$ úplně stanoveno (požadujeme-li, aby i $p_1(x)$, $q_1(x)$ neměla společnou míru, což mlčky činíme), a to až na multiplikativní konstantu, kterou můžeme si voliti tak, aby na př. koeficient nejvyšší mocnosti x v $q_1(x)$ byl 1.

3. Označíme-li stupně v x mnohočlenů $p(x)$, $q(x)$, $p_1(x)$, $q_1(x)$ po řadě znaky $\pi, \varrho, \pi_1, \varrho_1$, pak je-li $\pi \leqq \varrho$, jest $\pi_1 < \varrho_1$. Je-li $\pi > \varrho$ a $\pi - \varrho = \mu$, jest $\pi_1 - \varrho_1 = \mu - 1$. Má-li $q(x)$ vesměs jednoduché kořeny různé od α_1, α_2 (jest $q_1(x) = 1$) a je-li zároveň stupeň $\pi \leqq \varrho$, jest $p_1(x)$ identicky rovno nule.

4. Integrál na pravé straně rovnice (A) dá se vyjádřiti jakožto součet tvaru

$$M \log \frac{(2aa + b)x + (ba + 2c) + 2\sqrt{\varphi(a)}\sqrt{\varphi(x)}}{x - a}, \qquad N \log \left(2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{\varphi(x)}\right),$$

kde $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ a kde konstanty M, N, a mohou nabývati také hodnot komplexních. Číslo a jest jeden z nulových bodů mnohočlenu $q_0(x)$.

Všecky tyto výroky jsou prostými důsledky jednak možnosti rozložiti zlomek $p(x)/q(x)$ ve zlomky částečné (odst. 12, (5)), jednak redukčních formulí pro integrály J_n, Y_n, jednak vyjádření integrálu J_0, Y_1.

Dává nám tudíž pravá strana rovnice (A) vyjádření integrálu na levé straně tak, že prvý její člen obsahuje algebraickou část v jeho vyjádření, druhý transcendentní. Jelikož pak, jak snadno patrno (viz obdobnou úvahu v odst. 17) jsou mnohočleny $p_1(x)$, $q_1(x)$, $p_0(x)$, $q_0(x)$ určeny jednoznačně (polynom $q_1(x)$ jest, jak svrchu vytčeno, úplně znám; pro polynom $q_0(x)$ můžeme předpokládati, že jest součinem různých kořenových činitelů mnohočlenu $q(x)$ různých od $x - \alpha_1$, $x - \alpha_2$, každý činitel v první mocnině), můžeme mnohočleny $p_1(x)$, $p_0(x)$ stanoviti metodou neurčitých součinitelů. Vyplývá tak zejména věta: ***Algebraická část integrálu na levé straně rovnice (A) dá se vždy stanoviti operacemi racionálními*** (a specielně metodou neurčitých součinitelů).

Cvičení.

1. Výraz dávající integrál Y_1 v odst. 23 lze vyjádřiti pomocí elementárních transcendent ještě v rozmanitých jiných formách (než výrazem odstavce 23).

Uvedu některé příslušné formule, jež čtenář ne nesnadně dokáže, a to za předpokladu, že a, b, c, α jsou reálná čísla. Z důvodu stručnosti zavedu označení

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad f(x, \alpha) = (2a\alpha + b)x + (b\alpha + 2c),$$
$$D = b^2 - 4ac, \qquad x - \alpha = (x\alpha).$$

Mezi veličinami právě vypsanými jest vztah

$$[f(x, \alpha)]^2 - 4f(x)\,f(\alpha) = (x\alpha)^2 D, \tag{+}$$

známý z teorie kvadratické formy binární, který však čtenář bez potíží přímo verifikuje. Nechť pak, jako již dříve, sign A značí $+1$, je-li $A > 0$; je-li $A < 0$, nechť sign $A = -1$.

Pak jest:

$$\alpha)\ Y_1 = \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\operatorname{sign}(x\alpha)\cdot\frac{1}{\sqrt{f(\alpha)}}\operatorname{arg\,Sh}\frac{f(x,\alpha)}{(x\alpha)\sqrt{-D}} + k.$$
je-li $D < 0$, $a > 0$.

$$\beta)\ Y_1 = \operatorname{sign}(x\alpha)\frac{1}{\sqrt{-f(\alpha)}}\arcsin\frac{f(x,\alpha)}{(x\alpha)\sqrt{D}} + k, \text{ je-li } D > 0,\ f(\alpha) < 0.$$

$$\gamma)\ Y_1 = \operatorname{sign}[(x\alpha)f(x)]\ \frac{1}{\sqrt{-f(\alpha)}}\arcsin\frac{f(x,\alpha)}{(x\alpha)\sqrt{D}} + k, \text{ je-li } D > 0,\ f(\alpha) > 0.$$

Všechny tyto výsledky lze pokládati za prostý důsledek relace (+) a výrazů pro derivaci $\arcsin z$, $\operatorname{arg\,Sh} z$.

2. Ukažte, že při $D > 0$ v důsledku vztahu β), γ) jest

$$\left|\frac{f(x,\alpha)}{(x\alpha)\sqrt{D}}\right| < 1 \text{ (resp. } > 1), \quad \text{je-li } f(x)\,f(\alpha) < 0 \text{ (resp. } > 0).$$

Nerovniny tyto následují ovšem bezprostředně z (+).

3. Ukažte, že tvar pro hodnotu integrálu

$$I = \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{|x-A|\cdot|x-B|}}, \quad A < B;\ A, B, \alpha \text{ reálná čísla.}$$

závisí na vzájemné poloze bodů α, A, B a na intervalu pro x. Zavedeme-li si intervaly (α, A), (α, B), (A, B) takové, že uvnitř žádného z nich není jeden z bodů α, A, B (na př. uvnitř (α, A) není bod B), a dále takové, že jednotlivý interval se případně skládá ze dvou částí obsahujících body $+\infty$, $-\infty$ (na př. interval (α, A), je-li $\alpha > B$, bude značit souhrn intervalů $(-\infty, A)$, (α, ∞)), lze, ať jest vzájemná poloha bodů α, A, B jakákoliv, celý interval $(-\infty, \infty)$ rozložiti vždy ve tři intervaly (při čemž ovšem jeden z nich se skládá ze dvou nesouvislých částí). Na př. je-li $A < \alpha < B$, rozpadá se $(-\infty, \infty)$ ve tři intervaly (A, α), (α, B), (A, B) požadovaných vlastností (interval (A, B) se v tomto případě skládá ze dvou částí $(B, +\infty)$, $(-\infty, A)$). Zavedením tak vymezených intervalů můžeme hodnotu integrálu I vyjádřiti takto: Klademe-li pro stručnost

$$M = \frac{2}{\sqrt{|A-\alpha|\,|B-\alpha|}}, \quad \mathfrak{A} = \left|\frac{\alpha-B}{A-B}\cdot\frac{x-A}{x-\alpha}\right|, \quad \mathfrak{B} = \left|\frac{\alpha-A}{A-B}\cdot\frac{x-B}{x-\alpha}\right|,$$

jest $\quad I = \varepsilon M \operatorname{arg\,Sh}\sqrt{\mathfrak{A}}$, je-li x v (α, A);

$\quad I = \varepsilon M \operatorname{arg\,Sh}\sqrt{\mathfrak{B}}$, je-li x v (α, B);

$\quad I = \varepsilon M \arcsin\sqrt{\mathfrak{A}} = -\varepsilon M \arcsin\sqrt{\mathfrak{B}} + k'$, je-li x v (A, B).

Při tom jest $\varepsilon = \pm 1$ a lze je v každém jednotlivém případě snadno stanoviti, neboť na prvý pohled lze vždy udati, zda hodnota výrazu pro t má derivaci kladnou či zápornou (znaménko její, nehledě k činiteli εM resp. $-\varepsilon M$, souhlasí se znaménkem buď derivace funkce $\mathfrak{A}$ anebo $\mathfrak{B}$). V případech, že interval pro x se rozpadá ve dva nesouvisící kusy, může míti číslo ε v každém z nich hodnotu různou.

3. O KŘIVKÁCH RACIONÁLNÍCH A INTEGRÁLECH JIM PŘÍSLUŠNÝCH.

27. V předcházejícím jsme za x dosazovali racionální funkci nové proměnné t tak, že zároveň i $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ stala se racionální funkcí té proměnné. Úkol ten lze patrně nahraditi následujícím:

V rovnici
$$y^2 = ax^2 + bx + c \tag{1}$$
jest za x voliti takovou racionální a reálnou funkci proměnné t, aby i y bylo následkem této rovnice racionální funkcí proměnné t. Anebo: Jest vyjádřiti x a y jakožto racionální funkce proměnné t tak, aby rovnice (1) byla identicky splněna.

Jsou-li x, y pravoúhlé souřadnice bodu v rovině, jest (1) rovnicí kuželosečky: lze tedy úkol náš takto stylisovati: Souřadnice bodů na kuželosečce (1) mají se vyjádřiti jakožto racionální funkce parametru t. Jelikož tento úkol vždy má řešení, jak jsme svrchu poznali, říkáme, že *kuželosečka jest křivkou racionální*. Obecně racionalisace rovnice (1) dá se provésti takto:

Budiž (μ, ν) bod na dané kuželosečce: pak jest
$$\nu^2 = a\mu^2 + b\mu + c.$$

Proložme bodem (μ, ν) svazek přímek; jich rovnice jest
$$y - \nu = t\,(x - \mu), \tag{2}$$
kde t jest proměnná směrnice přímky svazku. Kuželosečka (1) a přímka (2) mají dva body společné, jeden jest (μ, ν), druhý závisí na t a dostaneme jej řešením rovnic (1) a (2). Eliminací y na př. dostaneme kvadratickou rovnici pro x, avšak odstraněním kořenového činitele $x - \mu$ obdržíme lineární rovnici pro x, takže pro x a rovněž pro y vyplývá racionální výraz v t. Snadným počtem vychází
$$x = \frac{a\mu + b - 2\nu t + \mu t^2}{-a + t^2}, \qquad y = \frac{-a\nu + (2a\mu + b)\,t - \nu t^2}{-a + t^2},$$
což jest obecná racionální rovnice dané kuželosečky ve formě parametrické.

PŘÍKLADY. 1. Je-li $c > 0$, volme $\mu = 0$. Pak máme $\nu = \sqrt{c}$ a
$$x = \frac{b - 2\sqrt{c}\,t}{-a + t^2}, \qquad y = \frac{-a\sqrt{c} + bt - \sqrt{c}\,t^2}{-a + t^2}.$$

2. Jsou-li kořeny α_1, α_2 rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ reálné, klaďme $u = \alpha_2$, $v = 0$. Pak jest

$$x = \frac{a\alpha_2 + b + \alpha_2 t^2}{-a + t^2} = \frac{-a\alpha_1 + \alpha_2 t^2}{-a + t^2},$$

$$y = \frac{(2a\alpha_2 + b)\,t}{-a + t^2} = \frac{-a\,(\alpha_1 - \alpha_2)\,t}{-a + t^2}.$$

V případě, že $a < 0$, dá se tento výsledek přivésti ve shodu s výsledkem uvedeným v odst. 19, v rovnici (γ) substitucí $t = t'\sqrt{-a}$.

3. Je-li a kladné, můžeme místo svazku (2) vzíti svazek přímek rovnoběžných s asymptotou (pak místo bodu (u, v) nastupuje bod kuželosečky na úběžné přímce); svazek ten má rovnici

$$y = \pm x\sqrt{a} + t. \tag{2'}$$

Řešením rovnic (1) a (2') přicházíme k výsledkům uvedeným již svrchu v odst. 22.

28. Lze snadno udati příklady algebraických*) křivek vyšších stupňů, jež jsou racionální, t. j. při nichž souřadnice bodů na křivce lze vyjádřiti jakožto racionální funkce parametru. Vezmeme v úvahu dva příklady.

1. *Descartesův list* má rovnici

$$x^3 + y^3 = 3a\,xy. \tag{a}$$

Jest to křivka algebraická třetího stupně, mající v počátku dvojný bod. Položíme-li jím svazek přímek, jehož rovnice jest

$$y = xt, \tag{b}$$

protnou nám jednotlivé přímky svazku křivku vždy toliko v jednom bodě různém od počátku (nehledíme-li k tečnám ve dvojném bodě). Souřadnice průsečíku hoví tudíž rovnici prvního stupně a lze je racionálně vyjádřiti pomocí t. Vskutku dostáváme řešením (a) a (b)

$$x = \frac{3at}{1 + t^3}, \qquad y = \frac{3at^2}{1 + t^3}. \tag{c}$$

Descartesův list a vůbec *každá křivka třetího stupně s bodem dvojným jest křivkou racionální*, jakož vyplývá z úvahy stejné jako při Descartesově listu.

2. Rovnici *lemniskaty* lze psáti ve tvaru

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 - y^2). \tag{d}$$

Tato křivka jest čtvrtého stupně a má rovněž v počátku dvojný bod. Přímka dvojným bodem procházející protíná však křivku ve dvou bodech různých od počátku a dospíváme tudíž

*) T. j. takových, jichž rovnice v souřadnicích paralelních anebo trojúhelníkových jest dána rovnicí algebraickou mezi souřadnicemi bodu křivky.

řešením (*d*) a (*b*) k rovnicím druhého stupně a tím k iracionalitám. Obdržíme řešíce tyto rovnice

$$x = \frac{a\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}, \qquad y = \frac{at\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}.$$

Odmocninu, která se tu vyskytuje, lze však snadno učiniti racionální; na př. podle odst. 27, př. 1, klademe-li

$$\sqrt{1-t^2} = 1 + tu, \quad \text{odkud} \quad t = -\frac{2u}{1+u^2}.$$

$$\sqrt{1-t^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Provedeme-li substituci těchto výrazů, dostáváme pro souřadnice bodu na lemniskatě ihned

$$x = \frac{a(1-u^4)}{1+6u^2+u^4}, \qquad y = -\frac{2au(1-u^2)}{1+6u^2+u^4}, \tag{e}$$

odkudž jest patrno, že lemniskata jest křivkou racionální.

Lemniskata jest křivkou čtvrtého stupně mající tři body dvojné. Bylo by snadno dokázati, že každá křivka čtvrtého stupně mající tři body dvojné jest racionální křivkou. Provedeme však v té příčině některé úvahy obecné.

29. Obecná rovnice algebraické křivky m-tého stupně obsahuje celkem $1 + 2 + 3 + \cdots + (m+1) = \frac{1}{2}(m+2)(m+1)$ koeficientů. Jsou tudíž jejich poměry — a tedy i křivka m-tého stupně — známy (jak z vět o řešení systému lineárních rovnic ihned vyplývá), je-li dáno na křivce $\frac{1}{2}(m+2)(m+1) - 1 = \frac{1}{2}m(m+3)$ bodů nejsoucích ve zvláštní poloze. Můžeme tak vysloviti větu: *Body v počtu $\frac{1}{2}m(m+3)$ libovolně v rovině zvolenými prochází aspoň jedna algebraická křivka m-tého stupně.*

Z ní vyplývá snadno: *Křivka algebraická n-tého stupně ireducibilní* (t. j. taková, *jež se nerozpadá ve křivky stupňů nižších*) *má nejvýše $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ bodů dvojných.*

Neboť dejme tomu, že na dané křivce stupně n jest

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1$$

bodů dvojných. Pak lze těmito body a ještě $n-3$ body na dané křivce, tedy celkem

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1 + n - 3 = \tfrac{1}{2}(n-2)(n+1)$$

body, proložiti aspoň jednu křivku stupně $n-2$. S ní bude míti daná křivka ve dvojném bodě aspoň dva průsečíky společné; tudíž obě křivky mají celkem aspoň

$$2\left[\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1\right] + n - 3 = n(n-2) + 1$$

společných bodů. Ale dvě křivky, jedna stupně n-tého, druhá stupně $n-2$, mohou míti nejvýše $n(n-2)$ bodů společných, nesplývají-li částečně, což však nastati může jen tehdy, je-li křivka stupně n-tého reducibilní. Nemůže tedy daná křivka, je-li ireducibilní, míti
$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$$
anebo ještě více bodů dvojných.

Zda však křivky algebraické n-tého stupně o $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ bodech dvojných vskutku existují či ne, není z toho patrno.

30. Z předcházejících vývodů plyne, že má-li ireducibilní křivka C_n stupně n-tého nejvýše možný počet bodů dvojných, těmito body dvojnými v počtu $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ a dalšími $n-2$ body na křivce C_n *libovolně* zvolenými*) prochází jedna a jen jedna křivka C_{n-2} stupně $n-2$.

Neboť, kdyby podmínkami právě vytčenými nebyly poměry koeficientů v rovnici křivky C_{n-2} úplně stanoveny, bylo by lze na C_n ještě jeden bod libovolně zvoliti jakožto bod, jímž také má procházeti C_{n-2}, a pak $n-1$ libovolně zvolenými body křivky C_n a současně všemi jejími dvojnými body procházela by aspoň jedna křivka C_{n-2}. Tím by nastala opětně nemožná okolnost, že ireducibilní křivka C_n má s křivkou C_{n-2} $n(n-2)+1$ průsečíků. Jsou tudíž lineární rovnice, které dostaneme pro koeficienty křivky C_{n-2}, píšíce, že C_{n-2} prochází $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ body dvojnými a dalšími $n-2$ libovolnými body ireducibilní křivky C_n, *na sobě nezávislé.*

Tak dostáváme pro rovnice křivek, které procházejí $\frac{1}{2}(n-1)$. $(n-2)$ dvojnými body ired. křivky C_n a dalšími $n-3$ body jejími, řešením příslušných lineárních rovnic tvar
$$\lambda A(x,y)+\mu B(x,y)=0; \quad \lambda, \mu \text{ neurčená čísla}, \tag{1}$$

Uvedenými body prochází tedy t. zv. svazek křivek C_{n-2}; rovnice jeho závisí na proměnném parametru λ/μ. Každá křivka svazku má s C_n
$$2 \cdot \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)+n-3=n(n-2)-1$$
pevných průsečíků ve dvojných bodech křivky C_n a v $n-3$ dalších bodech na C_n. Jeden toliko průsečík závisí na λ/μ. Řešením rovnic (1) a rovnice křivky C_n
$$f(x,y)=0$$

*) Tyto další body můžeme zvoliti třeba i tak, že několik na př. k jich v jeden splývá, ve kterémžto případě vlastně požadujeme, aby algebraická křivka C_{n-2} měla styk stupně $k-1$ s C_n. Po případě můžeme ony další body zvoliti si v bodech dvojných; tu se pak křivka dotýká jedné větve nebo obou větví křivky C_n bodem dvojným procházejících.

dostáváme pro souřadnice tohoto průsečíku (po krácení kořenových činitelů příslušných pevným průsečíkům) rovnice lineární, t. j. obdržíme pro ně výrazy tvaru

$$x = R_1(\lambda/\mu), \quad y = R_2(\lambda/\mu); \quad R_1,\ R_2 \text{ racionální funkce.}$$

Průsečík ten může býti kterýkoli bod na C_n (podle svrchu dokázané věty) a dospěli jsme tak k výsledku, *že souřadnice všech bodů na ireducibilní křivce* C_n *mající* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *bodů dvojných lze vyjádřiti jakožto racionální funkce parametru*: t. j. *křivka* C_n *o maximálním počtu bodů dvojných, existuje-li vůbec taková křivka, jest křivkou racionální.*

31. Větu právě dokázanou můžeme rozšířiti snadno i na některé případy, kdy křivka C_n má singularity vyšší než obyčejné body dvojné. Vezměme v úvahu případy dva.

I. Křivka C_n má dvojný bod, ve kterém dvě větve křivky mají dotyk r-tého stupně. Tu předpisujeme křivce přidružené C_{n-2}, aby v tomto bodě s jednou (a tudíž i druhou) větví křivky C_n měla styk rovněž stupně r-tého. Tím zavádíme pro koeficienty křivky C_{n-2} $r+1$ podmínku a v onom dvojném bodě dostáváme v obecném případě $2(r+1)$ bod společný křivkám C_n a C_{n-2}. Je tedy singularita vytčená při rozhodování, zda křivka C_n má maximální počet bodů dvojných, rovnocenná $r+1$ bodu dvojnému.

II. Křivka C_n má bod r-násobný, ve kterém má r různých tečen. Tu budeme požadovati pro přidruženou křivku C_{n-2}, aby tam měla bod $(r-1)$-násobný. Tím ukládáme koeficientům křivky C_{n-2}

$$1+2+3+\cdots+(r-1)=\tfrac{1}{2}(r-1)r$$

podmínek. V bodě však, ve kterém mají C_n bod r-násobný a C_{n-2} bod $(r-1)$-násobný, jest obecně $r(r-1)$ průsečíků obou křivek. Je tu tedy bod r-násobný rovnocenný $\frac{1}{2}r(r-1)$ bodu dvojnému.

32. PŘÍKLAD 1. Abychom převedli rovnici lemniskaty v odstavci 28 (d) na tvar racionální metodou vylíčenou, proložíme svazek kuželoseček, které procházejí body dvojnými a které se dotýkají v reálném bodě dvojném větve lemniskaty o tečně $x-y=0$. Jelikož imaginární dvojné body lemniskaty jsou body kruhové a reálný dvojný bod jest v počátku, redukuje se svazek kuželoseček na svazek kruhů dotýkajících se v počátku přímky $x-y=0$. Rovnice jeho jest patrně

$$x^2+y^2=\lambda(x-y).$$

Řešením rovnice lemniskaty a této rovnice dostáváme snadno

$$x = a^2\lambda\frac{\lambda^2 + a^2}{\lambda^4 + a^4}, \qquad y = a^2\lambda\frac{\lambda^2 - a^2}{\lambda^4 + a^4},$$

čímž souřadnice bodů lemniskaty jsou vyjádřeny jakožto racionální funkce parametru λ.

Od tvaru právě dosaženého dospějeme ke tvaru v odst. 28 odvozenému substitucí

$$\lambda = a\frac{1-u}{1+u}.$$

PŘÍKLAD 2. Křivka o rovnici

$$y^4 + 3y^3x + 6y^2x + yx^2 + x^3 + 4x^2 = 0$$

jest křivkou racionální; neboť v počátku má dvojný bod, ve kterém se dvě větve dotýkají; v bodě $(-1, -1)$ má pak obyčejný dvojný bod. Metodou svrchu (odst. 28) při lemniskatě užitou dostáváme racionální vyjádření

$$x = -4\frac{(t^2 + 2t - 19)^2}{(t^2 - 9)(t+3)^2}, \qquad y = -8\frac{t^2 + 2t - 19}{(t^2 - 9)(t+3)}.$$

33. Obecně platí věta: *Racionální čára ireducibilní stupně n-tého má* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *body dvojné.* Při tom jest singularity vyšší vždy vzíti v počet jako náležitý počet bodů dvojných, tedy zejména bod dvojný, ve kterém se dvě větve křivky ve stupni r dotýkají, jako $r+1$ bod dvojný a bod r-násobný jakožto $\frac{1}{2}r(r-1)$ bod dvojný. Větou touto teprve dosahují věty dokázané svrchu pro křivky racionální věcného podkladu; neboť jelikož, jak snadno plyne, existují racionální křivky n-tého stupně ireducibilní, jest jí prokázána též existence algebraických křivek stupně n-tého o maximálním počtu bodů dvojných.

Co do důkazu jejího odkazuji čtenáře ke článku *Ed. Weyra*, Časopis, VIII, str. 193 a násl., kde lze nalézti další vývody a příklady ke křivkám racionálním*).

*) Jednoduchý důkaz věty té vyplývá z rovnice Plückerovy pro třídu křivky algebraické. Podle ní jest počet tečen z daného bodu ke křivce stupně n-tého, mající za singularity d bodů dvojných uzlových a r bodů úvratu, dán výrazem

$$n(n-1) - 2d - 3r. \tag{7}$$

Stanovme počet tečen ke křivce racionální n-tého stupně o rovnicích

$$x = \frac{\Phi(t)}{X(t)}, \quad y = \frac{\Psi(t)}{X(t)}, \quad \Phi,\ \Psi,\ X \text{ jsou mnohočleny stupně } n\text{-tého},$$

rovnoběžných s osou Y (t. j. vedených z úběžného bodu osy Y). Při tom předpokládejme, že žádný z bodů úvratu neleží na přímce úběžné a že žádná z asymptot není rovnoběžná s osou Y (nejsou-li podmínky ty splněny hned od počátku, stačí transformovati danou křivku vhodnou projektivní transfor-

Jestliže algebraická rovnice

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{2}$$

stupně n-tého mezi x, y jest rovnicí algebraické křivky ireducibilní stupně n-tého a má-li tato křivka d bodů dvojných (při čemž singularity vyšší bereme v počet jako náležitý počet bodů dvojných a body úvratu čítáme ovšem mezi body dvojné) sluje číslo p

$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - d$$

rodem rovnice (2) a zároveň *rodem* příslušné křivky algebraické.

Z předcházejícího vyplývá, že pojem křivky racionální a pojem křivky rodu nula (nultého) zahrnují v sebe tytéž křivky, t. j. že každá křivka racionální jest rodu nultého a naopak.

34. Integrály tvaru

$$\int R(x, y)\, dx,$$

kde $R(x, y)$ jest racionální funkcí proměnných x, y a kde y jest funkcí x, jež dána jest rovnicí algebraickou rodu p

$$\varphi(x, y) = 0,$$

slují integrály *Abelovy rodu p příslušné ke křivce o rovnici* $\varphi(x, y) = 0$.

---

mací, jež očividně křivku racionální n-tého stupně převádí zase v racionální křivku stupně n). Přímka o rovnici $x - x_0 = 0$ protíná danou křivku v bodech, jichž parametry dostaneme řešením rovnice

$$x - x_0 = \frac{\Phi(t)}{X(t)} - x_0 = 0 \quad \text{aneb rovnice} \quad \Phi(t) - x_0 X(t) = 0. \tag{x}$$

Má-li býti přímka $x - x_0 = 0$ v bodě o parametru t' tečnou, musí býti t' dvojnásobným kořenem této rovnice. Tedy jenom ty z přímek $x - x_0 = 0$ mohou býti přímkami tečnými, pro něž rovnice (x) má dvojnásobné (anebo vůbec mnohonásobné) kořeny. Příslušná x_0 dostaneme, utvoříme-li diskriminant rovnice (x) a položíme jej na roveň nule. Dostaneme rovnici pro x_0, která bude, jelikož diskriminant rovnice stupně n-tého jest stupně $2(n-1)$ v koeficientech rovnice, stupně nejvýše $2(n-1)$. Za kořeny bude míti jednak taková x_0, pro něž přímka $x - x_0 = 0$ jest tečnou, jednak taková x_0, pro něž přímka $x - x_0 = 0$ prochází bodem úvratu. (Dvojným bodům uzlovým příslušejí dvě různé hodnoty parametru.) Obdržíme tedy vztah se zřetelem k číslu (γ)

$$[n(n-1) - 2d - 3r] + r \leqq 2(n-1).$$

Anebo

$$d + r \geqq \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Poněvadž však maximální počet bodů dvojných u ireducibilní křivky stupně n jest právě $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, musíme bráti v poslední rovnici znaménko rovnosti a je tedy

$$d + r = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

čímž věta dokázána.

Z úvah odstavců předcházejících následuje, že *integrály Abelovy rodu 0 dají se převésti racionální substitucí na integrály z funkcí racionálních.*

PŘÍKLAD. Jest vypočísti
$$\int y\,dx,$$
kde y jest kořenem rovnice $x^3+y^3=3axy$. Dosadíme-li za $y=xt$, máme podle odst. 28
$$x=\frac{3at}{1+t^3},\qquad y=\frac{3at^2}{1+t^3},\qquad \frac{dx}{dt}=3a\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}.$$
Obdržíme tudíž
$$\int y\,dx=9a^2\int\frac{t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}\,dt.$$
Přeměníme jej dále substitucí $1+t^3=\tau$:
$$\int y\,dx=3a^2\int\frac{3-2\tau}{\tau^3}\,d\tau=-\frac{9a^2}{2\tau^2}+\frac{6a^2}{\tau}=-\frac{9a^2}{2(1+t^3)^2}+\frac{6a^2}{1+t^3}.$$
Avšak
$$t=\frac{y}{x},\qquad t^3+1=\frac{x^3+y^3}{x^3}=\frac{3axy}{x^3}=\frac{3ay}{x^2}$$
a tedy
$$\int y\,dx=-\frac{x^4}{2y^2}+\frac{2ax^2}{y},$$
čímž daný integrál jest vypočten.

4. REDUKCE INTEGRÁLŮ HYPERELIPTICKÝCH (A ELIPTICKÝCH).

35. Podobně jako integrály tvaru
$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \tag{1}$$
lze projednávati integrály
$$\int R\left(x,\sqrt{X(x)}\right)dx, \tag{2}$$
kde
$$X=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$
má vesměs různé kořenové činitele.

Úvahou úplně shodnou s úvahou provedenou pro integrály odst. 22 v odst. 23 lze integrály (2) převésti pomocí racionálních operací a rozkladem na zlomky částečné na integrály
$$\int\frac{x^r}{\sqrt{X}}\,dx,\qquad \int\frac{dx}{(x-\alpha)^r\sqrt{X}}, \tag{3}$$
kde α jest obecně číslo komplexní a r jest celé číslo kladné.

Pro tyto integrály lze sestrojiti snadno vzorce redukční.

Abychom obdrželi žádaný vzorec v případě prvém, vyjdeme od identity
$$(x^r\sqrt{X})' = rx^{r-1}\sqrt{X} + \frac{x^r X'}{2\sqrt{X}} = \frac{rx^{r-1}X + \frac{1}{2}x^r X'}{\sqrt{X}}$$

aneb
$$(x^r\sqrt{X})' =$$
$$\frac{(r+\frac{1}{2}n)a_0x^{n+r-1} + (r+\frac{1}{2}(n-1))a_1x^{n+r-2} + \cdots + (r+\frac{1}{2})a_{n-1}x^r + ra_nx^{r-1}}{\sqrt{X}}$$

odkudž integrací, klademe-li pro krátkost
$$I_r = \int\frac{x^r}{\sqrt{X}}\,dx,$$
$$x^r\sqrt{X} = (r+\tfrac{1}{2}n)a_0I_{n+r-1} + (r+\tfrac{1}{2}(n-1))a_1I_{n+r-2} + \cdots$$
$$+ (r+\tfrac{1}{2})a_{n-1}I_r + ra_nI_{r-1}.$$

Dosazujeme-li v této rovnici za r po řadě $0, 1, 2, \ldots$, dostáváme řadu rovnic, ze kterých *lze vypočítati každý* I_r *pomocí* $I_{n-2}, I_{n-3} \ldots I_1, I_0$.

V rovnici té můžeme klásti za r též záporné hodnoty. Píšeme-li v ní $-r$ za r, členy její pak v jiném pořádku a s opačným znaménkem, obdržíme
$$ra_nI_{-r-1} + (r-\tfrac{1}{2})a_{n-1}I_{-r} + \cdots + (r-\tfrac{1}{2}(n-1))a_1I_{n-r-2} +$$
$$+ (r-\tfrac{1}{2}n)a_0I_{n-r-1} = -x^{-r}\sqrt{X}.$$

Je-li v ní $a_n \neq 0$, můžeme z rovnic vzniklých dosazením $r = -1, -2, -3, \ldots$ postupně $I_{-2}, I_{-3}, I_{-4}, \ldots$ vypočítati pomocí $I_{-1}, I_0, I_1, \ldots, I_{n-2}$.

Jestliže $a_n = 0$ (pak ovšem $a_{n-1} \neq 0$, neboť jinak by X bylo dělitelno x^2, což jsme předpokladem o různosti kořenových činitelů při X vyloučili), lze vypočítati $I_{-1}, I_{-2}, I_{-3}, \ldots$ pomocí $I_0, I_1, \ldots, I_{n-2}$.

Integrály však
$$J_r = \int\frac{dx}{(x-a)^r\sqrt{X}}$$
se substitucí $x = a + x'$, je-li a reálné, ihned převádějí na I_{-r}, při čemž pod odmocninou bude polynom
$$X = A_0x'^n + A_1x'^{n-1} + \cdots + A_{n-1}x' + A_n$$
kde, jak známo,
$$A_n = X(a), \qquad A_{n-1} = \frac{1}{1!}X'(a), \qquad A_{n-2} = \frac{1}{2!}X''(a)\ldots$$

Je tedy, je-li a reálné, pro J_r platna tato formule redukční:
$$rA_nJ_{r+1} + (r-\tfrac{1}{2})A_{n-1}J_r + (r-\tfrac{2}{2})A_{n-2}J_{r-1} + \cdots$$
$$+ (r-\tfrac{1}{2}n)A_0J_{r+1-n} = -\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^r}.$$

Avšak formuli tu můžeme odvoditi i jinou cestou, na př. derivováním výrazu, který je v ní na pravé straně, a náležitou úpravou výrazu tak vzniklého (viz přísl. úvahu v odst. 25). Postup tento pak zůstává v platnosti, i když α jest číslo komplexní. Jest tudíž odvozená formule platna i pro komplexní α a my máme větu (uvážíme-li, že, je-li $A_n = X(\alpha) = 0$, mnohočlen X jest dělitelen $x - \alpha$):

Není-li $x-\alpha$ kořenový činitel mnohočlenu X, dají se všecky integrály J_r vyjádřiti lineárně pomocí J_1 a integrálů $I_0, I_1, \ldots, I_{n-2}$. Je-li $x-\alpha$ kořenový činitel mnohočlenu X, lze všecky integrály J_r vyjádřiti lineárně pomocí $I_0, I_1, \ldots, I_{n-2}$.

35a. Podám ještě odvození velmi obecných formulí redukčních, které mohou býti často užitečny při vyhledávání hlavně algebraické části integrálu z funkce iracionální, a to pro integrál

$$\int \frac{A\,dx}{B^{\mu}\sqrt{X}}, \tag{4}$$

kde A, B jsou polynomy v x bez společné míry, B nemějž dále mnohonásobné kořeny. Jest pak nutno dva případy rozeznávati, buď mnohočlen B jest nesoudělný s X anebo jest dělitelem mnohočlenu X.

a) X a B jsou bez společné míry; pak jsou se zřetelem ku předpokladům i $B'.X$ a B bez společné míry a můžeme tedy (buď metodou neurčitých součinitelů anebo pomocí Euklidova algoritmu) nalézti dva polynomy v x M, N tak, že

$$MB + NB'X = 1.$$

Jest pak
$$\frac{A}{B^{\mu}\sqrt{X}} = \frac{A(MB+NB'X)}{B^{\mu}\sqrt{X}} = \frac{AM}{B^{\mu-1}\sqrt{X}} + \frac{AN\sqrt{X}\,.\,B'}{B^{\mu}}.$$

Avšak při $\mu > 1$

$$\frac{AN\sqrt{X}\,B'}{B^{\mu}} = \left[\frac{AN\sqrt{X}}{(1-\mu)\,B^{\mu-1}}\right]' - \frac{(AN)'X}{(1-\mu)\,B^{\mu-1}\sqrt{X}} - \frac{ANX'}{2\,(1-\mu)\,B^{\mu-1}\sqrt{X}}$$

a tedy
$$\frac{A}{B^{\mu}\sqrt{X}} = \frac{A_1}{B^{\mu-1}\sqrt{X}} + \left[\frac{AN\sqrt{X}}{(1-\mu)\,B^{\mu-1}}\right]', \tag{5}$$

při čemž
$$A_1 = AM - \frac{1}{1-\mu}\left((AN)'X + \tfrac{1}{2}ANX'\right).$$

Integrací rovnice (5) dostaneme

$$\int \frac{A}{B^{\mu}\sqrt{X}}\,dx = \frac{AN\sqrt{X}}{(1-\mu)\,B^{\mu-1}} + \int \frac{A_1}{B^{\mu-1}\sqrt{X}}\,dx,$$

což jest hledaná rovnice rekurentní, jejíž postupným užitím lze daný integrál při μ celistvém kladném redukovati na integrál tvaru

$$\int \frac{A_{\mu-1}}{B\sqrt{X}}\,dx.$$

b) B nechť jest dělitelem X. Pak jest $X = BX_1$, kde X_1 nemá s B společné míry (neboť by pak mělo X kořenové činitele mnohonásobné), nemá tedy ani B s $B'X_1$ společné míry a můžeme opět dva mnohočleny M, N vyhledati, aby

$$MB + NB'X_1 = 1,$$

pročež (a vzhledem k $X = BX_1$)

$$\frac{A}{B^\mu\sqrt{X}} = \frac{A(MB + NB'X_1)}{B^\mu\sqrt{X}} = \frac{AM}{B^{\mu-1}\sqrt{X}} + \frac{ANB'\sqrt{X_1}}{B^{\mu+\frac{1}{2}}}.$$

Avšak (při každém μ různém od $\frac{1}{2}$) jest

$$\frac{AN\sqrt{X_1}\,B'}{B^{\mu+\frac{1}{2}}} = \left(\frac{AN\sqrt{X_1}}{(\frac{1}{2}-\mu)\,B^{\mu-\frac{1}{2}}}\right)' - \frac{(AN)'\sqrt{X_1}}{(\frac{1}{2}-\mu)\,B^{\mu-\frac{1}{2}}} - \frac{ANX'_1}{(1-2\mu)\,B^{\mu-\frac{1}{2}}\sqrt{X_1}} =$$

$$= \left[\frac{AN\sqrt{X_1}}{(\frac{1}{2}-\mu)\,B^{\mu-\frac{1}{2}}}\right]' - \frac{(AN)'X_1}{(\frac{1}{2}-\mu)\,B^{\mu-1}\sqrt{X}} - \frac{ANX'_1}{(1-2\mu)\,B^{\mu-1}\sqrt{X}};$$

tedy

$$\frac{A}{B^\mu\sqrt{X}} = \left(\frac{AN\sqrt{X_1}}{(\frac{1}{2}-\mu)\,B^{\mu-\frac{1}{2}}}\right)' + \frac{A_1}{B^{\mu-1}\sqrt{X}},$$

kde

$$A_1 = AM - \frac{1}{\frac{1}{2}-\mu}\,((AN)'X_1 + \tfrac{1}{2}ANX'_1).$$

Integrací pak máme

$$\int \frac{A}{B^\mu\sqrt{X}}\,dx = \frac{AN\sqrt{X_1}}{(\frac{1}{2}-\mu)\,B^{\mu-\frac{1}{2}}} + \int \frac{A_1}{B^{\mu-1}\sqrt{X}}\,dx.$$

kterážto formule redukční převádí daný integrál při μ celistvém na integrál tvaru

$$\int \frac{A_\mu}{\sqrt{X}}\,dx.$$

POZNÁMKA. Tato metoda redukční zůstává v platnosti, i když $X = 1$, t. j. lze jí použíti při redukci integrálu z funkce racionální tvaru

$$\int \frac{A}{B^\mu}\,dx$$

na část racionální a transcendentní; viz odst. 17; shoduje se pak s metodou *Hermitovou* (l. c.) pro vyhledávání racionální části integrálu z funkce racionální.

36. Jestliže stupeň n mnohočlenu $X = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ jest větší než 4, slují integrály (2) *hypereliptické*; jestliže pak n jest rovno 3 anebo 4, nazývají se *eliptické*.

Shledali jsme pak v předcházejícím, že rozkladem racionální funkce na částečné zlomky a racionálními operacemi *všecky integrály hypereliptické nebo eliptické lze převésti na tyto integrály základní:*

a) *integrály prvého a druhého druhu* (viz poznámku)

$$I_r = \int \frac{x^r}{\sqrt{X}}\, dx, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots n-2,$$

b) *integrály třetího druhu*

$$J_1 = \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}.$$

Při tom jest předpokládati, že $x-a$ není dělitelem X.

Lze pak dokázati dále, že *integrály* (2), *při nichž stupeň* $n = 2\mu - 1$, *lze převésti racionální substitucí na integrály, při nichž* $n = 2\mu$.

Neboť, je-li $n = 2\mu - 1$ a tedy

$$X(x) = a_0 x^{2\mu-1} + a_1 x^{2\mu-2} + \cdots + a_{2\mu-1},$$

postačí klásti $x = 1/x' + a$, kde a není kořenem rovnice $X(a) = 0$.

Pak bude

$$\sqrt{X(x)} = \frac{\sqrt{\overline{X}(x')}}{x'^{\mu}},$$

při čemž

$$\overline{X}(x') = X(a)\,.\, x'^{2\mu} + \frac{1}{1!} X'(a) x'^{2\mu-1} + \frac{1}{2!} X''(a) x'^{2\mu-2} + \cdots + a_0 x',$$

takže $\overline{X}(x')$ je vskutku stupně 2μ a tím věta dokázána.

Lze pak také naopak dokázati, *že integrály* (2), *při nichž* $n = 2\mu$, *lze převésti racionální substitucí na integrály* (2), *při nichž* $n = 2\mu - 1$; *ovšem jenom za předpokladu, že mnohočlen* $X(x)$ *má aspoň jeden reálný kořenový činitel.*

Je-li totiž ten reálný kořenový činitel $x - a$, stačí použíti substituce $x - a = 1/x'$, aby tvrzení bylo jasné. (Viz níže podrobné provedení této substituce při integrálech eliptických.)

S těmito větami (z nichž druhou jsme toliko za omezujícího předpokladu dokázali) souvisí i další okolnost, že počet základních integrálů prvého a druhého druhu lze ještě při $n = 2\mu$ o jednu snížiti tak, že jich bude i při $n = 2\mu$ i při $n = 2\mu - 1$ stejný počet, t. j. $2\mu - 2$.

Rovněž vyplývá z dokázaných tvrzení, že postačí vzíti v úvahu integrály hypereliptické nebo eliptické, u nichž $n = 2\mu$ (anebo, kdybychom druhé tvrzení měli dokázáno bez omezujícího předpokladu, u nichž $n = 2\mu - 1$).

V následujícím podrobněji zabývati se budeme toliko integrály eliptickými.

POZNÁMKA. Odlišení a zevrubnější definici integrálu 1. a 2. druhu lze provésti následovně. Dosadíme do integrálu I_r za x novou proměnnou x' na základě vztahu $x = 1/x'$. Pak funkci za znaménkem integračním se nacházející lze rozvinouti v řadu

$$x'^s(c_0 + c_1x' + c_2x'^2 + \ldots\ldots) \tag{+}$$

kde $c_0, c_1, c_2, \ldots.$ jsou čísla buď reálná aneb ryze imag. a kde s jest číslo celé ($\gtreqless 0$), je-li $n = 2\mu$; jestliže $n = 2\mu - 1$, jest s zlomek o jmenovateli 2. *Vzniká-li integrací řady vzniklé* (odst. 6) *funkce v okolí bodu $x' = 0$ konečná* (t. j., je-li $s > -1$), *jest I_r integrálem prvého druhu.* Jsou tedy I_r integrály prvého druhu, jestliže $r = 0, 1, \ldots, \mu - 2$. Vzniká-li integrací řady (+) funkce v okolí bodu $x' = 0$ nekonečná a *neobsahující člen logaritmický* (to jest, je-li $s < -1$), jest I_r integrálem druhého druhu. Je-li n liché a tedy s lomené, nemůže integrací řady (+) vzniknouti člen logaritmický a jsou tedy v tomto případě ($n = 2\mu - 1$) integrály I_r druhého druhu pro $r = \mu - 1, \mu, \ldots, 2\mu - 3$. Je-li n sudé, nepokládáme v době novější (v důsledku učiněného stanovení) $I_{\mu-1}$ za integrál druhého druhu; nýbrž teprve výrazy

$$I_r - d_r I_{\mu-1}, \qquad r = \mu, \mu + 1, \ldots, 2\mu - 2,$$

kde konstanta d_r jest tak volena, aby $I_r - d_r I_{\mu-1}$ vypočteno byvši naznačeným způsobem (integrací řad tvaru (+)) neobsahovalo člen s $\log x'$.

5. INTEGRÁLY ELIPTICKÉ.

37. Pro ten případ, že X předešlého odstavce jest stupně třetího nebo čtvrtého, slují integrály

$$\int R(x, \sqrt{X})\, dx$$

integrály eliptické, jak již svrchu bylo vytčeno,

Jestliže polynom X jest čtvrtého stupně, dá se příslušný integrál reálnou substitucí převésti na případ, ve kterém jest X třetího stupně. Obrátíme se k vyšetřování této substituce. Budiž dán integrál

$$\int R(x) \frac{dx}{\sqrt{X}}, \tag{1}$$

kde $R(x)$ jest racionální funkce x a $X = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$.

a) Předpokládejme nejprve, že rovnice $X=0$ má reálný kořen $x=a$, t. j. $X=(x-a)(b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3)$. Tu postačí učiniti v daném integrálu substituci

$$x-a=\frac{1}{y},\ \text{odkud}\ x=\frac{1}{y}+a,\ \frac{dx}{dy}=-\frac{1}{y^2}.$$

Pak
$$X=\frac{1}{y}\left(c_0\frac{1}{y^3}+c_1\frac{1}{y^2}+c_2\frac{1}{y}+c_3\right)$$

a
$$\int R(x)\frac{dx}{\sqrt{X}}=\int R\left(a+\frac{1}{y}\right)\frac{-dy}{\sqrt{c_3y^3+c_2y^2+c_1y+c_0}};$$

t. j. dostáváme integrál stejného tvaru, v němž však pod odmocninou jest polynom v y třetího stupně. (O c_3 plyne z učiněného předpokladu (odst. 34), že jest od nuly různé.) Pro ten případ, že rovnice $X=0$ má reálný kořen, jest tedy tvrzení svrchu učiněné dokázáno.

b) Nečiníme-li předpokladu o reálnosti kořenů rovnice $X=0$, lze dospěti k témuž výsledku pomocí dvou po sobě provedených substitucí. Ať má rovnice $X=0$ kořeny jakékoliv, vždy lze levou stranu rozložiti ve dva reálné činitele druhého stupně, t. j. vždy lze psáti

$$X=(Ax^2+Bx+C)(A_1x^2+B_1x+C_1);\quad A\neq 0,\ A_1\neq 0. \tag{2}$$

První substituce má za účel proměniti daný integrál na integrál, kde pod odmocninou zmíněné reálné činitele druhého stupně neobsahují členy s první mocností proměnné. Kladme za tím účelem

$$x=\frac{py+q}{y+1}. \tag{3}$$

Pak dostáváme

$$X=\frac{(A'y^2+B'y+C')(A'_1y^2+B'_1y+C'_1)}{(y+1)^4},$$

kde

$$\begin{aligned} A'&=Ap^2+Bp+C, & A'_1&=A_1p^2+B_1p+C_1\\ B'&=2Apq+B(p+q)+2C, & &\ldots\\ C'&=Aq^2+Bq+C, & &\ldots \end{aligned}$$

Má-li býti B', B'_1 rovno nule, musí p, q hověti dvěma rovnicím

$$\begin{aligned} 2Apq+B(p+q)+2C&=0,\\ 2A_1pq+B_1(p+q)+2C_1&=0, \end{aligned}$$

ze kterých, *není-li* $AB_1-A_1B=0$, vyplývá

$$pq=\frac{BC_1-B_1C}{AB_1-A_1B},\qquad p+q=-2\frac{AC_1-A_1C}{AB_1-A_1B};$$

t. j. p, q jsou kořeny rovnice

$$(AB_1-A_1B)\xi^2+2(AC_1-A_1C)\xi+(BC_1-B_1C)=0. \tag{4}$$

Diskriminant této kvadratické rovnice jest

$$\Delta = (AC_1 - A_1C)^2 - (BC_1 - B_1C)(AB_1 - A_1B).$$

Označíme-li kořeny rovnice $Ax^2 + Bx + C = 0$ a rovnice $A_1x^2 + B_1x + C_1 = 0$ λ, μ a λ_1, μ_1, jest

$$B = -A(\lambda + \mu), \quad C = A\lambda\mu, \quad B_1 = -A_1(\lambda_1 + \mu_1), \quad C_1 = A_1\lambda_1\mu_1;$$

dosadíme-li pak tyto výrazy do Δ, máme snadným počtem

$$\Delta = A^2A_1^2(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \mu_1)(\mu - \lambda_1)(\mu - \mu_1).^{*)}$$

Tento výraz jest vždy kladný, jsou-li $\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1$ čísla buď z části anebo vesměs komplexní. Je-li totiž λ komplexní, jest μ k němu komplexně sdružené; podobně jest tomu i u čísel λ_1, μ_1. Součin pak čísel komplexně sdružených jest číslo kladné a tedy Δ jest číslo kladné.

Avšak Δ bude číslem kladným, jsou-li všecky čtyři kořeny $\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1$ reálné, když rozklad (2) provedeme na př. tak, aby

$$\lambda > \lambda_1, \quad \lambda > \mu_1, \quad \mu > \lambda_1, \quad \mu > \mu_1.$$

Lze tedy vždy pokládati Δ za kladné, pročež rovnice (4) stanoví čísla p, q jakožto čísla reálná a různá a vztah (3) definuje tudíž vskutku substituci žádané vlastnosti. I máme

$$\int R(x)\frac{dx}{\sqrt{X}} = (p-q)\int R\left(\frac{py+q}{y+1}\right)\frac{dy}{\sqrt{(A'y^2+C')(A'_1y^2+C'_1)}}.$$

Jestliže však jest $AB_1 - A_1B = 0$, dojdeme k témuž cíli patrně substitucí

$$x = -\frac{B}{2A} + y\left(\equiv -\frac{B_1}{2A_1} + y\right).$$

Lze tedy v každém případě převésti eliptický integrál tvaru (1), kde pod odmocninou jest mnohočlen čtvrtého stupně, ***lineární*** substitucí na tvar

$$\int R_1(y)\frac{dy}{\sqrt{(A'y^2+C')(A'_1y^2+C'_1)}}, \qquad R_1(y) \text{ racionální funkce } y.$$

Avšak $R_1(y)$ možno psáti ve tvaru**)

$$R_1(y) = \frac{M(y^2) + yM_1(y^2)}{N(y^2)},$$

---

*) Jak z tohoto vyjádření patrno, jest Δ resultant polynomů kvadratických $Ax^2 + Bx + C$, $A_1x^2 + \cdots$ Viz také odst. 25, ve kterém též tento resultant se vyskytnul a značen tam byl R, a odst. 18, př. 3.

**) Z identičnosti

$$R_1(y) = \frac{R_1(y) + R_1(-y)}{2} + \frac{R_1(y) - R_1(-y)}{2}.$$

První sčítanec tohoto součtu jest funkce sudá a má tudíž tvar $\frac{M(y^2)}{N(y^2)}$, druhý pak jest funkce lichá, již lze psáti $\frac{yM_1(y^2)}{N(y^2)}$. Viz počátek odst. 22.

kde $M(y^2)$, $M_1(y^2)$, $N(y^2)$ jsou mnohočleny v y^2; proto integrál posléze uvedený se rozpadá v součet dvou

$$\int \frac{M(y^2)}{N(y^2)} \frac{dy}{\sqrt{(A'y^2+C')(A'_1y^2+C'_1)}} + \int \frac{yM_1(y^2)}{N(y^2)} \frac{dy}{\sqrt{(A'y^2+C')(A'_1y^2+C'_1)}},$$

kterýžto substitucí $y^2 = z$ mění se konečně v součet

$$\tfrac{1}{2}\int \frac{M(z)}{N(z)} \frac{dz}{\sqrt{z(A'z+C')(A'_1z+C'_1)}} + \tfrac{1}{2}\int \frac{M_1(z)}{N(z)} \frac{dz}{\sqrt{(A'z+C')(A'_1z+C'_1)}}. \qquad (5)$$

První sčítanec jest eliptický integrál, kde pod odmocninou jest polynom *třetího stupně s reálnými nulovými body*, druhý pak jest integrál, který se známým způsobem převádí na algebraické funkce a elementární transcendenty.

Poněvadž však integrály tvaru

$$\int R(x) \frac{dx}{\sqrt{b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3}}$$

substitucí $x = a + 1/y$, kde a není kořenem rovnice $b_0x^3+b_1x^2+$ $+b_2x+b_3=0$ a jinak jest libovolné, převádějí se na tvar (1), kde jest pod odmocninou polynom čtvrtého stupně, vidíme, že jest platna věta:

Všecky integrály eliptické dají se reálnými substitucemi převésti na integrály eliptické, kde pod odmocninou jest mnohočlen třetího stupně s reálnými nulovými body.

38. Integrály pseudoeliptické. Může se státi, že funkce $M(z)$ v (5) se vyskytující vymizí a že tedy integrál daný se redukuje toliko na výraz

$$\tfrac{1}{2}\int \frac{M_1(z)}{N(z)} \frac{dz}{\sqrt{(A'z+C')(A'_1z+C'_1)}},$$

kterýž se dá vyjádřiti pomocí elementárních transcendent (totiž pomocí funkcí logaritmických a funkcí arcsin). Tu říkáme, že daný integrál byl *pseudoeliptický*, jakož vůbec pod tímto pojmenováním shrnujeme všecky integrály tvaru

$$\int R(x, \sqrt{X})\, dx,$$

kde X jest polynom třetího nebo čtvrtého stupně, dají-li se vyjádřiti pomocí elementárních transcendent a funkcí racionálních.

Případ právě v úvahu vzatý (že při provádění transformace předch. odst. $M(z)$ jest identicky rovno nule) poskytuje nejčastěji se vyskytující takové integrály.

PŘÍKLAD 1. Budiž dán integrál

$$J = \int \frac{(1-x^2)\, dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}.$$

Abychom jej uvedli na tvar (5), rozložíme $1+x^4$ na reálné činitele; jest

$$1+x^4=(1+x^2)^2-2x^2=(x^2-\sqrt{2}\,x+1)(x^2+\sqrt{2}\,x+1).$$

Rovnice (4) jest

$$2\sqrt{2}\,\xi^2-2\sqrt{2}=0;$$

její kořeny jsou -1, $+1$, takže substituci (3) lze psáti

$$x=\frac{y-1}{y+1}$$

a jest

$$\sqrt{1+x^4}=\frac{\sqrt{[(2-\sqrt{2})y^2+(2+\sqrt{2})][(2+\sqrt{2})y^2+(2-\sqrt{2})]}}{(y+1)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2(y^2+3+2\sqrt{2})(y^2+3-2\sqrt{2})}}{(y+1)^2}$$

a

$$J=2\sqrt{2}\int\frac{y}{y^2+1}\,\frac{dy}{\sqrt{(y^2+3+2\sqrt{2})(y^2+3-2\sqrt{2})}}=$$

$$=\sqrt{2}\int\frac{dz}{(z+1)\sqrt{(z+3+2\sqrt{2})(z+3-2\sqrt{2})}},$$

odkudž jest patrno, že daný integrál jest pseudoeliptický. Snadným počtem dostaneme

$$J=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}+c.$$

PŘÍKLAD 2. Budiž dán integrál

$$\int\varphi(x^2)\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\qquad 1>k>0,$$

kde $\varphi(x^2)$ jest racionální funkce x^2. Mnohočlen $(1-x^2)(1-k^2x^2)$ lze rozložiti dvojím způsobem v součin dvou kvadratických činitelů tak, aby Δ bylo kladné (jako vůbec každý polynom 4. stupně o vesměs reálných kořenových činitelech).

Ty rozklady jsou

a) $(1-x^2)(1-k^2x^2)$; $\quad \Delta=k^4\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)^2$

b) $(1-(k+1)x+kx^2)(1+(k+1)x+kx^2)$; $\quad \Delta=k^4\cdot\dfrac{4}{k}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^2.$

Pro rozklad *b)* rovnice (4)

$$2(k^2+k)\xi^2-2(k+1)=0$$

má kořeny $\pm 1/\sqrt{k}$ a je tedy substituce (3)

$$x=\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{y-1}{y+1}.$$

Tou změní se daný integrál v

$$\int\varphi\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{(y-1)^2}{(y+1)^2}\right)\frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

kde Y jest tvaru $c_0 y^4 + c_1 y^2 + c_2$. Jestliže pak $\varphi\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{(y-1)^2}{(y+1)^2}\right)$ jest lichou funkcí y, t. j. jestliže

$$\varphi\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{(y-1)^2}{(y+1)^2}\right) = -\varphi\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{(y+1)^2}{(y-1)^2}\right)$$

anebo *jestliže*

$$\varphi(x^2) = -\varphi\left(\frac{1}{k^2 x^2}\right),$$

jest daný integrál pseudoeliptický.

39. Můžeme ještě další zjednodušení v získaných integrálech prováděti. V integrálu

$$\int R(z) \frac{dz}{\sqrt{z(A'z + C')(A'_1 z + C'_1)}} \tag{5'}$$

lze nejprve docíliti, že koeficient třetí mocniny proměnné pod odmocninou jest kladný. (Není-li již kladný, stačí zavésti novou proměnnou substitucí $z = -z'$.) Dále substitucí tvaru $z = z_1 + \lambda$, kde λ jest vhodné číslo, lze docíliti, že součet kořenů mnohočlenu třetího stupně pod odmocninou jest rovný nule. Lze tudíž převésti všecky eliptické integrály na tento tvar

$$\int R(x) \frac{dx}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}, \qquad e_1 + e_2 + e_3 = 0. \tag{6}$$

kterému se říká *normální tvar eliptických integrálů*, zvaný *Weierstrassův*, jímž hlavně byl do analyse zaveden.

Provedeme-li pak redukce v odstavcích 34—36 naznačené, vidíme, že všecky eliptické integrály lze vyjádřiti pomocí těchto základních integrálů:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}, \qquad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}},$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}, \qquad a \neq e_1,\ e_2,\ e_3,$$

což jsou *normální (kanonické) tvary Weierstrassovy pro základní eliptické integrály*. Prvý z nich sluje normálním integrálem elipt. *prvého druhu* ve tvaru Weierstrassově, druhý normálním integrálem elipt. *druhého druhu* ve tvaru Weierstrassově a třetí normálním integrálem elipt. *třetího druhu* ve tvaru Weierstrassově. V posledním může číslo a nabývati i hodnot komplexních Často se místo

$$\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)} \tag{7}$$

píše

$$\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3},$$

kde

$$g_2 = -4(e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1), \quad g_3 = 4 e_1 e_2 e_3;$$

g_2. g_3 slují *invarianty* a v našem případě, jelikož e_1, e_2, e_3 jsou reálné, jest

$$g_2^3 - 27\, g_3^2 > 0;$$

$g_2^3 - 27\, g_3^2$ je totiž diskriminant výrazu $4x^3 - g_2 x - g_3$ a sluje též *diskriminantem eliptických integrálů* (6).

Jedna z příčin, pro kterou g_2, g_3 byly nazvány invarianty, tkví v tom, že zavedeme-li do daného integrálu eliptického v normálním tvaru Weierstrassově místo proměnné x novou proměnnou y *lineární substitucí*

$$x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}, \qquad \varrho = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

o determinantu ϱ tak, aby nově vznikající integrál byl zase normálního tvaru Weierstrassova o invariantech g'_2, g'_3, jsou mezi g'_2, g'_3 a g_2, g_3 relace

$$g'_2 = g_2 \cdot \sigma^{-2}, \quad g'_3 = g_3 \sigma^{-3},\text{*)}$$

kde σ jest konstanta závislá na užité substituci.

Označení čísel e_1, e_2, e_3 budeme v následujícím (pokud pro tato čísla budeme předpokládati hodnoty reálné) předpokládati takové, aby $e_1 > e_2 > e_3$. Jest tedy se zřetelem k podmínce $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, číslo e_1 vždy kladné, e_3 záporné. Hodnotami e_1, e_2, e_3 jest celý interval $(-\infty, \infty)$ rozdělen na čtyři intervaly: $(+\infty, e_1)$, (e_1, e_2), (e_2, e_3), $(e_3, -\infty)$. Je-li proměnná x v prvém a třetím z těchto intervalů, jest odmocnina (7) číslo reálné; je-li v druhém nebo čtvrtém, jest (7) číslo ryze imaginární. Avšak lineární substituce

$$x - e_2 = -\frac{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)}{y - e_2} \tag{8}$$

mění integrál (6) v integrál stejného tvaru obsahující druhou odmocninu z téhož mnohočlenu třetího stupně a dá se tedy integrál (6) transformovaný substitucí lineární právě vypsanou vyjádřiti týmiž normálními integrály tvaru Weierstrassova jako původní integrál (6). Substituce (8) pak mění intervaly proměnné x (∞, e_1), (e_1, e_2), (e_2, e_3), $(e_3, -\infty)$ po řadě v tyto intervaly pro proměnnou y: (e_2, e_3), $(e_3, -\infty)$, (∞, e_1), (e_1, e_2). Zaměňuje se tudíž

*) Lineárním substitucím bude v následujícím věnován zvláštní odstavec (odst. 41 *a*, *b*). Z vývodů tam učiněných vyplývají veškerá tvrzení tu a při normálních tvarech Riemannově a Legendrově o lineárních substitucích učiněná téměř bezprostředně a jsou tam z části i zevrubně dokázána. Ostatně neposkytne čtenáři žádných podstatných potíží i přímé provedení určitých substitucí v tomto a násl. odst. užitých — jako na př. substituce (8) — ze kteréhožto provedení veškeré vlastnosti v textu uváděné snadno vyplývají. V odst. 41 *a*, *b* čtenář sezná, jak se k těmto substitucím právě dospívá, a dále, že není jiných stejného druhu a týchž vlastností.

substitucí (8) interval (∞, e_1) s (e_2, e_3) a $(-\infty, e_3)$ s (e_1, e_2), takže postačí k znalosti průběhu integrálů v normálním tvaru Weierstrassově pro celý interval $(-\infty, \infty)$, abychom ten průběh znali v intervalech (∞, e_1), $(-\infty, e_3)$.

Vedle lineární substituce (8) transformují ještě tyto substituce

$$x - e_1 = \frac{(e_3 - e_1)(e_2 - e_1)}{y - e_1} \qquad (8_1)$$

$$x - e_3 = \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{y - e_3} \qquad (8_2)$$

integrál (6) na integrál eliptický stejného tvaru patřící k téže

$$\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)},$$

takže specielně jest na př. pro substituci (8_1) i (8_2)

$$\frac{dx}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} = -\frac{dy}{\sqrt{4(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}}. \quad *)$$

Body $+\infty$, e_1, e_2, e_3, $-\infty$ se transformují substitucí (8_1) po řadě v body e_1, $\pm\infty$, e_3, e_2, e_1; substitucí pak (8_2) v body e_3, e_2, e_1, $\pm\infty$, e_3, odkudž jest také patrno, jak se zaměňují intervaly v proměnných. Tak na př. interval proměnné x $(+\infty, e_1)$ se mění substitucí (8_1) v interval $(e_1, +\infty)$ proměnné y (t. j. probíhá-li proměnná x interval $(+\infty, e_1)$ ubývajíc, probíhá proměnná y interval $(e_1, +\infty)$ — stejný to interval — rostouc).

40. Další důležitý **normální tvar eliptických** integrálů jest **Legendrův.** Z vývodů odst. 37 vyplývá, že každý integrál eliptický možno převésti *lineární substitucí* na integrály, jež lze vyjádřiti jednak funkcemi algebraickými a pomocí elementárních transcendent, jednak integrálem tvaru

$$\int R(y^2)\frac{dy}{\sqrt{(A'y^2+C')(A'_1y^2+C'_1)}}. \qquad (5'')$$

Jsou-li C', C'_1 čísla kladná, A', A'_1 záporná, klademe $y = x\,.\sqrt{-C'/A'}$ čímž integrál ten změní se na tvar

$$\int S(x^2)\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad k^2 = \frac{A_1C'}{A'C_1},$$

při čemž o k můžeme předpokládati, že jest číslo kladné menší než 1 (kdyby bylo větší než 1, provedli bychom substituci $y = x\,.\sqrt{-C'_1/A'_1}$). Funkce $S(x^2)$ jest racionální funkce proměnné x^2.

---

*) Pro substituci (8) jest platen týž vztah pouze s tím rozdílem, že na pravé straně jest místo znaménka — znaménko +. Substituce (8) má totiž determinant kladný, substituce (8_1), (8_2) záporný.

Nejsou-li však C', C'_1, A', A'_1 uvedených znamének, lze nejprve substitucí téhož tvaru ($y = l \,.\, x$, kde l jest vhodně volená konstanta) převésti daný integrál eliptický příslušný k jedné z těchto druhých odmocnin

$$\begin{array}{lll} \sqrt{(1+x^2)(1+k'^2x^2)}, & \sqrt{(1-x^2)(1+c^2x^2)}, & \sqrt{(x^2-1)(1+c^2x^2)}, \\ \sqrt{(1+x^2)(1-c^2x^2)}, & \sqrt{(1+x^2)(c^2x^2-1)}, & \sqrt{(x^2-1)(1-k'^2x^2)}. \end{array} \qquad (\alpha)$$

V nich jest číslo c^2 kladné (větší než 0), číslo k'^2 pak jest číslo kladné, menší než 1. Jiné případy než $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ a v (α) uvedené z $\sqrt{(A'y^2+C')(A'_1y^2+C'_1)}$ naznačeným způsobem vzniknouti nemohou, leda ještě, jsou-li obě čísla A', C' kladná, číslo pak A'_1, C'_1 záporná anebo naopak; tu dostáváme z ní substitucí $y = l \,.\, x$ snadno výraz

$$\text{konst.}\sqrt{-(1+x^2)(1+k'^2x^2)} = \text{konst.}\; i\sqrt{(1+x^2)(1+k'^2x^2)},$$

což však jest v podstatě případ prvý z (α).

Avšak v případech (α) lze vždy jednoduchou substitucí, a to substitucí tvaru*)

$$x^2 = \frac{\alpha t^2 + \beta}{\gamma t^2 + \delta} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \qquad (\beta)$$

převésti příslušný eliptický integrál na eliptický integrál patřící k $\sqrt{\Delta t}$, kde Δt jest dáno výrazem

$$\sqrt{\Delta t} = \sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}.$$

Výsledky sestaveny jsou v tabulce

$$\left.\begin{array}{llll}
\text{I.}\ \dfrac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+k'^2x^2)}} = \dfrac{dt}{\sqrt{\Delta t}}, & x^2 = \dfrac{t^2}{1-t^2}, & k^2 = 1 - k'^2 \\[2ex]
\text{II.}\ \dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+c^2x^2)}} = \dfrac{-k'\,dt}{\sqrt{\Delta t}}, & x^2 = 1 - t^2, & k^2 = \dfrac{c^2}{1+c^2} \\[2ex]
\text{III.}\ \dfrac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1+c^2x^2)}} = \dfrac{k\,dt}{\sqrt{\Delta t}}, & x^2 = \dfrac{1}{1-t^2}, & k^2 = \dfrac{1}{1+c^2} \\[2ex]
\text{IV.}\ \dfrac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1-c^2x^2)}} = \dfrac{-k\,dt}{\sqrt{\Delta t}}, & x^2 = \dfrac{1-t^2}{c^2}, & k^2 = \dfrac{1}{1+c^2} \\[2ex]
\text{V.}\ \dfrac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(c^2x^2-1)}} = \dfrac{k'\,dt}{\sqrt{\Delta t}}, & x^2 = \dfrac{1}{c^2(1-t^2)}, & k^2 = \dfrac{c^2}{1+c^2} \\[2ex]
\text{VI.}\ \dfrac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k'^2x^2)}} = \dfrac{-dt}{\sqrt{\Delta t}}, & x^2 = \dfrac{1}{k'^2} + \left(1 - \dfrac{1}{k'^2}\right)t^2, & k^2 = 1 - k'^2
\end{array}\right\} \begin{array}{l} xt > 0 \\ k > 0,\ k' > 0 \\ k^2 + k'^2 = 1 \end{array}$$

*) Substituce ty lze odvoditi tímto jednoduchým počtem. Nejprve převedeme integrál (5″) substitucí $y^2 = \pm x + \lambda$ na integrál normální tvaru Weierstrassova, na který po případě ještě (aby interval proměnné byl (e_1, ∞)) provedeme substituci (8) odst. 39, jíž místo x zavedeme proměnné x'. Konečně místo x (nebo x') zavedeme proměnnou t, jíž se normální tvar Weierstrassův mění na normální tvar Legendrův (viz dole pozn. 2). Počet jest zevrubně proveden na příkladě připojeném k tomuto odstavci.

Čtenář dokáže snadným počtem správnost výsledků uvedených ve všech šesti případech (počet ten ve zvláštním případě je proveden v příkladě ke konci tohoto odst.); jest ovšem ještě třeba činiti předpoklad vymezující jednoznačně závislost mezi x a t. V tabulce napsané je předpokládáno, že x a t jsou čísla téhož znaménka.

Máme tak celkem větu: *Integrály eliptické lze lineárními substitucemi a substitucemi uvedenými v tabulce převésti* (na funkce algebraické, jakož i funkce vyjádřené elementárními transcendentami a *na integrály eliptické tvaru*

$$\int S(x^2)\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad 0 < k^2 < 1,$$

kde $S(x^2)$ jest funkce racionální proměnné x^2. Tomuto tvaru *říkáme normální tvar Legendreův.*

Lze pak činiti dále tyto dodatky na snadě ležící. Jelikož substitucemi

$$x = \pm x', \qquad x = \frac{1}{kx'} \qquad k > 0 \qquad \text{(VII)}$$

se poslední integrál mění v integrály téhož tvaru, jest patrno, že postačí známost průběhu normálních eliptických integrálů ve tvaru Legendrově v intervalech obsahujících toliko kladné hodnoty neodvisle proměnné, a to v intervalu (0, 1).*)

Provedeme-li rozklad funkce $S(x^2)$ na zlomky částečné a použijeme-li redukčních vzorců odst. 35 známým způsobem, vidíme dále, že všechny eliptické integrály (lineárními substitucemi a substitucemi tabulky svrchu uvedené, dále redukčními vzorci odst. 35) dají se převésti na tyto tři základní integrály

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}; \qquad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

$$\int\frac{dx}{(1+mx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad m \neq 0, \ -1, \ -k^2,$$

což jsou *normální* (*kanonické*) *integrály pro základní eliptické integrály* prvý *prvého druhu*, druhý *druhého druhu* a třetí *třetího druhu* ve *tvaru Legendrově.*

---

*) Druhá ze substitucí (VII) přiřaďuje každému $x' > k^{-1}$ hodnotu x v intervalu (0, 1). Jestliže pak x' jest v intervalu (1, $1/k$), lze psáti

$$\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} = i\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}$$

a transformací uvedenou v tabulce pod VI $x^2 = k^{-2} + (1-k^{-2})x'^2$ aneb $x'^2(1-k^2) = 1 - k^2x^2$ převedeme příslušný integrál opět na integrál ve tvaru Legendrově, kde x' jest v (0, 1), kde však místo k^2 jest $k'^2 = 1 - k^2$.

Poněvadž pak, jak jsme poznali, stačí tyto integrály vyšetřovati pouze pro interval (0, 1) neodvisle proměnné x, zavedl Legendre do těchto integrálů proměnnou φ rovnicí $x = \sin\varphi$, čímž integrály ty, za předpokladu, že φ jest v intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$, po řadě se změní v integrály

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi, \quad \int\frac{d\varphi}{(1+m\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

jakožto jiný tvar pro základní eliptické integrály všech tří druhů v normálním tvaru Legendrově.

Číslo k, jež můžeme pokládati za kladné (< 1) sluje **modul** (též *Legendrův modul*) eliptických integrálů (v normálním tvaru Legendrově). Číslo k', pro které $k'^2 = 1 - k^2$, nazývá se *komplementární modul.* Jestliže vyšetřujeme průběh eliptických integrálů i pro ty intervaly neodvisle proměnné, pro které příslušná druhá odmocnina stává se imaginární, postačí vyšetřovati, jak jsme poznali, v intervalu (0, 1) vedle eliptických integrálů s modulem k, také eliptické integrály s modulem komplementárním k' (viz pozn. pod čarou na str. 100).

Číslo m v normálním tvaru Legendrově při integrálu třetího druhu se vyskytující může býti i číslem komplexním.

POZNÁMKA 1. V tabulce svrchu uvedené x může probíhati kterýkoliv interval, pro který odmocnina tam se nacházející jest reálná, příslušné t jest pak vždy v intervalu $(-1, 1)$. Omezujeme-li pak se toliko na kladné hodnoty proměnné x, jest příslušné t v intervalu (0, 1).

Vedle substitucí v tabulce uvedených lze v každém případě uvésti ještě jednu substituci mající tutéž vlastnost (že totiž příslušné t jest v intervalu (0, 1)). Neboť, jak snadným počtem plyne, jest

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = -\frac{dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(1-k^2t'^2)}},$$

je-li mezi t^2, t'^2 lineární vztah

$$t^2 = \frac{1-t'^2}{1-k^2t'^2}, \qquad t\,.\,t' \geqq 0 \tag{VIII}$$

přiřaďující intervalu (0, 1) v t interval (1, 0) v t'. Složíme-li tedy kteroukoli substituci tabulky se substitucí (VIII), obdržíme ještě jednu substituci, v důsledku kteréž jest splněna rovnost diferenciálů uvedená v tabulce (nehledě ovšem k znaménku na pravé straně, jež se změní v protivné).

Tak na př. rovnost v I.

$$\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+k'^2x^2)}} = \pm \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad k^2 = 1 - k'^2$$

platí nejenom v důsledku vztahu

$$x^2 = \frac{t^2}{1-t^2},$$

nýbrž také vztahu

$$x^2 = \frac{1-t^2}{(1-k^2)\,t^2} = \frac{1-t^2}{k'^2t^2};$$

a podobně v jiných případech.

Tím udány veškeré substituce tvaru (β), za kterých splněny jsou rovnosti mezi diferenciály v tabulce (nehledě ke znaménku) a při kterých pro t vyplývá — za předpokladu, že $t > 0$ — interval $(0, 1)$.

POZNÁMKA 2. Integrály eliptické v normálním tvaru Weierstrassově lze snadno transformovati na normální tvar Legendrův (a naopak). Stačí úvahu prováděti pro integrál prvého druhu, jelikož postup příslušný jest týž při všech integrálech eliptických.

Klademe-li v integrálu prvního druhu v normálním tvaru Weierstrassově

$$x - e_3 = \frac{e_1 - e_3}{t^2}, \qquad t > 0 \text{ pro } x > e_3$$

dostaneme po snadném počtu

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} = -\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}} \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

kde

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \qquad \text{tedy } 0 < k^2 < 1$$

a kde intervalu (∞, e_1) pro x odpovídá interval $(0, 1)$ pro t.

Jiná substituce, převádějící Weierstrassův normální tvar na tvar Legendrův, jest

$$x - e_3 = (e_2 - e_3)\,t^2, \qquad t > 0 \qquad (X)$$

ta převádí interval (e_3, e_2) v x na interval $(0, 1)$ v t. Pro tuto substituci jest

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}} \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

s touž hodnotou pro k jako svrchu.

PŘÍKLAD. Jest transformovati integrál

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \qquad |x| < 1$$

na tvar Legendrův. Jelikož $1 - x^4 = (1-x^2)(1+x^2)$ bezprostředně se dá rozložiti ve dva reálné faktory druhého stupně obsahující jenom sudé mocniny x, dosadíme nejprve $x^2 = -y$, tím dostaneme

$$\mp \tfrac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{-y(1-y)(1+y)}} = \mp \int \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - 4y}}, \qquad 0 > y > -1,$$

což jest již tvar Weierstrassův ($g_2 = 4$, $g_3 = 0$);

$$e_1 = +1, \qquad e_2 = 0, \qquad e_3 = -1.$$

Položíme dále podle (X)

$$y = -1 + t^2,$$

čímž obdržíme

$$\int \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - 4y}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\frac{1}{2}t^2)}}, \qquad 0 < t < 1, \tag{a}$$

což jest hledaný tvar Legendrův. Spojením obou substitucí ($x^2 = -y$, $y = -1 + t^2$) získáváme substituci $x^2 = 1 - t^2$, která přímo daný integrál převádí ve výsledný. Pro t můžeme připustiti patrně interval $(-1, 1)$; stanovíme-li, že kladným x přísluší záporná t a naopak, můžeme vztah mezi integrálem daným a výsledným psáti ve tvaru

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\frac{1}{2}t^2)}}.$$

Výsledek tento však následuje bezprostředně z tabulky svrchu vypsané (případ II.).

Ve svrchu napsaném normálním tvaru Weierstrassově pro daný integrál jest proměnná omezena na interval $(0, -1) = (e_3, e_2)$, abychom ji převedli na interval $(e_1, \infty) = (1, \infty)$, užijeme substituce (8_2), t. j. substituce

$$y + 1 = \frac{2}{z+1}, \qquad \text{t. j.} \qquad y = \frac{-z+1}{z+1},$$

odkudž jest patrno, že substitucí

$$x^2 = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{dostáváme} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - 4z}}, \qquad x > 0$$

při čemž intervalu $(0, 1)$ proměnné x jest přiřaděn interval $(1, \infty)$ proměnné z.

41. Vedle normálních tvarů Legendrova a Weierstrassova pro eliptické integrály jest ještě **normální tvar** zvaný **Riemannův** jisté důležitosti. Tento tvar jest velmi blízký tvaru Weierstrassově i tvaru Legendrově. Od tvaru Legendrova přejdeme na př. k Riemannově tvaru, klademe-li v onom $x^2 = y$. Tím dostaneme ihned za předpokladu $x > 0$, $y > 0$

$$\int S(x^2) \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \tfrac{1}{2} \int S(y) \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-k^2y)}}$$

(a obdobně za jiných předpokladů). Můžeme tudíž vysloviti větu: Všechny integrály eliptické lze vyjádřiti pomocí (funkcí algebraických, elementárních transcendent a) těchto tří druhů eliptických integrálů základních:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}}.$$

což jsou integrál eliptický prvního druhu, druhého druhu a třetího druhu v normálním tvaru Riemannově. Při tom jest λ číslo intervalu (0, 1) a x můžeme omeziti na interval (0, 1).

41a. V normálních tvarech Legendrově a Weierstrassově jsou mnohočleny čtvrtého, resp. třetího stupně, vyskytující se v nich pod odmocninou, rozložitelny v činitele vesměs reálné. Poskytuje jistý zájem — a také užitek pro vyšetřování oněch normálních tvarů samotných — vyšetřiti, jak lze integrál eliptický příslušný k polynomu čtvrtého stupně s kořenovými činiteli vesměs reálnými transformovati **lineární substitucí tvaru**

$$(p) \qquad x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Podle tohoto vztahu *každé* hodnotě y přísluší jedna určitá hodnota x a naopak s jedinou vždy výjimkou $y = -\delta \,.\, \gamma^{-1}$, která existuje, je-li $\gamma \neq 0$; ale i pak říkáme, že hodnotě $y = -\delta \,.\, \gamma^{-1}$ přísluší $x = \pm\infty$ a hodnotě $x = \alpha \,.\, \gamma^{-1}$ přísluší $y = \pm\infty$. Jestliže $\gamma = 0$, říkáme, že přísluší $y = \pm\infty$ ku $x = \pm\infty$ (a naopak).

Konstanty α, β, γ, δ lze vždy tak stanoviti, aby třem různým hodnotám y na př. hodnotám y_1, y_2, y_3 příslušely tři různé libovolně zvolené hodnoty x na př. x_1, x_2, x_3 (takže x_1 přísluší v důsledku (p) k y_1, x_2 k y_2, x_3 k y_3). Stanovení to neskytá potíží, výsledku lze ostatně, jak bezprostředně patrno, dáti tvar

$$(p') \qquad \frac{x-x_2}{x-x_1} : \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1} = \frac{y-y_2}{y-y_1} : \frac{y_3-y_2}{y_3-y_1}$$

(neboť, že pro $y = y_2$ resp. pro $y = y_1$, $y = y_3$ následuje z této rovnice $x = x_2$ resp. $x = x_1$, $x = x_3$ a naopak jest očividné). Vypočteme-li z (p') $x - x_1$, dostaneme snadno

$$(p'') \qquad x - x_1 = \frac{y-y_1}{Py-Q} \cdot (y_3-y_2)(x_2-x_1)(x_3-x_1),$$

kde
$$P = x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2),$$
$$Q = x_1 y_1(y_2-y_3) + x_2 y_2(y_3-y_1) + x_3 y_3(y_1-y_2).$$

Cyklickou záměnou následuje z (p'')

$$x - x_2 = \frac{y-y_2}{Py-Q} \cdot (y_1-y_3)(x_3-x_2)(x_1-x_2),$$

$$x - x_3 = \frac{y-y_3}{Py-Q} \cdot (y_2-y_1)(x_1-x_3)(x_2-x_3).$$

Patří-li v důsledku (p) ještě x_4 k y_4, lze místo (p') na př. psáti

$$\frac{x-x_4}{x-x_1}:\frac{x_2-x_4}{x_2-x_1}=\frac{y-y_4}{y-y_1}:\frac{y_2-y_4}{y_2-y_1}$$

a z této rovnice a z (p'') jest

$$x-x_4=\frac{y-y_4}{Py-Q}\cdot\frac{(y_3-y_2)(y_2-y_1)(x_3-x_1)(x_2-x_4)}{y_2-y_4}.$$

Na základě výrazu pro $x-x_1, \ldots, x-x_4$ lze psáti ihned

$$\sqrt{A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}=$$
$$=\frac{|\Delta|}{(Py-Q)^2}\sqrt{A\,.\,\mu\,.\,(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)(y-y_4)},$$

kde $\Delta=(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)$,

$$\mu=\frac{(x_1-x_3)(x_2-x_4)}{(y_1-y_3)(y_2-y_4)}.$$

Dále jest

$$dx=\frac{\Delta dy}{(Py-Q)^2},\text{*)}$$

takže konečně

$$\text{(I)}\quad \frac{dx}{\sqrt{A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}}=\frac{\varepsilon\, dy}{\sqrt{A\,.\,\mu\,.(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)(y-y_4)}};$$

$\varepsilon=\pm 1$ podle toho jakého znaménka jest číslo Δ. Tak odvozeny všecky formule základní, důležité pro transformaci eliptických integrálů lineární substitucí.

POZNÁMKA 1. Výraz na levé straně rovnice (p') se vyskytující sluje **dvojpoměr** *čtyř bodů* daných na ose čísel X úsečkami x, x_3, x_2, x_1. Značívá se podle rovnice

$$\text{(}q\text{)}\qquad (x, x_3, x_2, x_1)=\frac{x-x_2}{x-x_1}\cdot\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}.$$

Rovnice (p') pak nám praví, že dvojpoměr bodů x, x_3, x_2, x_1 jest rovný dvojpoměru čtyř bodů y, y_3, y_2, y_1, prvým čtyřem bodům po řadě příslušných, a to v důsledku lineární substituce. Lze, jak z předcházejícího ihned následuje, tvrditi: Nutná a postačující podmínka, aby existovala lineární substituce, jež by po řadě převáděla body x_1, x_2, x_3, x_4 v body y_1, y_2, y_3, y_4 jest, aby $(x_1, x_2, x_3, x_4)=(y_1, y_2, y_3, y_4)$.

Zaměníme-li pořádek bodů, může se změniti i hodnota dvojpoměru. V obecném případě má dvojpoměr daných čtyř bodů 6 různých hodnot; je-li jedna z těch hodnot λ, jsou, jak známo,**)

---

*) K docílení tohoto výsledku stačí diferencovati na př. rovnici pro $x-x_3$; výraz Py_3-Q snadno lze změniti v součin.

**) Viz *Ed. Weyr*, Projektivná geom., str. 13. Lze ostatně odvoditi snadným počtem.

tyto hodnoty dány čísly

$$\lambda,\ 1-\lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ \frac{1}{1-\lambda},\ \frac{\lambda-1}{\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

Specielně jest (jak snadno čtenář na základě (q) dokáže)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_3, x_2, x_1) = (x_2, x_1, x_4, x_3) = (x_3, x_4, x_1, x_2).$$

t. j. zaměníme-li ve dvojpoměru jednu dvojici elementů a zároveň i zbývající dvojici, hodnota dvojpoměru se nezmění. Rovněž snadno následuje

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 - (x_1, x_3, x_2, x_4).$$

Z toho však plyne, jestliže buď $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$ aneb $x_1 < x_2 < < x_3 < x_4$, že

$$0 < (x_1, x_2, x_4, x_3) < 1.$$

Neboť

$$(x_1, x_2, x_4, x_3) = \frac{x_1 - x_4}{x_1 - x_3} \cdot \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4} > 0,$$

a

$$(x_1, x_4, x_2, x_3) = 1 - (x_1, x_2, x_4, x_3) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} \cdot \frac{x_4 - x_3}{x_4 - x_2} > 0.$$

Je-li tedy řada čísel x_1, x_2, x_3, x_4 řadou (ryze) monotonní (t. j. řadou čísel buď stále rostoucích aneb stále klesajících), jest dvojpoměr (x_1, x_2, x_4, x_3) číslo, jež jest uvnitř (0, 1).

POZNÁMKA 2. Číslo μ ve výsledné formuli se vyskytující nemění svoji hodnotu, permutujeme-li jakkoliv indexy 1, 2, 3, 4 v něm se vyskytující. Tak jest na př.

$$\frac{x_1 - x_3}{y_1 - y_3} \cdot \frac{x_2 - x_4}{y_2 - y_4} = \frac{x_1 - x_4}{y_1 - y_4} \cdot \frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3},$$

což jest ekvivalentní rovnici

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

platné v důsledku toho, že body x_1, x_2, x_3, x_4 jsou přiřaděny bodům y_1, y_2, y_3, y_4 lineární substitucí. Rovněž číslo $\varepsilon = \pm 1$ jest nezávislé na záměně indexů 1, 2, 3, 4. Neboť ε jest ± 1 podle toho, zda $\alpha\delta - \beta\gamma$, determinant to lineární subst. uvažované, jest kladné či záporné, $\varepsilon = \operatorname{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma)$.

POZNÁMKA 3. Jestliže jedna z hodnot x_1, x_2, x_3, x_4 jest $\pm\infty$ (viz svrchu význam tohoto rčení), na př. jestliže $x_4 = \pm\infty$, klademe ve vzorcích odvozených $A=0$ a $-Ax_4 = A'$, t. j. $A(x - x_4) = A'$; formule uvedené přeměníme na tvar, který z nich plyne, když v nich $\lim x_4 = \pm\infty$. Obdobně si počínáme, když některé z čísel y_1, y_2, y_3, y_4 jest $\pm\infty$. Ostatně příslušné úvahy při vyšetřování specielních případů zevrubně budou provedeny.

Můžeme však také rovnici (I) psáti ve tvaru

$$dx.\left[\frac{A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_3)(x_2-x_4)}\right]^{-\frac{1}{2}}=\varepsilon\, dy.\left[\frac{A(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)(y-y_4)}{(y_1-y_3)(y_2-y_4)}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

kde psali jsme $A(x_1-x_3)^{-1}(x_2-x_4)^{-1}$ místo A a kde u mocnin s exponentem $-\frac{1}{2}$ jest bráti jich hlavní hodnoty. V tomto tvaru lze ihned vyčísti formule v případech, když některé z x_i resp. y_i stává se $\pm\infty$; tvar ten má proti (I) výhodu větší symetrie.

41b. Položíme si nyní tuto otázku: *Které jsou substituce lineární, jež integrál eliptický příslušný k*

$$\sqrt{A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}$$

transformují na integrál eliptický příslušný k

$$\sqrt{B(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)(y-y_4)}.$$

Při řešení této otázky opustíme označení v předcházejícím užívané a nebude x_1 hodnotou proměnné x, jež jest přiřaděna lineární substitucí (hledanou) hodnotě y_1 a podobně i $x_2, \ldots,$ nýbrž označení bude voleno tak, že $x_1>x_2>x_3>x_4$ a $y_1>y_2>y_3>y_4$ a hodnota x_i jest přiřaděna hodnotě y_1, kde i jest celé číslo v $(0, 4)$. Je-li mezi x_j (resp. y_j) též $\pm\infty$, klademe podle libosti buď $x_1=+\infty$ aneb $x_4=-\infty$ (resp. $y_1=+\infty$ aneb $y_4=-\infty$).

Funkce lineární proměnné y dávající v (p) x jest funkcí rostoucí, je-li $\alpha\delta-\beta\gamma>0$, a klesající, je-li $\alpha\delta-\beta\gamma<0$. A to v každém intervalu, ve kterém není bod $-\delta.\gamma^{-1}$. Není-li tedy $-\delta.\gamma^{-1}$ v intervalu (y_1, y_2) a je-li $\alpha\delta-\beta\gamma>0$, pak ubývá-li y spojitě od y_1 k y_2, ubývá i příslušné x od hodnoty x_i k x_{i+1}; je-li však $-\delta\gamma^{-1}$ uvnitř (y_1, y_2) a $\alpha\delta-\beta\gamma>0$, ubývá x od x_4 do $-\infty$ a potom od $+\infty$ do x_1 — tedy hodnotě y_1 jest tu přiřaděno x_4 a x_1 hodnotě y_2. A tak obdobně v jiných případech.

Jsou celkem při $\alpha\delta-\beta\gamma>0$ tyto čtyři možnosti (případy)

$$(r)\qquad \begin{pmatrix} y_1, y_2, y_3, y_4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1, y_2, y_3, y_4 \\ x_2, x_3, x_4, x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1, y_2, y_3, y_4 \\ x_3, x_4, x_1, x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1, y_2, y_3, y_4 \\ x_4, x_1, x_2, x_3 \end{pmatrix}$$

a při $\alpha\delta-\beta\gamma<0$ další čtyři

$$(r')\qquad \begin{pmatrix} y_1, y_2, y_3, y_4 \\ x_4, x_3, x_2, x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1, y_2, y_3, y_4 \\ x_3, x_2, x_1, x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1, y_2, y_3, y_4 \\ x_2, x_1, x_4, x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1, y_2, y_3, y_4 \\ x_1, x_4, x_3, x_2 \end{pmatrix},$$

kde v jednotlivých závorkách pod sebou vypisovány hodnoty proměnné y a x, jak k sobě (v důsledku dosavádních úvah) substitucí (p) mohou býti přiřaděny.

Dvojpoměr čtyř čísel prvního řádku každé z těchto osmi závorek jest nutně rovný dvojpoměru čtyř čísel druhého řádku braných ovšem v témž pořádku, v jakém brána byla čísla příslušná prvého řádku. Je-li pak tato nutná podmínka splněna, existuje lineární substituce pro každý z těchto osmi případů.

Vysloviti můžeme výsledek, k němuž jsme dospěli, ve větě: Integrál příslušný k

$$\sqrt{A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}$$

lze lineární substitucí převésti na integrál eliptický příslušný k

$$\sqrt{B(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)(y-y_4)}$$

(za předpokladu, že $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$; $y_1 > y_2 > y_3 > y_4$) tenkrát a jenom tenkrát, jestliže

buď $\qquad (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\qquad$ [případ prvý]

anebo $\qquad (y_1, y_2, y_4, y_3) + (x_1, x_2, x_4, x_3) = 1$ $\qquad$ [případ druhý].

V každém z těchto dvou případů existují čtyři a jenom čtyři lineární substituce, jež tento převod provádějí. V prvém případě se těmi lineárními substitucemi mění body x_1, x_2, x_3, x_4 po řadě v body

1) $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ 2) $\{y_3, y_4, y_1, y_2\}$ 3) $\{y_4, y_3, y_2, y_1\}$ 4) $\{y_2, y_1, y_4, y_3\}$,

v druhém případě pak v body

1) $\{y_2, y_3, y_4, y_1\}$ 2) $\{y_4, y_1, y_2, y_3\}$ 3) $\{y_3, y_2, y_1, y_4\}$ 4) $\{y_1, y_4, y_3, y_2\}$.

Substituce lineární má v případech uvedených pod 1) a 2) determinant kladný ($\varepsilon = +1$), v případech pod 3) a 4) determinant záporný ($\varepsilon = -1$).

1. **PŘÍKLAD.** Nejprve vyšetříme transformaci eliptických integrálů patřících k $\sqrt{A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}$ na integrál eliptický, jenž patří buď k $\sqrt{A'y(1-y)(1-\lambda y)}$, aneb k odmocnině $\sqrt{A'y(1-y)(1-\lambda' y)}$, kde

$$x_1 > x_2 > x_3 > x_4 \quad \text{a} \quad \lambda = (x_1, x_2, x_4, x_3), \quad \lambda' = 1 - \lambda.$$

Jsou tedy λ, λ' čísla kladná menší než 1. Dosazením do vzorce (I) odst. 41a a použitím výsledků odst. 41b dostáváme ihned vztahy

$$\frac{\sqrt{(x_1-x_3)(x_2-x_4)}\,dx}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}} = \frac{\varepsilon\,dy}{\sqrt{y(1-y)(1-\lambda y)}}, \qquad \varepsilon = \pm 1$$

a to v důsledku čtyř lineárních substitucí, jež řadu 4 hodnot x_1, x_2, x_3, x_4 převádějí v tyto řady

1)	λ^{-1},	1,	0,	$-\infty$;	při této substituci jest $\varepsilon = +1$.
2)	0,	$-\infty$,	λ^{-1},	1;	„ „ „ „ $\varepsilon = +1$.
3)	$-\infty$,	0,	1,	λ^{-1};	„ „ „ „ $\varepsilon = -1$.
4)	1,	λ^{-1},	$-\infty$,	0;	„ „ „ „ $\varepsilon = -1$.

Dále jest platný vztah

$$\frac{\sqrt{(x_1-x_3)(x_2-x_4)}\,dx}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}}=\frac{\varepsilon\,dy}{\sqrt{-y(1-y)(1-\lambda' y)}}$$

rovněž v důsledku čtyř lineárních substitucí měnících řadu x_1, x_2, x_3, x_4 v řady

1) $1,\quad 0,\quad -\infty,\quad \lambda'^{-1}$; . . . . $\varepsilon=+1$.

2) $-\infty,\quad \lambda'^{-1},\quad 1,\quad 0$; . . . . $\varepsilon=+1$.

3) $0,\quad 1,\quad \lambda'^{-1},\quad -\infty$; . . . . $\varepsilon=-1$.

4) $\lambda'^{-1},\quad -\infty,\quad 0,\quad 1$; . . . . $\varepsilon=-1$.

Lineární substituce příslušné samotny lze zcela snadno ihned vypisovati tím, že vypíšeme, že dva dvojpoměry dvou čtveřic bodových k sobě přiřaděných jsou si rovny. Tak na př. lineární substituci převádějící řadu x_1, x_2, x_3, x_4 v řadu λ^{-1}, 1, 0, $-\infty$ lze takto nejprve naznačiti

$$\frac{y-0}{y+\infty}\cdot\frac{1+\infty}{1-0}=\frac{x-x_3}{x-x_4}\cdot\frac{x_2-x_4}{x_2-x_3},$$

aneb též takto

$$\frac{y-1}{y+\infty}\cdot\frac{0+\infty}{0-1}=\frac{x-x_2}{x-x_4}\cdot\frac{x_3-x_4}{x_3-x_2},$$

aneb konečně ve tvaru

$$\frac{y-\lambda^{-1}}{y+\infty}\cdot\frac{0+\infty}{0-\lambda^{-1}}=\frac{x-x_1}{x-x_4}\cdot\frac{x_3-x_4}{x_3-x_1},$$

odkudž následují (odstraněním symbolu ∞) tři různé tvary jedné a téže lineární substituce hledané:

$$y=\frac{x-x_3}{x-x_4}\cdot\frac{x_2-x_4}{x_2-x_3},\quad 1-y=\frac{x-x_2}{x-x_4}\cdot\frac{x_3-x_4}{x_3-x_2},\quad 1-\lambda y=\frac{x-x_1}{x-x_4}\cdot\frac{x_3-x_4}{x_3-x_1}.$$

POZNÁMKA. Jest celkem 24 lineárních substitucí, jež integrál eliptický příslušný k $\sqrt{A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}$ převádějí na integrál příslušný k $\sqrt{A' y(1-y)(1-Ly)}$, neboť jest 24 permutací mezi 4 prvky (0, 1, L^{-1}, ∞), kteréžto prvky tedy 24 různými způsoby lze přiřaditi k prvkům x_1, x_2, x_3, x_4. V těchto transformacích se pak vyskytují pouze tyto možné hodnoty pro L

$$\left.\begin{aligned} L&=\lambda,\quad \frac{1}{1-\lambda},\quad \frac{\lambda-1}{\lambda}\quad;\quad \text{tu}\quad A'=A\\ &=1-\lambda,\quad \frac{1}{\lambda},\quad \frac{\lambda}{\lambda-1}\quad;\quad \text{tu}\quad A'=-A\end{aligned}\right\}\ \lambda=(x_1,x_2,x_4,x_3)$$

L jest tedy rovno jedné ze šesti hodnot dvojpoměru čtyř čísel x_1, x_2, x_3, x_4.

Ke každé hodnotě L přináleží 4 lineární substituce: 2 s determinantem kladným, 2 se záporným, jež příslušnou transformaci provádějí; buď dvě anebo žádná z nich jest taková, aby, když x roste od x_i ku x_{i-1},*) příslušné y buď rostlo od 0 k 1 ($\varepsilon=+1$) aneb ubývalo od 1 k 0 ($\varepsilon=-1$). Důkaz všech tvrzení tu učiněných jest nasnadě. Pro případy $L=\lambda$, $1-\lambda$ jest ostatně svrchu proveden.

*) Je-li $i=1$, pak x roste nejprve od x_1 k $+\infty$ a pak od $-\infty$ k x_4.

2. PŘÍKLAD. Vyšetřiti lineární substituce, jež převádějí eliptický integrál patřící k $\sqrt{x(1-x)(1-\lambda y)}$ na eliptický integrál patřící k $\sqrt{x(1-x)(1-\lambda_1 y)}$, λ, λ_1 nechť jsou čísla intervalu $(0, 1)$. Z předcházejícího příkladu plyne nejprve, že buď $\lambda_1 = \lambda$ aneb $\lambda_1 = 1 - \lambda = \lambda'$. Klademe-li v něm $x_4 = -\infty$, obdržíme ihned, že

$$\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}} = \frac{\varepsilon\, dy}{\sqrt{y(1-y)(1-\lambda y)}}$$

pro tyto (a jenom pro tyto) lineární substituce

$$y = x, \qquad y = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1-\lambda x}{1-x}, \qquad y = \frac{1-x}{1-\lambda x}, \qquad y = \frac{1}{\lambda x}$$

a dále, že

$$\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}} = \frac{\varepsilon\, dy}{\sqrt{-y(1-y)(1-\lambda' y)}}$$

pro tyto (a jenom pro tyto) lineární substituce

$$y = \frac{x-1}{\lambda' \cdot x}, \qquad y = \frac{1}{1-\lambda \cdot x}, \qquad y = \frac{1-\lambda \cdot x}{\lambda'}, \qquad y = \frac{x}{x-1}.$$

Klademe-li $x = x'^2$ a $y = y'^2$, $\lambda = k^2$, dostaneme relace nám již známé mezi eliptickými integrály v normálním tvaru Legendrově (viz odst. 40).

POZNÁMKA. Stejně se vyšetří substituce lineární, jež mají za důsledek rovnost

$$\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\mathfrak{L}x)}} = \frac{a\, dy}{\sqrt{\varepsilon' y(1-y)(1-\lambda y)}}, \qquad 0 < \lambda < 1.$$

kde $\mathfrak{L}$ není číslo intervalu $(0, 1)$.

Nejjednodušší takové substituce jsou

$$\begin{array}{lllll}
A)\ \mathfrak{L} > 1, & x = \mathfrak{L}^{-1} y, & \lambda = \mathfrak{L}^{-1} & a = \mathfrak{L}^{-\frac{1}{2}}, & \varepsilon' = 1 \\
 & x = 1 + (\mathfrak{L}^{-1} - 1) y, & \lambda = 1 - \mathfrak{L}^{-1}, & a = -\mathfrak{L}^{-\frac{1}{2}}, & \varepsilon' = -1 \\
B)\ \mathfrak{L} < 0, & x = \mathfrak{L}^{-1}(1-y), & \lambda = (1-\mathfrak{L})^{-1}, & a = (1-\mathfrak{L})^{-\frac{1}{2}}, & \varepsilon' = -1 \\
 & x = 1 - y, & \lambda = (1-\mathfrak{L}^{-1})^{-1}, & a = -(1-\mathfrak{L})^{-\frac{1}{2}}, & \varepsilon' = 1.
\end{array}$$

3. PŘÍKLAD. Vyhledati jest lineární substituce, jež převádějí eliptické integrály příslušné k $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ na integrály eliptické příslušné k $\sqrt{y(1-y)(1-\lambda y)}$ a zároveň interval $(-1, 1)$ proměnné x v interval $(0, 1)$ proměnné y.

Užijeme výsledku příkladu 1, kladouce v něm $x_1 = k^{-1}$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -k^{-1}$. Požadované podmínce pro intervaly hoví toliko dvě lineární substituce. Při tom převádí lineární substituce

prvá body k^{-1}, 1, -1, $-k^{-1}$	po řadě v body	λ^{-1}, 1, 0, $-\infty$
druhá body k^{-1}, 1, -1, $-k^{-1}$	„ „ „ „	$-\infty$, 0, 1, λ^{-1}.

Dospějeme k těmto dvěma vztahům (užijeme-li výsledků hned na integrály eliptické prvého druhu)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{1+k} \int \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-\lambda y)}},$$

pro
$$y=\frac{1+k}{2}\,\frac{1+x}{1+kx},\qquad \lambda=\frac{4k}{(1+k)^2};$$
$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=-\frac{1}{1+k}\int\frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-\lambda y)}}$$
$$y=\frac{1+k}{2}\,\frac{1-x}{1-kx},\qquad \lambda=\frac{4k}{(1+k)^2}.$$

Klademe-li ještě v integrálech na pravé straně $y=z^2$ a shrneme-li oba vztahy v jeden, máme
$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{2\varepsilon}{1+k}\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1{}^2z^2)}}$$
$$z^2=\frac{1+k}{2}\,\frac{1+\varepsilon x}{1+\varepsilon kx},\qquad k_1=\frac{2\sqrt{k}}{1+k},$$
transformace Legendrova normálního tvaru příbuzná t. zv. Landenově transformaci.

41c. O kvadratických transformacích eliptických integrálů. V předcházejících odstavcích jsme se zabývali lineárními transformacemi eliptických integrálů, kde za integrační proměnnou jsme dosazovali lineární výraz v nové proměnné. Značný význam mají také kvadratické transformace eliptických integrálů, při čemž za proměnnou integrační se dosazuje kvadratický výraz (t. j. podíl dvou polynomů druhého stupně) v nové proměnné. Propočítáme zevrubně toliko jediný případ, abychom osvětlili metodu při tom užívanou, podle něhož pak čtenář provede transformace kvadratické i v jiných případech.

Budiž dán eliptický integrál příslušný k $\sqrt{U\,.\,V}$, kde U, V jsou kvadratické výrazy v x, při čemž U má jenom komplexní (komplexně sdružené) kořenové činitele, V pak reálné; V může býti i prvního stupně x. Máme jej transformovati na eliptický integrál v normálním tvaru Weierstrassově příslušný k
$$\sqrt{4(y-E_1)(y-E_2)(y-E_3)},$$
kde E_1, E_2, E_3 jsou čísla reálná, vhodně volená, hovící podmínkám $E_1+E_2+E_3=0$, $E_1>E_2>E_3$ a to tak, aby z integrálu druhého vyplýval prvý kvadratickou transformací.

Klademe
$$y-E_2=\frac{U}{V}\tag{α}$$
a tedy
$$y-E_1=\frac{U-(E_1-E_2)V}{V},\qquad y-E_3=\frac{U+(E_2-E_3)V}{V};\tag{β}$$
kladná čísla E_1-E_2, E_2-E_3 volíme pak tak, aby čitatelé zlomků na pravých stranách se redukovaly na úplné čtverce. T. j. E_1-E_2

$E_3 - E_2$ položíme rovny kořenům rovnice v μ dávající nutnou a postačující podmínku, aby rovnice $U - \mu V = 0$ měla dvojnásobný kořen. Je-li jako v odst. 37 $U = Ax^2 + Bx + C$, $V = A_1x^2 + B_1x + C_1$, jest

$$U - \mu V \doteq (A - \mu A_1)x^2 + (B - \mu B_1)x + (C - \mu C_1).$$

Aby pak tento výraz se redukoval na úplný čtverec, k tomu jest nutno a postačitelno, aby jeho diskriminant byl rovný nule, t. j., aby

$$(B - \mu B_1)^2 - 4(A - \mu A_1)(C - \mu C_1) \equiv$$
$$\equiv \mu^2(B_1^2 - 4A_1C_1) - 2\mu(BB_1 - 2A_1C - 2AC_1) + (B^2 - 4AC) = 0. \quad (\gamma)$$

Rovnice tato v μ má dva kořeny reálné, jeden kladný μ_1, druhý záporný μ_2 (neboť $B_1^2 - 4A_1C_1 > 0$, $B^2 - 4AC < 0$). I jest tedy

$$E_1 - E_2 = \mu_1, \qquad E_3 - E_2 = \mu_2,$$

čímž E_1, E_2, E_3 jsou úplně stanoveny:

$$E_1 = \frac{2\mu_1 - \mu_2}{3}, \qquad E_2 = -\frac{\mu_1 + \mu_2}{3}, \qquad E_3 = \frac{-\mu_1 + 2\mu_2}{3}.$$

Pro tyto hodnoty E_1, E_2, E_3 jest pak dále

$$U - (E_1 - E_2)V = (A - \mu_1 A_1)(x - \xi_1)^2,$$
$$U + (E_2 - E_3)V = (A - \mu_2 A_1)(x - \xi_2)^2$$

a tedy podle (α) a (β) nutně (diferencujeme-li každou z těch tří rovnic samu pro sebe)

$$dy = \frac{U'V - UV'}{V^2}dx = \text{konst.}\frac{(x - \xi_1)(x - \xi_2)}{V^2}dx$$
$$= (AB_1 - A_1B)\frac{(x - \xi_1)(x - \xi_2)}{V^2}dx.$$

Dále jest

$$\sqrt{4(y - E_1)(y - E_2)(y - E_3)} = \frac{|(x - \xi_1)(x - \xi_2)|\sqrt{(A - \mu_1 A_1)(A - \mu_2 A_1)}}{V^2}\sqrt{4UV}$$

(po dosazení za $\mu_1 + \mu_2$, $\mu_1\mu_2$)

$$= \frac{|(x - \xi_1)(x - \xi_2).(AB_1 - BA_1)|}{V^2.\sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}2\sqrt{UV}$$

a tedy

$$\frac{dy}{\sqrt{4(y - E_1)(y - E_2)(y - E_3)}} = \varepsilon\frac{\sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}{2\sqrt{UV}}dx, \qquad \varepsilon = \operatorname{sign}(U'V - UV')$$

a transformace úplně provedena. Jakožto jednoduchý důsledek odvozených rovnic uvádím ještě

$$\frac{x - \xi_1}{x - \xi_2} = \varepsilon'\sqrt{\frac{A - \mu_2 A_1}{A - \mu_1 A_1}.\frac{y - E_1}{y - E_2}}; \qquad \varepsilon' = \varepsilon.\operatorname{sign}(AB_1 - A_1B).$$

V úvaze podané byl zároveň jakožto její specielní případ řešen tento úkol: Transformovati jest integrál eliptický v normálním tvaru Weierstrassově, jehož e_1, e_3 však jsou čísla komplexně sdružená, na integrál eliptický příslušný k $\sqrt{4(y-E_1)(y-E_2)(y-E_3)}$, kde E_1, E_2, E_3 však jsou čísla reálná. Stačí v předcházejícím klásti

$$U=(x-e_1)(x-e_3), \qquad V=x-e_2,$$

$$\mu^2-6e_2\mu+(e_1-e_3)^2=0, \quad \mu_1, \mu_2=3e_2\pm 2\sqrt{(e_1-e_2)(e_3-e_2)},$$

$$E_1=e_2+2\sqrt{(e_1-e_2)(e_3-e_2)}, \quad E_2=-2e_2, \quad E_3=e_2-2\sqrt{(e_1-e_2)(e_3-e_2)}.$$

Relaci (α) mezi y a x lze dáti tvar

$$y=-2e_2+\frac{(x-e_1)(x-e_3)}{x-e_2}=x+\frac{(e_1-e_2)(e_3-e_2)}{x-e_2},$$

$$\xi_1=e_2+\sqrt{(e_1-e_2)(e_3-e_2)}, \quad \xi_2=e_2-\sqrt{(e_1-e_2)(e_3-e_2)}, \quad \frac{x-\xi_1}{x-\xi_2}=\varepsilon\sqrt{\frac{y-E_1}{y-E_3}},$$

$$\frac{dy}{\sqrt{4(y-E_1)(y-E_2)(y-E_3)}}=\varepsilon\frac{dx}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}},$$

$$\varepsilon=\operatorname{sign}(x-\xi_1)(x-\xi_2).$$

Z rovnic (β), jež lze psáti v tomto případě

$$y-E_1=\frac{(x-\xi_1)^2}{x-e_2}, \qquad y-E_3=\frac{(x-\xi_2)^2}{x-e_2},$$

následuje, že pro $x>e_2$ jest $y>E_1$; pro $x<e_2$ jest pak $y<E_3$.

41d. Jiný zvláštní případ kvadratické transformace vede nás k tak zvané **Landenově transformaci.** Tuto připneme k Riemannově normálnímu tvaru a budeme transformovati eliptický integrál příslušný k $\sqrt{y(1-y)(1-\Lambda y)}$ na eliptický integrál příslušný k $\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}$. Polynom pod poslední odmocninou rozložíme ve dva faktory (z nichž jeden bude prvního stupně); volíme pak tento rozklad $U=x(1-x)$, $V=1-\lambda x$ a klademe

$$y=\frac{cx(1-x)}{1-\lambda x}.$$

Konstantu c a číslo Λ volíme tak, aby čitatelé výrazů $1-y$, $1-\Lambda y$ byly úplné čtverce lineárního výrazu v x. Čitatelé ti mají tvar $(1-\lambda x)-\mu x(1-x)$, kde jednou místo μ jest c, po druhé $c\Lambda$. Aby výraz $(1-\lambda x)-\mu x(1-x)=\mu x^2-(\mu+\lambda)x+1$ byl úplný kvadrát mnohočlenu v x, k tomu jest nutno a postačí, aby

$$(\mu+\lambda)^2-4\mu=0, \quad \mu^2-2(2-\lambda)\mu+\lambda^2=0, \quad \mu_1, \mu_2=(1\pm\sqrt{1-\lambda})^2.$$

Volíme tedy $c=\mu_1$, $c\Lambda=\mu_2$; t. j. klademe

$$c=(1+\sqrt{\lambda'})^2, \qquad \Lambda=\frac{\mu_2}{\mu_1}=\left(\frac{1-\sqrt{\lambda'}}{1+\sqrt{\lambda'}}\right)^2, \qquad \text{kde } \lambda'=1-\lambda.$$

Dále jest

$$\mu_1x^2-(\mu_1+\lambda)x+1=\mu_1(x-\xi_1)^2, \quad \text{tedy} \quad \xi_1=\frac{1-\sqrt{\lambda'}}{\lambda} \quad \text{a stejně} \quad \xi_2=\frac{1+\sqrt{\lambda'}}{\lambda}$$

a
$$dy = c\,\frac{\lambda x^2 - 2x + 1}{(1-\lambda x)^2}\,dx = c\lambda\,\frac{(x-\xi_1)(x-\xi_2)}{(1-\lambda x)^2}\,dx$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-\Lambda y)}} = \frac{\varepsilon\,.\,c\lambda}{\sqrt{c\mu_1\mu_2}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}} = \frac{\varepsilon\sqrt{c}\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}},$$

čímž transformace Landenova provedena. Obyčejně se provádí tato transformace na normálním tvaru Legendrově; abychom příslušné vztahy odvodili, klademe $y = y'^2$, $x = x'^2$. Dále $\Lambda = p^2$, $\lambda = q^2$, $p^2 + p'^2 = 1$, $q^2 + q'^2 = 1$. Tím dostaneme

$$\frac{dy'}{\sqrt{(1-y'^2)(1-p^2y'^2)}} = \frac{\varepsilon(1+q')\,dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-q^2x'^2)}}, \qquad y' > 0,\ x' > 0.$$

kde
$$p = \frac{1-q'}{1+q'}, \qquad q = \frac{2\sqrt{p}}{1+p}, \qquad (1+q')(1+p) = 2,$$

$$y'^2 = \frac{(1+q')^2 x'^2(1-x'^2)}{1-q^2x'^2}, \qquad 1 - y'^2 = \frac{(1-(1+q')\,x'^2)^2}{1-q^2x'^2}, \tag{m}$$

$$1 - p^2y'^2 = \frac{(1-(1-q')\,x'^2)^2}{1-q^2x'^2},$$

ε pak jest sign $(1-(1+q')x'^2)\ (1-(1-q')x'^2)$. Zavedeme ještě $\sin\varphi$ místo y', dále $\sin\psi$ místo x', následkem čehož místo (m) nastoupí tento vztah mezi φ a ψ

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin 2\psi}{p + \cos 2\psi} \tag{n}$$

a mezi příslušnými diferenciály jest relace

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-p^2\sin^2\varphi}} = \frac{(1+q')\,d\psi}{\sqrt{1-q^2\sin^2\psi}} = \frac{1+p}{2}\,\frac{d\psi}{\sqrt{1-q^2\sin^2\psi}},$$

(ze které, jak snadnou úvahou plyne, ε vypadne) a kterou lze ostatně přímo z (n) diferencováním odvoditi.

Cvičení.

1. Jestliže jest dán eliptický integrál příslušný k $\sqrt{F(x)}$, kde

$$F(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$$

a je-li jedno z čísel α_1, α_2, α_3, α_4 reálné, na př. α_1, pak lineární substituce

$$x = \alpha_1 + \frac{\frac{1}{4}F'(\alpha_1)}{y - \frac{1}{24}F''(\alpha_1)} \quad \text{aneb} \quad y = \tfrac{1}{24}F''(\alpha_1) + \frac{\frac{1}{4}F'(\alpha_1)}{x-\alpha_1}$$

převádí integrál daný na normální tvar Weierstrassův (ve kterém však nemusí všechna tři čísla e_1, e_2, e_3 býti reálná) příslušný k $\sqrt{G(y)}$, kde

$$G(y) = 4y^3 - g_2y - g_3,$$

$$g_2 = a_4a_0 - 4a_3a_1 + 3a_2^2, \quad g_3 = a_4a_2a_0 - a_4a_1^2 - a_3^2a_0 + 2a_3a_2a_1 - a_2^3,$$

při čemž
$$\frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = -\frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}};$$
g_2, g_3 jsou známé dva invarianty bikvadratické formy
$$a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4,$$
(odst. 37, a).

2. Jestliže $F(x)$ předcházejícího příkladu jest rovno součinu $U.V$, kde kvadratické mnohočleny U i V mají kořenové činitele komplexní (označení nechť se shoduje, nehledě k významu čísel E_1, E_2, E_3 s označením odst. 41 c.) tu klademe, je-li $BB_1 - 2A_1C - 2AC_1 < 0$, (v kterémžto případě A, A_1 — a tedy i C, C_1 — jsou téhož znaménka)
$$y - E_3 = \frac{U}{V}.$$
Pak jsou kořeny rovnice (γ) μ_1, μ_2 ($\mu_1 > \mu_2$) oba kladné a klademe dále $E_1 = E_3 + \mu_1$, $E_2 = E_3 + \mu_2$, $3E_3 = -\mu_1 - \mu_2$. Máme pak opět rovnici
$$\frac{-dy}{\sqrt{4(y-E_1)(y-E_2)(y-E_3)}} = \varepsilon\frac{\sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}{2\sqrt{UV}}\,dx, \qquad \varepsilon = \operatorname{sign}(U'V - UV')$$
a
$$\frac{x-\xi_1}{x-\xi_2} = \varepsilon'\sqrt{\frac{A-\mu_2 A_1}{A-\mu_1 A_1}\cdot\frac{y-E_1}{y-E_2}}; \quad \varepsilon' = \varepsilon \operatorname{sign}(AB_1 - A_1B).$$
Kdyby $BB_1 - 2A_1C - 2AC_1 > 0$, zaměnili bychom ve formulích předcházejících E_3, E_1, E_2 za E_1, E_2, E_3, místo $-dy$ pak psali bychom dy.

3. Dokažte, že, je-li mezi φ a ψ vztah (za předpokladu, že roste-li φ, roste i příslušné ψ)
$$\sin\psi = \frac{(1+p)\sin\varphi}{1+p\sin^2\varphi},$$
že
$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-p^2\sin^2\varphi}} = \frac{(1+p)\,d\psi}{\sqrt{1-q^2\sin^2\psi}}, \qquad q = \frac{2\sqrt{p}}{1+p}$$
(transformace Gaussova). Odvoďte tuto transformaci obdobně, jako svrchu byla odvozena transformace Landenova.

4. Ukažte, že v důsledku substituce
$$z = \frac{\zeta[(v^2 + 2vu^3) + u^6\zeta]^2}{[v^2 + (u^6 + 2vu^3)\zeta]^2} \tag{—}$$
jest platný vztah
$$\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-u^8z)}} = \frac{v+2u^3}{v}\cdot\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-v^8\zeta)}},$$
kde mezi u a v jest vztah
$$v^4 - u^4 + 2u^3v^3 - 2uv = 0. \tag{=}$$
(Jacobi, Fundamenta nova theoriae functionum ellipt., 1829, str. 23.)

5. Provedeme-li v příkladě předch. ještě substituci
$$\zeta = \frac{x[(u^2 - 2uv^3) + v^6x]^2}{[u^2 + (v^6 - 2uv^3)x]^2},$$

(substituce tato plyne z (—). zaměníme-li v ní z, ζ, u, v za $\zeta, x, v, -u$) dostaneme

$$\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-u^8 z)}} = \frac{-3dx}{\sqrt{x(1-x)(1-u^8 x)}},$$

neboť v důsledku (=) jest

$$\left(\frac{v+2u^3}{v}\right)\cdot\left(\frac{-u+2v^3}{-u}\right) = \frac{2(v^4-u^4)+4u^3v^3-uv}{-uv} = -3.$$

(Jacobi, l. c., str. 29.)

6. ABELOVY INTEGRÁLY RODU 1.

42. Ukážeme ještě, že výpočet Abelových integrálů rodu 1 (viz odst. 34) dá se převésti na výpočet integrálů eliptických (a integrálů z funkcí racionálních). K tomu cíli budeme se nejprve zabývati křivkami rodu 1. Podle definice rodu jsou to křivky, jež mají celkem

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1 \tag{a}$$

bodů dvojných (při čemž singularity vyšší béřeme v počet jako jistý počet bodů dvojných). Značme K jednu takovou křivku o rovnici $\varphi(x, y) = 0$ a sestrojme křivku C_{n-2} stupně $(n-2)$-ho tak, aby procházela všemi body dvojnými (čímž vzniká pro koeficienty její podmínek v počtu daném číslem (a)) a ještě $n-3$ body na K libovolně zvolenými. Máme tedy celkem pro C_{n-2}

$$(\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-1)+(n-3) = \tfrac{1}{2}(n+1)(n-2)-2 \tag{b}$$

podmínek. K úplnému určení C_{n-2} jest třeba $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)$ na sobě nezávislých podmínek. Bude tedy rovnice křivky C_{n-2} obsahovati aspoň dvě neurčené konstanty (parametry) a buď tedy bude tvaru

$$\lambda_1 f_1(x, y) + \lambda_2 f_2(x, y) + \lambda_3 f_3(x, y) = 0, \tag{c}$$

kde $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$ jsou polynomy v x, y stupně $n-2$ (a ve kteréžto rovnici jsou sice zdánlivě tři neurčené konstanty, avšak, jelikož jest dána možnost jednou z nich děliti, redukují se v podstatě na dvě); anebo bude obsahovati ještě více konstant neurčených (což by nastalo, kdyby podmínky v počtu celkovém (b) nebyly na sobě nezávisly). Případ právě uvedený nastati však nemůže, neboť, kdyby v rovnici křivky C_{n-2} byly 3 neurčené konstanty, tož mohli bychom si na K zvoliti další dva body, jimiž bychom nechali procházeti C_{n-2}, čímž by vznikl svazek C_{n-2} (o rovnici s jedním parametrem). Pevných průsečíků mezi křivkami toho svazku a K by bylo

$$2(\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-1)+(n-3)+2 = n(n-2)-1; \tag{d}$$

tudíž toliko jeden proměnlivý (závislý na parametru) a křivka daná následkem toho by byla racionální (viz odst. 30), t. j. musila by míti o 1 dvojný bod více, než udává číslo (*a*).

Rovnice křivek C_{n-2} vyhovujících daným podmínkám bude tedy nutně tvaru (*c*) a všecky křivky budou protínati K v

$$n(n-2)-3$$

pevných (na $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nezávislých) bodech a vedle toho každá ještě ve třech bodech proměnlivých (t. j. závislých na volbě $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Přiřaďme nyní bodu $[x, y]$ bod $[\xi, \eta]$ rovnicemi

$$\xi = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)}, \qquad \eta = \frac{f_3(x, y)}{f_1(x, y)}. \tag{e}$$

Těmito rovnicemi bude každému bodu $[x, y]$ položenému na K přiřaděn jeden bod $[\xi, \eta]$ (nebereme-li zřetel na body dvojné křivky K). Mění-li se $[x, y]$ spojitě na K, mění se i $[\xi, \eta]$ spojitě a opisuje křivku K', která jest tudíž na základě rovnic (*e*) přiřaděna křivce K.

Avšak také každému bodu $[\xi, \eta]$ na K' odpovídá následkem (e) toliko jediný bod $[x, y]$ na K. Neboť, kdyby jednomu a témuž bodu $[\xi, \eta]$ odpovídaly dva body na K o souřadnicích $[a, b]$, $[a', b']$, bylo by (vylučme pro jednoduchost body v počtu (*b*) na K pevně zvolené a jim na K' přiřaděné a rovněž 9 bodů, ve kterých křivky o rovnicích $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$, $f_3(x, y) = 0$ ještě protínají křivku K)

$$\frac{f_2(a, b)}{f_1(a, b)} = \frac{f_2(a', b')}{f_1(a', b')}, \qquad \frac{f_3(a, b)}{f_1(a, b)} = \frac{f_3(a', b')}{f_1(a', b')},$$

t. j.

$$\frac{f_1(a, b)}{f_1(a', b')} = \frac{f_2(a, b)}{f_2(a', b')} = \frac{f_3(a, b)}{f_3(a', b')}.$$

Z těchto rovnic však plyne, že každá křivka (*c*), která prochází bodem $[a, b]$, prochází též bodem $[a', b']$. Zavedeme-li tedy pro C_{n-2} další jednu podmínku, aby procházely bodem $[a, b]$, dostaneme svazek křivek C_{n-2} o (*d*) průsečících s K pevných a s jedním proměnlivým, odkudž by následovalo, že K jest křivkou racionální (jako svrchu).

Vypočteme-li $[x, y]$ z (*e*) pomocí $[\xi, \eta]$, můžeme následkem dokázané věty dáti výsledku, používáme-li při eliminaci rovnice $\varphi(x, y) = 0$ křivky K, tvar

$$x = R_1(\xi, \eta), \qquad y = R_2(\xi, \eta). \tag{f}$$

Tu jsou $R_1(\xi, \eta)$, $R_2(\xi, \eta)$ racionální funkce proměnných ξ, η.

Lze tedy nejenom křivku K racionální transformací převésti v K', nýbrž také naopak křivku K' lze racionálně transformovati v K; říkáme pak, že transformace (e) — resp. jí rovnocenná (f) — křivky K v K' (a naopak) jest *biracionální.*

Křivka K' jest třetího stupně: stupeň totiž dostaneme jakožto počet průsečíků libovolné přímky o rovnici

$$\lambda_1 + \lambda_2 \xi + \lambda_3 \eta = 0$$

s křivkou K'. Těmto průsečíkům jsou přiřaděny na K (jedno a jednoznačně) na základě (e) průsečíky křivky

$$\lambda_1 f_1(x, y) + \lambda_2 f_2(x, y) + \lambda_3 f_3(x, y) = 0$$

s křivkou K a to ty, jež zároveň s λ_1, λ_2, λ_3 se mění. Ty pak jsou celkem tři.

Tak máme větu: *Křivka K rodu 1 dá se biracionální transformací převésti na křivku stupně třetího K'.*

Křivka K' nemá dvojný bod, neboť pak by K' a následkem (f) též K byla racionální, což odporuje supposici.

POZNÁMKA. Jsou-li koeficienty dané křivky K čísla reálná a zvolíme-li si oněch $n-3$ bodů na K (spoluurčujících C_{n-2}) tak, aby byly reálné, což obecně jest možno ovšem jen tehdy, je-li K křivkou reálnou,*) jest, jak čtenář snadno dokáže, i C_{n-2} křivkou reálnou s reálnými koeficienty. S touto však jest i K' křivkou reálnou s reálnými koeficienty.

43. Je-li dán integrál Abelův

$$\int R(x, y)\, dx \tag{g}$$

vztahující se ke křivce

$$\varphi(x, y) = 0$$

rodu 1, přeměníme jej nejprve transformací (f) na integrál Abelův vztahující se ke křivce K' třetího stupně bez dvojného bodu, jejíž rovnicí budiž

$$\varphi_1(\xi, \eta) = 0. \tag{h}$$

Stačí v (g) položiti

$$x = R_1(\xi, \eta), \quad y = R_2(\xi, \eta), \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{\partial R_1}{\partial \xi} + \frac{\partial R_1}{\partial \eta} \cdot \frac{d\eta}{d\xi},$$

kde

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}},$$

*) Jestliže rovnice křivky algebraické s reálnými koeficienty $\varphi(x, y) = 0$ splňována jest pro body $[x, y] = [a_k, b_k]$ jistého množství skládajícího se jenom z bodů isolovaných, jest křivka daná křivkou imaginární. Isolované body (reálné) křivky algeb. s reálnými koeficienty jsou vždy singulární body křivky (body vícenásobné).

čímž se daný integrál změní v integrál tvaru

$$\int \bar{R}(\xi, \eta)\, d\xi; \tag{k}$$

tu jest $\bar{R}(\xi, \eta)$ racionální funkce bodu $[\xi, \eta]$. Vztah však (h) mezi ξ, η můžeme psáti, je-li bod ξ_0, η_0 na K' (t. j. je-li $\varphi_1(\xi_0, \eta_0) = 0$) takto

$$A(\xi-\xi_0)^3 + B(\xi-\xi_0)^2(\eta-\eta_0) + C(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)^2 + D(\eta-\eta_0)^3 + F(\xi-\xi_0)^2 +$$
$$+ G(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0) + H(\eta-\eta_0)^2 + K(\xi-\xi_0) + L(\eta-\eta_0) = 0.$$

Položíme-li v této rovnici $\eta - \eta_0 = t(\xi - \xi_0)$, obdržíme

$$(\xi-\xi_0)^2[A + Bt + Ct^2 + Dt^3] + (\xi-\xi_0)[F + Gt + Ht^2] + [K + Lt] = 0.$$

odkud řešením

$$\xi = \xi_0 - \frac{F + Gt + Ht^2 \pm \sqrt{a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4}}{2(A + Bt + Ct^2 + Dt^3)},$$

t. j.
$$\xi = r_1(t, \sqrt{a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4})$$

a z rovnice $\eta - \eta_0 = t(\xi - \xi_0)$

$$\eta = r_2(t, \sqrt{a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4}),$$

kde r_1, r_2 jsou racionální funkce argumentů. Zavedeme-li pomocí těchto rovnic místo ξ a η do (k) proměnnou t, máme konečně pro daný integrál výraz

$$\int r(t, \sqrt{a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4})\, dt;$$

t. j. *daný integrál Abelův rodu 1 jest přetvořen v integrál eliptický.*

Zároveň jsme získali tuto větu: *Souřadnice bodů na křivce rodu 1 lze vyjádřiti jakožto racionální funkce*

$$t \text{ a } \sqrt{a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4},$$

kdež a, b, c, d, e jsou vhodné konstanty.

43a. Biracionální transformace křivky $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ samy v sebe. Lze snadno odvoditi jednu biracionální transformaci křivky třetího stupně o rovnici

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 \tag{p}$$

ve křivku

$$\eta^2 = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3, \tag{q}$$

jejíž rovnice se liší toliko jiným označením proměnných souřadnic bodu na křivce. Transformace ta obsahuje jednu libovolnou konstantu a má velikou důležitost pro eliptické integrály (a funkce).

Zvolme si na křivce C o rovnici $Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3$ dva body $[x, y]$, $[x_0, y_0]$, jimiž proložíme přímku

$$Y = \alpha X + \beta, \quad \text{kde tedy} \quad \alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0}, \qquad \beta = \frac{y_0 x - y x_0}{x - x_0}$$

(souřadnice proměnného bodu jsou značeny v rovnici křivky C a přímky znaky X, Y). Přímka ta protne křivku C ještě v jednom bodě $[\xi, \eta]$, jehož souřadnice získáme z rovnice přímky a křivky C operacemi racionálními (řešíce obvyklým způsobem obě rovnice). Vyloučíme-li z obou rovnic Y, dostáváme ihned

$$4X^3 - g_2 X - g_3 - (\alpha X + \beta)^2 = 0 \quad \text{aneb} \quad 4X^3 - \alpha^2 X^2 - (g_2 + 2\alpha\beta) X - (g_3 + \beta^2) = 0.$$

Tato rovnice třetího stupně v X má za kořeny x, x_0, ξ; pro jich součet máme ihned

$$\xi + x + x_0 = \frac{1}{4}\alpha^2 \quad \text{aneb} \quad \xi = -x - x_0 + \frac{1}{4}\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right)^2, \tag{1}$$

čímž ξ pomocí $[x, y]$ vskutku racionálně vyjádřeno. Z rovnice přímky následuje pak i racionální vyjádření η

$$\eta = \frac{y - y_0}{x - x_0}\xi + \frac{y_0 x - y x_0}{x - x_0} \quad \text{aneb} \quad \eta = y + \frac{y - y_0}{x - x_0}(\xi - x). \tag{2}$$

Body $[x, y]$, $[\xi, \eta]$ můžeme patrně v rovnicích (1) a (2) zaměniti; učiníme-li to, dostaneme

$$x = -\xi - x_0 + \frac{1}{4}\left(\frac{\eta - y_0}{\xi - x_0}\right)^2, \qquad y = \eta + \frac{\eta - y_0}{\xi - x_0}(x - \xi), \tag{1'}$$

čímž také naopak vyjádřeny $[x, y]$ racionálně pomocí (ξ, η). Jelikož $[x, y]$, $[\xi, \eta]$ jsou čísla libovolná vázaná toliko vztahy (p), (q), můžeme výsledek vysloviti ve větě: Transformací (1') přechází křivka (p) ve křivku (q); jí ekvivalentní transformace jest (1) a (2), kterou zase naopak přechází křivka (q) v (p). Jest tedy rovnicemi (1), (2) resp. (1') dána transformace biracionální, jíž křivka o rovnici $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ přechází sama v sebe. Při tom jest x_0 libovolná konstanta a y_0 určeno (dvojznačně) rovnicí $y_0^2 = 4x_0^3 - g_2 x_0 - g_3$. Kdybychom v (1), (2) resp. v (1') místo y_0 psali $-y_0$, dostali bychom druhou transformaci biracionální přínáležící k témuž x_0 jako svrchu vypsaná.

Pokládajíce v (1') η za funkci proměnné ξ v důsledku (q), pro jejíž derivaci η' tedy jest

$$\eta'\eta = 6\xi^2 - \tfrac{1}{2} g_2,$$

máme, diferencujíce první rovnici z (1') podle ξ (a násobíce hned η)

$$\eta\, dx = \left[-\eta + \frac{1}{2}\left(\frac{\eta - y_0}{\xi - x_0}\right)\frac{(6\xi^2 - \frac{1}{2}g_2)(\xi - x_0) - \eta(\eta - y_0)}{(\xi - x_0)^2}\right] d\xi. \tag{3}$$

Avšak podle druhé rovnice z (1′) jest (dosadíme-li za x podle prvé rovnice z (1′))

$$y = \eta + \frac{\eta - y_0}{\xi - x_0}(x - \xi) = \eta + \frac{\eta - y_0}{\xi - x_0} \cdot \left[-2\xi - x_0 + \frac{1}{4}\left(\frac{\eta - y_0}{\xi - x_0}\right)^2 \right] =$$

$$= \eta - \frac{1}{2}\,\frac{\eta - y_0}{\xi - x_0}\,\frac{(6\xi^2 - \frac{1}{2}g_2)(\xi - x_0) - \eta(\eta - y_0)}{(\xi - x_0)^2}$$

a tudíž, porovnáme-li s (3),

$$\eta\, dx = -y\, d\xi.$$

Dospíváme tedy k výsledku: *V důsledku vztahů* (1′) — anebo vztahů (1), (2) jim ekvivalentních — *jest tato rovnost mezi diferenciály*

$$\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = -\frac{\varepsilon\, d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - g_2\xi - g_3}}; \tag{4}$$

$\varepsilon = \pm 1$ podle toho, jaké znaménko má podíl $y : \eta$.

Tím získali jsme novou, důležitou pomůcku k transformaci eliptických integrálů.

Zvláštním případem substituce tu uvažované jsou substituce (8), (8′), (8⁰) odst. 39. Klademe-li na př. v (1′) $x_0 = e_1$, jest $y_0 = 0$ (neboť $4x^3 - g_2 x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$) a první rovnice z (1′) se mění se zřetelem ke (q) ihned v rovnici

$$x = -\xi - e_1 + \frac{(\xi - e_2)(\xi - e_3)}{\xi - e_1} = e_1 + \frac{2e_1^2 + e_2 e_3}{\xi - e_1} = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\xi - e_1},$$

což se shoduje s (8′) v uvedeném odst.

POZNÁMKA. Z okolnosti, že body $[x, y]$, $[x_0, y_0]$, $[\xi, \eta]$ leží na přímce, následují vztahy

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_0 - \eta}{x_0 - \xi} = \frac{\eta - y}{\xi - x}, \qquad \begin{vmatrix} \xi, & \eta, & 1 \\ x, & y, & 1 \\ x_0, & y_0, & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

jež jsou ovšem různé tvary jednoho a téhož vztahu mezi souřadnicemi těch tří bodů.

Kdybychom stanovili elementární symetrické funkce rovnice třetího stupně pro X svrchu napsané pomocí koeficientů dané rovnice, z výsledku pak eliminovali α, β, dostali bychom dále tuto relaci

$$(\xi + x + x_0)(4x\xi x_0 - g_3) = (\xi x + \xi x_0 + x x_0 + \tfrac{1}{4} g_2)^2, \tag{6}$$

kvadraticko-kvadratický to vztah mezi x, ξ (obsahující libovolnou konstantu x_0).

43b. Biracionální transformace křivky $y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)$ samy v sebe. Křivky jedna čtvrtého stupně, druhá druhého stupně o rovnicích

$$Y^2 = (1-X^2)(1-k^2X^2), \quad Y = kX^2 + \alpha X + \beta$$

protínají se rovněž ve třech bodech, jichž souřadnice závisí od α, β. Jich souřadnice X-ové jsou dány rovnicí třetího stupně

$$(1-X^2)(1-k^2X^2) - (kX^2 + \alpha X + \beta)^2 = 0$$

aneb $$-2\alpha k X^3 - (1 + k^2 + \alpha^2 + 2k\beta)X^2 - 2\alpha\beta X + 1 - \beta^2 = 0,$$

takže, označíme-li souřadnice oněch tří bodů stejně jako v předcházejícím odstavci znaky $[\xi, \eta]$, $[x, y]$, $[x_0, y_0]$, jest na př.

$$x\xi + x_0\xi + xx_0 = +\frac{2\alpha\beta}{2\alpha k} = \frac{\beta}{k} \tag{1}$$

a úvahou shodnou s tou, která provedena byla v odst. předch. (α, β stanovíme tak, aby křivka $Y = kX^2 + \alpha X + \beta$ procházela body $[x, y]$, $[x_0, y_0]$ a použijeme rovnice (1)), dostáváme tento výsledek:

Transformací biracionálnou

$$\xi = \frac{xy_0 - yx_0}{k(x^2 - x_0^2)}, \quad \eta = k(\xi - x)(\xi - x_0) + y_0 + \frac{y - y_0}{x - x_0}(\xi - x_0), \tag{2}$$

jež jest ekvivalentní (vzhledem k dané křivce) systému

$$x = \frac{\xi y_0 - \eta x_0}{k(\xi^2 - x_0^2)}, \quad y = k(x - \xi)(x - x_0) + y_0 + \frac{\eta - y_0}{\xi - x_0}(x - x_0), \tag{3}$$

přechází daná křivka o rovnici $y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)$ v samu sebe, t. j. *v křivku o rovnici $\eta^2 = (1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)$.*

Z prvé rovnice (2) následuje (odstraníme-li po vhodné úpravě zdvo mocněním y, jehož čtverec jest racionální celistvá funkce proměnné x) tato *kvadraticko-kvadratická relace* mezi ξ, x:

$$k^2\xi^2x^2 - k^2x_0^2 \,.\, (\xi^2 + x^2) - 2ky_0 \,.\, \xi x + 1 = 0, \tag{α}$$

z níž diferencováním

$$[k(x^2 - x_0^2)\xi - xy_0]\, d\xi + [k(\xi^2 - x_0^2)x - \xi y_0]\, dx = 0.$$

Dosadíme-li do prvé závorky podle (2) za ξ a do druhé podle (3) za x, máme ihned jakožto důsledek transformací (2) resp. (3)

$$\frac{d\xi}{\eta} + \frac{dx}{y} = 0 \qquad \text{aneb} \quad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = -\frac{\varepsilon\, d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}.$$

Zavedeme-li ještě místo x_0 konstantu $1/kx_0$ a v důsledku toho místo y_0 výraz y_0/kx_0^2, konečně $-x$ místo x, obdržíme, že *vztah*

$$\xi = \frac{yx_0 + xy_0}{1 - k^2x^2x_0^2} \tag{4}$$

má za důsledek tuto rovnost mezi diferenciály

$$\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = \frac{\varepsilon\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \varepsilon = \operatorname{sign} y\,.\,\eta. \tag{5}$$

POZNÁMKA. Jestliže v rovnici (4) $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, jest $\xi = x$; budiž pak x číslo položené *uvnitř* intervalu $(-1, 1)$ a zvolme si (když $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $\xi = x$) znaménka čísel η, y tak, aby i $\eta = y > 0$. Pak se zřetelem k okolnosti, že výraz na pravé straně (4) jest spojitou funkcí proměnné x_0 v okolí bodu 0, (při čemž y_0 jest v okolí bodu 1) bude i pro všecka x_0 jistého okolí bodu 0 (při $y_0 > 0$) při pevném $[x, y]$ číslo ξ stále uvnitř intervalu $(-1, 1)$ a η stále > 0. Za těchto předpokladů (že x jest uvnitř $(-1, 1)$, že x_0 jest v jistém okolí bodu 0 atd.) následují snadným počtem ze (4), kterouž můžeme psáti ve tvaru

$$\xi = \frac{x\sqrt{(1-x_0^2)}\sqrt{1-k^2x_0^2} + x_0\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}{1-k^2x^2x_0^2} \tag{6$_1$}$$

tyto rovnice

$$\sqrt{1-\xi^2} = \frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x_0^2} - xx_0\sqrt{1-k^2x^2}\sqrt{1-k^2x_0^2}}{1-k^2x^2x_0^2} \tag{6$_2$}$$

$$\sqrt{1-k^2\xi^2} = \frac{\sqrt{1-k^2x^2}\sqrt{1-k^2x_0^2} - k^2xx_0\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x_0^2}}{1-k^2x^2x_0^2}. \tag{6$_3$}$$

Současně s těmito třemi rovnicemi jest v platnosti (5), v níž $\varepsilon = 1$.

44. PŘÍKLAD. Integrál

$$\int R(x, \sqrt[3]{ax^3+bx^2+cx+d})\,dx$$

jest integrál Abelův patřící ke křivce třetího stupně

$$y^3 = ax^3 + bx^2 + cx + d. \tag{a}$$

Integrál ten dá se vždy vhodnou substitucí převésti buď na integrály eliptické anebo na integrály z funkce racionální, jelikož křivka třetího stupně jest buď rodu 1 anebo 0.

Abychom převod zmíněný provedli, užijeme metody svrchu obecně naznačené.

Na křivce (a) leží patrně bod $(\delta, 0)$, kde δ jest reálný kořen rovnice

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{b}$$

a my budeme podle x, y řešiti rovnici (a) s rovnicí svazku přímek procházejících bodem $(\delta, 0)$:

$$y = t(x-\delta).$$

Eliminací y z obou rovnic dostaneme

$$t^3(x-\delta)^2 = \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x-\delta} = a(x-\delta)^2 + b'(x-\delta) + c' \tag{c}$$

anebo

$$(a-t^3)(x-\delta)^2 + b'(x-\delta) + c' = 0,$$

$$x-\delta = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - 4c'(a-t^3)}}{2(a-t^3)}, \qquad y = t\,\frac{-b' \pm \sqrt{b'^2-4c'(a-t^3)}}{2(a-t^3)};$$

takže daný integrál se vskutku redukuje na integrál

$$\int R_1(t, \sqrt{b'^2 - 4c'(a-t^3)})\,dt,$$

což jest integrál eliptický, není-li ovšem

buď 1) $c' = 0$ aneb 2) $b'^2 - 4c'a = 0$.

V případě $c'=0$ proměnná t z odmocniny vypadne a jak z (c) patrno, má rovnice (b) kořen $x=\delta$ dvojnásobný. V případě $b'^2-4c'a=0$ jest patrno rovněž z (c), že rovnice (b) má kořen jeden dvojnásobný, a tudíž tento případ převádí se na prvý. Tak máme výsledek: *Má-li rovnice $ax^3+bx^2+cx+d=0$ jeden kořen dvojnásobný, dá se daný integrál převésti racionální substitucí na integrál z funkce racionální; má-li pak všecky kořeny různé, lze jej převésti na integrál eliptický.*

Viz př. 3, odst. 19.

45. *POZNÁMKA.* V některých zvláštních případech lze převésti i ty integrály Abelovy, jež příslušejí ke křivkám rodu vyššího než 1, na integrály eliptické. Budiž dán na př. integrál

$$\int R\left(x, \sqrt[4]{ax^4+bx^2+c}\right) dx.$$

Ten se dá přeměniti racionálními operacemi na tyto čtyři druhy integrálů

$$\int \frac{r\,dx}{\sqrt[4]{(ax^4+bx^2+c)^k}}; \quad k=0,\ 1,\ 2,\ 3;\ r(x) \text{ funkce racionální } x.$$

Pro $k=0$ jest výraz poslední integrál z racionální funkce; pro $k=2$ jest eliptický integrál (patřící ku $\sqrt{ax^4+bx^2+c}$); zbývají tudíž případy $k=1,\ 3$, ve kterýchž lze provésti redukci další na integrály

$$\int \frac{xr_1(x^2)\,dx}{\sqrt[4]{(ax^4+bx^2+c)^k}}, \qquad \int \frac{r_2(x^2)\,dx}{\sqrt[4]{(ax^4+bx^2+c)^k}}, \qquad k=1,\ 3$$

Pro první z těchto integrálů položíme

$$ax^4+bx^2+c=t^4, \qquad x^2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac+4at^4}}{2a},$$

$$xdx=\frac{2t^3\,dt}{\sqrt{b^2-4ac+4at^4}},$$

čímž se integrál ten redukuje na integrál eliptický patřící ku

$$\sqrt{b^2-4ac+4at^4}.$$

Pro druhý integrál stačí klásti

$$ax^4+bx^2+c=x^4t^4$$

a obdržíme rovněž eliptický integrál náležející ku

$$\sqrt{b^2-4ac+4ct^4}.$$

Tak vyplývá, že daný Abelův integrál dá se převésti na integrál z funkce racionální a na integrály eliptické náležející ke trojím obecně různým odmocninám a to

$$\sqrt{ax^4+bx^2+c}, \qquad \sqrt{b^2-4ac+4at^4}, \qquad \sqrt{b^2-4ac+4ct^4}.$$

Cvičení.

1. Integrály Abelovy tvaru

$$\int R(x, y)\,dx, \quad \text{kde} \quad y^2 = a + bx^2 + cx^4 + ex^6,$$

dají se převésti na integrály eliptické (jednak příslušné k $\sqrt{az + bz^2 + cz^3 + ez^4}$ jednak k $\sqrt{a + bz + cz^2 + ez^3}$). Substitucí $x^2 = z$.

2. Integrály Abelovy $\int R(x, y)\,dx$, kde

$$y^2 = a_0 x^6 + a_1 x^5 + a_2 x^4 + a_3 x^3 + a_4 x^2 + a_5 x + a_6$$

a kořeny právě napsaného polynomu šestého stupně dají se sestaviti ve tři dvojice bodů (x_1, x'_1), (x_2, x'_2), (x_3, x'_3), jež jsou v involuci (t. j. pro něž jsou splněny rovnice

$$(+) \qquad m\,x_i\,x'_i + n\,(x_i + x'_i) + p = 0, \qquad i = 1, 2, 3),$$

dají se rovněž převésti na integrály eliptické.

Důkaz jest snadný, jestliže dvojné body involuce (t. j. kořeny rovnice $m\xi^2 + 2n\xi + p = 0$) jsou reálné a různé. Pak stačí učiniti substituci

$$\frac{x - \alpha}{x - \beta} = z,$$

kde α, β jsou dvojné body oné involuce (kořeny uvedené rovnice druhého stupně) a máme ihned případ v 1. příkladě.*)

3. Integrál

$$\int \frac{R(x)\,dx}{\sqrt{a + bx + cx^2 + gx^3 + cx^4 + bx^5 + ax^6}}$$

dá se převésti na integrály eliptické. (Spadá jako zvláštní případ do 2. příkl., avšak také lze užíti substituce

$$x + x^{-1} = 2z, \qquad \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{z+1} \mp \sqrt{z-1}}{\sqrt{2}}.)$$

4. Integrál Abelův $\int R(x, y)\,dx$, kde $y^2 = P(x)$ a $P(x)$ jest mnohočlen v x bez kvadratického dělitele, lze převésti na integrál eliptický $\int R(\xi, \eta)\,d\xi$, kde $\eta^2 = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3$, biracionální transformací tenkráte a jenom tenkráte, je-li $P(x)$ čtvrtého anebo třetího stupně. (Neboť relace, jež v důsledku biracionálních vztahů mezi $[x, y]$ a $[\xi, \eta]$ jest mezi x a ξ — obdobně jako jest relace (6) odst. 43a a (α) odst. 43b mezi ξ, x — jest kvadraticko-kvadratická.)

5. Je-li $R(x)$ libovolný mnohočlen v x čtvrtého nebo třetího stupně bez kvadratického dělitele, pak integrál eliptický $\int R(x, y)\,dx$, kde $y^2 = R(x)$, lze touto biracionální transformací

$$\xi = \frac{yy_0 + R(x_0) + \frac{1}{2}R'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{12}R''(x_0)(x - x_0)^2}{2(x - x_0)^2}$$

---

*) Rovnici (+) lze totiž psáti

$$(x - \alpha)(x' - \beta) + (x' - \alpha)(x - \beta) = 0$$

aneb

$$\frac{x - \alpha}{x - \beta} + \frac{x' - \alpha}{x' - \beta} = 0,$$

odkudž uvedené tvrzení ihned plyne.

$$\eta = \left[\frac{R(x)}{(x-x_0)^3} - \tfrac{1}{4}\frac{R'(x)}{(x-x_0)^2}\right] y_0 - \left[\frac{R(x_0)}{(x_0-x)^3} - \tfrac{1}{4}\frac{R'(x_0)}{(x_0-x)^2}\right] y,$$

při čemž $\eta^2 = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3$ a x_0, y_0 jsou konstanty vázané relací $y_0^2 = R(x_0)$, převésti na normální tvar Weierstrassův. Konstanty g_2, g_3 jsou invarianty polynomu $R(x)$; t. j. píšeme-li $R(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$, jest

$$g_2 = a_4a_0 - 4a_3a_1 + 3a_2^2, \qquad g_3 = a_4a_2a_0 - a_4a_1^2 - a_3^2a_0 + 2a_3a_2a_1 - a_2^3.$$

Mezi diferenciály neodvisle proměnných jest konečně vztah

$$\frac{dx}{y} = -\frac{d\xi}{\eta}.$$

(Weierstrass, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen, I.; Werke sv. V. str. 13.) Odvoďte výsledek př. 41d jako zvláštní případ předchozího výsledku.