§ 11. LOKÁLNĚ SOUVISLÉ PROSTORY

11.1. Obecné věty o lokální souvislosti

Definice **11.1.1.** Bod $a \in P$ nazveme *bodem lokální souvislosti prostoru P*, jestliže souvislá okolí bodu a tvoří úplnou soustavu okolí tohoto bodu. Bod $a \in P$ je *bodem lokální souvislosti množiny $Q \subset P$*, jestliže ta okolí U bodu a, pro která množina $Q \cap U$ je souvislá, tvoří úplnou soustavu okolí tohoto bodu. (Při tom nemusí být $a \in Q$.)

11.1.1. Budiž Q vnořen do P; budiž $a \in Q$. Aby a byl bod lokální souvislosti vnořeného prostoru Q, k tomu je nutné a stačí, aby v prostoru P byl a bodem lokální souvislosti množiny Q. Že podmínka stačí, plyne ze **4.6.3.** Je-li a bod lokální souvislosti vnořeného prostoru Q a je-li U okolí bodu a, je podle **4.6.2** $Q \cap U$ relativním okolím bodu a, takže existuje souvislé relativní okolí $H \subset Q \cap U$ bodu a; podle **4.6.2** existuje takové okolí V bodu a, že $Q \cap V = H$; podle **4.2.5** je $W = U \cap V$ okolí bodu a, jest $W \subset U$ a množina $Q \cap W = H$ je souvislá.

11.1.2. Je-li a bod lokální souvislosti bodové množiny $Q \subset P$, jest $a \in \overline{Q}$. Je-li U okolí bodu a, pak existuje takové okolí $V \subset U$ bodu a, že množina $Q \cap V$ je souvislá; jest $Q \cap V \neq \emptyset$, tedy $Q \cap U \neq \emptyset$. Tudíž $a \in \overline{Q}$ podle **4.2.9.**

11.1.3. Budiž a bod lokální souvislosti prostoru P. Budiž U okolí bodu a. Pak je a bod lokální souvislosti množiny U. Viz **4.3.6.**

11.1.4. Budiž U okolí bodu $a \in P$. Je-li a bod lokální souvislosti množiny U, je a bodem lokální souvislosti prostoru P. Viz **4.3.6.**

11.1.5. Budiž $Q_1 \subset P$, $Q_2 \subset P$, $a \in Q_1 \cap Q_2$. Je-li a bod lokální souvislosti jak množiny Q_1, tak i množiny Q_2, je a bodem lokální souvislosti množiny $Q_1 \cup Q_2$. Můžeme předpokládat, že $Q_1 \cup Q_2 = P$. Je-li U okolí bodu a, pak pro $i = 1, 2$ je $Q_i \cap U$ relativní okolí bodu a v prostoru Q_i (viz **4.6.2**). Tudíž pro $i = 1, 2$ existuje souvislé relativní okolí $V_i \subset Q_i \cap U$ bodu a v prostoru Q_i. Jest $V = V_1 \cup V_2 \subset U$; podle **4.6.18** je V okolí bodu a v prostoru P. Z **10.1.5** plyne, že množina V je souvislá, neboť $a \in V_1 \cap V_2$ podle **4.2.3.**

11.1.6. Budiž P metrisovatelný prostor; budiž $Q \subset P$. Budiž $L(Q)$ množina všech bodů lokální souvislosti množiny Q v prostoru P. Pak $L(Q)$ je G_δ-množina.

Důkaz. I. Budiž ϱ metrika v P. Pro každé $\varepsilon > 0$ budiž $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ soustava bodových množin U s těmito vlastnostmi:

[1] $x_1 \in U$, $x_2 \in U \Rightarrow \varrho(x_1, x_2) < \varepsilon$;
[2] množina $Q \cap U$ je souvislá.

Dále budiž $G(\varepsilon)$ množina těch $x \in P$, které mají aspoň jedno okolí $U \in \mathfrak{U}(\varepsilon)$.

II. Dokážeme, že množiny $G(\varepsilon)$ jsou otevřené, takže $\bigcap_{n=1}^{\infty} G(n^{-1})$ je G_δ-množina. Je-li $x \in G(\varepsilon)$, existuje okolí $U \in \mathfrak{U}(\varepsilon)$ bodu x. Protože P je $\mathcal{F}$-prostor (viz **9.1.5**), je vnitřek V okolí U okolím bodu x (viz **4.5.1** a **4.5.5**); je-li $y \in V$, jest U okolím bodu y, tedy $y \in G(\varepsilon)$. Tudíž $V \subset G(\varepsilon)$, takže $G(\varepsilon)$ je okolím bodu x podle **4.2.4** a množina $G(\varepsilon)$ je otevřená podle **4.2.8** a **4.4.12.**

III. Dokážeme, že $L(Q) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} G(n^{-1})$. Je-li dán bod $a \in L(Q)$ a index n, jest $U = \mathscr{E}_x\,[\varrho(a, x) < (2n)^{-1}]$ okolí bodu a; existuje takové okolí $V \subset U$ bodu a, že množina $Q \cap V$ je souvislá. Je-li $x_1 \in V$, $x_2 \in V$, jest $x_1 \in U$, $x_2 \in U$, tedy $\varrho(x_1, x_2) \leqq \varrho(x_1, a) + \varrho(a, x_2) < (2n)^{-1} + (2n)^{-1} = n^{-1}$. Tudíž $V \in \mathfrak{U}(n^{-1})$, takže $a \in G(n^{-1})$.

IV. Dokážeme, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} G(n^{-1}) \subset L(Q)$. Je-li dán bod $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G(n^{-1})$ a okolí U bodu a, existuje takový index n, že $\varrho(a, x) < n^{-1} \Rightarrow x \in U$. Protože $a \in G(n^{-1})$, existuje takové okolí V bodu a, že $V \in \mathfrak{U}(n^{-1})$. Množina

$Q \cap V$ je tedy souvislá a jest: $x \in V \Rightarrow \varrho(a, x) < n^{-1}$ (viz **4.2.3**), takže $V \subset U$. Tudíž $a \in L(Q)$.

Definice **11.1.2.** Prostor P se nazývá *lokálně souvislý,* jestliže každý jeho bod je bodem lokální souvislosti prostoru. Bodová množina $Q \subset P$ je lokálně souvislá, jestliže vnořený prostor Q je lokálně souvislý.

11.1.7. Budiž $Q \subset P$. Aby množina Q byla lokálně souvislá, k tomu je nutné a stačí, aby každý bod $x \in Q$ byl bodem lokální souvislosti množiny Q v prostoru P. Viz **11.1.1.**

11.1.8. Budiž P lokálně souvislý prostor. Budiž Q otevřená množina. Pak Q je lokálně souvislá. Viz **4.4.13**, **11.1.3** a **11.1.7.**

11.1.9. Budiž P lokálně souvislý prostor. Budiž Q otevřená množina. Budiž K komponenta množiny Q. Pak K je otevřená množina. Budiž $a \in K$. Podle **4.4.13** je Q okolí bodu a. Protože a je bod lokální souvislosti prostoru P, existuje souvislé okolí $U \subset Q$ bodu a. Podle **10.2.2** je U částí právě jedné komponenty množiny Q. Podle **4.2.3** je $a \in U$, tedy $U \subset K$. Tudíž K je okolí bodu a podle **4.2.4** a množina K je otevřená podle **4.2.8** a **4.4.12.**

11.1.10. Budiž P $\mathcal{F}$-prostor. Každá komponenta každé otevřené množiny budiž otevřená. Pak P je lokálně souvislý. Budiž U okolí bodu $a \in P$. Podle **4.2.3** a **4.5.6** existuje taková otevřená množina $G \subset U$, že $a \in G$. Budiž K ta komponenta množiny G, která obsahuje bod a. Množina K je otevřená, je tedy (**4.4.13**) okolím bodu a; K je souvislá podle **10.2.1** a jest $K \subset U$. Tudíž a je bod lokální souvislosti prostoru P.

11.1.11. Budiž u $\mathcal{F}$-modifikace topologie v v množině P. Je-li (P, v) lokálně souvislý prostor, pak totéž platí o (P, u). Viz **4.6.17**, **10.2.6**, **11.1.9** a **11.1.10.**

11.1.12. Budiž P lokálně souvislý $\mathcal{F}$-prostor; budiž $a \in P$. Otevřená souvislá okolí bodu a tvoří úplnou soustavu okolí bodu a. Budiž U okolí bodu a; podle **4.5.6** existuje otevřené okolí $G \subset U$ bodu a. Jest $a \in G$ (viz **4.2.3**); budiž K ta komponenta množiny G, která obsahuje bod a. Jest $K \subset U$ a množina K je souvislá podle **10.2.1**; K je otevřená podle **11.1.9**, je tedy okolím bodu a (viz **4.4.13**).

11.1.13. Budiž P lokálně souvislý prostor. Kvasikomponenty prostoru P jsou totožné s jeho komponentami. Budiž $a \in P$. Komponentu (kvasikomponentu) prostoru P obsahující bod a označme $K(Q)$. Podle **10.2.10** jest $K \subset Q$. Je-li $K \neq Q$, pak existuje bod $b \in Q - K$. Podle **10.2.4** je K uzavřená, podle **11.1.9** je $P - K$ uzavřená; tudíž K, $P - K$ jsou oddělené podle **5.1.4.** To je nemožné, neboť $a \in K$, $b \in P - K$, $P = K \cup (P - K)$ a body a, b leží v téže kvasikomponentě prostoru P.

11.1.14. Buďtež $S_1 \subset P$, $S_2 \subset P$ uzavřené lokálně souvislé množiny. Pak množina $S_1 \cup S_2$ je lokálně souvislá. Budiž $a \in S_1 \cup S_2$; máme ukázat (viz **11.1.7**), že a je bod lokální souvislosti množiny $S_1 \cup S_2$. Pro $a \in S_1 \cap S_2$ to plyne z **11.1.5**; stačí vyšetřit ještě případ $a \in S_1 - S_2$. Podle **4.4.13** je $P - S_2$ okolí bodu a; podle **4.6.2** je $S_1 - S_2 = S_1 \cap (P - S_2) = (S_1 \cup S_2) \cap (P - S_2)$ relativní okolí bodu a i ve vnořeném prostoru S_1 i ve vnořeném prostoru $S_1 \cup S_2$. Nyní z **11.1.3** plyne, že a je bod lokální souvislosti množiny $S_1 - S_2$, takže z **11.1.4** plyne, že a je bod lokální souvislosti množiny $S_1 \cup S_2$.

11.1.15. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $P(z)$ lokálně souvislý prostor; jestliže množina $\mathbf{C}$ je nekonečná, pak nechť prostor $P(z)$ je souvislý pro každé $z \in \mathbf{C}$. Budiž $R = \mathfrak{P}P(z)$ $(z \in \mathbf{C})$. Pak je P lokálně souvislý prostor. Budiž U okolí bodu a v prostoru R. Pak existuje taková konečná množina $K \subset \mathbf{C}$, že $U \supset \supset \mathfrak{P}_z V(z)$, kde $V(z)$ pro $z \in K$ je okolí bodu $a(z)$ v prostoru $P(z)$ a pro $z \in \mathbf{C} - K$ jest $V(z) = P(z)$. Pro konečné K můžeme předpokládat, že $K = \mathbf{C}$. Pro každé $z \in K$ existuje souvislé okolí $W(z) \subset V(z)$ bodu $a(z)$ v prostoru $P(z)$; pro $z \in \mathbf{C} - K$ budiž $W(z) = P(z)$. Pak je $W = \mathfrak{P}_z W(z)$ okolí bodu a v prostoru R, jest $W \subset U$ a podle **10.1.21** množina W je souvislá.

11.1.16. Prostor $\mathbf{E}_n$ je lokálně souvislý. Pro $n = 1$ tvoří intervaly $\mathscr{E}_t[|t - a| < \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ úplnou soustavu okolí bodu $a \in \mathbf{E}_1$, takže prostor $\mathbf{E}_1$ je lokálně souvislý podle **10.1.16.** Obecné tvrzení nyní plyne z **11.1.15.**

11.1.17. Budiž P F-prostor. Budiž a bod lokální souvislosti husté množiny $H \subset P$. Pak a je bod lokální souvislosti prostoru P. Budiž U okolí bodu a. Existuje takové okolí $V \subset U$ bodu a, že množina $H \cap V$ je souvislá. Podle **4.5.6** existuje otevřené okolí $G \subset V$ bodu a. Budiž $W = U \cap \overline{H \cap V}$, takže $W \subset U$. Protože $H \cap \cap V \subset W \subset \overline{H \cap V}$, je množina W souvislá podle **10.1.8.** Mimo to W je okolí bodu a podle **4.2.4**, neboť $U \supset G$, $V \supset G \Rightarrow U \cap \overline{H \cap V} \supset G \cap \cap \overline{H \cap G}$ a podle **4.9.11** jest $G \cap \overline{H \cap G} = G$.

11.1.18. Budiž P F-prostor. Budiž $Q \subset T \subset P$. Každý bod $x \in T$ budiž bodem lokální souvislosti množiny Q. Pak množina T je lokálně souvislá. Podle **4.6.10** můžeme předpokládat, že $T = P$; pak množina Q je hustá podle **11.1.2** a tvrzení plyne z **11.1.17.**

11.1.19. Budiž P lokálně souvislý prostor. Budiž $G \subset P$ otevřená množina. Budiž S souvislá část množiny G. Aby S byla komponenta množiny G, k tomu je nutné a stačí, aby bylo $G \cap \operatorname{Fr} S = \emptyset$.

Důkaz. I. Podle **10.2.2** existuje taková komponenta K množiny G, že $S \subset K$. Je-li $G \cap \operatorname{Fr} S = \emptyset$, plyne ze **4.8.16**, že relativní hranice množiny S v prostoru G je prázdná. Z toho plyne podle **4.8.5** a **4.8.6**, že množiny S a $G - S$ jsou relativně uzavřené v G, takže S, $G - S$ jsou oddělené podle **5.1.5.** Nyní $\emptyset \neq S \subset K \subset G = S \cup (G - S)$ a množina K je podle **10.2.1** souvislá; tudíž podle **10.1.3** je $K \subset S$, a tedy $K = S$. (Lokální souvislosti prostoru P jsme dosud neužili.)

II. Je-li S komponenta množiny G, pak $G \cap \overline{S} = S$ podle **10.2.4**, $\overline{P - S} = P - S$ podle **11.1.9.** Tudíž $\operatorname{Fr} S = \overline{S} \cap \overline{P - S} \subset P - G$.

11.1.20. Budiž P lokálně souvislý F-prostor. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $M \subset P$. Aby množina M ireducibilně roztínala P mezi body a, b, k tomu je nutné a stačí, aby existovaly takové dvě navzájem různé souvislé množiny S, T, že

$$(1) \qquad a \in T\,, \quad b \in S\,, \quad S \cup T \subset P - M\,, \quad \operatorname{Fr} S = M = \operatorname{Fr} T\,.$$

Důkaz. I. Platí-li (1) se souvislými S, T ($S \neq T$), pak množina M je uzavřená podle **4.8.8.** Tudíž z **11.1.19** plyne, že S, T jsou dvě různé komponenty množiny $P - M$. Podle **10.2.4** je množina T a podle **4.6.7** a **11.1.9** také $(P - M) - T \supset S$ relativně uzavřená v $P - M$, takže množiny T, $(P - M) - T$ podle **5.1.5** jsou oddělené. Protože $a \in T$, $b \in S \subset (P - M) - T$, roztíná M prostor P mezi body a, b. Nechť také $M_0 \subset M$ roztíná P mezi a, b; máme dokázat, že $M_0 = M$. Budiž naopak $M - M_0 \neq \emptyset$. Jest $M - M_0 \subset M = \operatorname{Fr} T \subset \overline{T}$ a množina T je souvislá; tudíž $T \cup (M - M_0)$ je souvislá podle **10.1.8.** Stejně se zjistí, že také $S \cup (M - M_0)$ je souvislá, takže podle **10.1.5** též $H = S \cup \cup T \cup (M - M_0)$ je souvislá. Protože M_0 roztíná P mezi body a, b, existují takové oddělené A, B, že $P - M_0 = A \cup B$, $a \in A$, $b \in B$. Nyní $H = (S \cup T) \cup (M - M_0) \subset (P - M) \cup (M - M_0) = P - M_0$, H je souvislá a jest $a \in H \cap A$. Tudíž $H \cap B = \emptyset$ podle **10.1.3.** To je nemožné, neboť $b \in H \cap B$.

II. Jestliže M ireducibilně roztíná P mezi body a, b, pak množina M je uzavřená podle **10.4.6.** Protože M roztíná P mezi a, b, existují podle **10.2.10** a **10.4.1** takové dvě různé komponenty S, T otevřené množiny $P - M$, že $a \in T$, $b \in S$. Podle **10.2.1** a **11.1.19** jest $\operatorname{Fr} T \subset M$, tedy $a \in T - \operatorname{Fr} T$. Podle **10.2.4** je $T = \overline{T} \cap (P - M)$, takže $b \in P - \overline{T}$. Z **10.4.2** tedy plyne, že $\operatorname{Fr} T$ roztíná P mezi body a, b. Protože $M \supset \supset \operatorname{Fr} T$ ireducibilně roztíná P mezi a, b, jest $\operatorname{Fr} T = M$. Stejně se dostane, že $\operatorname{Fr} S = M$. Vztah (1) je tím dokázán.

11.1.21. Budiž P lokálně souvislý $\mathcal{F}$-prostor. Budiž G souvislá otevřená bodová množina. Budiž

$$a \in G\,, \quad b \in P - \overline{G} \subset P - \operatorname{Fr} G\,.$$

Budiž S ta komponenta množiny $P - \operatorname{Fr} G$, která obsahuje bod b. Pak množina $\operatorname{Fr} S$ ireducibilně roztíná P mezi body a, b. Množiny $\operatorname{Fr} G$, $\operatorname{Fr} S$ jsou uzavřené podle **4.8.8.** Protože S je komponenta otevřené množiny $P - \operatorname{Fr} G$, jest $\operatorname{Fr} S \subset \operatorname{Fr} G$ podle **11.1.19.** Protože G je otevřená, jest $G \cap \operatorname{Fr} G = \emptyset$ podle **4.8.6**; tudíž bod $a \in G$ leží v množině $P - \operatorname{Fr} G \subset P - \operatorname{Fr} S$ a existuje taková komponenta T množiny $P - \operatorname{Fr} S$, že $a \in T$. Protože $G \cap \operatorname{Fr} G = \emptyset$, $\operatorname{Fr} S \subset \operatorname{Fr} G$, je G souvislá část množiny $P - \operatorname{Fr} S$, obsahující bod a komponenty T této množiny. Podle **10.2.2** tedy je $G \subset T$. Z toho plyne, že $S \neq T$; neboť v případě $S = T$ by souvislá množina S obsahovala bod $a \in G$ i bod $b \in P - \overline{G} \subset P - G$; z **10.1.9** by potom plynulo $S \cap \operatorname{Fr} G \neq \emptyset$ a to je nemožné. Protože T je komponenta otevřené množiny $P - \operatorname{Fr} S$, je

$\mathrm{Fr}\, T \subset \mathrm{Fr}\, S$ podle **11.1.19**; množina T je otevřená podle **11.1.9**, takže $\mathrm{Fr}\, T = \overline{T} - T$ podle **4.8.7**; mimo to

$$G \subset T \Rightarrow \mathrm{Fr}\, S \subset \mathrm{Fr}\, G \subset \overline{G} \subset \overline{T}$$

a $T \subset P - \mathrm{Fr}\, S$; proto je $\mathrm{Fr}\, S \subset \overline{T} - T = \mathrm{Fr}\, T$. Tím je dokázáno, že $\mathrm{Fr}\, S = \mathrm{Fr}\, T$. Protože S, T jsou podle **11.1.9** otevřené, jest $S \cap \mathrm{Fr}\, S = \emptyset = T \cap \mathrm{Fr}\, T$ podle **4.8.6**. Tudíž S, T jsou dvě navzájem různé bodové množiny a jest

$$a \in T\,, \quad b \in S\,, \quad S \cup T \subset P - M\,, \quad \mathrm{Fr}\, S = M = \mathrm{Fr}\, T\,.$$

Z **11.1.20** tedy plyne, že $\mathrm{Fr}\, S$ ireducibilně roztíná P mezi a, b.

11.1.22. Budiž P lokálně souvislý $\mathscr{F}$-prostor. Nechť množina $M \subset P$ roztíná P mezi body a, b. Aby existovala $H \subset M$ ireducibilně roztínající P mezi body a, b, k tomu stačí, aby byla splněna některá z následujících tří podmínek:

[1] množina M je uzavřená;
[2] prostor P je dědičně normální;
[3] množina $P - M$ je hustá.

Existuje taková uzavřená $F \subset M$, která roztíná P mezi a, b; neboť v případě [1] je to zřejmé, v případě [2] to plyne z **10.4.4** a v případě [3] z **10.4.5.** Podle **10.2.10** a **10.4.1** leží body a, b ve dvou různých komponentách otevřené množiny $P - F$. Budiž G ta komponenta množiny $P - F$, která obsahuje bod a, takže $b \in (P - F) - G$. Podle **10.2.4** jest $\overline{G} \cap (P - F) = G$, takže $b \in P - \overline{G} \subset P - \mathrm{Fr}\, G$. Budiž S ta komponenta množiny $P - \mathrm{Fr}\, G$, která obsahuje bod b. Podle **10.2.1**, **11.1.9** a **11.1.21** množina $H = \mathrm{Fr}\, S$ ireducibilně roztíná P mezi a, b. Množina $P - \mathrm{Fr}\, G$ je podle **4.8.8** otevřená, takže $H \subset \mathrm{Fr}\, G$ podle **11.1.19**, a tedy $H \subset \overline{G} - G$ podle **4.8.7**, neboť G je otevřená podle **11.1.9.** Protože $\overline{G} \cap (P - F) = G$, $H \subset \overline{G} - G$, jest $H \subset F \subset M$.

11.1.23. Budiž P lokálně souvislý prostor; budiž M libovolná bodová množina. Pro každou komponentu K množiny M jest $\mathrm{Fr}\, K \subset \mathrm{Fr}\, M$. Budiž naopak $a \in \mathrm{Fr}\, K - \mathrm{Fr}\, M$. Protože $a \in P - \mathrm{Fr}\, M$, existuje podle **4.8.2** takové okolí U bodu a, že je buďto $U \subset M$ nebo $U \subset P - M$. Existuje takové souvislé okolí V bodu a, že $V \subset U$; pak je buďto $V \subset M$ nebo $V \subset P - M$. Protože $a \in \mathrm{Fr}\, K$, existuje bod $b \in K \cap V$ a bod $c \in V - K$. Protože $b \in K \cap V$, $K \subset M$, je inkluse $V \subset P - M$ nemožná, takže $V \subset M$. Protože V je souvislá a obsahuje bod b komponenty K množiny M, jest $V \subset K$ podle **10.2.2.** To je nemožné, neboť $c \in V - K$.

11.1.24. Budiž P metrisovatelný prostor. Budiž S lokálně souvislá bodová množina. Pak S je podmnožinou lokálně souvislé G_δ-množiny. Viz **11.1.1**, **11.1.6** a **11.1.18.**

11.2. Věta o existenci oblouku

11.2.1. Prostor P budiž metricky úplný, souvislý a lokálně souvislý. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Pak existuje oblouk $C \subset P$ s koncovými body a, b.

Důkaz. I. Podle **9.1.5** je P F-prostor. Proto z **11.1.12** plyne, že každý $x \in P$ má takové otevřené souvislé okolí $V(x)$, že:

$$z_1 \in V(x)\,, \quad z_2 \in V(x) \Rightarrow \varrho(z_1, z_2) < 1\,.$$

Podle **4.2.3** jest $P = \bigcup_i V(x)$ $(x \in P)$, takže podle **10.1.23** existuje taková konečná bodová posloupnost $\{x_i\}_{i=0}^{k_1}$, že $x_0 = a$, $x_{k_1} = b$ a že: $1 \leqq i \leqq k_1 \Rightarrow V(x_{i-1}) \cap V(x_i) \neq \emptyset$. Snadno se přesvědčíme, že lze z $\{x_i\}$ vybrat takovou konečnou posloupnost $\{y_i\}_{i=0}^{h_1}$, že $y_0 = a$, $y_{h_1} = b$ a že:

$$1 \leqq i \leqq h_1 \Rightarrow V(y_{i-1}) \cap V(y_i) \neq \emptyset\,;$$
$$0 \leqq i \leqq h_1\,, \quad 0 \leqq j \leqq h_1\,, \quad |i - j| \geqq 2 \Rightarrow V(y_i) \cap V(y_j) = \emptyset\,.$$

Položme $U_i^{(1)} = V(y_i)$ pro $0 \leqq i \leqq h_1$.

II. Předpokládejme nyní obecně, že při určitém $n \in \mathbf{N}$ (pro $n = 1$ viz I) jsme našli konečnou posloupnost bodových množin $\{U_i^{(n)}\}_{i=0}^{h_n}$ s těmito vlastnostmi:

$[1]_n$ $a \in U_0^{(n)}$, $b \in U_{h_n}^{(n)}$;
$[2]_n$ $U_{i-1}^{(n)} \cap U_i^{(n)} \neq \emptyset$ pro $1 \leqq i \leqq h_n$;
$[3]_n$ $U_i^{(n)} \cap U_j^{(n)} = \emptyset$ pro $0 \leqq i \leqq h_n$, $0 \leqq j \leqq h_n$, $|i - j| \geqq 2$;

$[4]_n$ množiny $U_i^{(n)}$ $(0 \leqq i \leqq h_n)$ jsou otevřené;
$[5]_n$ množiny $U_i^{(n)}$ $(0 \leqq i \leqq h_n)$ jsou souvislé;
$[6]_n$ $z_1 \in U_i^{(n)}$, $z_2 \in U_i^{(n)} \Rightarrow \varrho(z_1, z_2) < n^{-1}$ $(0 \leqq i \leqq h_n)$.

Položme $c_0 = a$, $c_{h_n+1} = b$ a pro $1 \leqq i \leqq h_n$ zvolme $c_i \in U_{i-1}^{(n)} \cap U_i^{(n)}$, což je možné podle $[2]_n$. Ze $[4]_n$ plyne podle **4.4.13**, **4.5.6**, **5.4.5** a **9.1.8**, že pro každý $x \in U_i^{(n)}$ $(0 \leqq i \leqq h_n)$ existuje taková otevřená množina $H_i(x)$, že

$$x \in H_i(x)\,, \quad \overline{H_i(x)} \subset U_i^{(n)}\,,$$
$$z \in H_i(x) \Rightarrow \varrho(x, z) < \frac{1}{2(n+1)}\,.$$

Budiž $W_i(x)$ ta komponenta množiny $H_i(x)$, která obsahuje bod x. Jest

$$x \in W_i(x)\,, \quad \overline{W_i(x)} \subset U_i^{(n)}\,,$$
$$z_1 \in W_i(x)\,, \quad z_2 \in W_i(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varrho(z_1, z_2) \leqq \varrho(z_1, x) + \varrho(x, z_2) < \frac{1}{n+1}\,;$$

množina $W_i(x)$ je souvislá podle **10.2.1** a otevřená podle **11.1.9**. Jest

$$U_i^{(n)} = \bigcup W_i(x) \ \ (x \in U_i^{(n)})\,; \quad c_i \in U_i^{(n)}\,, \quad c_{i-1} \in U_i^{(n)}$$

a množiny $W_i(x)$ jsou relativně otevřené v $U_i^{(n)}$ podle **4.6.5**. Tudíž z $[5]_n$ plyne podle **10.1.23**, že pro $0 \leqq i \leqq h_n$ existuje taková konečná bodová posloupnost $\{\xi_{ir}\}_{r=0}^{p_i}$, že

$$\xi_{i0} = c_i\,, \quad \xi_{i,p_i} = c_{i+1}\,,$$
$$1 \leqq r \leqq p_i \Rightarrow W_i(\xi_{i,r-1}) \cap W_i(\xi_{ir}) \neq \emptyset\,.$$

Z posloupností $\{\xi_{ir}\}_{r=0}^{p_i}$ $(0 \leqq i \leqq h_n)$ sestavíme novou konečnou bodovou posloupnost $\{v_j\}_{j=0}^{k}$, kde $k = \sum\limits_{i=0}^{h_n} (p_i + 1)$, do které přijde napřed $p_0 + 1$ bodů ξ_{0r} $(0 \leqq r \leqq p_0)$, za nimi $p_1 + 1$ bodů ξ_{1r} $(0 \leqq r \leqq p_1)$ atd., až na konec přijde p_{h_n+1} bodů $\xi_{h_n,r}$ $(0 \leqq r \leqq p_{h_n})$. Pro $v_j = \xi_{ir}$ položme $W_i(\xi_{ir}) = W(v_j)$. Pak jest

$$v_0 = a\,, \quad v_k = b\,; \quad 1 \leqq j \leqq k \Rightarrow W(v_{j-1}) \cap W(v_j) \neq \emptyset\,.$$

Snadno se přesvědčíme, že z $\{v_j\}$ lze vybrat konečnou bodovou posloupnost $\{u_j\}_{j=0}^{h_n+1}$ tak, že:

$$u_0 = a\,; \quad u_{h_{n+1}} = b\,; \quad 1 \leqq j \leqq h_{n+1} \Rightarrow W(u_{j-1}) \cap W(u_j) \neq \emptyset\,;$$
$$0 \leqq i \leqq h_{n+1}\,, \quad 0 \leqq j \leqq h_{n+1}\,, \quad |i - j| \geqq 2 \Rightarrow W(u_i) \cap W(u_j) = \emptyset\,.$$

Položme $U_j^{(n+1)} = W(u_j)$ pro $0 \leqq j \leqq h_{n+1}$. Pak jsou splněny vlastnosti $[1]_{n+1}$ až $[6]_{n+1}$ a mimo to platí ještě:

$[7]_n$ ke každému indexu i $(0 \leqq i \leqq h_{n+1})$ existuje takový index $\lambda(i)$ $[0 \leqq \lambda(i) \leqq h_n]$, že $\overline{U_i^{(n+1)}} \subset U_{\lambda(i)}^{(n)}$;

$[8]_n$ indexy $\lambda(i)$ je možno zvolit tak, že: $0 \leqq i < j \leqq h_{n+1} \Rightarrow \lambda(i) \leqq \leqq \lambda(j)$.

III. Můžeme tedy rekurentně pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ určit takové konečné posloupnosti bodových množin $\{U_i^{(n)}\}_{i=0}^{h_n}$, že pro všecka $n \in \boldsymbol{N}$ jsou splněny vlastnosti $[1]_n$ až $[8]_n$. Položme

$$G_n = \bigcup_{i=0}^{h_n} U_i^{(n)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Bodové množiny G_n jsou otevřené podle $[4]_n$ a **4.4.10** a souvislé podle $[2]_n$, $[5]_n$ a **10.1.5.** Ze $[7]_n$ plyne, že $\overline{G_{n+1}} \subset G_n$ $(n \in \boldsymbol{N})$, takže

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}\,.$$

IV. Jest $a \in C$, $b \in C$, neboť z $[1]_n$ plyne, že $a \in G_n$, $b \in G_n$ pro všecka n.

V. Množina C je kompaktní podle $[6]_n$, **9.1.20** a **9.4.7.**

VI. Množina C je souvislá. Není-li tomu tak, pak existují takové dvě oddělené množiny A, B, že $C = A \cup B$, $A \neq \emptyset \neq B$. Podle **5.1.15**, **5.4.9** a **9.1.8** existují takové dvě otevřené množiny X, Y, že $X \cap Y = \emptyset$, $A \subset X$, $B \subset Y$, tedy $C \subset X \cup Y$. Protože X, Y jsou otevřené, jest $P - (X \cup Y)$ uzavřená podle **4.4.10**, takže $\overline{G_{n+1} - (X \cup Y)} \subset \subset P - (X \cup Y)$. Protože $\overline{G_{n+1}} \subset G_n$, je tedy

$$\overline{G_{n+1} - (X \cup Y)} \subset G_n - (X \cup Y)\,.$$

Protože $\emptyset \neq A \subset C \cap X \subset G_n \cap X$, $\emptyset \neq B \subset C \cap Y \subset G_n \cap Y$, jest $G_n \cap X \neq \emptyset \neq G_n \cap Y$. Nyní množiny X, Y podle **5.1.9** a **5.1.12** jsou oddělené, takže podle **5.1.7** také $G_n \cap X$ a $G_n \cap Y$ jsou oddělené. Tudíž množina $(G_n \cap X) \cup (G_n \cap Y)$ není souvislá, takže není totožná s G_n, tj. $G_n - (X \cup Y) \neq \emptyset$ Ze $[6]_n$ a **9.4.7** plyne nyní snadno, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} [G_n - (X \cup Y)] \neq \emptyset$. Protože $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = C \subset X \cup Y$, je to nemožné.

VII. Budiž $c \in C$, $a \neq c \neq b$. Chceme dokázat, že c roztíná C mezi body a, b. Pro každé n jest $C \subset G_n$, takže musí existovat takový index s_n, že $0 \leqq s_n \leqq h_n$, $c \in U_{s_n}^{(n)}$. Zvolme takový index p, že

$$\frac{3}{p} < \varrho(a, c)\,, \quad \frac{3}{p} < \varrho(b, c)\,.$$

Z $[1]_n$, $[2]_n$ a $[6]_n$ plyne podle trojúhelníkové nerovnosti

$$\varrho(a, c) \leqq \frac{s_n + 1}{n}\,, \quad \varrho(b, c) \leqq \frac{h_n - s_n + 1}{n}\,,$$

takže

$$n \geqq p \Rightarrow 3 \leqq s_n \leqq h_n - 3\,.$$

Budiž

$$H_n = \bigcup_{i=0}^{s_n-3} U_i^{(n)}\,, \quad K_n = \bigcup_{i=s_n+3}^{h_n} U_i^{(n)} \quad (n \geqq p)\,,$$

$$H = \bigcup_{n=p}^{\infty} H_n\,, \quad K = \bigcup_{n=p}^{\infty} K_n\,.$$

Množiny H, K jsou otevřené podle $[4]_n$ a **4.4.10**; podle $[1]_n$ jest $a \in H$, $b \in K$. Budiž $x \in C$, $x \neq c$. Index m zvolme tak, aby bylo $m \geqq p$, $3 \,.\, m^{-1} < \varrho(c, x)$. Existuje takový index j, že $0 \leqq j \leqq h_m$, $x \in U_j^{(m)}$. Kdyby bylo $|s_m - j| \leqq 2$, pak by z $[2]_n$ a $[6]_n$ vyšlo pomocí trojúhelníkové nerovnosti, že $\varrho(c, x) \leqq 3 \,.\, m^{-1}$, a to je nemožné. Tudíž $|s_m - j| \geqq$ $\geqq 3$, takže $x \in H_m \cup K_m$. Tím je dokázáno, že $C - (c) \subset H \cup K$. Jestliže ještě dokážeme, že $H \cap K = \emptyset$, pak jsou H, K oddělené podle **5.1.9** a **5.1.12**, takže $H^* = H \cap [C - (c)]$, $K^* = K \cap [C - (c)]$ jsou oddělené podle **5.1.7**; protože $C - (c) = H^* \cup K^*$, $a \in K^*$, $b \in K^*$, roztíná c množinu C mezi body a, b. Zbývá odvodit spor z předpokladu $H \cap$ $\cap K \neq \emptyset$. Je-li však $H \cap K \neq \emptyset$, pak existuje takový bod x_0 a takové indexy $m \geqq p$, $r \geqq p$, že $x_0 \in H_m \cap K_r$. Jest buďto $r \leqq m$ nebo $r \geqq m$; budiž nejprve $r \leqq m$. Podle $[7]_n$ a $[8]_n$ $(r \leqq n < m)$ můžeme každému indexu i $(0 \leqq i \leqq h_m)$ přiřadit takový index $\mu(i)$ $[0 \leqq \mu(i) \leqq h_r]$, že $U_i^{(m)} \subset U_{\mu(i)}^{(r)}$ a že:

$$0 \leqq i < j \leqq h_m \Rightarrow \mu(i) \leqq \mu(j)\,.$$

Protože $x_0 \in H_m$, existuje takový index i_0, že $0 \leqq i_0 \leqq s_m - 3$, $x_0 \in U_{i_0}^{(m)}$, tedy $x_0 \in U_{\mu(i_0)}^{(r)}$. Protože $x_0 \in K_r$, existuje takový index j_0, že $s_r + 3 \leqq$ $\leqq j_0 \leqq h_r$, $x_0 \in U_{j_0}^{(r)}$. Protože $x_0 \in U_{\mu(i_0)}^{(r)} \cap U_{j_0}^{(r)}$, jest $|\mu(i_0) - j_0| \leqq 1$

podle $[3]_r$, takže $\mu(i_0) \geqq s_r + 2$. Protože $i_0 < s_m$, jest $\mu(i_0) \leqq \mu(s_m)$, tedy $\mu(s_m) \geqq s_r + 2$, takže $U^{(r)}_{\mu(s_m)} \cap U^{(r)}_{s_r} = \emptyset$ podle $[3]_r$. To je nemožné, neboť $c \in U^{(r)}_{s_r} \cap U^{(m)}_{s_m}$, $U^{(m)}_{s_m} \subset U^{(r)}_{\mu(s_m)}$. V případě $r \leqq m$ jsme hotovi. V případě $r \geqq m$ postupujeme zcela obdobně. Podle $[7]_n$ a $[8]_n$ $(m \leqq \leqq n < r)$ můžeme každému indexu i $(0 \leqq i \leqq h_r)$ přiřadit takový index $\mu(i)$ $[0 \leqq \mu(i) \leqq h_m]$, že $U^{(r)}_i \subset U^{(m)}_{\mu(i)}$ a že:

$$0 \leqq i < j \leqq h_r \Rightarrow \mu(i) \leqq \mu(j)\,.$$

Opět existují takové indexy i_0, j_0, že $0 \leqq i_0 \leqq s_m - 3$, $x_0 \in U^{(m)}_{i_0}$, $s_r + 3 \leqq j_0 \leqq h_r$, $x_0 \in U^{(r)}_{j_0}$. Protože $U^{(r)}_{j_0} \subset U^{(m)}_{\mu(j_0)}$, jest $x_0 \in U^{(m)}_{i_0} \cap U^{(m)}_{\mu(j_0)}$, takže $|\mu(j_0) - i_0| \leqq 1$ podle $[3]_m$, tedy $\mu(j_0) \leqq s_m - 2$. Protože $j_0 > s_r$, jest $\mu(j_0) \geqq \mu(s_r)$, tedy $\mu(s_r) \leqq s_m - 2$, takže $U^{(m)}_{s_m} \cap U^{(m)}_{\mu(s_r)} = \emptyset$ podle $[3]_m$. To je nemožné, neboť $c \in U^{(r)}_{s_r} \cap U^{(m)}_{s_m}$, tedy $U^{(r)}_{s_r} \subset U^{(m)}_{\mu(s_r)}$.

VIII. Ze IV, V, VI a VII soudíme podle **10.5.2**, **10.5.10**, **10.5.16**, **10.5.17** a **10.5.22**, že C je oblouk s koncovými body a, b.

11.2.2. Prostor P budiž topologicky úplný, souvislý a lokálně souvislý. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Pak existuje takové kontinuum $C \subset P$, že $a \in C$, $b \in C$.

Důkaz. I. Existuje takový kompaktní FH-prostor T, že P je G_δ-množina v T. Topologii prostoru T označme v. Existují takové otevřené $H_n \subset T$, že $P = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_n$.

II. Pro každý bod $x \in P$ jest H_1 okolím bodu x v prostoru T podle **4.4.13.** Podle **5.4.5** a **8.3.19** existuje takové okolí $U_1(x)$ bodu x v prostoru T, že $vU_1(x) \subset H_1$. Podle **4.6.2** jest $P \cap U_1(x)$ okolím bodu x v prostoru P. Lokálně souvislý prostor P je F-prostor (viz **4.6.10**). Z **11.1.12** tedy plyne, že existuje takové otevřené souvislé okolí $V_1(x)$ bodu x v prostoru P, že $V_1(x) \subset P \cap U_1(x)$. Podle **4.2.3** jest $P = \bigcup V_1(x)$ $(x \in P)$, takže podle **10.1.23** v prostoru P existuje taková konečná bodová posloupnost $\{x_{1i}\}_{i=0}^{h_1}$, že $a \in V_1(x_{10})$, $b \in V_1(x_{1h_1})$ a že: $1 \leqq i \leqq h_1 \Rightarrow V_1(x_{1,i-1}) \cap V_1(x_{1i}) \neq \emptyset$. Položme $G_1 = \bigcup\limits_{i=0}^{h_1} V(x_{1i})$. Pak jest $a \in G_1$, $b \in G_1$; množina G_1 je podle **4.4.10** otevřená v prostoru P a podle **10.1.5** je souvislá; protože $V_1(x) \subset U_1(x)$, jest $vG_1 \subset H_1$.

III. Předpokládejme nyní obecně, že pro určité $n \in \mathbf{N}$ je už dána taková souvislá otevřená $G_n \subset P$, že $a \in G_n$, $b \in G_n$, $vG_n \subset H_n$. Pro každý $x \in G_n$ podle **4.4.13** je H_{n+1} okolím bodu x v prostoru T. Podle **5.4.5** a **8.3.19** existuje takové okolí $U_{n+1}(x)$ bodu x v prostoru T, že $vU_{n+1}(x) \subset \subset H_{n+1}$. Prostor G_n je F-prostor podle **4.6.10** a je lokálně souvislý podle **11.1.8.** Podle **4.6.2** je $G_n \cap U_{n+1}(x)$ okolím bodu x v prostoru G_n. Z **11.1.12** tedy plyne, že existuje takové relativně otevřené souvislé okolí $V_{n+1}(x)$ bodu x v prostoru G_n, že $V_{n+1}(x) \subset G_n \cap U_{n+1}(x)$. Podle **4.2.3** jest $G_n = \bigcup V_{n+1}(x)$ $(x \in G_n)$, takže podle **10.1.23** v prostoru G_n existuje taková konečná bodová posloupnost $\{x_{n+1,i}\}_{i=0}^{h_{n+1}}$, že $a \in \in V_{n+1}(x_{n+1,0})$, $b \in V_{n+1}(x_{n+1,h_{n+1}})$ a že: $1 \leqq i \leqq h_{n+1} \Rightarrow V_{n+1}(x_{n+1,i-1}) \cap \cap V(x_{n+1,i}) \neq \emptyset$. Položme $G_{n+1} = \bigcup_{i=0}^{h_{n+1}} V_{n+1}(x_{n+1,i})$. Pak jest $a \in G_{n+1}$, $b \in G_{n+1}$, $G_{n+1} \subset G_n$; podle **4.4.10** a **4.6.7** množina G_{n+1} je otevřená v prostoru P a podle **10.1.5** je souvislá; protože $V_{n+1}(x) \subset U_{n+1}(x)$, jest $vG_{n+1} \subset H_{n+1}$.

IV. Můžeme tedy rekurentně definovat takovou posloupnost $\{G_n\}_1^{\infty}$, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ je G_n otevřená souvislá podmnožina prostoru P a že $a \in G_n$, $b \in G_n$, $G_{n+1} \subset G_n$, $vG_n \subset H_n$. Bodové množiny $vG_n \subset T$ jsou podle **10.1.7** souvislé a podle **8.3.1** kompaktní; jsou to tedy kontinua, neboť nejsou jednobodové, protože $a \in vG_n$, $b \in vG_n$. Dále jest $vG_{n+1} \subset vG_n$, takže $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} vG_n$ podle **10.3.4** je kontinuum obsahující body a, b. Protože $vG_n \subset H_n$, $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$, jest $C \subset P$.

11.2.3. Prostor P budiž topologicky úplný a lokálně souvislý. Pak konstituanty prostoru P jsou totožné s jeho komponentami. Budiž K komponenta prostoru P; podle **10.2.1** je K souvislá množina. Podle **11.1.9** je K otevřená v P; podle **9.4.15** je tedy K topologicky úplný prostor, který je lokálně souvislý podle **11.1.8.** Podle **11.2.2** je K semikontinuum. Tudíž K je konstituant prostoru P podle **10.3.18.**

11.2.24. Prostor P budiž topologicky úplný a lokálně souvislý. Jestliže uzavřená množina M rozpojuje P mezi body a, b, pak M roztíná P mezi a, b. Množina $P - M$ je otevřená, tudíž lokálně souvislá podle **11.1.8** a je topologicky úplným prostorem podle **9.4.15.** Tudíž tvrzení plyne z **10.4.1**, **10.4.8**, **11.1.13** a **11.2.3.**

11.3. Lokálně souvislá kontinua

11.3.1. Aby S-kompaktní prostor P byl lokálně souvislý, k tomu je nutné a stačí, aby předně P měl konečně mnoho komponent a aby za druhé každá komponenta byla lokálně souvislá.

Důkaz. I. Je-li P lokálně souvislý, pak podle **11.1.8** a **11.1.9** platí totéž o každé jeho komponentě. Kdyby komponent bylo nekonečně mnoho, pak by existovala nekonečná množina $M \subset P$, jejíž žádné dva body by neležely v téže komponentě. Podle **8.2.6** by existoval hromadný bod a množiny M. Existuje souvislé okolí U bodu a. Podle **10.2.2** množina $M \cap U$ je nejvýš jednobodová. To je nemožné podle **4.2.11.**

II. Podle **4.4.6** a **10.2.4** sjednocení konečně mnoha komponent je uzavřená množina. Z toho plyne, že je-li komponent konečně mnoho, je každá z nich otevřená. Je-li potom $a \in P$, pak komponenta K prostoru P obsahující bod a je okolím bodu a podle **4.4.13.** Jestliže K je lokálně souvislá, pak podle **11.1.1** a **11.1.4** je a bod lokální souvislosti prostoru P.

11.3.2. Budiž P FR-prostor. Nechť ke každému konečnému zakrytí $\mathfrak{G}$ prostoru P otevřenými množinami existuje takové konečné zakrytí $\mathfrak{S}$ prostoru P souvislými množinami, že každá $S \in \mathfrak{S}$ je částí některé $G \in \mathfrak{G}$. Pak P je lokálně souvislý S-kompaktní prostor.

Důkaz. I. Budiž U okolí bodu $a \in P$. Protože P je FR-prostor, existují takové otevřené množiny G, H, že $a \in H$, $\overline{H} \subset G \subset U$. Soustava dvou otevřených množin G, $P - \overline{H}$ zakrývá P. Tudíž existuje taková konečná posloupnost $\{S_i\}_1^n$ souvislých množin, že $\bigcup_{i=1}^{n} S_i = P$ a že pro každé

i platí buďto $S_i \subset G$ nebo $S_i \subset P - \overline{H}$. Můžeme předpokládat, že $a \in S_1$ a že existuje takový index m ($1 \leqq m \leqq n$), že

$$1 \leqq i \leqq m \Rightarrow a \in \overline{S}_i\,, \quad m + 1 \leqq i \leqq n \Rightarrow a \in P - \overline{S}_i\,.$$

Budiž $V = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$. Protože $a \in S_1$, jest $a \in V$, tedy $V = \bigcup_{i=1}^{m} [S_i \cup (a)]$, kde množiny $S_i \cup (a)$ obsahují bod a a podle **10.1.8** jsou souvislé, takže množina V podle **10.1.6** je souvislá. Je-li $1 \leqq i \leqq m$, jest $a \in \overline{S}_i \cap H$; podle **4.4.15** jest $S_i \cap H \neq \emptyset$, takže nemůže být $S_i \subset P - \overline{H}$, a tudíž musí být $S_i \subset G$. Protože $m + 1 \leqq i \leqq n \Rightarrow a \in P - \overline{S}_i$, jest $a \in P - \overline{P - V}$; tudíž V je okolím bodu a. Tím je dokázáno, že každé okolí U bodu a obsahuje souvislé okolí V bodu a, tj. a je bod lokální souvislosti prostoru P.

II. Jestliže P není S-kompaktní, pak podle **8.2.6** existuje taková nekonečná $M \subset P$, že $M' = \emptyset$. Zřejmě $X \subset M \rightarrow X' = \emptyset$, takže podle **4.4.2** každá $X \subset M$ je uzavřená množina. Existuje taková prostá bodová posloupnost $\{x_n\}_1^\infty$, že $x_n \in M$ pro všecka n. Budiž $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n) \subset M$. Pak množina $A - (x_n)$ je uzavřená, takže $(x_n) \cup (P - A)$ podle **4.4.13** je okolím bodu x_n. Protože P je FR-prostor, existuje takové otevřené okolí U_n bodu x_n, že $(x_n) = A \cap \overline{U}_n$. Budiž $V_1 = U_1$ a pro $n > 1$ budiž $V_n = U_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{U}_i$; podle **4.2.3** je $x_n \in V_n$; množina V_n je podle **4.4.6** a **4.4.11** otevřená, je tedy okolím bodu x_n podle **4.4.13.** Množiny V_n jsou zřejmě disjunktní. Množiny $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ a $P - A$ jsou otevřené a jest $G \cup (P - A) = P$. Tudíž existuje taková konečná soustava $\mathfrak{S}$ souvislých množin, že $\mathfrak{S}$ zakrývá P a že každá $S \in \mathfrak{S}$ je částí jedné z obou množin G, $P - A$. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ existuje taková $S_n \in \mathfrak{S}$, že $x_n \in S_n$. Protože soustava $\mathfrak{S}$ je konečná, existují takové dva navzájem různé indexy i, k, že $S_i = S_k$. Protože $x_i \in A \cap S_i$, nemůže být $S_i \subset P - A$, a tedy musí být $S_i \subset G$. Množina $G - V_i = \bigcup_n V_n$ ($n \neq i$) je otevřená; také V_i je otevřená. Podle **5.1.9** a **5.1.12** jsou tedy V_i, $G - V_i$ oddělené; protože $S_i \subset V_i \cup (G - V_i)$, $x_i \in S_i \cap V_i$ a protože S_i je souvislá, jest $S_i \cap (G - V_i) = \emptyset$ podle **10.1.3.** To je nemožné, neboť $x_k \in S_k \cap V_k \subset S_i \cap (G - V_i)$.

11.3.3. Budiž $P \neq \emptyset$ S-kompaktní lokálně souvislý prostor. Budiž $\mathfrak{G}$ konečné zakrytí prostoru P otevřenými množinami. Pak existuje takové konečné zakrytí $\mathfrak{S}$ prostoru P otevřenými souvislými množinami, že každá $S \in \mathfrak{S}$ je částí některé $G \in \mathfrak{G}$.

Důkaz. I. Můžeme předpokládat, že není $\emptyset \in \mathfrak{G}$. Jestliže všecky $X \in \mathfrak{G}$ jsou souvislé, není co dokazovat. V opačném případě zvolme $G_0 \in \mathfrak{G}$ tak, aby G_0 nebyla souvislá, a označme $\mathfrak{K}$ soustavu všech komponent množiny G_0. Budiž $\mathfrak{K}_1$ soustava všech $K \in \mathfrak{K}$ obsažených v $\bigcup X$ ($X \in \mathfrak{G}$, $X \neq G_0$); budiž $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K} - \mathfrak{K}_1$. Nechť soustava $\mathfrak{H}$ vznikne ze soustavy $\mathfrak{G}$ tím, že nejprve vynecháme množinu G_0 a potom připojíme všecky $K \in \mathfrak{K}_2$. Soustava $\mathfrak{H}$ zřejmě zakrývá P a podle **11.1.9** se skládá z otevřených množin. Množiny $K \in \mathfrak{K}$ jsou podle **10.2.1** souvislé; tudíž v soustavě $\mathfrak{H}$ je méně nesouvislých množin nežli v soustavě $\mathfrak{G}$. Dokážeme ještě, že soustava $\mathfrak{H}$ je konečná. Není-li tomu tak, pak existuje taková prostá posloupnost $\{K_n\}_1^\infty$ komponent množiny G_0 a taková bodová posloupnost $\{x_n\}_1^\infty$, že $x_n \in K_n - Q$ pro všecka n, kde $Q = \bigcup X (X \in \mathfrak{G}, X \neq G_0)$. Posloupnost $\{K_n\}$ je zřejmě disjunktní, takže posloupnost $\{x_n\}$ je prostá. Protože P je S-kompaktní, existuje hromadný bod a množiny $\bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n)$. Existuje taková $G \in \mathfrak{G}$, že $a \in G$. Budiž K ta komponenta množiny G, která obsahuje bod a. Podle **4.4.13** a **11.1.9** je K okolím bodu a. Podle **4.2.11** tedy existují takové dva různé indexy i, j, že $x_i \in K$, $x_j \in K$. Protože K je komponenta množiny $G \in \mathfrak{G}$ a protože $x_i \in P - Q$, plyne z definice množiny Q, že $G = G_0$. Oba body x_i, x_j náležejí tedy do téže komponenty K množiny G_0. Tudíž $K_i = K = K_j$. To je nemožné, neboť $K_i \neq K_j$.

II. Je-li dáno konečné zakrytí $\mathfrak{G}$ prostoru P otevřenými množinami, které nejsou všecky souvislé, můžeme podle I přejít od $\mathfrak{G}$ k takovému konečnému zakrytí $\mathfrak{H}$ otevřenými množinami, že každá $H \in \mathfrak{H}$ je částí některé $G \in \mathfrak{G}$ a že $\mathfrak{H}$ obsahuje méně nesouvislých množin než $\mathfrak{G}$. Konečným počtem takových přechodů dojdeme od soustavy $\mathfrak{G}$ k žádané soustavě $\mathfrak{S}$.

11.3.4. Pseudooblouk je lokálně souvislý prostor. Definující okolí bodu (viz definici **10.5.3**) jsou souvislá podle **10.5.6**, **10.5.9** a **10.5.16.**

11.3.5. B u d i ž P l o k á l n ě s o u v i s l ý p r o s t o r, i r e d u c i b i l n ě s o u v i s l ý m e z i b o d y a, b. P a k P j e p s e u d o o b l o u k s k o n c o v ý m i b o d y a, b. Označme u danou topologii prostoru P. Podle **10.5.9** existuje lineární orientace prostoru P, při které bod a je prvním a bod b posledním. Tato lineární orientace určuje podle definice **6.1.2** novou topologii v prostoru P, při které P je pseudooblouk s koncovými body a, b (viz důkaz věty **10.5.15**). Běží o důkaz, že $u = v$. Podle **10.5.5** je u jemnější než v, takže máme dokázat, že v je jemnější než u. Zvolme $c \in P$ a zvolme u-okolí U bodu c; podle **4.2.12** máme dokázat, že U je v-okolím bodu c. Protože prostor (P, u) je lokálně souvislý, existuje takové souvislé u-okolí U_1 bodu c, že $U_1 \subset U$. Podle **10.5.6** množina U_1 má tu vlastnost, že zvolíme-li kterékoli dva různé její body, pak U_1 obsahuje všecky body ležící mezi nimi. Ze **4.2.6** plyne nyní snadno, že můžeme předpokládat, že nastane jeden z těchto čtyř případů:

[1] $U_1 = (c)$;

[2] $U_1 = (c) \cup \mathscr{E}_x$ [α před x před c],

[3] $U_1 = (c) \cup \mathscr{E}_x$ [c před x před β],

[4] $U_1 = (c) \cup \mathscr{E}_x$ [α před x před β],

kde α v případech [2] a [3] je bod ležící před c, β v případech [2], [4] je bod ležící za c. Z definice topologie v plyne, že množina U_1 je v-okolím každého $x \in U_1 - (c)$, a tedy, protože u je jemnější než v, podle **4.2.12** též u-okolím každého $x \in U_1 - (c)$. Mimo to je U_1 také u-okolím bodu c, takže podle **4.2.8** a **4.4.12** množina U_1 je u-otevřená. Z toho plyne podle **10.5.6**, že případ [1] je nemožný, případ [2] je možný pouze pro $c = b$, případ [3] je možný pouze pro $c = a$. Podle definice topologie v je tedy U_1 v-okolím bodu c, takže podle **4.2.4** také $U \supset U_1$ je v-okolím bodu c.

11.3.6. P s e u d o k r u ž n i c e j e l o k á l n ě s o u v i s l ý p r o s t o r. Viz **10.6.23**, **11.1.14** a **11.3.4**.

11.3.7. B u d i ž P c y k l i c k ý p r o s t o r. J e - l i P l o k á l n ě s o u v i s l ý, p a k P j e p s e u d o k r u ž n i c e. Podle definice **10.6.9** máme ukázat, že P je kompaktní. Zvolme $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Podle **10.6.15** existují takové dvě uzavřené a mezi body a, b ireducibilně souvislé množiny S_1, S_2, že $S_1 \cup S_2 = P$, $S_1 \cap S_2 = (a) \cup (b)$. Podle **8.3.2** stačí ukázat, že S_1, S_2 jsou kompaktní, že tedy (viz **10.5.17**) to jsou pseudooblouky; důkaz stačí provést pro S_1. Podle **11.1.7** a **11.3.5** stačí dokázat, že každý bod $x \in S_1$ je bodem lokální souvislosti množiny S_1. Je-li $a \neq x \neq b$, pak $P - S_2$, a tedy též $S_1 \supset P - S_2$ je okolím bodu x, takže x je bodem lokální souvislosti množiny S_1 podle **11.1.3.** Zbývá ukázat, že také body a, b jsou body lokální souvislosti množiny S_1; stačí provést důkaz pro bod a. Budiž U okolí bodu a; máme dokázat, že existuje takové okolí V bodu a, že $V \subset U$ a že množina $S_1 \cap V$ je souvislá. Podle **4.2.6** můžeme předpokládat, že $b \in P - U$. Protože a je bod lokální souvislosti prostoru P, existuje takové souvislé okolí V bodu a, že $V \subset U$. Množiny $S_1 \cap V$, $S_2 \cap V$ jsou relativně uzavřené ve V podle **4.6.4**, množina $(S_1 \cap V) \cup (S_2 \cap V) = V$ je souvislá a také $(S_1 \cap V) \cap (S_2 \cap V) = (a)$ je souvislá. Tudíž $S_1 \cap V$ je souvislá podle **10.1.11.**

11.3.8. Budiž f oboustranně spojité zobrazení lokálně souvislého prostoru P na prostor P_1. Pak také P_1 je lokálně souvislý prostor. Budiž V okolí bodu $b \in P_1$. Podle **7.1.1** pro každý $x \in f^{-1}(b)$ je $f^{-1}(V)$ okolí bodu x, tudíž existuje souvislé okolí $U(x) \subset \subset f^{-1}(b)$ bodu $x \in P$. Množina $W = \bigcup U(x)$ $[x \in f^{-1}(b)]$ je podle **4.2.8** okolím množiny $f^{-1}(b) \subset P$, takže $f^1(W)$ je okolím bodu $b \in P_1$ podle **7.2.2.** Zřejmě $f^1(W) \subset V$. Pro $x \in f^{-1}(b)$ jest $x \in U(x)$, $f(x) = b$, tedy $b \in f^1[U(x)]$ a množina $f^1[U(x)]$ podle **10.1.12** je souvislá; podle **10.1.6** také množina $f^1(W) = \bigcup f^1[U(x)]$ $[x \in f^{-1}(b)]$ je souvislá. Tudíž b je bod lokální souvislosti prostoru P_1.

11.3.9. Budiž f spojité zobrazení lokálně souvislého kontinua P na H-prostor P_1. Pak P_1 je jednobodový nebo je to lokálně souvislé kontinuum. Prostor P_1 je kompaktní podle **8.3.15** a souvislý podle **10.1.12.** Z **8.3.23** a **11.3.8** plyne, že P_1 je lokálně souvislý.

11.3.10. Budiž f spojité zobrazení intervalu $\mathscr{E}_t[0 \leqq t \leqq 1] \subset \subset \mathbf{E}_1$ na více než jednobodový prostor P. Pak P je metrisovatelné lokálně souvislé kontinuum. P je metrisovatelný prostor podle **8.2.14** a **9.3.3.** P je lokálně souvislé kontinuum podle **10.5.16**, **10.5.17**, **10.5.20**, **11.3.4** a **11.3.9.**

11.3.11. Budiž P metrisovatelné lokálně souvislé kontinuum. Pak existuje spojité zobrazení intervalu $T = \mathscr{E}_t [0 \leqq t \leqq 1] \subset \mathbf{E}_1$ na P.

Důkaz. I. Budiž ϱ metrika v P. Pro $a \in P$, $\varepsilon > 0$ budiž $S(a, \varepsilon) = \mathscr{E}_x [\varrho(a, x) < \varepsilon]$.

II. Pro $x \in P$ budiž $V(x)$ ta komponenta množiny $S\left(x, \frac{1}{2^2}\right)$, která obsahuje bod x. Jest $x \in V(x)$; dále jest: $z_1 \in V(x)$, $z_2 \in V(x) \Rightarrow \varrho(z_1, z_2) < \frac{1}{2}$ podle trojúhelníkové nerovnosti; množina $V(x)$ je souvislá podle **10.2.1** a otevřená podle **9.1.6** a **11.1.9.** Protože P je kompaktní, plyne z **8.1.2**, že existuje taková konečná bodová posloupnost $\{x_\lambda\}_{\lambda=1}^{p}$, že $\bigcup_{\lambda=1}^{p} V(x_\lambda) = P$. Z **10.1.23** plyne snadno, že existuje taková konečná bodová posloupnost $\{y_i\}_1^{k_1}$, že $\{x_\lambda\}$ je vybrána z $\{y_i\}$, že každý bod y_i je roven některému x_λ a že: $1 \leqq i \leqq h - 1 \Rightarrow V(y_i) \cap V(y_{i+1}) \neq \emptyset$. Posloupnost $\{y_i\}_1^{h_1}$ můžeme ještě upravit několikerým opakováním posledního členu; tím docílíme, že číslo h_1 má tvar $2^{m_1} = 2^{N_1}$. Položme $U_i^{(1)} = V(y_i)$ $(1 \leqq i \leqq h_1)$.

III. Obecněji předpokládejme, že při určitém $n \in \mathbf{N}$ je dána konečná posloupnost bodových množin $\{U_i^{(n)}\}_{i=1}^{h_n}$ $(h_n = 2^{N_n})$ s těmito vlastnostmi:

$[1]_n$ $\bigcup_{i=1}^{h_n} U_i^{(n)} = P$;

$[2]_n$ $U_i^{(n)} \cap U_{i+1}^{(n)} \neq \emptyset$ pro $1 \leqq i \leqq h_n - 1$;

$[3]_n$ množiny $U_i^{(n)}$ $(1 \leqq i \leqq h_n)$ jsou otevřené;

$[4]_n$ množiny $U_i^{(n)}$ $(1 \leqq i \leqq h_n)$ jsou souvislé;

$[5]_n$ $z_1 \in U_i^{(n)}$, $z_2 \in U_i^{(n)} \Rightarrow \varrho(z_1, z_2) < 2^{-n}$ $(1 \leqq i \leqq h_n)$.

Pro $1 \leqq i \leqq h_n$, $x \in \overline{U_i^{(n)}}$ budiž $W_i(x)$ ta komponenta množiny $S(x, 2^{-n-2})$, která obsahuje bod x. Jest $x \in W_i(x)$; $z_1 \in W_i(x)$, $z_2 \in W_i(x) \Rightarrow \varrho(z_1, z_2) < 2^{-n-1}$; $W_i(x)$ je souvislá (viz **10.2.1**) a otevřená (viz **9.1.6** a **11.1.9**). Protože P je kompaktní a protože $P = (P - \overline{U_i^{(n)}}) \cup \bigcup W_i(x)$ $[x \in \overline{U_i^{(n)}}]$, existuje (viz **8.1.2**) taková konečná bodová posloupnost $\{z_\mu^{(i)}\}_{\mu=1}^{q_i}$, že $z_\mu^{(i)} \in \overline{U_i^{(n)}}$, $\bigcup_{\mu=1}^{q_i} W_i(z_\mu^{(i)}) \supset \overline{U_i^{(n)}}$. Podle $[2]_n$ můžeme předpokládat, že:

$$2 \leqq i \leqq h_n \Rightarrow z_1^{(i)} \in U_{i-1}^{(n)} \cap U_i^{(n)},$$
$$1 \leqq i \leqq h_{n-1} \Rightarrow z_{q_i}^{(i)} = z_1^{(i+1)}.$$

Protože množiny $\overline{U_i^{(n)}}$ podle $[4]_n$ a **10.1.7** jsou souvislé a množiny $\overline{U_i^{(n)}} \cap W_i(z_\mu^{(i)})$ podle **4.6.5** jsou relativně otevřené v $\overline{U_i^{(n)}}$, plyne z **10.1.23**, že existuje taková konečná bodová posloupnost $\{u_r^{(i)}\}_{r=1}^{k_i}$, že předně (při pevném i) $\{z_\mu^{(i)}\}$ je vybrána z $\{u_r^{(i)}\}$, za druhé každý bod $u_r^{(i)}$ je roven některému $z_\mu^{(i)}$, zejména $u_1^{(i)} = z_1^{(i)}$, $u_{k_i}^{(i)} = z_{q_i}^{(i)}$ a za třetí: $1 \leqq r \leqq k_i - 1 \Rightarrow W_i(u_r^{(i)}) \cap W_i(u_{r+1}^{(i)}) \neq \emptyset$. Posloupnost $\{u_r^{(i)}\}_{r=1}^{k_i}$ můžeme ještě několikerým opakováním posledního členu upravit tak, že $k_i = 2^{m_{n+1}}$, kde $m_{n+1} > 0$ nezávisí na i. Nyní z $h_n = 2^{N_n}$ posloupností $\{W_i(u_r^{(i)})\}_{r=1}^{2^{m_{n+1}}}$ sestavíme novou posloupnost $\{U_j^{(n+1)}\}_{j=1}^{h_{n+1}}$, kde $h_{n+1} = 2^{N_{n+1}}$, $N_{n+1} = N_n + m_{n+1}$. Do nové posloupnosti přijdou jeden po druhém nejprve všecky členy posloupnosti $\{W_1(u_r^{(1)})\}_{r=1}^{2^{m_{n+1}}}$, za nimi jeden po druhém všecky členy posloupnosti $\{W_2(u_r^{(2)})\}_{r=1}^{2^{m_{n+1}}}$ atd. Pak jsou splněny vlastnosti $[1]_{n+1}$ až $[5]_{n+1}$ a mimo to ze **4.4.15** se snadno odvodí, že platí ještě:

$$[6]_n \qquad 1 \leqq i \leqq h_n,\ 1 \leqq r \leqq 2^{m_{n+1}},\ j = (i-1)\,2^{m_{n+1}} + r \Rightarrow \Rightarrow U_j^{(n+1)} \cap U_i^{(n)} \neq \emptyset.$$

IV. Můžeme tedy rekurentně pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ určit konečné posloupnosti bodových množin $\{U_i^{(n)}\}_{i=1}^{h_n}$ tak, že platí $[1]_n$ až $[6]_n$ pro všecka n. Jest $h_n = 2^{N_n}$, $N_1 = m_1$, $N_{n+1} = N_n + m_{n+1}$, tedy $N_n = \sum_{s=1}^{n} m_s$. Ze $[2]_n$ nebo $[4]_n$ vidíme, že $U_i^{(n)} \neq \emptyset$; zvolme $z_i^{(n)} \in U_i^{(n)}$ ($n \in \mathbf{N}$, $1 \leqq i \leqq h_n$).

V. Pro $n \in \mathbf{N}$ definujme zobrazení f_n intervalu T do prostoru P takto. Je-li $t \in T$, pak existuje právě jeden takový index i ($1 \leqq i \leqq h_n = 2^{N_n}$), že

$$(i-1)\,.\,2^{-N_n} \leqq t \begin{cases} < i\,.\,2^{-N_n} & \text{v případě } i < h_n\,, \\ \leqq i\,.\,2^{-N_n} & \text{v případě } i = h_n\,. \end{cases}$$

Položme $f_n(t) = z_i^{(n)}$.

VI. Dokažme, že pro každé $t \in T$ posloupnost $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní v prostoru P, takže můžeme definovat zobrazení f intervalu T do P tak, že:

$$t \in T \Rightarrow f(t) = \lim f_n(t)\,.$$

Podle **8.3.3** a **9.4.10** je prostor P metricky úplný, takže je třeba pouze dokázat, že posloupnost $\{f_n(t)\}$ je Cauchyovská. Jest $f_n(t) = z_i^{(n)}$,

$f_{n+1}(t) = z_j^{(n+1)}$, kde indexy i, j jsou určeny předpisem vyloženým v V. Snadno se nahlédne, že existuje takový index r, že $1 \leqq r \leqq 2^{m_{n+1}}$, $j = (i - 1)\, 2^{m_{n+1}} + r$. Podle $[6]_n$ existuje bod $\xi \in U_j^{(n+1)} \cap U_i^{(n)}$. Protože $z_i^{(n)} \in U_i^{(n)}$, $z_j^{(n+1)} \in U_j^{(n+1)}$, plyne z $[5]_n$ podle trojúhelníkové nerovnosti, že

$$\varrho[f_n(t), f_{n+1}(t)] \leqq \varrho(z_i^{(n)}, \xi) + \varrho(\xi, z_j^{(n+1)}) < 2^{-n+1}\,.$$

Tudíž jest pro $m > n$:

$$(1) \quad \varrho[f_n(t), f_m(t)] \leqq \sum_{s=0}^{m-n-1} \varrho[f_{n+s}(t), f_{n+s+1}(t)] < \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-n-s+1} = 2^{-n+2}\,.$$

Tím je dokázáno, že $\{f_n(t)\}$ je Cauchyovská posloupnost. Mimo to z (1) se odvodí, že

$$(2) \qquad \varrho[f_n(t), f(t)] \leqq 2^{-n+2}\,.$$

VII. Dále dokažme, že zobrazení f je spojité. Budiž $t_0 \in T$, $a = f(t_0)$; budiž V okolí bodu a. Podle **7.1.1** stačí dokázat, že při vhodném $\varepsilon > 0$:

$$t \in T\,, \quad |t - t_0| < \varepsilon \Rightarrow f(t) \in V\,.$$

Existuje takové $\delta > 0$, že $S(a, \delta) \subset V$. Existuje takový index n, že $2^{-n+4} < \delta$. Položme $2^{-N_n} = \varepsilon$. Je-li $t \in T$, $|t - t_0| < \varepsilon$, pak existují takové indexy i, j, že:

$$\begin{gathered} f_n(t) = z_i^{(n)}\,, \quad f_n(t_0) = z_j^{(n)}\,, \\ (i-1)\,.\,2^{-N_n} \leqq t \leqq i\,.\,2^{-N_n}\,, \\ (j-1)\,.\,2^{-N_n} \leqq t_0 \leqq j\,.\,2^{-N_n}\,; \end{gathered}$$

protože $|t - t_0| < 2^{-N_n}$, jest $|i - j| \leqq 1$. Tudíž ze $[2]_n$ plyne, že existuje bod $\xi \in U_i^{(n)} \cap U_j^{(n)}$; protože $z_i^{(n)} \in U_i^{(n)}$, $z_j^{(n)} \in U_j^{(n)}$, jest:

$$\varrho[f_n(t), f_n(t_0)] \leqq \varrho(z_i^{(n)}, \xi) + \varrho(\xi, z_j^{(n)}) < 2^{-n+1}$$

podle $[5]_n$. Ze (2) však plyne

$$\varrho[f_n(t), f(t)] \leqq 2^{-n+2}\,, \quad \varrho[f_n(t_0), f(t_0)] \leqq 2^{-n+2}\,.$$

Tudíž

$$\begin{aligned} \varrho[f(t), f(t_0)] &\leqq \varrho[f(t), f_n(t)] + \varrho[f_n(t), f_n(t_0)] + \varrho[f_n(t_0), f(t_0)] \leqq \\ &\leqq 2^{-n+2} + 2^{-n+1} + 2^{-n+2} < 2^{-n+4} < \delta \end{aligned}$$

neboli $\varrho[f(t), a] < \delta$, tj. $f(t) \in S(a, \delta) \subset V$.

VIII. Zbývá dokázat, že f je zobrazení intervalu T *na* P, tj., že $f^1(T) = P$. Podle **8.2.14** a **9.1.20** je T kompaktní, podle **8.3.15** také $f^1(T)$.

je kompaktní. Protože P je H-prostor (viz **9.1.5**), je množina $f^1(T)$ uzavřená v P (viz **8.3.13**). Podle **4.9.2** tedy stačí dokázat, že $f^1(T)$ je hustá v P. Budiž $a \in P$, $\delta > 0$. Podle **4.9.3** stačí dokázat, že existuje takové $t \in T$, že $\varrho[f(t), a] < \delta$. Existuje takový index n, že $2^{-n+3} < \delta$. Podle $[1]_n$ existuje takový index i, že $1 \leqq i \leqq h_n$, $a \in U_i^{(n)}$. Budiž $t = (i - 1) \,.\, 2^{-N_n}$. Pak jest $t \in T$, $f_n(t) = z_i^{(n)} \in U_i^{(n)}$, takže $\varrho[f_n(t), a] < 2^{-n}$ podle $[5]_n$. Protože $\varrho[f_n(t), f(t)] \leqq 2^{-n+2}$ [viz (2)], jest $\varrho[f(t), a] < 2^{-n+2} + 2^{-n} < 2^{-n+3} < \delta$.

11.3.12. Nechť FHL-prostor P je kontinuum. Nechť $a \in P$ není bodem lokální souvislosti prostoru P. Pak existuje takové kontinuum $C \subset P$, že $a \in C$ a že žádný $x \in C$ není bodem lokální souvislosti prostoru P.

Důkaz. I. Existuje otevřené okolí U bodu a, které neobsahuje žádné souvislé okolí bodu a. Podle **5.4.5** a **8.3.19** existuje takové otevřené okolí V bodu a, že $\overline{V} \subset U$. Budiž H ta komponenta prostoru U, která obsahuje bod a; protože množina H je souvislá (viz **10.2.2**), není H okolím bodu a, takže $a \in \overline{P - H} = \overline{P - U} \cup \overline{U - H}$; protože U jest okolí bodu a, jest $a \in P - \overline{P - U}$, tudíž $a \in \overline{U - H}$. Protože P je L-prostor, existuje taková bodová posloupnost $\{a_n\}$, že $a_n \in U - H$, $\lim a_n = a$. Budiž A_n ta komponenta množiny U, která obsahuje bod a_n; protože $a_n \in U - H$, jest $H \cap A_n = \emptyset$. Protože $a \in U$, $\lim a_n = a$, $a_n \in A_n$, jest $a \in U \cap \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ (viz **6.3.7**); protože $a \in H$, $H \cap A_n = \emptyset$, neleží bod a v množině $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; tato množina tedy není relativně uzavřená v U a z toho plyne snadno (viz **4.4.6** a **10.2.4**), že je nekonečně mnoho různých A_n. Ze **6.3.3** plyne, že můžeme předpokládat, že všecky A_n jsou navzájem různé. Protože V je okolí bodu a a protože $\lim a_n = a$, můžeme předpokládat, že $a_n \in V$ pro všecka n.

II. Množina $A_n \subset U$ je souvislá (viz **10.2.1**), takže $\overline{A}_n$ buďto je jednobodová nebo je to kontinuum (viz **8.3.1** a **10.1.7**). Zřejmě $U \neq P$, takže $\overline{A}_n - U \neq \emptyset$ podle **4.8.6** a **10.3.7.** Tudíž $\overline{A}_n$ je kontinuum a jest $\overline{A}_n - \overline{V} \neq \emptyset$. Na druhé straně jest $a_n \in \overline{A}_n \cap \overline{V}$; budiž B_n ta komponenta množiny $\overline{A}_n \cap \overline{V}$, která obsahuje bod a_n. Podle **10.2.1** je B_n souvislá. Podle **4.6.4** je $\overline{A}_n \cap \overline{V}$ relativně uzavřená v $\overline{A}_n$; tudíž z **10.3.6** (kde za P, F, Q dosadíme $\overline{A_n}$, $\overline{A_n} \cap \overline{V}$, B_n) plyne (viz též **4.8.16**), že existuje bod $b_n \in B_n \cap \operatorname{Fr} \overline{V}$.

III. Budiž C množina všech $x \in P$ s tou vlastností, že pro každé okolí W bodu x je nekonečně mnoho takových n, že $W \cap B_n \neq \emptyset$. Podle **10.3.5** je C buďto jednobodová nebo je to kontinuum. Zřejmě $a \in C$. Protože $B_n \subset A_n$, $b_n \in B_n$ a protože A_n jsou navzájem různé komponenty téže bodové množiny, jsou body b_n navzájem různé. Podle **8.2.6** a **8.3.3** existuje hromadný bod b množiny $\bigcup_{n=1}^{\infty} (b_n)$. Zřejmě $b \in C$. Protože $b_n \in \operatorname{Fr} \overline{V}$, jest $b \in \operatorname{Fr} \overline{V}$ podle **4.8.8.** Podle **4.8.6** a **4.8.10** je $b \in P - V$, tedy $b \neq a$. Tudíž C není jednobodová a je to tedy kontinuum.

IV. Zbývá odvodit spor z předpokladu, že $c \in C$ je bod lokální souvislosti prostoru P. Z definice množiny C a ze vztahu $B_n \subset \overline{V}$ plyne, že $C \subset \overline{V} \subset U$. Souvislá množina $C \subset U$ obsahuje bod a komponenty H množiny U, takže $C \subset H$ pod e **10.2.2.** Otevřená množina U je okolím bodu c podle **4.4.13**; je-li c bod lokální souvislosti prostoru P, existuje souvislé okolí $S \subset U$ bodu c; protože $c \in H$ a protože H je komponenta množiny U, jest $S \subset H$ podle **10.2.2.** Protože S je okolí bodu $c \in C$, existuje takové n, že $B_n \cap S \neq \emptyset$. Protože $B_n \subset A_n$, $S \subset H$, jest $A_n \cap$ $\cap H \neq \emptyset$. To je nemožné, neboť H, A_n jsou dvě různé komponenty množiny U.

11.4. Cvičení k § 11

Prostory P_1 až P_7 byly popsány v definicích **10.7.1** až **10.7.7.**

11.4.1. Prostory P_4, P_6 jsou lokálně souvislé. Prostor P_4 má tu vlastnost, že každé do něho vnořené kontinuum je lokálně souvislé. Má také prostor P_6 tuto vlastnost?

11.4.2. Které body jsou body lokální souvislosti prostorů P_1, P_2, P_3, P_5, P_7?

11.4.3. Každé lokálně souvislé kontinuum vnořené do P_5 je oblouk.

11.4.4. P_1, P_2 buďtež F-prostory. Pro každou $X_1 \subset P_1$ otevřenou v P_1 a pro každou $X_2 \subset P_2$ otevřenou v P_2 nechť každá komponenta množiny $X_1 \times X_2$ je otevřená v $P_1 \times P_2$. Pak prostor $P_1 \times P_2$ je lokálně souvislý.

11.4.5. Buďtež P_1, P_2 lokálně souvislé prostory. Budiž f spojitá funkce v oboru $P_1 \times P_2$. Budiž $M \subset P_1 \times P_2$. Nechť pro každý bod $a \in M$ platí:

$$x \in P_1 \times P_2\,, \quad f(x) = f(a) \Rightarrow x = a\,.$$

Pak žádný bod $x \in P_1 \times P_2$ není hromadným bodem množiny M. (Viz cvič. **10.8.11**)

11.4.6. Jsou-li $M_1 \subset P$, $M_2 \subset P$ lokálně souvislé množiny a je-li $M_1 \cup M_2 = P$, nemusí prostor P být lokálně souvislý. Příklad: $P = P_5$. Proto v **11.1.14** nelze vynechat slovo „uzavřený"; lze je však nahradit slovem „otevřený".

11.4.7. Budiž $a = (0, 0)$. Pak a je bod lokální souvislosti F-prostoru P_7. Avšak každé otevřené souvislé okolí bodu a musí obsahovat bod $(1, 0)$.

11.4.8. Budiž P množina všech těch bodů $(x, y) \in \mathbf{E}_2$, které mají aspoň jednu iracionální souřadnici. Pak P je souvislý a lokálně souvislý topologicky úplný prostor.

11.4.9. Budiž P lokálně souvislý prostor. Budiž A lokálně souvislá uzavřená bodová množina. Budiž B sjednocení některých konečně nebo nekonečně mnoha komponent množiny $P - A$. Pak $A \cup B$ je uzavřená lokálně souvislá množina.

11.4.10. Aby prostor P byl lokálně souvislý, k tomu je nutné a stačí, aby byla splněna tato podmínka: Je-li $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ soustava bodových množin, je-li $A = \bigcup X$, $B = \bigcup \operatorname{Fr} X$ $(X \in \mathfrak{M})$, pak $\overline{A} \subset A \cup \overline{B}$.

11.4.11. Budiž P více než jednobodový H-prostor. Aby existovalo spojité zobrazení prostoru $\mathbf{E}_1$ na prostor P, k tomu je nutné a stačí, aby existovala taková posloupnost $\{K_n\}_1^\infty$ metrisovatelných lokálně souvislých kontinuí, že $K_n \subset K_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$, $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

11.4.12. Budiž $\mathbf{N}$ množina všech celých kladných čísel, Z množina všech (racionálních i iracionálních) záporných čísel; budiž u přirozená topologie v $\mathbf{E}_1$. Uvažujme prostor $P = \mathbf{N} \cup Z \cup (0)$ v takto definované topologii: Budiž $X \subset P$. Jest $Z \cap \overline{X} = Z \cap u(X \cap Z)$. Jest $0 \in \overline{X}$ právě tehdy, jestliže buďto $0 \in X$ nebo množina $\mathbf{N} \cap X$ je nekonečná. V případě $0 \in u(X \cap Z)$ budiž $\mathbf{N} \subset \overline{X}$, jinak budiž $\mathbf{N} \cap \overline{X} = \mathbf{N} \cap X$. Pak bod 0 není bodem lokální souvislosti prostoru P; nicméně v prostoru P každá komponenta každé otevřené množiny je otevřená. Z toho plyne, že v **11.1.10** nelze vynechat předpoklad, že P je F-prostor.