§ 10. SOUVISLÉ MNOŽINY

10.1. Pojem souvislosti

Definice **10.1.1.** Bodová množina $M \subset P$ se nazývá *souvislá*, jestliže $M \neq \emptyset$ a jestliže ze vztahu $M = A \cup B$, $A \neq \emptyset \neq B$ plyne, že množiny A, B nejsou oddělené (viz definici **5.1.1**).

10.1.1. Budiž Q vnořen do P. Budiž $M \subset Q$. Množina M je právě tehdy souvislá v prostoru Q, je-li souvislá v prostoru P. Viz **5.1.3.**

10.1.2. Jednobodová množina je souvislá. Viz **5.1.1.**

10.1.3. Bodové množiny $A \subset P$, $B \subset P$ buďtež oddělené; bodová množina $S \subset A \cup B$ budiž souvislá. Pak je buďto $S \subset A$, $S \cap B = \emptyset$ nebo $S \subset B$, $S \cap A = \emptyset$. Podle **5.1.7** jsou $S \cap A$, $S \cap B$ oddělené. Protože $S = (S \cap A) \cup (S \cap B)$ je souvislá, je buďto $S \cap A = \emptyset$, tedy $S \subset B$, nebo $S \cap B = \emptyset$, tedy $S \subset A$.

10.1.4. Jestliže každé dva navzájem různé body a, b prostoru $P \neq \emptyset$ jsou obsaženy v souvislé $S(a, b) \subset P$, pak prostor P je souvislý. Nechť naopak $P = A \cap B$, $A \neq \emptyset \neq B$ s oddělenými A, B. Zvolme $a \in A$, $b \in B$. Pak je $A \cap S(a, b) \neq \emptyset \neq B \cap S(a, b)$. Protože $S(a, b)$ je souvislá, je to podle **10.1.3** nemožné.

10.1.5. Buďtež $S_1 \subset P$, $S_2 \subset P$ souvislé bodové množiny. Je-li $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, je také $S_1 \cup S_2$ souvislá. Zřejmě $S_1 \cup S_2 \neq \emptyset$. Budiž $S_1 \cup S_2 = A \cup B$; množiny A, B buďtež oddělené. Máme dokázat, že buďto $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$. Nechť naopak $A \neq \emptyset \neq B$. Z **10.1.3** plyne jednak, že buďto $S_1 \cap A = \emptyset$ nebo $S_1 \cap B = \emptyset$, jednak, že buďto $S_2 \cap A = \emptyset$ nebo $S_2 \cap B = \emptyset$. Jsou čtyři možnosti: [1] $S_1 \cap A = S_2 \cap A = \emptyset$; [2] $S_1 \cap B = S_2 \cap B = \emptyset$; [3] $S_1 \cap A = S_2 \cap$

$\cap B = \emptyset$; [4] $S_1 \cap B = S_2 \cap A = \emptyset$. Avšak [1] dává $A = \emptyset$, [2] dává $B = \emptyset$, [3] nebo [4] dává $S_1 \cap S_2 = \emptyset$; to vše je nemožné.

10.1.6. Budiž $a \in P$. Budiž $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ soustava souvislých bodových množin, z nichž každá obsahuje bod a. Pak množina $T = \bigcup X$ ($X \in \mathfrak{M}$) je souvislá. Zřejmě $T \neq \emptyset$. Budiž $b_1 \in T$, $b_2 \in T$. Existují takové $S_1 \in \mathfrak{M}$, $S_2 \in \mathfrak{M}$, že $b_1 \in S_1$, $b_2 \in S_2$. Jest $b_1 \in S_1 \cup S_2$, $b_2 \in S_1 \cup S_2$ a z **10.1.5** plyne, že množina $S_1 \cup S_2$ je souvislá. Tudíž T je souvislá podle **10.1.4.**

10.1.7. Jestliže množina $S \subset P$ je souvislá, pak také $\overline{S}$ je souvislá. Zřejmě $\overline{S} \neq \emptyset$. Buďtež A, B oddělené a budiž $\overline{S} = A \cup B$; máme dokázat, že je buďto $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$. Podle **10.1.1** můžeme předpokládat $\overline{S} = P$. Pak jsou A, B disjunktní a uzavřené podle **5.1.5.** Podle **10.1.3** je buďto $S \subset A$ nebo $S \subset B$, takže podle **4.4.7** je buďto $\overline{S} \subset A$ nebo $\overline{S} \subset B$; z toho plyne snadno, že $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$.

10.1.8. $S \subset P$ budiž souvislá. Je-li $S \subset T \subset \overline{S}$, pak také T je souvislá. To plyne z **10.1.1** a **10.1.7**, neboť $T = T \cap \overline{S}$ je relativní uzávěr množiny S v prostoru T.

10.1.9. Budiž $A \subset P$, $S \subset P$. S budiž souvislá; budiž $A \cap S \neq \emptyset \neq S - A$. Pak je $S \cap \operatorname{Fr} A \neq \emptyset$. Jest $P = A \cup (P - A) = \overline{A} \cup \overline{P - A}$, tudíž $S = (S \cap \overline{A}) \cup (S \cap \overline{P - A})$. Protože $S \cap \overline{A} \supset S \cap A \neq \emptyset$, $S \cap \overline{P - A} \supset S - A \neq \emptyset$ a protože S je souvislá, nemohou $S \cap \overline{A}$, $S \cap \overline{P - A}$ být oddělené; jsou však relativně uzavřené ve svém sjednocení S, takže podle **5.1.5** nemohou být disjunktní. Tudíž $S \cap \overline{A} \cap \overline{P - A} \neq \emptyset$ neboli $S \cap \operatorname{Fr} A \neq \emptyset$.

10.1.10. Budiž P souvislý prostor. Bodová množina S budiž buďto prázdná nebo souvislá. Budiž $P - S = A \cup B$ s oddělenými A, B. Pak každá z obou množin $S \cup A$, $S \cup B$ je buďto prázdná nebo souvislá. Stačí uvažovat $S \cup A$. Budiž $S \cup A = H \cup K$ s oddělenými H, K. Máme dokázat, že buďto $H = \emptyset$ nebo $K = \emptyset$. Jelikož $S \subset H \cup K$, je podle **10.1.3** buďto $S \subset H$ nebo $S \subset K$. Bez újmy na obecnosti budiž $S \subset H$. Protože $S \cup A = H \cup K$, $S \subset H$, je $K \subset A$ (viz **5.1.1**). Množiny K, B jsou oddělené podle **5.1.13**, takže K, $H \cup B$ jsou oddělené podle **5.1.14.** Avšak snadno se zjistí, že

$P = K \cup (H \cup B)$. Podle **10.1.3** je tedy buďto $K = \emptyset$ nebo $H \cup B = \emptyset$, a tedy $H = \emptyset$.

10.1.11. Bodové množiny $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ buďtež uzavřené. Bodové množiny $A \cup B$, $A \cap B$ buďtež souvislé. Pak také množiny A, B jsou souvislé. Podle **4.4.7** je $\overline{A - B} \subset A$, tedy $\overline{A - B} \cap (B - A) = \emptyset$ a podobně též $\overline{B - A} \cap (A - B) = \emptyset$, takže množiny $A - B$, $B - A$ jsou oddělené podle **5.1.2.** Tudíž jsou splněny předpoklady věty **10.1.10**, jestliže do ní za P, S, A, B dosadíme po řadě $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$. Z toho plyne (viz **10.1.1**), že množiny $A = (A \cap B) \cup (A - B)$, $B = (A \cap B) \cup (B - A)$ jsou souvislé (neboť $A \neq \emptyset \neq B$).

10.1.12. Budiž f spojité zobrazení souvislého prostoru P na prostor P_1. Pak také P_1 je souvislý. Zřejmě $P_1 \neq \emptyset$. Budiž $P_1 = A \cup B$ s oddělenými A, B. Máme dokázat, že buďto $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$. Jest $P = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ a množiny $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ jsou oddělené podle **7.1.13.** Protože P je souvislý, jest $f^{-1}(A) = \emptyset$ nebo $f^{-1}(B) = \emptyset$, a tedy $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$.

10.1.13. Buďtež u, v dvě topologie v množině P. Je-li u jemnější než v a je-li $S \subset P$ souvislá při topologii u, je S souvislá i při topologii v. Topologie u (v) prostoru P určuje topologii u^* (v^*) vnořeného prostoru S; zřejmě u^* je jemnější než v^*. Je-li množina S souvislá při topologii u, je prostor (S, u^*) souvislý podle **10.1.1.** Ze **7.1.11** a **10.1.12** plyne, že také prostor (S, v^*) je souvislý, takže podle **10.1.1** množina S je souvislá při topologii v.

10.1.14. Budiž u F-modifikace topologie v v množině P. Nechť množina $S \subset P$ je buďto uzavřená v (P, v) nebo otevřená v (P, v) nebo je průnikem množiny uzavřené v (P, v) s množinou otevřenou v (P, v). Je-li S souvislá při topologii u, pak S je souvislá i při topologii v. Definujme u^*, v^* stejně jako v předešlém důkazu. Jestliže S není souvislá při topologii v, plyne z **5.1.5**, že $S = A \cup B$, kde $A \neq \emptyset \neq B$, $A \cap B = \emptyset$ a množiny A, B jsou relativně uzavřené v (S, v^*). Podle **4.6.8** je $A = S \cap F$, kde F je uzavřená v (P, v). Z definice topologie u plyne, že F je uzavřená v (P, u), takže podle **4.6.4** množina $A = S \cap F$ je relativně uzavřená v (S, u^*). Podobně též B je relativně uzavřená v (S, u^*). Protože $S = A \cup B$, $A \neq \emptyset \neq B$, $A \cap B = \emptyset$, plyne z **5.1.5**, že S není souvislá při topologii u.

10.1.15. Budiž $P \neq \emptyset$ uspořádaný prostor. Aby P byl souvislý, k tomu je nutné a stačí, aby v P nebyly ani skoky ani mezery.

Důkaz. I. Je-li (A, B) skok nebo mezera v P, plyne snadno z definice **6.1.2**, že množiny A, B jsou otevřené v P. Protože $A \cup B = P$, $A \cap B = \emptyset$, jsou A, B oddělené podle **5.1.6**. Protože $A \neq \emptyset \neq B$, není P souvislý.

II. Nechť P není souvislý. Pak je $P = A \cup B$, kde $A \neq \emptyset \neq B$ a množiny A, B jsou oddělené. Zvolme $a \in A$, $b \in B$. Podle **5.1.1** je $a \neq b$; můžeme předpokládat, že v P leží a před b. Definujme množinu $C \subset P$ takto. Bod $x \in P$ zařadíme do C právě tehdy, jestliže předně x leží před b a za druhé buďto je $x \in A$ nebo existuje $y \in A$, který leží mezi x a b. Položme ještě $D = P - C$. Zřejmě $a \in C$, $b \in D$, tedy $C \neq \emptyset \neq D$. Mimo to je patrné, že:

$$x \in C\,, \quad z \in P\,, \quad z \text{ před } x \Rightarrow z \in C\,.$$

Tudíž (C, D) je řez v uspořádané množině P. Rozeznáváme dva případy.

III. První případ. V množině C existuje poslední prvek c. Snadno zjistíme, že c leží před b, že $c \in A$ a že žádný $y \in A$ neleží mezi c a b. Podle **5.1.2** je $c \in P - \overline{B}$. Tudíž podle **4.2.9** a podle definice **6.1.2** existuje takové okolí zprava U bodu c, že $U \cap B = \emptyset$. Můžeme předpokládat, že všecky body $y \in U$ leží před b; pak je zřejmě $U \cap A = (c)$. Protože $A \cup B = P$, jest $U = (c)$. Z toho plyne podle **6.1.1**, že existuje $d \in P$, který leží přímo za c. Zřejmě je d první prvek v množině D. Tudíž (C, D) je skok.

IV. Druhý případ. V množině C neexistuje poslední prvek. Jestliže v množině D neexistuje první prvek, jest (C, D) mezera a důkaz je hotov. Nechť tedy d je první prvek v množině D. Snadno se nahlédne, že $d \in B$, že buďto $d = b$ nebo d leží před b a že žádný $y \in A$ neleží mezi d a b. Podle **5.1.2** je $d \in P - \overline{A}$. Tudíž podle **4.2.9** a podle definice **6.1.2** existuje takové okolí zleva U bodu d, že $U \cap A = \emptyset$. Kdyby bylo

$x \in U \cap B$, $x \neq d$, pak by x ležel před b a mezi x a b by neležel žádný $y \in A$, takže by bylo $x \in D$; to je nemožné, protože by pak $x \in D$ ležel před prvním prvkem $d \in D$. Tudíž $U \cap B = (d)$. Protože $A \cup B = P$, jest $U = (d)$. Protože $d \in D$ není prvním v množině P, plyne ze **6.1.1**, že existuje $c \in P$, který leží přímo před d. Zřejmě je c poslední v množině C a to je nemožné.

10.1.16. Aby bodová množina $T \subset \mathbf{E}_1$ byla souvislá, k tomu je nutné a stačí, aby buďto T byla jednobodová nebo aby to byl interval. Zejména prostor $\mathbf{E}_1$ je sám souvislý. Viz **10.1.15.**

10.1.17. Souvislá množina je buďto jednobodová nebo nekonečná.

10.1.18. Budiž P prostor. Budiž f spojitá funkce v oboru P. Je-li množina $S \subset P$ souvislá a obsahuje-li $f^1(S)$ více než jedno číslo, pak $f^1(S)$ je interval. Viz **10.1.12** a **10.1.16.**

10.1.19. Budiž P souvislý úplně regulární prostor. Jestliže P není jednobodový, jest moh $P \geqq \exp \aleph_0$. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Podle **4.4.3** a podle definice **8.4.1** existuje taková spojitá funkce f v oboru P, že $f(a) = 0$, $f(b) = 1$. Podle **2.3.4** a **10.1.18** je moh $f^1(P) = \exp \aleph_0$, takže moh $P \geqq \exp \aleph_0$.

10.1.20. Souvislý FR-prostor je jednobodový nebo nespočetný. Jinak by podle **10.1.17** existoval spočetný souvislý FR-prostor P a to je podle **10.1.19** nemožné, protože podle **5.4.10** a **8.4.3** by P byl úplně regulární.

10.1.21. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $P(z)$ souvislý prostor. Budiž $R = \mathfrak{P} P(z)$ $(z \in \mathbf{C})$. Pak také R je souvislý prostor.

Důkaz. I. Nechť prostory P_1, P_2 jsou souvislé. Dokážeme, že také $P_1 \times P_2$ je souvislý. Budiž $a \in P_1 \times P_2$, $b \in P_1 \times P_2$, $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$. Podle **10.1.4** stačí udat takovou souvislou $S \subset P_1 \times P_2$, že $a \in S$, $b \in S$. Protože P_1 je souvislý, soudíme ze **6.2.7**, že také množina $S_1 = P_1 \times (a_2)$ je souvislá; podobně též množina $S_2 = (b_1) \times P_2$ je souvislá. Protože $(b_1, a_2) \in S_1 \cap S_2$, je množina $S = S_1 \cup S_2$ souvislá podle **10.1.5** a jest $a \in S$, $b \in S$.

II. Je-li $\mathbf{C}$ konečná, soudíme z I indukcí, že prostor R je souvislý. V případě nekonečné $\mathbf{C}$ vedeme důkaz nepřímo. Jestliže R není souvislý, jest $R = A \cup B$, kde $A \neq \emptyset \neq B$ a množiny A, B jsou oddělené. Zvolme $a \in A$, $b \in B$. Z **5.1.6** plyne, že množina $B \subset P$ je otevřená, takže B je okolí bodu b podle **4.4.13.** Tudíž existuje taková konečná část $K \neq \emptyset$ množiny $\mathbf{C}$, že $\mathfrak{P}_z U(z) \subset B$, kde pro $z \in K$ je $U(z)$ vhodně volené okolí bodu $b(z) \in P(z)$ a pro $z \in \mathbf{C} - K$ je $U(z) = P(z)$. Budiž c ten bod prostoru R, pro který

$$z \in K \Rightarrow c(z) = b(z)\,, \quad z \in \mathbf{C} - K \Rightarrow c(z) = a(z)\,.$$

Podle **4.2.3** je $c \in B$. Budiž Q množina těch $x \in R$, pro něž platí

$$z \in \mathbf{C} - K \Rightarrow x(z) = a(z)\,;$$

dále budiž $T = \mathfrak{P}P(t)$ $(t \in K)$. Protože množina $K \neq \emptyset$ je konečná, je T souvislý prostor. Zřejmě existuje takové prosté zobrazení f prostoru T na množinu Q, že pro $x \in T$, $t \in K$ splyne t-souřadnice bodu x s t-souřadnicí bodu $f(x)$. Snadno se zjistí, že zobrazení f je homeomorfní, takže množina $Q = f^1(T)$ je souvislá. Jest $Q \subset R = A \cup B$ s oddělenými A, B. Podle **10.1.3** je tedy buďto $Q \cap A = \emptyset$ nebo $Q \cap B = \emptyset$. To je nemožné, neboť $a \in Q \cap A$, $c \in Q \cap B$.

10.1.22. Budiž f inversně spojité zobrazení prostoru P na prostor P_1. Pro každý $y \in P_1$ budiž $f^{-1}(y)$ souvislá množina. Je-li $S_1 \subset P_1$ souvislá, je také $S = f^{-1}(S_1)$ souvislá. Zřejmě $S \neq \emptyset$. Kdyby S nebyla souvislá, existovaly by v P takové oddělené množiny A, B, že $A \neq \emptyset \neq B$, $A \cup B = S$. Budiž $A_1 = f^1(A)$, $B_1 = f^1(B)$, takže $A_1 \neq \emptyset \neq B_1$, $A_1 \cup B_1 = S_1$. Zřejmě $A \subset f^{-1}(A_1)$. Je-li však $x \in f^{-1}(A_1)$, $y = f(x)$, jest $y \in f^1(A)$, tedy $f^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset$. Jest $y \in f^1(S) = S_1$, tedy $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(S_1) = S = A \cup B$. Protože $f^{-1}(y) \subset A \cup B$, protože A, B jsou oddělené a protože $f^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset$, plyne z **10.1.3**, že $f^{-1}(y) \subset A$. Protože $y = f(x)$, jest $x \in A$. Tím je dokázáno, že $A = f^{-1}(A_1)$, a stejně se dokáže, že $B = f^{-1}(B_1)$. Protože A, B jsou oddělené, jsou A_1, B_1 oddělené podle **7.2.7.** To je nemožné, neboť $S_1 = A_1 \cup B_1$ je souvislá a $A_1 \neq \emptyset \neq B_1$.

10.1.23. Budiž P souvislý prostor. Budiž $\mathfrak{G} \neq \emptyset$ soustava otevřených množin; budiž $P = \bigcup X$ $(X \in \mathfrak{G})$. Budiž $a \in P$, $b \in P$. Pak existuje taková konečná posloupnost $\{A_i\}_1^n$, že:

[1] $1 \leqq i \leqq n \Rightarrow A_i \in \mathfrak{G}$; [2] $1 \leqq i \leqq n - 1 \Rightarrow A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$; [3] $a \in A_1$, $b \in A_n$. Zvolme množinu $H_1 \in \mathfrak{G}$ tak, aby bylo $a \in H_1$. Označme $\mathfrak{G}_1$ soustavu všech takových $G \in \mathfrak{G}$, ke kterým lze udat konečnou posloupnost $\{G_i\}_1^n$ tak, aby bylo: [1] $1 \leqq i \leqq n \Rightarrow G_i \in \mathfrak{G}$, [2] $1 \leqq i \leqq n - 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow G_i \cap G_{i+1} \neq \emptyset$, [3] $G_1 = H_1$, $G_n = G$. Zřejmě platí:

$$G \in \mathfrak{G}_1\,, \quad G^* \in \mathfrak{G}\,, \quad G \cap G^* \neq \emptyset \Rightarrow G^* \in \mathfrak{G}_1\,. \tag{1}$$

Existuje taková $H_2 \in \mathfrak{G}$, že $b \in H_2$. Máme ukázat, že $H_2 \in \mathfrak{G}_1$. Nechť naopak $H_2 \in \mathfrak{G} - \mathfrak{G}_1$. Zřejmě $H_1 \in \mathfrak{G}_1$. Položme

$$M_1 = \bigcup X \ \ (X \in \mathfrak{G}_1)\,, \quad M_2 = \bigcup X \ \ (X \in \mathfrak{G} - \mathfrak{G}_1)\,.$$

Pak je $a \in M_1$, $b \in M_2$, tedy $M_1 \neq \emptyset \neq M_2$. Zřejmě $P = M_1 \cup M_2$. Z (1) plyne $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Podle **4.4.10** jsou M_1, M_2 otevřené. Tudíž M_1, M_2 jsou oddělené podle **5.1.6.** Protože prostor P je souvislý, je to nemožné.

10.2. Komponenty a kvasikomponenty

Definice **10.2.1.** Budiž $P \neq \emptyset$ prostor. Je-li $x \in P$, $y \in P$, pak nechť $(x, y) \in \mathfrak{E}$ znamená, že existuje souvislá bodová množina, která obsahuje oba body x, y. Pak je $\mathfrak{E}$ vztah ekvivalence v množině P (viz **1.3**); neboť (I$\mathfrak{E}$) plyne z **10.1.2**, (II$\mathfrak{E}$) je zřejmé a (III$\mathfrak{E}$) plyne z **10.1.5**. Tudíž vztah $\mathfrak{E}$ určuje podle **1.3** rozklad $\mathfrak{R}$ množiny P; pásy tohoto rozkladu nazveme *komponentami* prostoru P. Komponenty bodové množiny $M \subset P$ dostaneme, pokládáme-li M za vnořený prostor. $\emptyset$ nemá žádnou komponentu.

10.2.1. Komponenty prostoru P jsou souvislé množiny. Viz **10.1.4.**

10.2.2. Každá souvislá část prostoru P je částí právě jedné komponenty prostoru P.

10.2.3. Aby prostor P byl souvislý, k tomu je nutné a stačí, aby P měl právě jednu komponentu. Viz **10.2.1** a **10.2.2.**

10.2.4. Komponenty prostoru P jsou uzavřené množiny. Je-li Q komponenta prostoru P, je $\overline{Q}$ souvislá množina podle **10.1.7** a **10.2.1.** Tudíž $Q = \overline{Q}$ podle **10.2.2.**

10.2.5. Dvě různé komponenty prostoru P jsou oddělené množiny. Viz **5.1.4** a **10.2.4.**

10.2.6. Budiž u F-modifikace topologie v v množině P. Komponenty prostoru P jsou stejné při topologii u jako při topologii v. Budiž T v-komponenta prostoru P. Podle **10.2.1** množina T je v-souvislá; z **10.1.13** plyne, že T je u-souvislá. Tudíž podle **10.2.2** je $T \subset T_0$, kde T_0 je u-komponenta prostoru P. Avšak množina T_0 je u-uzavřená podle **10.2.4**, takže podle definice topologie u je T_0 v-uzavřená; mimo to je T_0 u-souvislá podle **10.2.1.** Tudíž T_0 je v-souvislá podle **10.1.14**, takže podle **10.2.2** je T_0 částí určité v-komponenty prostoru P. Protože $T \subset T_0$ je v-komponenta prostoru P, je $T = T_0$.

10.2.7. Budiž P souvislý prostor. Budiž S souvislá bodová množina a budiž K komponenta množiny $P - S$. Pak $P - K$ je souvislá množina. Protože $S \neq \emptyset$, $K \subset P - S$, je $P - K \neq \emptyset$. Jestliže $P - K$ není souvislá, existují takové oddělené množiny A, B, že $A \neq \emptyset \neq B$, $P - K = A \cup B$. Množiny $K \cup A$, $K \cup B$ jsou souvislé podle **10.1.10** a **10.2.1.** Protože $S \cap K = \emptyset$, je $S \subset A \cup B$; z **10.1.3** tedy plyne, že je buďto $S \subset A$, $S \cap B = \emptyset$ nebo $S \subset B$, $S \cap A = \emptyset$. Bez újmy na obecnosti budiž $S \subset B$, $S \cap A = \emptyset$. Potom je $K \cup A$ souvislá část množiny $P - S$, takže podle **10.2.2** existuje taková komponenta K_0 množiny $P - S$, že $K \cup A \subset K_0$. Protože také K je komponenta množiny $P - S$, jest $K = K_0$, tedy $A \subset K$. Avšak $A \subset P - K$; tedy $A = \emptyset$ a to je nemožné.

10.2.8. Budiž f oboustranně spojité zobrazení prostoru P na prostor P_1. Pro každý $y \in P_1$ budiž $f^{-1}(y)$ souvislá množina. Probíhá-li K_1 všecky komponenty prostoru P_1, probíhá $f^{-1}(K_1)$ všecky komponenty prostoru P. Je-li K_1 komponenta prostoru P_1, pak množina $f^{-1}(K_1) \subset P$ je souvislá podle **10.1.22**, takže podle **10.2.2** existuje taková komponenta K prostoru P, že $f^{-1}(K_1) \subset K$. Jest $K_1 \subset f^1(K)$, K_1 je komponenta prostoru P_1 a množina $f^1(K) \subset P_1$ je souvislá podle **7.1.8** a **10.1.12.** Tudíž $K_1 = f^1(K)$ podle **10.2.2**, takže

$f^{-1}(K_1) \supset K$. Tím je dokázáno, že $f^{-1}(K_1) = K$, tj. že $f^{-1}(K_1)$ je komponenta prostoru P. Probíhá-li K_1 všecky komponenty prostoru P_1, tvoří množiny K_1 rozklad prostoru P_1, a tudíž množiny $f^{-1}(K_1)$ tvoří rozklad prostoru P, takže kromě nich nemá P žádnou další komponentu.

Definice **10.2.2.** Budiž $P \neq \emptyset$ prostor. Pro $x \in P$, $y \in P$ nechť $(x, y) \in \mathfrak{C}_1$ znamená, že nelze udat takové oddělené množiny A, B, aby bylo $x \in A$, $y \in B$, $A \cup B = P$. Pak je $\mathfrak{C}_1$ vztah ekvivalence v množině P (viz **1.3**); neboť vlastnosti (I$\mathfrak{C}$), (II$\mathfrak{C}$) vztahu $\mathfrak{C}_1$ jsou zřejmé a také vlastnost (III$\mathfrak{C}$) vztahu $\mathfrak{C}_1$ se snadno dokáže: Budiž $(x, y) \in \mathfrak{C}_1$, $(y, z) \in \in \mathfrak{C}_1$; máme dokázat, že $(x, z) \in \mathfrak{C}_1$. Jsou-li A, B oddělené a je-li $x \in A$, $z \in B$, $A \cup B = P$, musí být buďto $y \in A$ nebo $y \in B$; protože však $(x, y) \in \mathfrak{C}_1$, je $y \in B$ nemožné a protože $(y, z) \in \mathfrak{C}_1$, je také $y \in A$ nemožné. Tento spor ukazuje, že skutečně $(x, z) \in \mathfrak{C}_1$. Vztah $\mathfrak{C}_1$ tudíž podle **1.3** určuje rozklad $\mathfrak{R}_1$ prostoru P. Pásy rozkladu $\mathfrak{R}_1$ nazveme *kvasikomponentami* prostoru P. Kvasikomponenty bodové množiny dostaneme, pokládáme-li ji za vnořený prostor. $\emptyset$ nemá žádnou kvasikomponentu.

10.2.9. Aby prostor P byl souvislý, k tomu je nutné a stačí, aby P měl právě jednu kvasikomponentu.

10.2.10. Každá komponenta prostoru P je částí právě jedné kvasikomponenty. Viz **10.1.3** a **10.2.1.**

10.2.11. Aby kvasikomponenta Q prostoru P byla komponentou prostoru P, k tomu je nutné a stačí, aby Q byla souvislá. Podmínka je nutná podle **10.2.1** a stačí podle **10.2.2** a **10.2.10.**

10.2.12. Kvasikomponenty prostoru P jsou uzavřené množiny. Budiž $Q \subset P$ kvasikomponenta a budiž $a \in Q$. Budiž $\mathfrak{M}$ soustava těch $X \subset P$, pro které předně je $a \in X$ a za druhé X, $P - X$ jsou oddělené. (Jest $P \in \mathfrak{M}$, tedy $\mathfrak{M} \neq \emptyset$.) Zřejmě $Q = \bigcap X$ $(X \in \mathfrak{M})$. Každá $X \in \mathfrak{M}$ je uzavřená podle **5.1.5.** Tudíž Q je uzavřená podle **4.4.5.**

10.2.13. Dvě různé kvasikomponenty prostoru P jsou H-oddělené množiny. Buďtež Q_1, Q_2 kvasikomponenty, $Q_1 \neq Q_2$. Zvolme $a \in Q_1$, $b \in Q_2$. Existují takové dvě oddělené množiny A, B, že

$a \in A$, $b \in B$, $A \cup B = P$. Zřejmě $Q_1 \subset A$, $Q_2 \subset B$. Množiny A, B podle **5.1.6** jsou disjunktní a otevřené, takže podle **5.1.12** jsou H-oddělené. Tudíž Q_1, Q_2 jsou H-oddělené podle **5.1.13.**

10.2.14. Má-li prostor P konečně mnoho kvasikomponent, pak kvasikomponenty prostoru P jsou totožné s jeho komponentami. Budiž $Q \subset P$ kvasikomponenta. Podle **10.2.11** máme dokázat, že Q je souvislá. V případě $Q = P$ je tomu tak podle **10.2.9.** Pro $Q \neq P$ je $P - Q = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$, kde Q_i $(1 \leqq i \leqq n)$ jsou ostatní kvasikomponenty. Množina $P - Q$ je uzavřená podle **4.4.6** a **10.2.12.** Jestliže Q není souvislá, jest $Q = A \cup B$, kde množiny $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ jsou oddělené. Zvolme $a \in A$, $b \in B$. Množiny A, B jsou uzavřené podle **4.6.6**, **5.1.5** a **10.2.12.** Podle **4.4.6** také $C = B \cup (P - Q)$ je uzavřená. Tudíž $P = A \cup C$, $a \in A$, $b \in C$ a množiny A, C jsou oddělené podle **5.1.4.** Protože body a, b jsou v téže kvasikomponentě prostoru P, je to nemožné.

10.2.15. Budiž u F-modifikace topologie v v množině P. Kvasikomponenty prostoru P jsou tytéž při topologii u jako při topologii v. Body $x \in P$, $y \in P$ náležejí podle **5.1.5** a podle definice **10.2.2** právě tehdy do dvou různých kvasikomponent, jestliže existují takové dvě disjunktní uzavřené množiny A, B, že $x \in A$, $y \in B$, $A \cup B = P$. Avšak množiny uzavřené při topologii u jsou totožné s množinami uzavřenými při topologii v.

10.3. KONTINUA

Definice **10.3.1.** Pravíme, že prostor P je *kontinuum,* jestliže P obsahuje více než jeden bod a je kompaktní a souvislý. Bodová množina $M \subset P$ je kontinuum, jestliže M jakožto vnořený prostor je kontinuum.

10.3.1. Každá komponenta kompaktního prostoru je buďto jednobodová nebo je to kontinuum. Viz **8.3.1**, **10.2.1** a **10.2.4.**

10.3.2. Budiž P kompaktní prostor. Budiž U okolí kvasikomponenty Q prostoru P. Pak existují takové dvě oddělené množiny A, B, že $A \cup B = P$, $Q \subset A \subset U$. Budiž $\mathfrak{M}$ soustava všech těch $X \subset P - Q$, které jsou v prostoru P současně otevřené i uzavřené. Podle **5.1.5** plyne z definice **10.2.2**, že $P - Q = \bigcup X$ $(X \in \mathfrak{M})$, takže $\mathfrak{M}$ pokrývá $P - Q$ (viz **8.1.2**). Přidáme-li k soustavě $\mathfrak{M}$ množinu U, dostaneme pokrytí prostoru P. Protože P je kompaktní, existují takové $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{M}$, že $U \cup \bigcup_{i=1}^{n} A_i = P$. Nyní stačí položit $B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $A = P - B$.

10.3.3. Budiž P kompaktní FH-prostor. Kvasikomponenty prostoru P jsou totožné s jeho komponentami. Budiž Q kvasikomponenta prostoru P. Podle **10.2.11** máme dokázat, že množina Q je souvislá. Není-li tomu tak, jest $Q = A \cup B$, kde množiny $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ jsou oddělené. Zvolme $a \in A$, $b \in B$. Množiny A, B jsou disjunktní podle **5.1.1** a uzavřené podle **4.6.6**, **5.1.5** a **10.2.12.** Tudíž A, B jsou H-oddělené podle **8.3.19**, takže podle **5.1.15** existují takové otevřené G, H, že $A \subset G$, $B \subset H$, $G \cap H = \emptyset$. Podle **4.4.10** a **4.4.13** je otevřená množina $G \cup H$ okolím množiny $A \cup B = Q$, takže podle **10.3.2** existují takové dvě oddělené množiny K, L, že $Q \subset K \subset G \cup H$, $K \cup L = P$. Tudíž $K = (K \cap G) \cup (K \cap H)$. Množiny $K \cap G$ a L jsou oddělené podle **5.1.7**; množiny $K \cap G$ a $K \cap H$ jsou oddělené podle **4.6.5** a **5.1.6**; tudíž $K \cap G$ a $(K \cap H) \cup L$ jsou oddělené podle **5.1.8.** Jest $a \in K \cap G$, $b \in (K \cap H) \cup L$, $(K \cap G) \cup [(K \cap H) \cup L] = P$; tudíž a, b náležejí do dvou různých kvasikomponent prostoru P.

V příkladě **8.3.3** je P kompaktní H-prostor, který má kvasikomponentu $(a) \cup (b)$, jež není komponentou. Uvažujeme-li P v F-modifikaci původní topologie, platí totéž a P je F-prostor. Proto v **10.3.3** předpoklad FH-prostoru nelze nahradit ani předpokladem H-prostoru ani předpokladem F-prostoru.

10.3.4. Budiž P FH-prostor. Budiž $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ monotónní soustava bodových množin. Každá $X \in \mathfrak{M}$ budiž kontinuum. Pak množina $C = \bigcap X$ $(X \in \mathfrak{M})$ buďto je jednobodová nebo je to kontinuum. Zvolme libovolně množinu $R \in \mathfrak{M}$ a označme $\mathfrak{M}_0$ soustavu všech takových $X \in \mathfrak{M}$, že $X \subset R$. Pak $\mathfrak{M}_0 \neq \emptyset$ je monotónní soustava bodových množin v prostoru R, který je kompaktní a mimo to je FH-prostorem podle **4.6.10** a **5.2.1**. Zřejmě $C = \bigcap X$ $(X \in \mathfrak{M}_0)$. V dalším průběhu důkazu pokládáme R za základní prostor. Podle **8.3.10** a **8.3.13** je $C \neq \emptyset$; podle **8.3.14** je C kompaktní, takže podle **8.3.13** množina C je uzavřená v prostoru R. Zbývá dokázat, že množina C je souvislá. Není-li tomu tak, pak existují takové dvě oddělené množiny $C_1 \neq \emptyset$, $C_2 \neq \emptyset$, že $C = C_1 \cup C_2$. Množiny C_1, C_2 jsou disjunktní podle **5.1.1** a uzavřené podle **4.6.6** a **5.1.5**, takže jsou H-oddělené podle **8.3.19**. Tudíž podle **5.1.15** existují takové dvě otevřené množiny G_1, G_2, že $C_1 \subset G_1$, $C_2 \subset G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Kdyby existovala v soustavě $\mathfrak{M}_0$ množina $X \subset G_1 \cup G_2$, bylo by $X = (X \cap G_1) \cup (X \cap G_2)$; protože $C_1 \subset X \cap G_1$, bylo by $X \cap G_1 \neq \emptyset$ a podobně by bylo též $X \cap G_2 \neq \emptyset$; množiny $X \cap G_1$, $X \cap G_2$ by podle **4.6.5** a **5.1.6** byly oddělené; protože $X \in \mathfrak{M}_0$ je souvislá, je to nemožné. Tudíž $X \in \mathfrak{M}_0 \Rightarrow X \cap F \neq \emptyset$, jestliže $F = R - (G_1 \cup G_2)$, takže F podle **4.4.10** je uzavřená. Množiny $X \cap F$ jsou uzavřené podle **4.4.5** a **8.3.13**. Soustava množin $X \cap F$ $(X \in \mathfrak{M}_0)$ je monotónní, takže podle **8.3.10** má neprázdný průnik, tj. $C \cap F \neq \emptyset$ a to je zřejmě nemožné.

10.3.5. Budiž P kompaktní FH-prostor. Budiž $a_n \in P$, $\lim a_n = a$. Budiž $\{A_n\}$ posloupnost souvislých bodových množin; budiž $a_n \in A_n$ pro všecka $n \in \mathbf{N}$. Budiž C množina všech $x \in P$ s tou vlastností, že pro každé okolí U bodu x je nekonečně mnoho takových n, že $U \cap A_n \neq \emptyset$. Pak množina C buďto je jednobodová nebo je to kontinuum. Zřejmě je $a \in C$. Snadno se dokáže, že množina C je uzavřená, takže podle **8.3.1** C je kompaktní. Zbývá dokázat, že množina C je souvislá. Není-li tomu tak, pak existují takové dvě oddělené množiny $C_1 \neq \emptyset$, $C_2 \neq \emptyset$, že $C = C_1 \cup C_2$. Protože $a \in C$, můžeme předpokládat, že $a \in C_1$. Zvolme $b \in C_2$. Množiny C_1, C_2 jsou disjunktní podle **5.1.1** a uzavřené podle **4.6.6** a **5.1.5**, takže jsou H-oddělené podle **8.3.19**. Tudíž podle **5.1.15** existují takové dvě otevřené množiny G_1, G_2, že $C_1 \subset G_1$, $C_2 \subset G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Je-li $x \in P - (G_1 \cup G_2)$, jest $x \in P - C$, takže existuje okolí $U(x)$ bodu x a takový index $k(x)$, že $n > k(x) \Rightarrow A_n \cap U(x) = \emptyset$. Podle **4.4.13** množiny G_1, G_2 spolu s množinami $U(x)$ $[x \in P - (G_1 \cup G_2)]$ tvoří pokrytí prostoru P. Protože P je kompaktní, existují takové body $x_i \in P -$

$- (G_1 \cup G_2)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ v konečném počtu n, že $P - (G_1 \cup G_2) \subset \subset \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i)$. (Je-li $P = G_1 \cup G_2$, pak body x_i odpadnou.) Zvolme index k tak, aby bylo $k > k(x_i)$ pro $1 \leqq i \leqq n$. (Je-li $P = G_1 \cup G_2$, je index k libovolný.) Pro $n > k$ je potom $A_n \subset G_1 \cup G_2$. Nyní máme $b \in C$, $a = \lim a_n$; mimo to podle **4.4.13** G_1 je okolím bodu a, G_2 je okolím bodu b. Protože $\lim a_n = a$, existuje podle definice **6.3.1** takový index h, že pro všecka $n > h$ je $a_n \in G_1$, a tedy $A_n \cap G_1 \neq \emptyset$. Protože G_2 je okolím bodu $b \in C$, existuje takový index $n > h$, $n > k$, že $A_n \cap \cap G_2 \neq \emptyset$. Protože $n > k$, jest $A_n = (A_n \cap G_1) \cup (A_n \cap G_2)$. Množiny $A_n \cap G_1$, $A_n \cap G_2$ jsou oddělené podle **4.6.5** a **5.1.6.** Protože množina A_n je souvislá, je to nemožné.

10.3.6. *FH*-prostor P buďiž kontinuum. Buďiž K komponenta uzavřené množiny $F \neq P$. Pak je $K \cap \operatorname{Fr} F \neq \emptyset$. Buďiž naopak $K \subset G$, kde $G = F - \overline{P - F}$. Podle **4.4.13** a **4.6.5** je G relativním okolím množiny K ve vnořeném prostoru F, který je *FH*-prostorem podle **4.6.10** a **5.2.1** a je kompaktní podle **8.3.1.** Tudíž z **10.3.3** plyne, že K je kvasikomponentou prostoru F. Podle **5.1.3** a **10.3.2** existují v prostoru P takové dvě oddělené množiny A, B, že $K \subset A \subset G$, $A \cup B = F$. Podle **5.1.1** je $A \cap B = \emptyset$; podle **4.6.6** a **5.1.5** jsou A, B uzavřené. Protože $A \cup B = F$, jest $A \cup (B \cup \overline{P - F}) = P$. Množiny A a $B \cup \overline{P - F}$ jsou uzavřené (viz **4.4.6**). Protože $A \cap B = \emptyset$, $A \subset G = F - \overline{P - F}$, jest $A \cap (B \cup \overline{P - F}) = \emptyset$. Tudíž A, $B \cup \cup \overline{P - F}$ jsou oddělené podle **5.1.4.** Protože $A \neq \emptyset$ a protože množina $P = A \cup (B \cup \overline{P - F})$ je souvislá, jest $B \cup \overline{P - F} = \emptyset$, tedy $F = P$ a to je nemožné.

10.3.7. *FH*-prostor P buďiž kontinuum. Buďiž K komponenta otevřené množiny $G \neq P$. Pak je $\overline{K} \cap \operatorname{Fr} G \neq \emptyset$. Buďiž naopak $\overline{K} \cap \operatorname{Fr} G = \emptyset$ neboli $\overline{K} \cap (\overline{G} - G) = \emptyset$ (viz **4.8.7**). Je však $K \subset G$, tedy $\overline{K} \subset \overline{G}$, takže $\overline{K} \subset G$. Podle **4.4.13**, **5.4.6** a **8.3.19** existuje takové okolí U množiny $\overline{K}$, že $\overline{U} \subset G$. Množina $\overline{U}$ je uzavřená; protože $\overline{U} \subset G$, je $\overline{U} \neq P$. Podle **10.1.7** a **10.2.1** je $\overline{K}$ souvislá. Podle **4.2.3** je $\overline{K} \subset U \subset \overline{U}$; z **10.2.2** tedy plyne, že existuje taková komponenta L množiny $\overline{U}$, že $\overline{K} \subset L$. Protože $L \subset \overline{U} \subset G$, plyne z **10.2.2** dále, že existuje taková komponenta M množiny G, že $L \subset M$. Tudíž $K \subset \overline{K} \subset$

$\subset L \subset M$, kde K, M jsou komponenty množiny G; tudíž $K = M$, a tedy též $\overline{K} = L$, tj. $\overline{K}$ je komponenta množiny $\overline{U}$. Avšak množina $\overline{U} \neq P$ je uzavřená, takže podle **10.3.6** je $\overline{K} \cap \operatorname{Fr} \overline{U} \neq \emptyset$, a tedy též $\overline{K} \cap \cap \operatorname{Fr} U \neq \emptyset$ podle **4.8.10.** To je nemožné, neboť $\operatorname{Fr} U \subset \overline{P - \overline{U}}$ a U je okolí množiny $\overline{K}$.

10.3.8. FH-prostor P budiž kontinuum. Budiž U okolí bodu a. Pak existuje takové kontinuum K, že $a \in K$, $K \subset U$. Podle **5.4.6** a **8.3.19** existuje takové okolí V bodu a, že $\overline{V} \subset U$. Podle **4.2.3** je $a \in V$, tedy $a \in \overline{V}$. Tudíž existuje taková komponenta K množiny $\overline{V}$, že $a \in K$. Množina K je uzavřená podle **4.6.6** a **10.2.4**, je tedy kompaktní podle **8.3.1**; podle **10.2.1** je K souvislá. Zbývá dokázat, že K není jednobodová, a to je zřejmé pro $\overline{V} = P$, neboť pak je $K = P$. Nechť tedy $\overline{V} \neq P$. Podle **10.3.6** je $K \cap \operatorname{Fr} \overline{V} \neq \emptyset$, tedy $K \cap \operatorname{Fr} V \neq \emptyset$ podle **4.8.10.** Tudíž K není jednobodová, neboť $a \in K$ a V je okolí bodu a, takže $a \in P - \overline{P - V}$ a naproti tomu $\operatorname{Fr} V \subset \overline{P - V}$.

10.3.9. Jsou-li $K_1 \subset P$, $K_2 \subset P$ kontinua a je-li $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$, je také $K_1 \cup K_2$ kontinuum. Množina $K_1 \cup K_2$ je zřejmě více než jednobodová, podle **10.1.5** je souvislá a podle **8.3.2** je kompaktní.

Definice **10.3.2.** Bodová množina S se nazývá *semikontinuum*, jestliže buďto S je jednobodová nebo S obsahuje více než jeden bod a ke kterýmkoli dvěma různým bodům $a \in S$, $b \in S$ existuje takové kontinuum $K \subset S$, že $a \in K$, $b \in K$.

10.3.10. Každá jednobodová množina a každé kontinuum je semikontinuum.

10.3.11. Každé semikontinuum je souvislé. Viz **10.1.2** a **10.1.4.**

10.3.12. Kompaktní semikontinuum je buďto jednobodové nebo je to kontinuum.

10.3.13. Jsou-li $S_1 \subset P$, $S_2 \subset P$ semikontinua a je-li $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, je také $S_1 \cup S_2$ semikontinuum. Viz **10.3.9.**

10.3.14. Jestliže každé dva navzájem různé body prostoru $P \neq \emptyset$ jsou obsaženy v nějakém semikontinuu prostoru P, je P semikontinuum.

Definice **10.3.3.** Budiž $P \neq \emptyset$ prostor. Je-li $x \in P$, $y \in P$, pak nechť $(x, y) \in \mathfrak{E}_2$ znamená, že buďto $x = y$ nebo existuje takové kontinuum $K \subset P$, že $x \in K$, $y \in K$. Pak $\mathfrak{E}_2$ je vztah ekvivalence v množině P (viz **1.3**), neboť vlastnosti [I$\mathfrak{E}$] a [II$\mathfrak{E}$] vztahu $\mathfrak{E}_2$ jsou zřejmé a vlastnost [III$\mathfrak{E}$] plyne z **10.3.9.** Tudíž vztah $\mathfrak{E}_2$ určuje podle **1.3** rozklad $\mathfrak{R}_2$ prostoru P. Každý pás rozkladu $\mathfrak{R}_2$ nazveme *konstituantem* prostoru P. Konstituanty bodové množiny $M \subset P$ dostaneme, považujeme-li M za vnořený prostor. $\emptyset$ nemá žádný konstituant.

10.3.15. Konstituanty prostoru P jsou semikontinua.

10.3.16. Jestliže bodová množina $S \subset P$ je semikontinuum, je S částí právě jednoho konstituantu prostoru P.

10.3.17. Každý konstituant prostoru P je částí právě jedné komponenty prostoru P. Viz **10.2.2**, **10.3.11** a **10.3.15.**

10.3.18. Jestliže komponenta K prostoru P je semikontinuum, je K konstituant prostoru P. Viz **10.3.16** a **10.3.17.**

10.3.19. Aby prostor P byl semikontinuum, k tomu je nutné a stačí, aby P měl právě jeden konstituant. Viz **10.3.15** a **10.3.16.**

10.3.20. Konstituanty kompaktního prostoru P jsou totožné s jeho komponentami. Budiž S komponenta prostoru P. Množina S je souvislá podle **10.2.1** a je kompaktní podle **8.3.1** a **10.2.4.** Tudíž S je konstituant prostoru P podle **10.3.10** a **10.3.18.**

10.4. Roztínání prostoru

Definice **10.4.1.** Pravíme, že bodová množina M *roztíná* prostor P mezi body a, b, existují-li takové dvě oddělené bodové množiny A, B, že $a \in A$, $b \in B$, $A \cup B = P - M$. Při tom je nutně $a \neq b$ (viz **5.1.1**). Pravíme, že bod $c \in P$ roztíná P mezi body a, b, jestliže jednobodová množina (c) roztíná P mezi body a, b.

10.4.1. Aby bodová množina M roztínala prostor P mezi body a, b, k tomu je nutné a stačí, aby bylo $a \in P - M$, $b \in P - M$ a aby kvasikomponenta množiny $P - M$ obsahující a byla různá od kvasikomponenty obsahující b. Podmínka říká, že $a \in A$, $b \in B$, $P - M = A \cup B$, kde A, B jsou oddělené ve vnořeném prostoru $P - M$. Tudíž tvrzení plyne z **5.1.3.**

10.4.2. Budiž $M \subset P$, $a \in M - \operatorname{Fr} M$, $b \in P - \overline{M}$. Pak bodová množina $\operatorname{Fr} M$ roztíná P mezi body a, b. Jest $\operatorname{Fr} M = \overline{M} \cap \overline{P - M}$, takže $P - \operatorname{Fr} M = A \cup B$, kde $A = P - \overline{P - M}$, $B = P - \overline{M}$. Jest $a \in A$, $b \in B$. Mimo to je M okolí množiny A, $P - M$ je okolí množiny B a jest $M \cap (P - M) = \emptyset$, takže množiny A, B jsou H-oddělené. Tudíž A, B jsou oddělené podle **5.1.9.**

10.4.3. Budiž $G \subset P$ otevřená množina; budiž $a \in G$, $b \in P - \overline{G}$. Pak množina $\operatorname{Fr} G = \overline{G} - G$ roztíná P mezi body a, b. Viz **4.8.6**, **4.8.7** a **10.4.2.**

10.4.4. Nechť bodová množina M roztíná dědičně normální prostor P mezi body a, b. Pak existuje taková uzavřená množina F, že $F \subset M$ a že F roztíná P mezi body a, b. Existují takové dvě oddělené množiny A, B, že $a \in A$, $b \in B$, $P - M = A \cup B$. Prostor P je F-prostor a podle **5.4.9** množiny A, B jsou H-oddělené. Podle **5.1.15** tedy existují takové otevřené množiny G, H, že $A \subset G$, $B \subset H$, $G \cap H = \emptyset$. Podle **4.4.10** je také $G \cup H$ otevřená, takže $F = P - (G \cup H)$ je uzavřená. Jest $a \in G$, $b \in H$, $G \cup H = P - F$, $F \subset M$ a množiny G, H jsou oddělené podle **5.1.9** a **5.1.12.**

10.4.5. Nechť bodová množina M roztíná F-prostor P mezi body a, b. Množina $P - M$ budiž hustá. Pak existuje taková uzavřená množina F, že $F \subset M$ a že F roztíná P mezi body a, b. Existují takové dvě oddělené množiny A, B, že $a \in A$, $b \in B$, $P - M = A \cup B$. Protože $P - M$ je hustá, je $P = \overline{P - M} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Budiž $F = \overline{A} \cap \overline{B}$. Pak F je uzavřená. Podle **5.1.2** je $F \subset M$ a jest $a \in \overline{A} - \overline{B}$, $b \in \overline{B} - \overline{A}$. Mimo to $P - M = (\overline{A} - \overline{B}) \cup (\overline{B} - \overline{A})$ a z **5.1.2** plyne, že $\overline{A} - \overline{B}$, $\overline{B} - \overline{A}$ jsou oddělené.

Definice **10.4.2.** Pravíme, že bodová množina M *ireducibilně roz-*

tíná prostor P mezi body a, b, jestliže množina $X \subset M$ roztíná P mezi body a, b právě tehdy, když $X = M$.

10.4.6. Budiž P F-prostor. Jestliže množina $M \subset P$ ireducibilně roztíná P mezi body a, b, jest M uzavřená množina. Podle **10.4.5** stačí ukázat, že množina $P - M$ je hustá, tj. že $\overline{P - M} = P$. Budiž naopak $c \in P - \overline{P - M}$. Protože M roztíná P mezi body a, b, existují takové dvě oddělené množiny A, B, že $a \in A$, $b \in B$, $P - M = A \cup B$. Množiny $P - M$, (c) jsou oddělené podle **5.1.2**; tudíž A, (c) jsou oddělené podle **5.1.7**, takže A, $B \cup (c)$ jsou oddělené podle **5.1.8.** Jest $a \in A$, $b \in B \cup (c)$, $P - [M - (c)] = A \cup [B \cup (c)]$, takže $M - (c)$ roztíná P mezi body a, b a to je nemožné.

Definice **10.4.3.** Pravíme, že $a \in P$ je *dělicí bod* prostoru P, jestliže P je souvislý, ale množina $P - (a)$ není souvislá.

10.4.7. Budiž P souvislý prostor. Aby $a \in P$ byl dělicí bod prostoru P, k tomu je nutné a stačí, aby buďto bylo $P = (a)$ nebo aby existovaly takové body b, c, že a roztíná P mezi nimi. Případ $P = (a)$ je zřejmý; jinak viz **10.2.9** a **10.4.1.**

Definice **10.4.4.** Pravíme, že bodová množina M *rozpojuje* prostor P mezi body a, b, jestliže a, b jsou dva různé body množiny $P - M$ a jestliže $K \cap M \neq \emptyset$ pro každé kontinuum $K \subset P$, pro které je $a \in K$, $b \in K$.

10.4.8. Aby bodová množina M rozpojovala prostor P mezi body a, b, k tomu je nutné a stačí, aby bylo $a \in P - M$, $b \in P - M$ a aby konstituant množiny $P - M$ obsahující a byl různý od konstituantu obsahujícího b.

10.4.9. Jestliže bodová množina M roztíná prostor P mezi body a, b, pak M rozpojuje P mezi a, b. Viz **10.2.10**, **10.3.17**, **10.4.1** a **10.4.8.**

10.4.10. Budiž P FH-prostor. Jestliže kompaktní $Q \subset P$ rozpojuje P mezi body a, b, pak existuje kompaktní $M \subset Q$ s těmito vlastnostmi: [1] M rozpojuje P mezi body a, b; [2] jestliže kompaktní $H \subset M$ rozpojuje P mezi body a, b, jest $H = M$. Budiž $\mathfrak{M}$ soustava všech kompaktních $X \subset Q$, které rozpojují

P mezi body a, b. Jest $\mathfrak{M} \neq \emptyset$, neboť $Q \in \mathfrak{M}$. Budiž $\mathfrak{M}_0 \neq \emptyset$ monotónní podsoustava soustavy $\mathfrak{M}$ a budiž $K = \bigcap X$ $(X \in \mathfrak{M}_0)$. Podle **3.9.3** stačí dokázat, že $K \in \mathfrak{M}$. Podle **8.3.14** je K kompaktní a zřejmě $K \subset Q$. Jestliže tedy není $K \in \mathfrak{M}$, pak existuje takové kontinuum $C \subset P - K$, že $a \in C$, $b \in C$. Protože $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$, jest: $X \in \mathfrak{M}_0 \Rightarrow C \cap X \neq \emptyset$. V soustavě $\mathfrak{M}_1 \neq \emptyset$ všech množin $C \cap X$ $(X \in \mathfrak{M}_0)$ se tedy nevyskytuje prázdná množina. Soustava $\mathfrak{M}_1$ je zřejmě monotónní a ze **4.6.4** a **8.3.13** plyne, že $\mathfrak{M}_1$ se skládá z relativně uzavřených podmnožin vnořeného prostoru C, který je kompaktní a podle **4.6.10** je F-prostorem. Z **8.3.10** tedy plyne, že $\emptyset \neq D = \bigcap Y$ $(Y \in \mathfrak{M}_1)$. To je nemožné, neboť $D = C \cap K$, $C \subset P - K$, tedy $D = \emptyset$.

10.5. Ireducibilně souvislé prostory

10.5.1. Budiž P souvislý prostor. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Nechť množina Q se skládá z bodu a, z bodu b a ze všech těch $x \in P$, které roztínají P mezi a a b. Existují právě dvě uspořádání množiny Q, jež mají tu vlastnost, že jestliže $x_2 \in Q$ leží mezi $x_1 \in Q$ a $x_3 \in Q$, pak x_2 roztíná P mezi x_1 a x_3. Tato dvě uspořádání jsou navzájem inversní a při každém z nich je jeden z bodů a, b prvním a druhý posledním.

Důkaz. I. Budiž $Q^* = Q - [(a) \cup (b)]$. Pro každý bod $x \in Q^*$ podle definice **10.4.1** existují takové dvě oddělené množiny $A(x)$, $B(x)$, že $a \in A(x)$, $b \in B(x)$, $P - (x) = A(x) \cup B(x)$. Podle **5.1.1** je $A(x) \cap B(x) = \emptyset$.

II. Podle **10.1.2** a **10.1.10** jsou množiny $(x) \cup A(x)$, $(x) \cup B(x)$ souvislé pro každý $x \in Q^*$.

III. Je-li $x \in Q^*$, $y \in Q^*$, $x \neq y$, pak je buďto $A(x) \supset y \cup A(y)$ nebo $(x) \cup A(x) \subset A(y)$. Neboť je buďto $y \in A(x)$ nebo $y \in B(x)$. Je-li předně $y \in A(x)$, pak $(x) \cup B(x)$ je souvislá část množiny $P - (y) = A(y) \cup B(y)$ obsahující bod $b \in B(y)$, takže $(x) \cup B(x) \subset B(y)$ podle **10.1.3**; protože $A(x) = P - [(x) \cup B(x)]$, $B(y) = P - [(y) \cup A(y)]$, jest $A(x) \supset (y) \cup A(y)$. Je-li za druhé $y \in B(x)$, pak $(x) \cup A(x)$ je souvislá část množiny $P - (y) = A(y) \cup B(y)$ obsahující bod $a \in A(y)$, takže $(x) \cup \cup A(x) \subset A(y)$ podle **10.1.3.**

IV. Pro $x \in Q^*$, $y \in Q^*$ budiž

$$(x, y) \in \mathfrak{O}^* \Leftrightarrow (x) \cup A(x) \subset A(y) .$$

Pak je $\mathfrak{O}^*$ uspořádání množiny Q^*, tj. $\mathfrak{O}^*$ splňuje axiomy (I$\mathfrak{O}$) až (III$\mathfrak{O}$) vyslovené ve **3.1**: (I$\mathfrak{O}$) plyne z toho, že $A(x) \subset P - (x)$, (II$\mathfrak{O}$) plyne z III a platnost (III$\mathfrak{O}$) je zřejmá. Uspořádání $\mathfrak{O}^*$ množiny Q^* rozšíříme v uspořádání $\mathfrak{O}$ množiny Q tak, aby a byl prvním a b posledním bodem při $\mathfrak{O}$.

V. Nechť $x_2 \in Q$ leží při $\mathfrak{O}$ mezi $x_1 \in Q$ a $x_3 \in Q$; máme dokázat, že x_2 roztíná Q mezi body x_1, x_3. Můžeme předpokládat, že x_2 leží za x_1 a před x_3. Jest $a \neq x_2 \neq b$; mimo to je buďto $x_1 = a$ nebo $(x_1) \cup A(x_1) \subset \subset A(x_2)$ a podobně buďto $x_3 = b$ nebo $(x_2) \cup A(x_2) \subset A(x_3)$. Jistě tedy je $x_1 \in A(x_2)$, $x_3 \in P - [(x_2) \cup A(x_2)] = B(x_2)$. Protože množiny $A(x_2)$, $B(x_2)$ jsou oddělené a protože $P - (x_2) = A(x_2) \cup B(x_2)$, roztíná x_2 prostor P mezi body x_1, x_3, tj. uspořádání $\mathfrak{O}$ množiny Q má vlastnost ve větě vyslovenou a je zřejmé, že touž vlastnost má i uspořádání inversní k $\mathfrak{O}$.

VI. Nechť uspořádání $\mathfrak{O}_0$ množiny Q má vlastnost ve větě vyslovenou. Kdyby bod b ležel při $\mathfrak{O}_0$ mezi a a $c \in Q^*$, pak by bod b roztínal P mezi body a a c, tj. existovaly by takové oddělené množiny A_0, C_0, že by bylo $P - (b) = A_0 \cup C_0$, $a \in A_0$, $c \in C_0$; pak by bylo $C_1 = (c) \cup \cup A(c) \subset P - (b)$, $a \in A_0 \cap C_1$, $c \in C_0 \cap C_1$; podle **10.1.3** by tedy množina C_1 nebyla souvislá a to je nemožné. Stejně se zjistí, že bod a nemůže při $\mathfrak{O}_0$ ležet mezi b a $c \in Q^*$.

VII. Ze VI plyne, že při $\mathfrak{O}_0$ je buďto a prvním a b posledním bodem nebo a posledním a b prvním bodem množiny Q. Můžeme předpokládat, že nastane prvá z těchto dvou možností, a máme dokázat, že potom je $\mathfrak{O}_0 = \mathfrak{O}^*$. K tomu je zřejmě třeba pouze zjistit, že jestliže při $\mathfrak{O}_0$ bod $y \in Q^*$ leží před bodem $x \in Q^*$, pak nemůže být $(x) \cup A(x) \subset A(y)$. Zřejmě při $\mathfrak{O}_0$ leží bod y mezi body a, x, tj. existují takové oddělené množiny A_0, X_0, že $P - (y) = A_0 \cup X_0$, $a \in A_0$, $x \in X_0$. Kdyby nyní bylo $X_1 = (x) \cup A(x) \subset A(y)$, bylo by $X_1 \subset P - (y) = A_0 \cup X_0$, $a \in X_1 \cap A_0$, $x \in X_1 \cap X_0$ a podle **10.1.3** by množina X_1 nebyla souvislá a to je nemožné.

Definice **10.5.1.** Buďtež a, b dva různé body prostoru P. Pravíme, že P je *ireducibilně souvislý mezi body* a, b, jestliže P je souvislý, ale žádná souvislá bodová množina $S \neq P$ neobsahuje oba body a, b. Bodová množina $M \subset P$ je ireducibilně souvislá mezi a, b, jestliže vnořený prostor M je ireducibilně souvislý mezi a, b.

10.5.2. Budiž P souvislý prostor. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Aby P byl ireducibilně souvislý mezi body a, b, k tomu je nutné a stačí, aby každý od a i od b různý bod roztínal P mezi body a, b.

Důkaz. I. Nechť podmínka je splněna. Budiž $S \subset P \neq S$, $a \in S$, $b \in S$; máme dokázat, že množina S není souvislá. Existuje bod $c \in P - S$. Jest $a \neq c \neq b$, takže podle předpokládané podmínky existují takové dvě oddělené množiny A, B, že $a \in A$, $b \in B$, $P - (c) = A \cup B$. Protože $S \subset P - (c)$, $a \in A \cap S$, $b \in B \cap S$, plyne z **10.1.3**, že S není souvislá.

II. Nechť P je ireducibilně souvislý mezi body a, b. Budiž $c \in P$, $a \neq c \neq b$. Máme dokázat, že c roztíná P mezi body a, b. Protože $a \in P - (c)$, $b \in P - (c)$, není množina $P - (c)$ souvislá. Proto existují takové dvě oddělené množiny A, B, že $P - (c) = A \cup B$, $a \in A$, $B \neq \emptyset$. Stačí dokázat, že $b \in B$. Není-li tomu tak, pak množina $A \cup (c)$ obsahuje oba body a, b; avšak $A \cup (c)$ podle **10.1.10** je souvislá, takže $A \cup (c) = P$ a to je nemožné, neboť $A \cup (c) = P - B$, $B \neq \emptyset$.

10.5.3. Budiž u F-modifikace topologie v v množině P. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Aby prostor (P, v) byl ireducibilně souvislý mezi a, b, k tomu je nutné a stačí, aby totéž platilo o prostoru (P, u). Podle **10.1.13** a **10.1.14** je (P, v) souvislý právě tehdy, jestliže (P, u) je souvislý. Aby potom P byl ireducibilně souvislý mezi a, b, k tomu je podle **10.4.1** a **10.5.2** nutné a stačí, aby pro každý bod $c \in P - [(a) \cup (b)]$ ležely body a, b ve dvou různých kvasikomponentách otevřené množiny $P - (c)$. Tvrzení tedy plyne ze **4.6.17** a **10.2.15.**

Definice **10.5.2.** Pravíme, že prostor P je *lineárně orientován*, jestliže P obsahuje více než jeden bod, je souvislý a je dáno uspořádání množiny P s tou vlastností, že kdykoli bod x_2 leží mezi body x_1, x_3, pak x_2 roztíná P mezi x_1, x_3.

10.5.4. Budiž P lineárně orientovaný prostor. Budiž $c \in P$. Budiž

(1) $$A = \mathscr{E}_x \quad [x \text{ před } c]\,, \quad B = \mathscr{E}_x \quad [x \text{ za } c]\,.$$

Každá z obou množin A, B je otevřená a buďto prázdná nebo souvislá. Množiny $A \cup (c)$, $B \cup (c)$ jsou uzavřené a souvislé.

Důkaz. I. Buďtež x_1, x_2, x_3 tři různé body. Jestliže x_2 leží mezi x_1, x_3, pak x_2 roztíná P mezi x_1, x_3. Obráceně nechť x_2 roztíná P mezi x_1, x_3; dokážeme, že x_2 leží mezi x_1, x_3. Existují takové oddělené A_0, B_0, že $P - (x_2) = A_0 \cup B_0$, $x_1 \in A_0$, $x_3 \in B_0$. Množiny $A_0 \cup (x_2)$, $B_0 \cup (x_2)$ jsou souvislé podle **10.1.2** a **10.1.10.** Protože oba body x_2, x_3 leží v souvislé části $B_0 \cup (x_2)$ množiny $P - (x_1)$, plyne z **10.1.3**, že x_1 neroztíná P mezi x_2, x_3, takže x_1 neleží mezi x_2, x_3. Protože oba body x_1, x_2 leží v souvislé části $A_0 \cup (x_2)$ množiny $P - (x_3)$, plyne opět z **10.1.3**, že x_3 neroztíná P mezi x_1, x_2, takže x_3 neleží mezi x_1, x_2. Nyní body x_1, x_2, x_3 jsou navzájem různé a ani x_1 ani x_3 neleží mezi ostatními dvěma; tedy x_2 leží mezi x_1, x_3.

II. Nechť $c \in P$ není ani první ani poslední v P. Mají-li A, B význam (1), plyne z I podle **10.4.1**, že množina $P - (c)$ má právě dvě kvasikomponenty, jimiž jsou množiny A, B; podle **10.2.14** jsou A, B komponenty množiny $P - (c)$, takže jsou souvislé podle **10.2.1.** Z **10.2.4** plyne, že množina B je relativně uzavřená v $P - (c)$, takže $A = [P - (c)] - B$ je relativně otevřená, a tedy A je otevřená v P podle **4.6.7.** Podobně též B je otevřená v P. Tudíž $A \cup (c) = P - B$, $B \cup (c) = P - A$ jsou uzavřené. Posléze jsou A, B oddělené např. podle **5.1.3** a **10.2.5.** Protože $P - (c) = A \cup B$, jsou $A \cup (c)$, $B \cup (c)$ souvislé podle **10.1.2** a **10.1.10.**

III. Nechť $c \in P$ je první v P. Z I plyne podle **10.4.1**, že $P - (c)$ má jedinou kvasikomponentu, takže množina $B = P - (c)$ je souvislá podle **10.2.9.** Jest $A = \emptyset$; množina $B \cup (c) = P$ je souvislá; také $A \cup (c) = (c)$ je souvislá podle **10.1.2.** Že A, B jsou otevřené a že $A \cup (c)$, $B \cup (c)$ jsou uzavřené, je zřejmé. Podobně se dokáže tvrzení i v případě, kdy $c \in P$ je poslední v P.

10.5.5. Budiž P lineárně orientovaný prostor. Daná topologie v P je jemnější než ta, která vznikne z orientace podle definice **6.1.2.** Při topologii z definice **6.1.2** má každé definující okolí bodu $c \in P$ jeden ze tří tvarů:

$$A = \mathscr{E}_x \quad [a \text{ před } x]\,,$$
$$B = \mathscr{E}_x \quad [x \text{ před } b]\,,$$
$$C = \mathscr{E}_x \quad [a \text{ před } x,\ x \text{ před } b]\,,$$

kde a leží před c, b leží za c. Podle **4.3.4** stačí ukázat, že každá taková množina je i při původní topologii okolím bodu c. Avšak A, B jsou otevřené podle **10.5.4**, takže podle **4.4.11** také $C = A \cap B$ je otevřená. Protože všecky tři množiny obsahují bod c, plyne tvrzení ze **4.4.13.**

10.5.6. Budiž P lineárně orientovaný prostor. Aby bodová množina $S \neq \emptyset$ byla souvislá, k tomu je nutné a stačí, aby každý bod ležící mezi dvěma body množiny S náležel do S. Je-li S souvislá, pak S je otevřená právě tehdy, jsou-li splněny tyto dvě podmínky: [1] S buďto nemá první bod nebo bod první v S je také v P prvním; [2] S buďto nemá poslední bod nebo bod poslední v S je také v P posledním.

Důkaz. I. Nechť existují takové body $a \in S$, $b \in P - S$, $c \in S$, že b leží mezi a, c. Máme dokázat, že S není souvislá. Podle definice **10.5.2** existují takové oddělené A, C, že $a \in A$, $c \in C$, $P - (b) = A \cup C$. Protože $S \subset P - (b)$, $a \in A \cap S$, $c \in C \cap S$, plyne z **10.1.3**, že množina S není souvislá.

II. Nechť každý bod ležící mezi dvěma body množiny S náleží do S. Máme ukázat, že S je souvislá. Podle **10.1.2** můžeme předpokládat, že S obsahuje více než jeden bod; nechť tedy $a \in S$, $b \in S$ a nechť a leží před b. Podle **10.1.4** stačí udat takovou souvislou $S(a, b) \subset S$, že $a \in S(a, b)$, $b \in S(a, b)$. Budiž

$$A = \mathscr{E}_x \ [x \text{ před } a]\,, \quad B = \mathscr{E}_x \ [x \text{ před } b]\,, \quad S(a, b) = [B \cup (b)] - A\,.$$

Množina $S(a, b)$ se skládá z bodu a, z bodu b a ze všech těch bodů, které leží mezi a, b; tudíž $S(a, b) \subset S$. Z **10.5.4** plyne, že množiny $A \cup (a)$, $B \cup (b)$ jsou uzavřené a že A je otevřená, takže $S(a, b) = [B \cup (b)] \cap (P - A)$ je uzavřená podle **4.4.5.** Nyní $[A \cup (a)] \cup S(a, b) = B \cup (b)$ je souvislá podle **10.5.4**, $[A \cup (a)] \cap S(a, b) = (a)$ je souvislá podle **10.1.2.** Tudíž $S(a, b)$ je souvislá podle **10.1.11.**

III. Nechť každý bod ležící mezi dvěma body množiny S náleží do S. Jsou-li splněny podmínky [1], [2], plyne snadno z **10.5.4**, že S je otevřená. Jestliže podmínka [1] není splněna, pak existuje bod $c \in S$, který je první v S, ale není první v P, takže množina $A = \mathscr{E}_x$ [x před c] není prázdná. Budiž ještě $B = \mathscr{E}_x$ [x za c]; množiny A, B jsou otevřené. Kdyby S byla otevřená, pak by podle **4.4.10** také $B \cup S = B \cup (c)$ byla otevřená. Množiny A, $B \cup (c)$ by pak podle **5.1.9** a **5.1.12** byly oddělené; to je však nemožné, neboť prostor P je souvislý, $P = A \cup [B \cup (c)]$, $A \neq \emptyset$, $B \cup (c) \neq \emptyset$. Stejně se dokáže, že S není otevřená, není-li splněna podmínka [2].

10.5.7. Budiž P lineárně orientovaný prostor. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Nechť $S \subset P$ se skládá z bodu a, z bodu b a ze všech bodů ležících mezi a, b. Pak je S ireducibilně souvislá mezi body a, b. Viz **10.5.6.**

10.5.8. Nechť lineárně orientovaný prostor P má první bod a i poslední bod b. Pak P je ireducibilně souvislý mezi a, b. Viz **10.5.7.**

10.5.9. Nechť prostor P je ireducibilně souvislý mezi body a, b. Existují právě dvě uspořádání množiny P, vzhledem k nimž je P lineárně orientovaný prostor. Při jedné lineární orientaci je bod a první, bod b poslední, při druhé obráceně. Obě lineární orientace jsou navzájem inversní. Viz **10.5.1** a **10.5.2.**

10.5.10. Prostor P budiž ireducibilně souvislý mezi body a, b a také mezi body c, d. Pak je buďto $a = c$, $b = d$ nebo $a = d$, $b = c$. Viz **10.5.9.**

10.5.11. Budiž P lineárně orientovaný prostor; budiž S souvislá bodová množina obsahující více než jeden bod. Daným uspořádáním prostoru P určené uspořádání množiny S je lineární orientace vnořeného prostoru S. Nechť bod $x_2 \in S$ leží mezi body $x_1 \in S$, $x_3 \in S$; máme ukázat, že x_2 roztíná S mezi body x_1, x_3. Nyní x_2 roztíná P mezi body x_1, x_3, takže existují takové oddělené A, B, že $P - (x_2) = A \cup B$, $x_1 \in A$, $x_3 \in B$. Pak je $S - (x_2) =$

$= (S \cap A) \cup (S \cap B)$, $x_1 \in S \cap A$, $x_3 \in S \cap B$ a množiny $S \cap A$, $S \cap B$ jsou oddělené v prostoru S podle **5.1.3** a **5.1.7.**

10.5.12. Buďtež a, b, c tři různé body prostoru P. Nechť $S_1 \subset P$ je ireducibilně souvislá mezi body a, b; nechť $S_2 \subset P$ je ireducibilně souvislá mezi body b, c. Aby P byl ireducibilně souvislý mezi body a, c, k tomu je nutné a stačí, aby bylo předně $S_1 \cup S_2 = P$, $S_1 \cap S_2 = (b)$ a aby za druhé množiny S_1, S_2 byly uzavřené v P.

Důkaz. I. Budiž P ireducibilně souvislý mezi a, c. Podle **10.5.9** můžeme předpokládat, že P je orientován tak, že bod a je první a bod c poslední. Budiž

$$A = \mathscr{E}_x \quad [x \text{ před } b]\,, \quad B = \mathscr{E}_x \quad [b \text{ před } x]\,.$$

Pak je $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B \cup (b) = P$. Z **10.5.6** snadno plyne, že $S_1 = A \cup (b)$, $S_2 = B \cup (b)$. Tudíž $S_1 \cup S_2 = P$, $S_1 \cap S_2 = (b)$; množiny S_1, S_2 jsou uzavřené podle **10.5.4.**

II. Budiž $S_1 \cup S_2 = P$, $S_1 \cap S_2 = (b)$; množiny S_1, S_2 buďtež uzavřené. P je souvislý podle **10.1.5.** Naproti tomu množina $P - (b) = [S_1 - (b)] \cup [S_2 - (b)]$ není souvislá, neboť množiny $S_1 - (b)$, $S_2 - (b)$ jsou oddělené podle **5.1.5** a jest $a \in S_1 - (b)$, $c \in S_2 - b$. Máme dokázat, že musí být $T = P$, jestliže množina $T \subset P$ je souvislá a jestliže $a \in T$, $c \in T$. Pro $x \in P$ budiž:

$$x \in S_1 \Rightarrow f_1(x) = x\,, \quad x \in P - S_1 \Rightarrow f_1(x) = b\,;$$
$$x \in S_2 \Rightarrow f_2(x) = x\,, \quad x \in P - S_2 \Rightarrow f_2(x) = b\,.$$

Dokážeme-li, že zobrazení f_1, f_2 jsou spojitá, je snadné důkaz dokončit; neboť jestliže $T \subset P$ je souvislá, je $f_1^1(T) \subset S_1$ souvislá podle **10.1.12**; jestliže mimo to $a \in T$, $c \in T$, je $a \in f_1^1(T)$, $b \in f_1^1(T)$, tedy $S_1 \subset f_1^1(T)$ a z toho plyne, že $S_1 - (b) \subset T$, podobně se zjistí, že také $S_2 - (b) \subset T$, takže $P - (b) \subset T$, a tedy $T = P$, neboť množina $P - (b)$ není souvislá. Stačí odůvodnit spojitost zobrazení f_1. Budiž $x \in P$ a budiž $V \subset S_1$ relativní okolí bodu $f_1(x)$; podle **7.1.1** máme ukázat, že $f_1^{-1}(V)$ je okolí bodu x. Rozeznávejme dva případy. Předně budiž $f_1(x) \neq b$, takže $x = f_1(x) \in P - S_2$. Podle **4.4.13** je $P - S_2$ okolí bodu x. Podle **4.6.2** existuje takové okolí U bodu x, že $S_1 \cap U = V$. Podle **4.2.5** je $U - S_2 = U \cap (P - S_2)$ okolí bodu x. Zřejmě $U - S_2 = V - S_2 \subset$

$\subset f_1^{-1}(V)$, takže $f_1^{-1}(V)$ je okolí bodu x podle **4.2.4.** Za druhé budiž $f_1(x) = b$. Opět existuje takové okolí U bodu x, že $S_1 \cap U = V$. Zřejmě $f_1^{-1}(V) = V \cup S_2 \supset U$, takže $f_1^{-1}(V)$ je okolí bodu x podle **4.2.4.**

10.5.13. Buďtež a_i $(0 \leqq i \leqq n)$ navzájem různé body prostoru P. Pro $1 \leqq i \leqq n$ budiž S_i uzavřená bodová množina ireducibilně souvislá mezi body a_{i-1}, a_i. Budiž $P = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$. Pro $1 \leqq i < j \leqq n$ budiž $S_i \cup S_j = (a_i)$ v případě $j = i + 1$, $S_i \cap S_j = \emptyset$ v případě $j > i + 1$. Pak prostor P je ireducibilně souvislý mezi body a_0, a_n. Dokáže se indukcí na základě **10.5.12.**

10.5.14. Budiž P lineárně orientovaný prostor. Pak P je H-prostor. Nechť $a \in P$ leží před $b \in P$. Budiž

$$A = \mathscr{E}_x \quad [x \text{ před } a]\,, \quad B = \mathscr{E}_x \quad [b \text{ před } x]\,.$$

Množiny $A \cup (a)$, $B \cup (b)$ jsou disjunktní a podle **10.5.4** jsou uzavřené, takže podle **5.1.4** jsou oddělené. Protože $A \cup (a) \neq \emptyset \neq B \cup (b)$ a protože prostor P je souvislý, existuje bod $c \in P$, který nenáleží ani do $A \cup (a)$ ani do $B \cup (b)$. Je-li

$$C_1 = \mathscr{E}_x \quad [x \text{ před } c]\,, \quad C_2 = \mathscr{E}_x \quad [c \text{ před } x]\,,$$

jest $a \in C_1$, $b \in C_2$, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ a množiny C_1, C_2 jsou otevřené podle **10.5.4.** Podle **4.4.13** je tedy C_1 okolí bodu a a C_2 je okolí bodu b. Protože $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, jsou body a, b H-oddělené.

Definice **10.5.3.** Pravíme, že prostor P je *pseudooblouk*, je-li P uspořádaný prostor bez skoků a bez mezer obsahující první bod a i poslední bod $b \neq a$. Bodovou množinu M nazveme pseudooblouk, jestliže vnořený prostor M je pseudooblouk.

10.5.15. Budiž P prostor ireducibilně souvislý mezi body a, b. Pak existuje prosté spojité zobrazení prostoru P na pseudooblouk. Označme u danou topologii v množině P. Podle **10.5.9** můžeme předpokládat, že P je lineárně orientován tak, že bod a je první a b poslední. Tato orientace určuje podle definice **6.1.2** topologii v v množině P. Podle **10.5.5** je u jemnější než v, takže podle **7.1.11** identické zobrazení P na P je prosté spojité zobrazení prostoru (P, u) na prostor (P, v). Nyní (P, v) je uspořádaný prostor s prvním bodem a a posledním bodem b. Podle **10.1.13** je (P, v) souvislý prostor. Tudíž podle **10.1.15** nejsou v P ani skoky ani mezery, takže (P, v) je pseudooblouk.

Definice **10.5.4.** Budiž P souvislý prostor. Bod $a \in P$ se nazývá *koncovým bodem* prostoru P, jestliže ke každému okolí U bodu a existuje takové okolí $V \subset U$ bodu a, že množina Fr V je jednobodová.

10.5.16. Pseudooblouk P má právě dva koncové body a, b a je ireducibilně souvislý mezi body a, b.

Důkaz. I. P je uspořádaný prostor s prvním bodem a a posledním bodem $b \neq a$, který nemá skoků ani mezer, takže P je souvislý podle **10.1.15.** Je-li $c \in P$, $a \neq c \neq b$ a je-li $A = \mathscr{E}_x$ [x před c], $B = \mathscr{E}_x$ [x za c], jsou množiny A, B otevřené a jest $P - (c) = A \cup B$, $a \in A$, $b \in B$, $A \cap B = \emptyset$. Množiny A, B jsou oddělené podle **5.1.9** a **5.1.12.** Tudíž c roztíná P mezi body a, b a prostor P je ireducibilně souvislý mezi a, b podle **10.5.2.**

II. Budiž U okolí bodu a. Existuje takový bod $c \neq a$, že $V = \mathscr{E}_x$ [x před c] $\subset V$; V je otevřené okolí bodu a. Protože $a \in V$, $b \in P - V$ a protože P je souvislý, je Fr $V \neq \emptyset$ podle **10.1.9.** Zřejmě $\overline{V} \subset V \cup (c)$, takže Fr $V = (c)$ podle **4.8.3** a **4.8.6.** Tím je dokázáno, že a je koncový bod prostoru P. Podobně také b je koncový bod.

III. Budiž $c \in P$, $a \neq c \neq b$. Budiž $A = \mathscr{E}_x$ [x před c], $B = \mathscr{E}_x$ [x za c] jako v I. Jest $P - (c) = A \cup B$, $a \in A$, $b \in B$ a množiny A, B jsou oddělené. Tudíž jsou $A \cup (c)$, $B \cup (c)$ souvislé podle **10.1.2** a **10.1.10**, což ostatně plyne též z **10.1.15.** Podle **4.4.13** je $U = P - [(a) \cup (b)]$ okolí bodu c. Je-li $V \subset U$ okolí bodu c, jest $c \in P - \overline{P - V} \subset P - \text{Fr}\, V$. Na druhé straně je $c \in V \cap [A \cup (c)]$, $a \in [A \cup (c)] - V$ a množina $A \cup (c)$ je souvislá, takže $[A \cup (c)] \cap \text{Fr}\, V \neq \emptyset$ podle **10.1.9.** Tudíž $A \cap \cap \text{Fr}\, V \neq \emptyset$ a podobně se zjistí též $B \cap \text{Fr}\, V \neq \emptyset$. Protože $A \cap B = \emptyset$, není c koncový bod prostoru P.

10.5.17. Budiž P prostor ireducibilně souvislý mezi body a, b. Aby P byl pseudooblouk, k tomu je nutné a stačí, aby P byl kompaktní.

Důkaz. I. Je-li P pseudooblouk, je P kompaktní podle **8.3.28.**

II. Podle **10.5.15** existuje prosté spojité zobrazení f prostoru P na pseudooblouk P_1. Podle **6.1.7** je P_1 H-prostor. Je-li P kompaktní, pak podle **8.3.24** f je homeomorfní a P je pseudooblouk.

10.5.18. Buďtež a_i $(0 \leqq i \leqq n)$ navzájem různé body H-prostoru P. Pro $1 \leqq i \leqq n$ budiž $S_i \subset P$ pseudooblouk s koncovými body a_{i-1}, a_i (viz **10.5.16**). Pro $1 \leqq i < j \leqq n$ budiž $S_i \cap S_j = (a_i)$ v případě $j = i + 1$, $S_i \cap S_j = \emptyset$ v případě $j > i + 1$. Pak je $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ pseudooblouk s koncovými body a_0, a_n. Pro $1 \leqq i \leqq n$ je množina S_i ireducibilně souvislá mezi a_{i-1}, a_i podle **10.5.16.** Mimo to je S_i kompaktní podle **10.5.17**, tedy uzavřená podle **8.3.13**, tedy relativně uzavřená v S podle **4.6.4.** Tudíž S je ireducibilně souvislá mezi a_0, a_n podle **10.5.13.** Podle **8.3.2** je S kompaktní. Tudíž S je pseudooblouk podle **10.5.17** a a_0, a_n jsou koncové body množiny S podle **10.5.10** a **10.5.16.**

10.5.19. Budiž $B \subset P$, $F \subset P$; B budiž pseudooblouk, F budiž uzavřená. Budiž $B \cap F \neq \emptyset$. Je-li B orientována, je množina $B \cap F$ uspořádána jakožto podmnožina B. Ve množině $B \cap F$ existuje i první i poslední bod. B je uspořádaný prostor. B je kompaktní podle **10.5.17** a množina $B \cap F$ je relativně uzavřená v B podle **4.6.4**, takže $B \cap F$ je kompaktní podle **8.3.1.** $B \cap F$ je uspořádaný prostor podle **6.1.4** a **8.3.29**; tudíž tvrzení plyne z **8.3.28.**

Definice **10.5.5.** Pravíme, že prostor P je *jednoduchý oblouk* (v této knize stručně *oblouk*), je-li P pseudooblouk obsahující hustou spočetnou množinu. Množinu $M \subset P$ nazveme oblouk, jestliže M jako vnořený prostor je oblouk.

10.5.20. Budiž $a \in \mathbf{E}_1$, $b \in \mathbf{E}_1$, $a < b$. Interval $J = \mathscr{E}_t[a \leqq t \leqq b] \subset \mathbf{E}_1$ je oblouk s koncovými body a, b. J ireducibilně souvislý mezi body a, b podle **10.1.16.** J je kompaktní podle **8.2.14** a **9.1.20.** Tudíž J je pseudooblouk podle **10.5.17.** Zřejmě J obsahuje hustou spočetnou množinu.

10.5.21. Budiž P oblouk. Pak existuje homeomorfní zobrazení prostoru P na interval $J = \mathscr{E}_t\,[0 \leqq t \leqq 1]$. Buďtež a, b oba koncové body prostoru P (viz **10.5.16**). Existuje spočetná hustá $D \subset P$;

můžeme předpokládat, že $a \in D$, $b \in D$. P je uspořádaný prostor s prvním bodem a a posledním b; v P neexistují skoky ani mezery. Jakožto část P je D uspořádána; ze **6.1.8** plyne snadno, že D je hustě uspořádána. Podle **3.2.6** existuje podobné zobrazení φ množiny D na množinu všech racionálních čísel intervalu J. Snadno se zjistí, že existuje podobné zobrazení f prostoru P do množiny J, pro které je $\varphi = f \mid D$, a že zobrazení f je homeomorfní. Protože P je kompaktní (viz **10.5.17**), je také $f^1(P) \subset J$ kompaktní podle **8.3.15**, takže množina $f^1(P)$ je uzavřená v J podle **8.3.13.** Protože $f^1(D) = \varphi^1(D)$ je hustá v J, musí být $f^1(P) = J$.

10.5.22. Metrisovatelný pseudooblouk je oblouk. Viz **4.12.21**, **8.3.3** a **9.1.19.**

10.5.23. Buďtež a_i $(0 \leqq i \leqq n)$ navzájem různé body H-prostoru P. Pro $1 \leqq i \leqq n$ budiž $S_i \subset P$ oblouk s koncovými body a_{i-1}, a_i. Pro $1 \leqq i < j \leqq n$ budiž $S_i \cap S_j = (a_i)$ v případě $j = i + 1$, $S_i \cap S_j = \emptyset$ v případě $j > i + 1$. Pak $S = \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i$ je oblouk s koncovými body a_0, a_n. Pro $1 \leqq i \leqq n$ existuje spočetná množina D_i, která je hustá v S_i, tj. $D_i \subset S_i \subset \overline{D_i}$. Je-li $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$, pak D je spočetná podle **2.2.6** a $D \subset S \subset \overline{D}$, tj. D je hustá v S. Tvrzení nyní plyne z **10.5.18.**

10.5.24. Budiž a koncový bod souvislého prostoru P. Pak a není dělicí bod prostoru P. Z definice **10.5.4** je patrné, že P je více než jednobodový. Je-li a dělicí bod prostoru P, pak existují takové oddělené množiny A, B, že $A \neq \emptyset \neq B$, $P - (a) = A \cup B$. Podle **4.2.6** existuje takové okolí U bodu a, že $A - U \neq \emptyset \neq B - U$. Je-li $V \subset U$ okolí bodu a, jest $\operatorname{Fr} V \subset \overline{P - V} \subset P - (a)$. Podle **10.1.9** je však $A \cap \operatorname{Fr} V \neq \emptyset \neq B \cap \operatorname{Fr} V$, protože množiny $A \cap (a)$, $B \cap (a)$ podle **10.1.2** a **10.1.10** jsou souvislé. Tudíž množina $\operatorname{Fr} V$ obsahuje aspoň dva různé body, a to je nemožné, je-li a koncový bod prostoru P.

10.5.25. Budiž P kontinuum. Pak existují aspoň dva body, které nejsou dělicími body prostoru P. Existují-li pouze dva takové body, pak P je pseudooblouk.

Důkaz. I. Buďtež $a \in P$, $b \in P$ dva různé body; předpokládejme, že každý $x \in P - [(a) \cup (b)]$ je dělicí bod prostoru P. Dokážeme, že P je ireducibilně souvislý mezi body a, b. Jakmile to provedeme, dokončí se důkaz věty už snadno. Neboť P je kompaktní, tedy P je pseudooblouk podle **10.5.17** a podle **10.5.10** a **10.5.16** jsou a, b jeho koncové body. Z **10.5.24** pak plyne správnost tvrzení věty.

II. Zvolme $c \in P$, $a \neq c \neq b$. Pak c je dělicí bod prostoru P. Tudíž existují takové dvě oddělené množiny A_0, B_0, že $P - (c) = A_0 \cup B_0$, $A_0 \neq \emptyset \neq B_0$. Podle **5.1.1** je $A_0 \cap B_0 = \emptyset$; podle **10.1.2** a **10.1.10** množina $A_0 \cup (c) = P - B_0$ je souvislá. Můžeme předpokládat, že $a \in A_0$. Z **10.5.2** je patrné, že stačí dokázat, že $b \in B_0$. Budiž naopak $b \in A_0$.

III. Je-li $x \in B_0$, jest $a \neq x \neq b$, takže x je dělicí bod prostoru P a existují takové dvě oddělené množiny $A(x) \neq \emptyset$, $B(x) \neq \emptyset$, že $P - (x) = A(x) \cup B(x)$. Protože $P - B_0$ je souvislá část množiny $P - (x)$, je $P - B_0$ podle **10.1.3** obsažena buďto v $A(x)$ nebo v $B(x)$; bez újmy na obecnosti budiž $P - B_0 \subset A(x)$. Množina $(x) \cup A(x)$ je podle **10.1.2** a **10.1.10** souvislá.

IV. Pro $x \in B_0$, $y \in B_0$ nechť „x před y" znamená, že $(x) \cup A(x) \subset A(y)$. Snadno se zjistí, že je tím definováno částečné uspořádání množiny B_0. Zvolme libovolně $x \in B_0$, $y \in B(x)$. Protože $P - B_0 \subset A(x)$, je $y \in B_0$. Souvislá množina $(x) \cup A(x) = P - B(x) \subset P - (y) = A(y) \cup B(y)$ je podle **10.1.3** obsažena buďto v $A(y)$ nebo v $B(y)$ a protože $\emptyset \neq P - B_0 \subset A(x) \cap A(y)$, je $(x) \cup A(x) \subset A(y)$. Tedy ke každému $x \in B_0$ existuje takový $y \in B_0$, že je x před y v částečně uspořádané množině B_0.

V. Ze **3.9.1** nyní plyne, že existuje taková lineárně uspořádaná podmnožina $T \neq \emptyset$ množiny B_0, ke které v B_0 neexistuje žádný horní odhad. Pro $x \in T$, $y \in T$, $x \neq y$ je buďto $(x) \cup A(x) \subset A(y)$ nebo $(y) \cup A(y) \subset A(x)$. V prvém případě je zřejmě $B(y) \subset B(x)$, ve druhém $B(x) \subset B(y)$. Neprázdné množiny $B(x)$ $(x \in T)$ tvoří tudíž monotónní soustavu. Protože prostor P je kompaktní, existuje podle **8.3.7** a **8.3.8** takový bod y, že $y \in \overline{B(x)}$ pro každý $c \in T$. Protože $P - B_0 \subset A(x) \subset P - \overline{B(x)}$ pro každý $x \in T$, je $y \in B_0$. Dokážeme-li, že y je horní odhad množiny T, budeme hotovi. Nechť tedy $x \in T$, $x \neq y$; máme dokázat, že $(x) \cup A(x) \subset A(y)$. Protože $A(x) \subset P - \overline{B(x)} \subset P - (y)$, $x \neq y$, je $(x) \cup A(x) \subset P - (y)$ a stejně jako ve IV vyjde $(x) \cup A(x) \subset \subset A(y)$.

10.6. Cyklicky uspořádané množiny a cyklické prostory

Definice **10.6.1.** Množinu P nazveme *cyklicky uspořádanou,* jestliže je dána množina $\mathfrak{C} \subset P \times P \times P$ splňující tyto čtyři axiomy (x, y, z, t jsou libovolné prvky množiny P):

[I$\mathfrak{C}$] $(x, y, z) \in \mathfrak{C} \Rightarrow (y, z, x) \in \mathfrak{C}$.

[II$\mathfrak{C}$] Je-li $(x, y, z) \in \mathfrak{C}$, pak není $(y, x, z) \in \mathfrak{C}$.

[III$\mathfrak{C}$] Je-li $x \neq y \neq z \neq x$, je buďto $(x, y, z) \in \mathfrak{C}$ nebo $(y, x, z) \in \mathfrak{C}$.

[IV$\mathfrak{C}$] $(x, y, t) \in \mathfrak{C}$, $(y, z, t) \in \mathfrak{C} \Rightarrow (x, z, t) \in \mathfrak{C}$.

$\mathfrak{C}$ nazveme *cyklickým uspořádáním* množiny P.

10.6.1. Budiž $\mathfrak{C}$ cyklické uspořádání množiny P. Pak platí toto:

[1] Je-li $(x, y, z) \in \mathfrak{C}$, jest $(y, z, x) \in \mathfrak{C}$, $(z, x, y) \in \mathfrak{C}$, ale není ani $(y, x, z) \in \mathfrak{C}$ ani $(z, y, x) \in \mathfrak{C}$ ani $(x, z, y) \in \mathfrak{C}$.

[2] $(x, y, z) \in \mathfrak{C} \Rightarrow x \neq y \neq z \neq x$.

[3] $(x, y, z) \in \mathfrak{C}$, $(x, z, t) \in \mathfrak{C} \Rightarrow (x, y, t) \in \mathfrak{C}$.

Z (I$\mathfrak{C}$) plyne: $(x, y, z) \in \mathfrak{C} \Rightarrow (y, z, x) \in \mathfrak{C} \Rightarrow (z, x, y) \in \mathfrak{C}$; užijeme-li ještě [II$\mathfrak{C}$], dostaneme [1]. Z [1] plyne snadno [2]. Budiž konečně $(x, y, z) \in \mathfrak{C}$, $(x, z, t) \in \mathfrak{C}$; podle [I$\mathfrak{C}$] je $(y, z, x) \in \mathfrak{C}$, $(z, t, x) \in \mathfrak{C}$, takže podle [IV$\mathfrak{C}$] je $(y, t, x) \in \mathfrak{C}$; z toho plyne $(x, y, t) \in \mathfrak{C}$ podle [1], takže platí i [3].

Definice **10.6.2.** Položíme-li

$$(x, y, z) \in \mathfrak{C}^* \Leftrightarrow (z, y, x) \in \mathfrak{C}\,,$$

plyne z **10.6.1**, že zároveň s $\mathfrak{C}$ také $\mathfrak{C}^*$ je cyklické uspořádání množiny P. Pravíme, že $\mathfrak{C}^*$ je *inversní* k $\mathfrak{C}$; protože zřejmě také $\mathfrak{C}$ je inversní k $\mathfrak{C}^*$, pravíme také, že $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}^*$ jsou *navzájem inversní.*

Definice **10.6.3.** Budiž $\mathfrak{C}$ cyklické uspořádání množiny $P \neq \emptyset$. Zvolme $a \in P$. Pro $x \in P - (a)$, $y \in P - (a)$ budiž

$$(x, y) \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow (x, y, a) \in \mathfrak{C}\,.$$

Pak je $\mathfrak{D}$ uspořádání množiny $P - (a)$, tj. jsou splněny axiomy [I$\mathfrak{D}$] až [III$\mathfrak{D}$], neboť:

$$[\mathrm{II}\mathfrak{C}] \Rightarrow [\mathrm{I}\mathfrak{D}]\,, \quad [\mathrm{III}\mathfrak{C}] \Rightarrow [\mathrm{II}\mathfrak{D}]\,, \quad [\mathrm{IV}\mathfrak{C}] \Rightarrow [\mathrm{III}\mathfrak{D}]\,.$$

Pravíme, že *uspořádání $\mathfrak{D}$ množiny $P - (a)$ je vytvořeno cyklickým uspořádáním $\mathfrak{C}$ množiny P.*

10.6.2. Budiž $a \in P$. Budiž $\mathfrak{D}$ uspořádání množiny $P - (a)$. Existuje právě jedno takové cyklické uspořádání $\mathfrak{C}$ množiny P, kterým je vytvořeno $\mathfrak{D}$.

Důkaz. I. Existuje-li žádané cyklické uspořádání $\mathfrak{C}$ množiny P, odvodí se snadno z [I$\mathfrak{C}$] a ze [2] v **10.6.1**:

$$(a, x, y) \in \mathfrak{C} \Leftrightarrow (x, y, a) \in \mathfrak{C} \Leftrightarrow (y, a, x) \in \mathfrak{C} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in P - (a)\,, \; y \in P - (a)\,, \quad (x, y) \in \mathfrak{D}\,.$$

Nyní buďtež x, y, z tři prvky množiny $P - (a)$. Předpokládejme $x \neq y \neq z \neq x$, neboť podle [2] v **10.6.1** pouze za tohoto předpokladu může být $(x, y, z) \in \mathfrak{C}$. Při uspořádání $\mathfrak{D}$ leží buďto x před z nebo z před x. Leží-li x před z, jest $(x, z, a) \in \mathfrak{C}$; je-li $(x, y, z) \in \mathfrak{C}$, jest $(x, y, a) \in \mathfrak{C}$ podle [3] v **10.6.1**, tj. je x před y; mimo to je $(x, y, z) \in \mathfrak{C}$ a $(a, x, z) \in \mathfrak{C}$ podle [1] v **10.6.1**, takže $(a, y, z) \in \mathfrak{C}$ podle [IV$\mathfrak{C}$], $(y, z, a) \in \mathfrak{C}$ podle [I$\mathfrak{C}$], tj. je y před z. Obráceně budiž x před y, y před z; pak je $(x, y, a) \in \mathfrak{C}$, $(y, z, a) \in \mathfrak{C}$, tedy $(z, a, y) \in \mathfrak{C}$, $(a, x, y) \in \mathfrak{C}$ podle [1] v **10.6.1**, takže $(z, x, y) \in \mathfrak{C}$ podle [IV$\mathfrak{C}$] a $(x, y, z) \in \mathfrak{C}$ podle [I$\mathfrak{C}$]. Tím je dokázáno, že v případě $(x, z) \in \mathfrak{D}$ platí $(x, y, z) \in \mathfrak{C}$ právě tehdy, jestliže y leží mezi x, z. Zaměníme-li x, z, vidíme, že v případě $(z, x) \in \mathfrak{D}$ platí $(z, y, x) \in \mathfrak{C}$ právě tehdy, jestliže y leží mezi x, z. Avšak ze [III$\mathfrak{C}$] a z [1] v **10.6.1** plyne, že (pro $x \neq y \neq z \neq x$) z obou vztahů $(x, y, z) \in \mathfrak{C}$, $(z, y, x) \in \mathfrak{C}$ vždy platí právě jeden. Dostáváme tedy výsledek, že jsou-li x, y, z tři prvky množiny $P - (a)$, pak je $(x, y, z) \in \mathfrak{C}$ právě tehdy, jestliže nastane jeden ze tří případů

$$\begin{aligned} &(x, y) \in \mathfrak{D}\,, \quad (y, z) \in \mathfrak{D}\,;\\ &(y, z) \in \mathfrak{D}\,, \quad (z, x) \in \mathfrak{D}\,;\\ &(z, x) \in \mathfrak{D}\,, \quad (x, y) \in \mathfrak{D}\,. \end{aligned}$$

Srovnáme-li s tím, co bylo řečeno na počátku důkazu, vidíme, že cyklické uspořádání $\mathfrak{C}$, existuje-li, je uspořádáním $\mathfrak{D}$ jednoznačně určeno.

II. Zbývá ukázat, že takto určená množina $\mathfrak{C} \subset P \times P \times P$ je cyklickým uspořádáním množiny P, tj., že jsou splněny čtyři axiomy [I$\mathfrak{C}$] až [IV$\mathfrak{C}$]. Budiž nejprve $(x, y, z) \in \mathfrak{C}$. Pak nastane jeden z těchto šesti případů: (1) $x = a$, $(y, z) \in \mathfrak{D}$; (2) $y = a$, $(z, x) \in \mathfrak{D}$; (3) $z = a$, $(x, y) \in \mathfrak{D}$; (4) $(x, y) \in \mathfrak{D}$, $(y, z) \in \mathfrak{D}$; (5) $(y, z) \in \mathfrak{D}$, $(z, x) \in \mathfrak{D}$; (6) $(z, x) \in \mathfrak{D}$, $(x, y) \in \mathfrak{D}$. V každém z těchto případů je $(y, z, x) \in \mathfrak{C}$ a v žádném není $(y, x, z) \in \mathfrak{C}$. Axiomy [I$\mathfrak{C}$] a [II$\mathfrak{C}$] jsou tedy splněny. Je-li za druhé $x \neq y \neq z \neq x$, pak je zřejmé, že buďto jeden ze tří prvků x, y, z je roven a a z obou ostatních leží jeden před druhým v uspořádané množině $P - (a)$, nebo že všecky tři prvky x, y, z leží v $P - (a)$ a jeden z nich leží mezi ostatními dvěma. V každém z obou případů je buďto $(x, y, z) \in \mathfrak{C}$ nebo $(y, x, z) \in \mathfrak{C}$, takže axiom [III$\mathfrak{C}$] je splněn. Budiž konečně $(x, y, t) \in \mathfrak{C}$, $(y, z, t) \in \mathfrak{C}$. Pak nastane jeden z těchto osmi případů:

$$
\begin{array}{llll}
(1) & x = a\,, & (y, z) \in \mathfrak{D}\,, & (z, t) \in \mathfrak{D}\,; \\
(2) & y = a\,, & (z, t) \in \mathfrak{D}\,, & (t, x) \in \mathfrak{D}\,; \\
(3) & z = a\,, & (t, x) \in \mathfrak{D}\,, & (x, y) \in \mathfrak{D}\,; \\
(4) & t = a\,, & (x, y) \in \mathfrak{D}\,, & (y, z) \in \mathfrak{D}\,; \\
(5) & (x, y) \in \mathfrak{D}\,, & (y, z) \in \mathfrak{D}\,, & (z, t) \in \mathfrak{D}\,; \\
(6) & (y, z) \in \mathfrak{D}\,, & (z, t) \in \mathfrak{D}\,, & (t, x) \in \mathfrak{D}\,; \\
(7) & (z, t) \in \mathfrak{D}\,, & (t, x) \in \mathfrak{D}\,, & (x, y) \in \mathfrak{D}\,; \\
(8) & (t, x) \in \mathfrak{D}\,, & (x, y) \in \mathfrak{D}\,, & (y, z) \in \mathfrak{D}\,.
\end{array}
$$

V každém z osmi případů je $(x, z) \in \mathfrak{C}$, takže axiom [IV$\mathfrak{C}$] je splněn.

Definice **10.6.4.** Budiž $\mathfrak{C}$ cyklické uspořádání množiny P. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Podmnožinu P skládající se z prvku a, z prvku b a z všech těch $x \in P$, pro něž platí $(a, x, b) \in \mathfrak{C}$, nazveme *intervalem cyklicky uspořádané množiny P s počátkem a a koncem b* a označíme ji int $(P; a, b; \mathfrak{C})$ nebo stručněji int $(P; a, b)$.

10.6.3. Buďtež $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}^*$ vzájemně inversní cyklická uspořádání množiny P. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Pak jest int $(P; a, b; \mathfrak{C}^*) =$ int $(P; b, a; \mathfrak{C})$.

10.6.4. Budiž $\mathfrak{C}$ cyklické uspořádání množiny P. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Podle definice **10.6.3** vytváří $\mathfrak{C}$ uspořádání $\mathfrak{D}$ množiny $P - (a)$. Množina int $(P; a, b; \mathfrak{C})$ se skládá z bodů a, b

a ze všech (při uspořádání $\mathfrak{D}$) před bodem b ležících prvků množiny $P - (a)$; množina $\mathrm{int}\,(P; b, a; \mathfrak{C})$ se skládá z bodů a, b a ze všech za bodem b ležících prvků množiny $P - (a)$. Je-li $x \in P$, $a \neq x \neq b$, jest: $x \in \mathrm{int}\,(P; a, b; \mathfrak{C}) \Leftrightarrow (a, x, b) \in \mathfrak{C}$; podle [1] v **10.6.1** jest: $(a, x, b) \in \mathfrak{C} \Leftrightarrow (x, b, a) \in \mathfrak{C} \Leftrightarrow (x, b) \in \mathfrak{D}$. Podobně: $x \in \mathrm{int}\,(P; b, a; \mathfrak{C}) \Leftrightarrow (b, x, a) \in \mathfrak{C} \Leftrightarrow (b, x) \in \mathfrak{D}$.

10.6.5. Budiž $\mathfrak{C}$ cyklické uspořádání množiny P. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$, $S_1 = \mathrm{int}\,(P; a, b; \mathfrak{C})$, $S_2 = \mathrm{int}\,(P; b, a; \mathfrak{C})$. Pak jest $S_1 \cup S_2 = P$, $S_1 \cap S_2 = (a) \cup (b)$. Viz **10.6.4.**

Definice **10.6.5.** Budiž $\mathfrak{C}$ cyklické uspořádání množiny P. Budiž $a \in P, b \in P, a \neq b, S = \mathrm{int}\,(P; a, b; \mathfrak{C})$. Podle definice **10.6.3** vytváří $\mathfrak{C}$ uspořádání $\mathfrak{D}_1$ množiny $P - (a)$ a uspořádání $\mathfrak{D}_2$ množiny $P - (b)$. $\mathfrak{D}_1$ určuje uspořádání množiny $S - (a) \subset P - (a)$ a toto uspořádání můžeme rozšířit právě jedním způsobem na takové uspořádání $\mathfrak{D}$ množiny S, při kterém prvek a je prvním. Pravíme, že *uspořádání $\mathfrak{D}$ množiny S je vytvořeno cyklickým uspořádáním $\mathfrak{C}$ množiny P.*

10.6.6. V definici **10.6.5** zavedené uspořádání $\mathfrak{D}$ intervalu $S \subset P$ můžeme obdržet také tak, že vyjdeme od uspořádání množiny $S - (b)$ určeného uspořádáním $\mathfrak{D}_2$ množiny $P - (b)$ a toto uspořádání rozšíříme v uspořádání množiny S tak, aby b byl v S posledním. Protože a je v S prvním, je $(a, b) \in \mathfrak{D}$. Je-li $x \in S$, $a \neq x \neq b$, jest $(a, x, b) \in \mathfrak{C}$, tedy $(x, b, a) \in \mathfrak{C}$ podle [I$\mathfrak{C}$], takže $(x, b) \in \mathfrak{D}$. Tudíž je b posledním prvkem množiny S při uspořádání $\mathfrak{D}$. Dále máme dokázat, že pro $x \in S - (b)$, $y \in S - (b)$ jest: $(x, y) \in \mathfrak{D} \Rightarrow$ $\Rightarrow (x, y) \in \mathfrak{D}_2$. Je-li však $(x, y) \in \mathfrak{D}$, je jistě $y \neq a$, tedy $(a, y, b) \in \mathfrak{C}$. Je-li $x = a$, dostáváme ihned $(x, y) \in \mathfrak{D}_2$. Je-li $x \neq a$, pak podle definice $\mathfrak{D}$ jest $(x, y, a) \in \mathfrak{C}$; z [I$\mathfrak{C}$] plyne $(y, b, a) \in \mathfrak{C}$, $(y, a, x) \in \mathfrak{C}$, takže podle [3] v **10.6.1** jest $(y, b, x) \in \mathfrak{C}$; z [1] v **10.6.1** nyní plyne $(x, y, b) \in \mathfrak{C}$, tj. $(x, y) \in \mathfrak{D}_2$.

10.6.7. Budiž $\mathfrak{C}$ cyklické uspořádání množiny P. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$, $S = \mathrm{int}\,(P; a, b; \mathfrak{C})$, $c \in P - S$. Budiž $\mathfrak{D}$ uspořádání množiny $P - (c)$ vytvořené cyklickým uspořádáním $\mathfrak{C}$. Množina S se skládá z bodů a, b a z těch bodů množiny $P - (c)$, které při uspořádání $\mathfrak{D}$ leží mezi body a, b. Uspořádáním $\mathfrak{D}$ určené uspořádání množiny $S \subset P - (c)$ je vytvořeno cyklickým uspořádáním $\mathfrak{C}$. Jest $a \neq c \neq b$ a vztah $(a, c, b) \in \mathfrak{C}$ je nesprávný; ze [III$\mathfrak{C}$] plyne $(c, a, b) \in \mathfrak{C}$. Tudíž je $(a, b, c) \in \mathfrak{C}$ podle [I$\mathfrak{C}$], tj. $(a, b) \in \mathfrak{D}$: a leží v množině $P - (c)$ před (b). Je-li $x \in S$, $a \neq x \neq b$, jest $(a, x, b) \in \mathfrak{C}$; protože $(a, x, b) \in \mathfrak{C}$, $(a, b, c) \in \mathfrak{C}$, plyne ze [3] v **10.6.1**, že $(a, x, c) \in \mathfrak{C}$, tj. $(a, x) \in \mathfrak{D}$; protože $(c, a, b) \in \mathfrak{C}$, $(a, x, b) \in \mathfrak{C}$, jest $(c, x, b) \in \mathfrak{C}$ podle [IV$\mathfrak{C}$] a $(x, b, c) \in \mathfrak{C}$ podle [I$\mathfrak{C}$], tj. $(x, b) \in \mathfrak{D}$; tím je dokázáno, že v $P - (c)$ leží x mezi a, b. Jestliže obráceně v $P - (c)$ leží x mezi a, b, jest $(a, x) \in \mathfrak{D}$, $(x, b) \in \mathfrak{D}$, tj. $(a, x, c) \in \mathfrak{C}$, $(x, b, c) \in \mathfrak{C}$ a z [I$\mathfrak{C}$] plyne $(x, c, a) \in \mathfrak{C}$; protože $(x, b, c) \in \mathfrak{C}$, $(x, c, a) \in \mathfrak{C}$, plyne ze [3] v **10.6.1**, že $(x, b, a) \in \mathfrak{C}$, takže podle [1] v **10.6.1** jest $(a, x, b) \in \mathfrak{C}$. Víme už, že a je v S první; zbývá tudíž dokázat: $(x, y) \in \mathfrak{D} \Rightarrow (x, y, a) \in \mathfrak{C}$ pro $x \in S - (a)$, $y \in S - (a)$. Je-li $(x, y) \in \mathfrak{D}$, jest $(x, y, c) \in \mathfrak{C}$; mimo to jest $(a, x) \in \mathfrak{D}$, tj. $(a, x, c) \in \mathfrak{C}$, tedy $(x, c, a) \in \mathfrak{C}$ podle [I$\mathfrak{C}$]; ze [3] v **10.6.1** plyne $(x, y, a) \in \mathfrak{C}$.

10.6.8. Budiž $P = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = (a) \cup (b)$, $a \neq b$. Budiž $\mathfrak{D}_1$ uspořádání množiny S_1, při kterém prvek a je prvním, prvek b posledním. Budiž $\mathfrak{D}_2$ uspořádání množiny S_2, při kterém prvek b je prvním, prvek a posledním. Existuje právě jedno takové cyklické uspořádání $\mathfrak{C}$ množiny P, že $S_1 = \operatorname{int}(P; a, b; \mathfrak{C})$, $S_2 = \operatorname{int}(P; b, a; \mathfrak{C})$ a že $\mathfrak{C}$ vytváří obě uspořádání $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$.

Důkaz. I. Existuje-li $\mathfrak{C}$, pak $\mathfrak{C}$ vytváří uspořádání $\mathfrak{D}$ množiny $P - (a)$. Budiž $x \in P - (a)$, $y \in P - (a)$. Je osm možných případů. Za prvé budiž $x \neq b \neq y$, $x \in S_1$, $y \in S_1$; podle definice **10.6.5** jest: $(x, y) \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow (x, y) \in \mathfrak{D}_1$. Za druhé budiž $x \neq b \neq y$, $x \in S_2$, $y \in S_2$; podle **10.6.6** jest: $(x, y) \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow (x, y) \in \mathfrak{D}_2$. Za třetí budiž: $x \neq b \neq y$, $x \in S_1$, $y \in S_2$; pak jest $(a, x, b) \in \mathfrak{C}$, $(b, y, a) \in \mathfrak{C}$; podle [I$\mathfrak{C}$] jest $(x, b, a) \in \mathfrak{C}$, takže ze [IV$\mathfrak{C}$] plyne $(x, y, a) \in \mathfrak{C}$, tj. $(x, y) \in \mathfrak{D}$. Za čtvrté budiž $x \neq b \neq y$, $x \in S_2$, $y \in S_1$; pak jest $(y, x) \in \mathfrak{D}$, takže není $(x, y) \in \mathfrak{D}$. Za páté budiž $x = b$, $y \in S_1$; podle definice **10.6.5** jest: $(x, y) \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow (x, y) \in \mathfrak{D}_1$. Za šesté budiž $x = b$, $y \in S_2$; podle **10.6.6** jest: $(x, y) \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow (x, y) \in \mathfrak{D}_2$. Za sedmé budiž $y = b$, $x \in S_1$; pak jest $(y, x) \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow (y, x) \in \mathfrak{D}_1$, tedy $(x, y) \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow (x, y) \in \mathfrak{D}_1$. Za osmé budiž $y = b$, $x \in S_2$; pak jest $(y, x) \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow (y, x) \in \mathfrak{D}_2$, tedy $(x, y) \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow (x, y) \in \mathfrak{D}_2$. Z toho plyne, že $\mathfrak{D}$ je jednoznačně určeno, takže podle **10.6.2** je $\mathfrak{C}$ jednoznačně určeno.

II. Je nyní jasné, jak definovat množinu $\mathfrak{D} \subset [P - (a)] \times [P - (a)]$: jest $(x, y) \in \mathfrak{D}$ právě tehdy, jestliže buďto $x \in S_1$, $y \in S_1$, $(x, y) \in \mathfrak{D}_1$ nebo $x \in S_2$, $y \in S_2$, $(x, y) \in \mathfrak{D}_2$ nebo konečně $x \in S_1$, $y \in S_2$, $x \neq y$. (Vše pro $x \neq a \neq y$.) Snadno se přesvědčíme, že takto určené $\mathfrak{D}$ je uspořádání množiny $P - (a)$, tj., že jsou splněny axiomy [I$\mathfrak{D}$] až [III$\mathfrak{D}$]. Podle **10.6.2** existuje cyklické uspořádání $\mathfrak{C}$ množiny P, které vytváří $\mathfrak{D}$; z **10.6.6** a z definice **10.6.5** plyne, že $\mathfrak{C}$ vytváří $\mathfrak{D}_1$ i $\mathfrak{D}_2$.

Definice **10.6.6.** Budiž $\mathfrak{C}$ cyklické uspořádání množiny P. Jsou-li a, b, c, d prvky množiny P, pravíme, že *dvojice* (a, b) *se kříží s dvojicí* (c, d), je-li buďto

$$(a, c, b) \in \mathfrak{C}\,, \quad (b, d, a) \in \mathfrak{C}$$

nebo

$$(a, d, b) \in \mathfrak{C}\,, \quad (b, c, a) \in \mathfrak{C}\,.$$

Je zřejmé, že nezáleží na vzájemném pořadí bodů v jednotlivých dvojicích. Z následující věty plyne, že můžeme také říkat, že dvojice (a, b), (c, d) se *navzájem kříží.*

10.6.9. Množina P budiž cyklicky uspořádána. Jestliže dvojice (a, b) se kříží s dvojicí (c, d), pak dvojice (c, d) se kříží s dvojicí (a, b). Můžeme předpokládat, že $(a, c, b) \in \mathfrak{C}$, $(b, d, a) \in \mathfrak{C}$. Podle [I$\mathfrak{C}$] jest $(c, b, a) \in \mathfrak{C}$, $(d, a, b) \in \mathfrak{C}$. Protože $(d, a, b) \in \mathfrak{C}$, $(a, c, b) \in \mathfrak{C}$, plyne ze [IV$\mathfrak{C}$], že $(d, c, b) \in \mathfrak{C}$. Protože $(c, b, a) \in \mathfrak{C}$, $(b, d, a) \in \mathfrak{C}$, plyne ze [IV$\mathfrak{C}$], že $(c, d, a) \in \mathfrak{C}$. Podle [I$\mathfrak{C}$] je tedy $(c, b, d) \in \mathfrak{C}$, $(d, a, c) \in \mathfrak{C}$, tj. dvojice (c, d) se kříží s dvojicí (a, b).

10.6.10. Množina P budiž cyklicky uspořádána. Jestliže dvojice (a, b) se kříží s dvojicí (c, d), jsou prvky a, b, c, d navzájem různé. Můžeme předpokládat, že $(a, c, b) \in \mathfrak{C}$, $(b, d, a) \in \mathfrak{C}$. Podle [2] v **10.6.1** by mohlo být nejvýš $c = d$, ale podle [1] tamtéž ani to není možné.

10.6.11. $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}^*$ buďtež dvě navzájem inversní cyklická uspořádání množiny P. Jestliže dvojice (a, b) se kříží s dvojicí (c, d) vzhledem k $\mathfrak{C}$, pak platí totéž vzhledem k $\mathfrak{C}^*$.

10.6.12. Množina P budiž cyklicky uspořádána. Ze čtyř navzájem různých prvků lze právě jedním způsobem vybrat dvě navzájem se křížící dvojice. Podmínka, aby dvojice (a, b) se křížila s dvojicí (c, d), dá se podle [1] v **10.6.1** vyjádřit tak, že má být buďto $(c, b, a) \in \mathfrak{C}$, $(b, d, a) \in \mathfrak{C}$ nebo $(d, b, a) \in \mathfrak{C}$, $(b, c, a) \in \mathfrak{C}$. Zavedeme-li uspořádání $\mathfrak{D}$ množiny $P - (a)$ vytvořené cyklickým uspořádáním $\mathfrak{C}$, můžeme také říci, že vzhledem k $\mathfrak{D}$ má prvek b množiny $P - (a)$ ležet mezi prvky a, c téže množiny. Z toho plyne ihned správnost tvrzení.

Definice **10.6.7.** Pravíme, že prostor P je *cyklicky orientován*, je-li P souvislý, obsahuje-li více než jeden bod, nemá-li žádný dělicí bod a je-li dáno cyklické uspořádání množiny P s tou vlastností, že kdykoli dvojice bodů (a, b) se kříží s dvojicí bodů (c, d), pak bodová množina $(a) \cup (b)$ roztíná P mezi body c, d.

10.6.13. Budiž P cyklicky orientovaný prostor. Budiž $a \in P$. Dané cyklické uspořádání $\mathfrak{C}$ množiny P vytváří podle definice **10.6.3** uspořádání $\mathfrak{D}$ vnořeného prostoru $P - (a)$. Vzhledem k $\mathfrak{D}$ je $P - (a)$ lineárně orientovaný prostor. Protože P je souvislý a nemá dělicích bodů, je množina $P - (a)$ souvislá. Podle **10.1.17** obsahuje $P - (a)$ více než jeden bod. Budiž $(c, b) \in \mathfrak{D}$, $(b, d) \in \mathfrak{D}$; máme ukázat, že b roztíná $P - (a)$ mezi body c, d. Podle definice $\mathfrak{D}$ jest $(c, b, a) \in \mathfrak{C}$, $(b, d, a) \in \mathfrak{C}$, takže z [1] v **10.6.1** plyne podle definice **10.6.6**, že dvojice (a, b) se kříží s dvojicí (c, d). Tudíž $(a) \cup (b)$ roztíná P mezi body c, d, tj. existují takové v prostoru P oddělené C, D, že $P - [(a) \cup (b)] = C \cup D$, $c \in C$, $d \in D$. Nyní $P - [(a) \cup \cup (b)] = [P - (a)] - (b)$ a množiny C, D jsou podle **5.1.3** také v prostoru $P - (a)$ oddělené. Proto (b) roztíná $P - (a)$ mezi body c, d.

10.6.14. Budiž P cyklicky orientovaný prostor. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Budiž $S = \operatorname{int}(P; a, b)$. Dané cyklické uspořádání $\mathfrak{C}$ prostoru P vytváří podle definice **10.6.5** uspořádání $\mathfrak{D}$ vnořeného prostoru S. Množina S je v P uzavřená a je mezi body a, b ireducibilně souvislá. $\mathfrak{D}$ je lineární orientace prostoru S, při které je a prvním a b posledním bodem.

Důkaz. I. Zavedeme nejprve předpoklad $P - S \neq \emptyset$, o kterém dodatečně zjistíme, že je vždy splněn. Zvolíme bod $c \in P - S$; $\mathfrak{C}$ vytvoří uspořádání $\mathfrak{D}^*$ vnořeného prostoru $P - (c)$. Uvažujeme-li $P - (c)$

v uspořádání $\mathfrak{O}^*$, je $P - (c)$ lineárně orientovaný prostor podle **10.6.13.** Z **10.6.7** plyne, že S se skládá z bodů a, b a z bodů množiny $P - (c)$ ležících mezi a, b. Proto podle **10.5.7** množina S je ireducibilně souvislá mezi body a, b. Jestliže $x_2 \in S$ leží mezi body $x_1 \in S$, $x_3 \in S$ vzhledem k uspořádání $\mathfrak{O}$ množiny S, platí podle **10.6.7** totéž vzhledem k uspořádání $\mathfrak{O}^*$ množiny $P - (c)$. Protože $\mathfrak{O}^*$ je lineární orientace prostoru $P - (c)$, roztíná x_2 prostor $P - (c)$ mezi body x_1, x_3. Existují tedy takové dvě v $P - (c)$ oddělené množiny X_1, X_3, že $[P - (c)] - (x_2) = X_1 \cup X_3$, $x_1 \in X_1$, $x_3 \in X_3$. Potom je $S - (x_2) = (S \cap X_1) \cup (S \cap X_3)$, $x_1 \in S \cap X_1$, $x_3 \in S \cap X_3$ a podle **5.1.3** a **5.1.7** jsou množiny $S \cap X_1$, $S \cap X_3$ oddělené v prostoru S. Z toho plyne, že $\mathfrak{O}$ je lineární orientace prostoru S. Protože $c \in P - S$, jest $(b, c, a) \in \mathfrak{C}$ podle **10.6.4**, takže $(a, b, c) \in \mathfrak{C}$ podle [1] v **10.6.1**, tj. $(a, b) \in \mathfrak{O}^*$. Podle **10.6.7** je tedy bod a první a bod b poslední v S.

II. Podle **10.6.4** se skládá $P - S$ ze všech těch $x \in P$, pro něž je $(b, x, a) \in \mathfrak{C}$. Proto $P - S$ se skládá ze všech těch bodů množiny $P - (a)$, které leží za bodem b při uspořádání $\mathfrak{O}_0$ množiny $P - (a)$ vytvořeném cyklickým uspořádáním $\mathfrak{C}$. Podle **10.6.13** je $\mathfrak{O}_0$ lineární orientace prostoru $P - (a)$, takže z **10.5.4** plyne, že množina $P - S$ je relativně otevřená v $P - (a)$. Ze **4.6.7** plyne, že množina $P - S$ je otevřená, a tedy S uzavřená v prostoru P.

III. Zbývá odvodit spor z předpokladu $P - S = \emptyset$. Budiž $S_0 = \operatorname{int}(P; b, a)$. Podle **10.6.5** je $S \cup S_0 = P$, $S \cap S_0 = (a) \cup (b)$. Kdyby bylo $P - S = P - S_0 = \emptyset$, bylo by $P = (a) \cup (b)$ a to je podle **10.1.17** nemožné, neboť prostor P je souvislý. V případě $P - S = \emptyset$ by tedy bylo $P - S_0 \neq \emptyset$ a z úvahy provedené v I by plynulo, že množina S_0 je souvislá. Podle **10.1.17** by existoval bod $x \in S_0$, $a \neq x \neq b$; protože $S \cap S_0 = (a) \cup (b)$, bylo by $x \in P - S$, tedy přece jen $P - S \neq \emptyset$.

Definice **10.6.8.** Pravíme, že prostor P je *cyklický,* je-li možné jej cyklicky orientovat. Bodová množina $M \subset P$ je cyklická, jestliže vnořený prostor M je cyklický.

10.6.15. Budiž P cyklický prostor. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Pak existují právě dvě bodové množiny S_1, S_2 ireducibilně souvislé mezi body a, b. Jest $S_1 \cup S_2 = P$, $S_1 \cap S_2 = (a) \cup (b)$. Bodové množiny S_1, S_2 jsou uzavřené. Je-li P cyklicky orientován, pak jedna z množin S_1, S_2 je intervalem s počátkem a a koncem b, druhá je intervalem s počátkem b a koncem a. Můžeme předpokládat, že je dáno cyklické uspořádání $\mathfrak{C}$ prostoru P. Budiž $S_1 = \text{int}\,(P; a, b; \mathfrak{C})$, $S_2 = \text{int}\,(P; b, a; \mathfrak{C})$. Podle **10.6.5** je $S_1 \cup S_2 = P$, $S_1 \cap S_2 = (a) \cup (b)$. Podle **10.6.14** jsou množiny S_1, S_2 uzavřené a ireducibilně souvislé mezi a, b. Budiž $S \subset P$ ireducibilně souvislá mezi a, b; máme dokázat, že je buďto $S = S_1$ nebo $S = S_2$. Zřejmě $S \neq P$, takže existuje bod $c \in P - S$. Protože $S_1 \cap S_2 = (a) \cup \cup (b) \subset S$, je buďto $c \in P - S_1$ nebo $c \in P - S_2$. Můžeme předpokládat, že $c \in P - S_1$, a dokážeme, že potom je $S = S_1$. Budiž $\mathfrak{D}$ uspořádání množiny $P - (c)$ vytvořené cyklickým uspořádáním $\mathfrak{C}$. Uvažujeme-li vnořený prostor $P - (c)$ v uspořádání $\mathfrak{D}$, je $P - (c)$ lineárně orientovaný prostor podle **10.6.13.** Protože množina $S \subset P - (c)$ je souvislá a obsahuje oba body a, b, plyne z **10.5.6**, že S obsahuje všecky body, které v $P - (c)$ leží mezi a, b. Protože však $c \in P - S_1$, plyne z **10.6.7**, že S_1 se skládá z bodů a, b a ze všech $x \in P - (c)$ ležících mezi a, b. Tudíž $S_1 \subset S$; protože $a \in S_1$, $b \in S_1$, množina S_1 je souvislá a množina S je mezi a, b ireducibilně souvislá, jest $S = S_1$.

10.6.16. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Bodové množiny $S_1 \subset P$, $S_2 \subset P$ buďtež uzavřené a mezi a, b ireducibilně souvislé. Mimo to budiž $S_1 \cup S_2 = P$, $S_1 \cap S_2 = (a) \cup (b)$. Pak je P cyklický prostor.

Důkaz. I. Podle **10.5.9** existuje lineární orientace $\mathfrak{D}_1$ množiny S_1, při které je a prvním a b posledním bodem, a lineární orientace $\mathfrak{D}_2$ množiny S_2, při které je b prvním a a posledním bodem.

II. Prostor P obsahuje více než jeden bod a podle **10.1.5** je souvislý. Budiž $x \in P$; dokážeme, že x není dělicí bod, tj., že množina $P - (x)$ je souvislá. Jsou čtyři možné případy: [1] $x = a$, [2] $x \in P - S_2$, [3] $x = b$, [4] $x \in P - S_1$; stačí však vyšetřit první dva. Je-li $x = a$, plyne z **10.5.6**, že množiny $S_1 - (x)$, $S_2 - (x)$ jsou souvislé; protože $[S_1 - (x)] \cup \cup [S_2 - (x)] = P - (x)$, $b \in [S_1 - (x)] \cap [S_2 - (x)]$, je množina $P - - (x)$ souvislá podle **10.1.5.** Je-li $x \in P - S_2$, je $x \in S_1$, $a \neq x \neq b$; z **10.5.6** plyne snadno, že existují takové dvě souvislé množiny T_1, T_2, že $a \in T_1$, $b \in T_2$, $T_1 \cup T_2 = S_1 - (x)$. Jest $P - (x) = T_1 \cup S_2 \cup T_2$,

$a \in T_1 \cap S_2$, $b \in S_2 \cap T_2$; užijeme-li dvakrát za sebou věty **10.1.5**, dostaneme, že množina $P - (x)$ je souvislá.

III. Podle **10.6.8** existuje takové cyklické uspořádání $\mathfrak{C}$ prostoru P, že

$$S_1 = \operatorname{int}(P; a, b; \mathfrak{C}), \quad S_2 = \operatorname{int}(P; b, a; \mathfrak{C})$$

a že $\mathfrak{C}$ vytváří obě uspořádání $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_2$.

IV. Budiž $p \in P$, $a \neq p$, $H_1 = \operatorname{int}(P; a, p; \mathfrak{C})$, $H_2 = \operatorname{int}(P; p, a; \mathfrak{C})$. Dokážeme, že množiny H_1, H_2 jsou uzavřené. Cyklické uspořádání $\mathfrak{C}$ vytváří podle definice **10.6.3** uspořádání $\mathfrak{O}_0$ množiny $P - (a)$. Podle **10.6.4** jest

$$\begin{aligned}
S_1 &= (a) \cup (b) \cup \mathscr{E}_x \; [x \neq a, (x, b) \in \mathfrak{O}_0], \\
S_2 &= (a) \cup (b) \cup \mathscr{E}_x \; [x \neq a, (b, x) \in \mathfrak{O}_0], \\
H_1 &= (a) \cup (p) \cup \mathscr{E}_x \; [x \neq a, (x, p) \in \mathfrak{O}_0], \\
H_2 &= (a) \cup (p) \cup \mathscr{E}_x \; [x \neq a, (p, x) \in \mathfrak{O}_0].
\end{aligned}$$

V případě $p = b$ jsou množiny $H_1 = S_1$, $H_2 = S_2$ uzavřené podle předpokladu. V případě $p \neq b$ je buďto $(p, b) \in \mathfrak{O}_0$ nebo $(b, p) \in \mathfrak{O}_0$. Je-li $(p, b) \in \mathfrak{O}_0$, jest $p \in S_1$ a

$$\begin{gathered}
H_1 = (a) \cup (p) \cup \mathscr{E}_x \; [x \in S_1 - (a), (x, p) \in \mathfrak{O}_1] \subset S_1, \\
H_2 \cap S_1 = (a) \cup (p) \cup \mathscr{E}_x \; [x \in S_1 - (a), (p, x) \in \mathfrak{O}_1], \\
H_2 = S_2 \cup (H_2 \cap S_1).
\end{gathered}$$

Protože $\mathfrak{O}_1$ je lineární orientace prostoru S_1, plyne z **10.5.4**, že množiny H_1, $H_2 \cap S_1$ jsou relativně uzavřené v S_1. Tudíž H_1, $H_2 \cap S_1$ jsou uzavřené v P podle **4.6.6** a H_2 je uzavřená v P podle **4.4.6.** V případě $(b, p) \in \mathfrak{O}_0$ probíhá důkaz obdobně (viz větu **10.6.6**).

V. Budiž $p \in P$, $q \in P$, $p \neq q$, $K_1 = \operatorname{int}(P; p, q; \mathfrak{C})$, $K_2 = \operatorname{int}(P; q, p; \mathfrak{C})$. Dokážeme, že množiny K_1, K_2 jsou uzavřené. Podle IV můžeme předpokládat, že $p \neq a \neq q$. Podle **10.6.5** jest

$$K_1 \cup K_2 = P, \quad K_1 \cap K_2 = (p) \cup (q). \tag{1}$$

Jest buďto $a \in P - K_1$ nebo $a \in P - K_2$; můžeme předpokládat, že $a \in P - K_1$. Je-li opět $\mathfrak{O}_0$ uspořádání množiny $P - (a)$ určené cyklickým uspořádáním $\mathfrak{C}$, plyne z **10.6.4**:

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
H_1 &= \operatorname{int}(P;\, a, p;\, \mathfrak{C}) = (a) \cup (p) \cup \mathscr{E}_x \quad [x \neq a,\ (x, p) \in \mathfrak{D}_0]\,, \\
H_2 &= \operatorname{int}(P;\, p, a;\, \mathfrak{C}) = (a) \cup (p) \cup \mathscr{E}_x \quad [x \neq a,\ (p, x) \in \mathfrak{D}_0]\,, \\
L_1 &= \operatorname{int}(P;\, a, q;\, \mathfrak{C}) = (a) \cup (q) \cup \mathscr{E}_x \quad [x \neq a,\ (x, q) \in \mathfrak{D}_0]\,, \\
L_2 &= \operatorname{int}(P;\, q, a;\, \mathfrak{C}) = (a) \cup (q) \cup \mathscr{E}_x \quad [x \neq a,\ (q, x) \in \mathfrak{D}_0]\,.
\end{aligned}
$$

Jest buďto $(p, q) \in \mathfrak{D}_0$ nebo $(q, p) \in \mathfrak{D}_0$. Protože $a \in P - K_1$, plyne z **10.6.7**:

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
(p, q) \in \mathfrak{D}_0 &\Rightarrow K_1 = (p) \cup (q) \cup \mathscr{E}_x \ [x \neq a,\ (p, x) \in \mathfrak{D}_0,\ (x, q) \in \mathfrak{D}_0]\,, \\
(q, p) \in \mathfrak{D}_0 &\Rightarrow K_1 = (p) \cup (q) \cup \mathscr{E}_x \ [x \neq a,\ (q, x) \in \mathfrak{D}_0,\ (x, p) \in \mathfrak{D}_0]\,.
\end{aligned}
$$

Z (1), (2) a (3) plyne v případě $(p, q) \in \mathfrak{D}_0$

$$(a) \cup K_1 = H_2 \cap L_1\,, \quad K_2 = (a) \cup K_2 = H_1 \cup L_2$$

a v případě $(q, p) \in \mathfrak{D}_0$.

$$(a) \cup K_1 = H_1 \cap L_2\,, \quad K_2 = (a) \cup K_2 = H_2 \cup L_1\,.$$

Množiny H_1, H_2, L_1, L_2 jsou uzavřené podle IV, takže $(a) \cup K_1$, $(a) \cup K_2$ jsou uzavřené podle **4.4.5** a **4.4.6.** Podobně se dokáže, že též $(b) \cup K_1$, $(b) \cup K_2$ jsou uzavřené, takže také $K_1 = [(a) \cup K_1] \cap \cap [(b) \cup K_1]$ je uzavřená a stejně i K_2.

VI. Dokážeme-li, že $\mathfrak{C}$ je cyklická orientace prostoru P, budeme hotovi. Buďtež (x_1, x_2), (y_1, y_2) dvě navzájem se křížící dvojice bodů; podle II a podle definice **10.6.7** je třeba pouze ukázat, že množina $(x_1) \cup (x_2)$ roztíná P mezi body y_1, y_2. Podle definice **10.6.6** je buďto

$$(x_1, y_1, x_2) \in \mathfrak{C}\,, \quad (x_2, y_2, x_1) \in \mathfrak{C}$$

nebo

$$(x_1, y_2, x_2) \in \mathfrak{C}\,, \quad (x_2, y_1, x_1) \in \mathfrak{C}\,;$$

můžeme předpokládat, že nastane první případ. Je-li $X_1 = \operatorname{int}(P;\, x_1, x_2;\, \mathfrak{C})$, $X_2 = \operatorname{int}(P;\, x_2, x_1;\, \mathfrak{C})$, jest $y_1 \in X_1$, $y_2 \in X_2$. Podle **10.6.5** jest $X_1 \cup X_2 = P$, $X_1 \cap X_2 = (x_1) \cup (x_2)$. Podle **10.6.10** jest

$$P - [(x_1) \cup (x_2)] = (P - X_2) \cup (P - X_1)\,, \quad y_1 \in P - X_2\,, \quad y_2 \in P - X_1\,.$$

Množiny $P - X_1$, $P - X_2$ jsou disjunktní a podle V jsou otevřené; podle **5.1.9** a **5.1.12** jsou tedy oddělené, takže $(x_1) \cup (x_2)$ roztíná P mezi body y_1, y_2.

10.6.17. Budiž $n \geqq 3$. Buďtež a_i $(1 \leqq i \leqq n)$ navzájem různé body prostoru P; budiž $a_0 = a_n$. Pro $1 \leqq i \leqq n$ budiž S_i uzavřená množina ireducibilně souvislá mezi body a_{i-1}, a_i. Budiž $P = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$. Pro $1 \leqq i \leqq n - 1$ budiž $S_i \cap S_{i+1} = (a_i)$; budiž $S_1 \cap \cap S_n = (a_n)$; pro $1 \leqq i \leqq n - 2$, $i + 2 \leqq j \leqq n$, $(i, j) \neq (1, n)$ budiž $S_i \cap S_j = \emptyset$. Pak je P cyklický prostor. Podle **4.4.6**, **4.6.6** a **10.5.13** je $T = \bigcup_{i=1}^{n-1} S_i$ uzavřená mezi body $a_0 = a_n$ a a_{n-1} ireducibilně souvislá množina. Protože totéž platí o množině S_n a protože $T \cup S_n = P$, $T \cap S_n = (a_0) \cup (a_{n-1})$, plyne tvrzení z **10.6.16.**

10.6.18. Budiž P cyklický prostor. Existují právě dvě cyklické orientace prostoru P; jsou navzájem inversní. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Podle **10.6.15** existují právě dvě mezi a, b ireducibilně souvislé bodové množiny S_1, S_2 a jest $S_1 \cup S_2 = P$, $S_1 \cap S_2 = (a) \cup (b)$. Budiž $\mathfrak{C}$ cyklická orientace prostoru P. Podle **10.6.15** můžeme předpokládat, že

$$S_1 = \operatorname{int}(P; a, b; \mathfrak{C}), \quad S_2 = \operatorname{int}(P; b, a; \mathfrak{C}).$$

Je-li $\mathfrak{C}^*$ cyklická orientace inversní k $\mathfrak{C}$, je podle **10.6.3**

$$S_1 = \operatorname{int}(P; b, a; \mathfrak{C}^*), \quad S_2 = \operatorname{int}(P; a, b; \mathfrak{C}^*).$$

Jestliže nyní také $\mathfrak{C}_0$ je cyklická orientace prostoru P, pak podle **10.6.15** množina $\operatorname{int}(P; a, b; \mathfrak{C}_0)$ splyne s jednou z obou množin S_1, S_2, takže je buďto

(1) $$\operatorname{int}(P; a, b; \mathfrak{C}_0) = \operatorname{int}(P; a, b; \mathfrak{C}) = S_1$$

nebo

$$\operatorname{int}(P; a, b; \mathfrak{C}_0) = \operatorname{int}(P; a, b; \mathfrak{C}^*).$$

Můžeme předpokládat, že platí (1) a dokážeme, že potom jest $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}$. Vedle (1) platí podle **10.6.15** ještě

$$\operatorname{int}(P; b, a; \mathfrak{C}_0) = \operatorname{int}(P; b, a; \mathfrak{C}) = S_2.$$

Užijeme věty **10.6.14.** Podle této věty $\mathfrak{C}$ vytváří lineární orientaci $\mathfrak{O}_1$ množiny S_1 a lineární orientaci $\mathfrak{O}_2$ množiny S_2; podle téže věty $\mathfrak{C}_0$ vytváří lineární orientaci $\mathfrak{O}_{10}$ množiny S_1 a lineární orientaci $\mathfrak{O}_{20}$

množiny S_2. Při $\mathfrak{D}_1$ i při $\mathfrak{D}_{10}$ je a prvním bodem množiny S_1; při $\mathfrak{D}_2$ i při $\mathfrak{D}_{20}$ je b prvním bodem množiny S_2. Podle **10.5.9** je tedy $\mathfrak{D}_{10} = \mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_{20} = \mathfrak{D}_2$, takže $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}$ podle **10.6.8.**

10.6.19. Budiž u F-modifikace topologie v prostoru P. Aby (P, v) byl cyklický prostor, k tomu je nutné a stačí, aby totéž platilo o (P, u). Z **10.6.15** a **10.6.16** plyne, že P je právě tehdy cyklický prostor, jestliže existují takové dva body a, b a takové dvě uzavřené množiny S_1, S_2, že $S_1 \cup S_2 = P$, $S_1 \cap S_2 = (a) \cup (b)$ a že obě množiny S_1, S_2 jsou ireducibilně souvislé mezi a, b. Proto tvrzení plyne ze **4.6.17** a **10.5.3.**

10.6.20. Budiž P cyklický prostor. Pak P je H-prostor. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Budiž $\mathfrak{C}$ cyklická orientace prostoru P. Podle **10.1.17** a **10.6.14** existují takové body c, d, že $(a, c, b) \in \mathfrak{C}$, $(b, d, a) \in \mathfrak{C}$. Podle **10.6.9** jest $a \in S_1$, $b \in S_2$, kde $S_1 = \operatorname{int}(P; c, d; \mathfrak{C})$, $S_2 = \operatorname{int}(P; c, d; \mathfrak{C})$. Podle **10.6.14** jsou množiny S_1, S_2 uzavřené, takže $P - S_1$, $P - S_2$ jsou otevřené. Zřejmě $a \in P - S_2$, $b \in P - S_1$, takže podle **4.4.13** $P - S_2$ je okolí bodu a a $P - S_1$ je okolí bodu b. Avšak $(P - S_1) \cap (P - S_2) = \emptyset$ podle **10.6.5**, takže body a, b jsou H-oddělené.

Definice **10.6.9.** Prostor P nazveme *pseudokružnicí*, je-li P kompaktní a cyklický. Bodová množina $M \subset P$ je pseudokružnice, jestliže vnořený prostor M je pseudokružnice.

10.6.21. Pseudokružnice je kontinuum.

10.6.22. Pseudokružnice je FH-prostor. Budiž v daná topologie prostoru P a budiž u její F-modifikace. Prostor (P, v) je kompaktní. Prostor (P, u) je H-prostor podle **10.6.19** a **10.6.20.** Tudíž $u = v$ podle **8.3.25.**

10.6.23. Budiž P pseudokružnice. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Pak existují právě dva pseudooblouky $S_1 \subset P$, $S_2 \subset P$ s koncovými body a, b. Jest $S_1 \cup S_2 = P$, $S_1 \cap S_2 = (a) \cup (b)$. Množiny S_1, S_2 jsou uzavřené. Podle **10.6.15** existují právě dvě mezi a, b ireducibilně souvislé bodové množiny S_1, S_2; jest $S_1 \cup S_2 = P$, $S_1 \cap S_2 = (a) \cup (b)$ a množiny S_1, S_2 jsou uzavřené. Podle **8.3.1** jsou

S_1, S_2 kompaktní, takže to jsou pseudooblouky podle **10.5.17.** Z **10.5.10** a **10.5.16** plyne, že a, b jsou koncové body pseudoobloukůu S_1, S_2 a že P neobsahuje žádný jiný pseudooblouk s koncovými body a, b.

10.6.24. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Uzavřené množiny $S_1 \subset P$, $S_2 \subset P$ buďtež pseudooblouky s koncovými body a, b. Budiž $S_1 \cup S_2 = P$, $S_1 \cap S_2 = (a) \cup (b)$. Pak P je pseudokružnice. Prostor P je cyklický podle **10.5.16** a **10.6.16**; P je kompaktní podle **8.3.2** a **10.5.17.**

10.6.25. Budiž P H-prostor. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Buďtež $S_1 \subset P$, $S_2 \subset P$ pseudooblouky s koncovými body a, b. Budiž $S_1 \cup S_2 = P$, $S_1 \cap S_2 = (a) \cup (b)$. Pak P je pseudokružnice. Množiny S_1, S_2 jsou uzavřené podle **8.3.13** a **10.5.17**; tvrzení plyne tedy z **10.6.24.**

10.6.26. Budiž $n \geqq 3$. Buďtež a_i $(1 \leqq i \leqq n)$ navzájem různé body H-prostoru P; budiž $a_0 = a_n$. Pro $1 \leqq i \leqq n$ budiž S_i pseudooblouk s krajními body a_{i-1}, a_i. Pro $1 \leqq i \leqq n-1$ budiž $S_i \cap S_{i+1} = (a_i)$; budiž $S_1 \cap S_n = (a_n)$; pro $1 \leqq i \leqq n-2$, $i+2 \leqq j \leqq n$, $(i, j) \neq (1, n)$ budiž $S_i \cap S_j = \emptyset$. Budiž $Q = \bigcup_{i=1}^{n} S_i \subset P$. Pak Q je pseudokružnice. Podle **10.5.18** je $T = \bigcup_{i=1}^{n-1} S_i$ pseudooblouk s koncovými body a_{n-1}, a_n; totéž platí o S_n. Protože $S_n \cap T = (a_{n-1}) \cup (a_n)$, plyne tvrzení z **5.2.1** a **10.6.25.**

10.6.27. Budiž P kontinuum; pro žádnou dvoubodovou $Z \subset P$ nechť množina $P - Z$ není souvislá. Pak P je pseudokružnice.

Důkaz. I. Podle **10.5.25** existují takové dva různé body a, b, že množiny $P - (a)$, $P - (b)$ jsou souvislé. Množina $P - [(a) \cup (b)]$ podle **10.1.17** není prázdná a podle předpokladu není souvislá. Tudíž existují takové dvě oddělené množiny A, B, že $P - [(a) \cup (b)] = A \cup B$, $A \neq \emptyset \neq B$. Budiž

$$S_1 = A \cup (a) \cup (b) = P - B\,, \quad S_2 = B \cup (a) \cup (b) = P - A\,.$$

Množiny A, B jsou podle **5.1.6** relativně otevřené v $P - [(a) \cup (b)]$, takže podle **4.6.7** jsou otevřené a S_1, S_2 jsou uzavřené. Zřejmě $S_1 \cup$

$\cup S_2 = P$. Podle **5.1.1** jest $S_1 \cap S_2 = (a) \cup (b)$. Množina $P - (a)$ je souvislá; protože $[P - (a)] - (b) = A \cup B$ a množiny A, B jsou oddělené, jsou $A \cup (b)$, $B \cup (b)$ souvislé podle **10.1.2** a **10.1.10.** Podobně se zjistí, že též $A \cup (a)$, $B \cup (a)$ jsou souvislé. Tudíž S_1, S_2 jsou souvislé podle **10.1.5**; podle **8.3.1** to jsou tedy kontinua.

II. Podle **10.6.24** stačí dokázat, že S_1, S_2 jsou pseudooblouky s koncovými body a, b. Stačí provést důkaz pro S_1. Podle **10.5.24** a **10.5.25** stačí dokázat, že každý od a i od b různý bod $x \in S_1$ je dělicím bodem množiny S_1. Předpokládejme naopak, že existuje takový $c \in S_1 - [(a) \cup (b)]$, že množina $S_1 - (c)$ je souvislá. Budiž $x \in S_2$, $a \neq x \neq b$. Kdyby množina $S_2 - (x)$ byla souvislá, pak by podle **10.1.5** také $P - [(c) \cup (x)] = [S_1 - (c)] \cup [S_2 - (x)]$ byla souvislá, neboť $a \in [S_1 - (c)] \cap [S_2 - (x)]$; protože $(c) \cup (x)$ je dvoubodová množina, je to nemožné. Tudíž z **10.5.24** a **10.5.25** plyne, že S_2 je pseudooblouk s koncovými body a, b. Podle **10.5.16** je tedy S_2 množina ireducibilně souvislá mezi body a, b. Podle **10.1.17** existuje bod $d \in S_2$, $a \neq d \neq b$. Z **10.5.6** a **10.5.9** odvodíme snadno, že existují takové dvě souvislé bodové množiny T_1, T_2, že $a \in T_1$, $b \in T_2$, $T_1 \cup T_2 = S_2 - (d)$. Protože $a \in T_1 \cap [S_1 - (c)]$, $b \in T_2 \cap [S_1 - (c)]$, dostaneme dvojnásobným užitím věty **10.1.5**, že množina $P - [(c) \cup (d)] = T_1 \cup T_2 \cup [S_1 - (c)]$ je souvislá. Protože $(c) \cup (d)$ je dvoubodová množina, je to nemožné.

Definice **10.6.10.** Prostor P se nazývá *topologická kružnice* (nebo také *jednoduchá zavřená křivka*), je-li P pseudokružnice obsahující hustou spočetnou množinu. Bodová množina $M \subset P$ je topologická kružnice, jestliže vnořený prostor M je topologická kružnice.

10.6.28. Budiž P topologická kružnice. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Pak existují právě dva oblouky $S_1 \subset P$, $S_2 \subset P$ s koncovými body a, b. Jest $S_1 \cup S_2 = P$, $S_1 \cap S_2 = (a) \cup (b)$. Podle **10.6.23** existují právě dva pseudooblouky $S_1 \subset P$, $S_2 \subset P$ s koncovými body a, b a jest $S_1 \cup S_2 = P$, $S_1 \cap S_2 = (a) \cup (b)$. Podle **8.3.13**, **10.5.16**, **10.5.17** a **10.6.22** jsou S_1, S_2 uzavřené množiny. Nyní existuje spočetná hustá $D \subset P$; můžeme předpokládat, že $a \in D$, $b \in D$. Budiž $D_1 = S_1 \cap D$, $D_2 = S_2 \cap D$. Pak je $P = \overline{D} = \overline{D}_1 \cup \overline{D}_2 = S_1 \cup S_2$; podle **4.4.7** jest $\overline{D}_1 \subset S_1$, $\overline{D}_2 \subset S_2$; protože $a \in D_1 \cap D_2$, $b \in D_1 \cap D_2$,

$S_1 \cap S_2 = (a) \cup (b)$, jest $\overline{D}_1 = S_1$, $\overline{D}_2 = S_2$. Tudíž D_1 je hustá v S_1, D_2 je hustá v S_2 a S_1, S_2 jsou oblouky.

10.6.29. Budiž P H-prostor. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Buďtež $S_1 \subset P$, $S_2 \subset P$ oblouky s koncovými body a, b. Budiž $S_1 \cap S_2 = (a) \cup (b)$. Pak $S_1 \cup S_2$ je topologická kružnice. $S_1 \cup S_2$ je pseudokružnice podle **5.2.1** a **10.6.25.** Pro $i = 1, 2$ existuje spočetná množina D_i hustá v S_i. Jest $\overline{D}_i \supset S_i$, tedy $\overline{D_1 \cup D_2} \supset S_1 \cup S_2$, tj. množina $D_1 \cup D_2$ je hustá v $S_1 \cup S_2$; $D_1 \cup D_2$ je spočetná podle **2.2.6.**

10.6.30. Množina $S = \mathscr{E}_{(x,y)} [x^2 + y^2 = 1] \subset \mathbf{E}_2$ je topologická kružnice. Budiž $S_1 = S \cap \mathscr{E}_{(x,y)} [y \geqq 0]$, $S_2 = S \cap \mathscr{E}_{(x,y)} [y \leqq 0]$, $a = (1, 0)$, $b = (-1, 0)$. Pak je $S_1 \cup S_2 = S$, $S_1 \cap S_2 = (a) \cup (b)$. Pro $(x, y) \in \mathbf{E}_2$ budiž $f(x, y) = x$. Snadno se dokáže, že pro $i = 1, 2$ jest $f \mid S_i$ homeomorfní zobrazení množiny S_i na $\mathscr{E}_t [0 \leqq t \leqq 1]$. Podle **10.5.20** jsou tedy S_1, S_2 oblouky s koncovými body a, b. Podle **9.1.5** a **9.1.22** je $\mathbf{E}_2$ H-prostor. Tudíž S je topologická kružnice podle **10.6.29.**

10.6.31. Budiž P topologická kružnice. Pak existuje homeomorfní zobrazení prostoru P na množinu $\mathscr{E}_{(x,y)} [x^2 + y^2 = 1] \subset \mathbf{E}_2$. Viz **10.5.21** a **10.6.28.**

10.6.32. Metrisovatelná pseudokružnice je topologická kružnice. Viz **10.5.22**, **10.6.22**, **10.6.23** a **10.6.29.**

10.7. Několik vět o dělicích bodech

10.7.1. Budiž P souvislý prostor. Budiž $S \subset P$ souvislá množina. Budiž Z množina těch $x \in S$, které jsou dělicími body prostoru P, ale nejsou dělicími body vnořeného prostoru S. Pak existuje v prostoru P taková disjunktní soustava $\mathfrak{S}$ neprázdných otevřených množin, že moh $\mathfrak{S}$ = moh Z. Pro $x \in Z$ existují takové oddělené množiny $A(x)$, $B(x)$, že $P - (x) = A(x) \cup B(x)$, $A(x) \neq \emptyset \neq B(x)$. Protože množina $S - (x) \subset P - (x)$ je souvislá, můžeme podle **10.1.3** předpokládat, že $S - (x) \subset A(x)$. Množina $B(x)$ je podle **4.6.7** a **5.1.6** otevřená. Stačí dokázat, že pro

$x \in Z$, $y \in Z$, $x \neq y$ je $B(x) \cap B(y) = \emptyset$. Jest $y \in S - (x) \subset A(x)$, $x \in S - (y) \subset A(y)$. Množina $y \cup B(y) = P - A(y)$ je souvislá podle **10.1.2** a **10.1.10.** Protože $x \in A(y)$, jest $y \cup B(y) \subset A(x) \cup B(x)$. Protože $y \in A(x)$, plyne z **10.1.3**, že $B(y) \subset A(x) \subset P - B(x)$, takže $B(x) \cap B(y) = \emptyset$.

10.7.2. Budiž P souvislý F-prostor s druhým axiomem spočetnosti. Budiž $S \subset P$ cyklická množina. Pak S obsahuje nejvýš spočetně mnoho dělicích bodů prostoru P. Předpokládáme-li opak a všimneme-li si toho, že S podle definic **10.6.7** a **10.6.8** nemá žádný dělicí bod, soudíme z **10.7.1**, že v prostoru P existuje nespočetná disjunktní soustava neprázdných otevřených bodových množin. Je však zřejmé, že to odporuje druhému axiomu spočetnosti.

10.7.3. Budiž P kontinuum. Budiž $S \subset P$ souvislá množina, $S \neq P$. Pak existuje bod $a \in P - S$, který není dělicím bodem prostoru P. Budiž $b \in P - S$. Jestliže b není dělicí bod prostoru P, jsme hotovi. Jestliže b je dělicí bod, existují takové oddělené množiny $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, že $P - (b) = A \cup B$. Protože $S \subset P - (b)$ je souvislá, můžeme podle **10.1.3** předpokládat, že $S \subset A$. Z **10.1.2** a **10.1.10** plyne, že bodové množiny $A \cup (b)$, $B \cup (b)$ jsou souvislé. Podle **4.6.7** a **5.1.6** je množina A otevřená, takže $B \cup (b) = P - A$ je uzavřená; podle **8.3.1** je tedy $B \cup (b)$ kompaktní. Protože $B \cup (b)$ není jednobodová, je to kontinuum. Podle **10.5.25** existuje bod $a \in B$, který není dělicím bodem množiny $B \cup (b)$, tj. množina $C = [B \cup (b)] - (a)$ je souvislá. Protože $P - (a) = [A \cup (b)] \cup C$, $b \in [A \cup (b)] \cap C$, plyne z **10.1.5**, že množina $P - (a)$ je souvislá, tj. a není dělicím bodem prostoru P. Protože $S \subset A$, $a \in B$, jest $a \in P - S$ podle **5.1.1.**

10.7.4. Budiž P souvislý prostor; budiž $M \subset P$ hustá množina. Budiž S množina těch $x \in P$, pro něž $P - (x)$ má více než dvě komponenty. Pak jest moh $S \leqq$ moh M.

Důkaz. I. Triviální případ jednobodového P můžeme nechat stranou. Podle **10.1.17** je prostor P nekonečný, takže podle **4.1.6** také množina M je nekonečná. Ze **3.7.9** plyne, že moh $M =$ moh M_3, kde $M_3 = M \times M \times M$.

II. Je-li $x \in S$, pak množina $P - (x)$ je neprázdná a není souvislá (viz **10.2.3**). Tudíž existují takové dvě oddělené množiny $A(x), K(x)$, že $P - (x) = A(x) \cup K(x)$, $A(x) \neq \emptyset \neq K(x)$. Protože $P - (x)$ má více než dvě komponenty, můžeme podle **10.2.2** předpokládat, že množina $K(x)$ není souvislá, takže existují takové oddělené $B(x), C(x)$, že $K(x) = B(x) \cup C(x)$, $B(x) \neq \emptyset \neq C(x)$. Tudíž (viz **5.1.7**):

$$P - (x) = A(x) \cup B(x) \cup C(x)\,, \tag{1}$$

$$A(x) \neq \emptyset\,, \quad B(x) \neq \emptyset\,, \quad C(x) \neq \emptyset\,, \tag{2}$$

$$\left.\begin{matrix} A(x),\ B(x) \\ A(x),\ C(x) \\ B(x),\ C(x) \end{matrix}\right\} \text{jsou oddělené}\,. \tag{3}$$

Podle **5.1.8** jsou $A(x) \cup B(x)$, $C(x)$ oddělené, takže $C(x)$ podle **5.1.6** je relativně otevřená v $P - (x)$ a podle **4.6.7** je $C(x)$ otevřená v P. Protože M je hustá v P, je $M \cap C(x)$ hustá v $C(x)$ podle **4.9.11**, takže existuje bod $f_3(x) \in M \cap C(x)$. Podobně se zjistí, že existují body $f_1(x) \in M \cap A(x)$, $f_2(x) \in M \cap B(x)$. Je-li $f(x) = [f_1(x), f_2(x), f_3(x)]$, je f zobrazení množiny S do M_3, takže podle I zbývá pouze ukázat, že zobrazení f je prosté.

III. Budiž naopak $x_1 \in S$, $x_2 \in S$, $x_1 \neq x_2$, $f_i(x_1) = f_i(x_2)$ pro $i = 1, 2, 3$. Z **5.1.1** plyne podle (3), že množiny napravo v (1) jsou disjunktní. Zřejmě můžeme předpokládat, že:

$$x_2 \in C(x_1)\,. \tag{4}$$

Nyní $P - (x_1) = A(x_1) \cup [B(x_1) \cup C(x_1)]$ a ze (3) plyne podle **5.1.8**, že množiny $A(x_1)$, $B(x_1) \cup C(x_1)$ jsou oddělené. Z **10.1.2** a **10.1.10** soudíme tedy, že množina $x_1 \cup A(x_1)$ je souvislá.

Podobně také $(x_1) \cup B(x_1)$ a tedy podle **10.1.5** též

$$S = (x_1) \cup A(x_1) \cup B(x_1)$$

je souvislá. Avšak $S \subset P - C(x_1)$, takže podle (1) a (4) $S \subset A(x_2) \cup [B(x_2) \cup C(x_2)]$, Podle **10.1.3** je tedy buďto $S \cap A(x_2) = \emptyset$ nebo $S \cap [B(x_2) \cup C(x_2)] = \emptyset$. To je nemožné, neboť S obsahuje body $f_1(x_1) = f_1(x_2) \in A(x_2)$, $f_2(x_1) = f_2(x_2) \in B(x_2)$.

10.7.5. Budiž P souvislý F-prostor s druhým axiomem spočetnosti. Množina těch $x \in P$, pro něž $P - (x)$ má více než dvě komponenty, je nejvýš spočetná. Viz **4.12.21** a **10.7.4.**

10.8. CVIČENÍ k § 10

Nejprve budeme definovat 11 prostorů P_i ($1 \leqq i \leqq 11$) vnořených do $\mathbf{E}_2$. Při tom užijeme tohoto označení: je-li $a = (a_1, a_2) \in \mathbf{E}_2$, $b = (b_1, b_2) \in \mathbf{E}_2$, $a \neq b$, pak nechť $U(a, b)$ znamená množinu bodů $(x, y) \in \mathbf{E}_2$, kde $x = ta_1 + (1 - t)\, b_1$, $y = ta_2 + (1 - t)\, b_2$, $0 \leqq t \leqq 1$; v terminologii elementární geometrie je tedy $U(a, b)$ úsečka spojující bod a s bodem b.

Příklady **10.8.1**, **10.8.2**. Je-li $a_0 = (0, 0)$, $b_0 = (0, 1)$ a pro $n \geqq 1$: $a_n = (n^{-1}, 0)$, $b_n = (n^{-1}, 1)$, pak

$$P_1 = \bigcup_{n=0}^{\infty} U(a_n, b_n) \cup U(a_0, a_1) \cup U(b_0, b_1)\,,$$

$$P_2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} U(a_n, b_0)\,.$$

Příklad **10.8.3**. Je-li D množina bodů $(x, 0) \in \mathbf{E}_2$, kde x probíhá triadické diskontinuum (viz definici **9.6.4**), a je-li opět $b_0 = (0, 1)$, pak

$$P_3 = \bigcup_{\xi} U(\xi, b_0) \quad (\xi \in D)\,.$$

Příklad **10.8.4**. Budiž $a_1 = (0, 0)$, $a_2 = (1, 0)$; pro $n \in \mathbf{N}$, $1 \leqq i \leqq 2^n - 1$ budiž $b_{ni} = (i \,.\, 2^{-n}, 0)$, $c_{ni} = (i \,.\, 2^{-n}, 2^{-n})$; pak

$$P_4 = U(a_1, a_2) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^n-1} U(b_{ni}, c_{ni})\,.$$

Příklad **10.8.5**. Budiž $a_1 = (0, 0)$, $a_2 = (0, 1)$; pro $n \in \mathbf{N}$ budiž $b_n = (n^{-1}, 0)$, $c_n = (n^{-1}, 1)$; pak

$$P_5 = U(a_1, a_2) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [U(b_n, c_n) \cup U(c_n, b_{n+1})]\,.$$

Příklad **10.8.6**. Budiž $a_1 = (0, 0)$, $a_2 = (1, 0)$; pro $n \in \mathbf{N}$, $1 \leqq i \leqq 2^{n-1}$ budiž $b_{ni} = [(2i - 1)\, 2^{-n}, 2^{-n}]$; pak

$$P_6 = U(a_1, a_2) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^n-1} [U(b_{ni}, b_{n+1,2i-1}) \cup U(b_{ni}, b_{n+1,2i})]\,.$$

Příklad **10.8.7**. Budiž $a = (0, 0)$; pro $n \in \mathbf{N}$ budiž $b_n = (n^{-1}, 0)$; pro $n \in \mathbf{N}$, $i \in \mathbf{N}$ budiž $c_{ni} = [(n + 1)^{-1}, n^{-1}i^{-1}]$; pak

$$P_7 = U(a, b_1) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} U(b_n, c_{ni})\,.$$

Příklad **10.8.8**. Budiž A_1 množina těch bodů $(-1, y) \in \mathbf{E}_2$, pro něž $y \geqq 0$; budiž A_2 množina těch bodů $(1, y) \in \mathbf{E}_2$, pro něž $y \geqq 0$; pro $n \in \mathbf{N}$ budiž

$$a_{4n-3} = (1 - 2^{-n}, 0)\,, \quad a_{4n-1} = (-1 + 2^{-n}, 0)\,, \quad a_{2n} = (0, n)\,;$$

pak

$$P_8 = A_1 \cup A_2 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} U(a_n, a_{n+1}) .$$

Příklad **10.8.9.** Pro $n \in \mathbf{N}$ budiž A_n množina těch $(x, y) \in \mathbf{E}_2$, pro něž $x = n^{-1}$, $y \geqq 0$; pro $n \in \mathbf{N}$ budiž B_n množina těch $(x, y) \in \mathbf{E}_2$, pro něž je předně $n^2(x^2 + y^2) = 1$ a za druhé buďto $x \leqq 0$ nebo $y \leqq 0$; pak

$$P_9 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n) .$$

Příklady **10.8.10**, **10.8.11.** Pro $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ budiž A_n množina těch $(x, y) \in \mathbf{E}_2$, pro něž $(x + n)^2 + y^2 - \frac{1}{2}y = 0$, B_n množina těch $(x, y) \in \mathbf{E}_2$, pro něž $(x + n)^2 + y^2 + \frac{1}{2}y = 0$, C_n množina všech $(n, y) \in \mathbf{E}_2$. Dále budiž C_0^* množina těch $(0, y) \in \mathbf{E}_2$, pro něž $y \geqq 0$, D množina všech $(x, 0) \in \mathbf{E}_2$. Pak

$$P_{10} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n \cup C_n) \cup C_0 \cup D ,$$

$$P_{11} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n \cup C_n) \cup C_0^* \cup B_0 \cup D .$$

10.8.1. Prostory $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ jsou kontinua. Prostory P_8, P_9, P_{10}, P_{11} jsou souvislé.

10.8.2. Budiž $a = (0, 0)$, $b = (0, 1)$. Budiž

$$M = \mathscr{E}_{(x,y)} \; [x = 0, 0 < y < 1] ,$$
$$N = \mathscr{E}_{(x,y)} \; [0 < x \leqq 1, y = 0 \text{ nebo } y = 1] .$$

Pak je $(a) \cup (b)$ kvasikomponenta prostoru $P_1 - (M \cup N)$.

10.8.3. Konstituanty prostoru $P_9 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n)$ jsou množiny $A_n \cup B_n$ $(n \in \mathbf{N})$.

10.8.4. Bod $(0, 1)$ je dělicím bodem prostoru P_9.

10.8.5. Body a, b_n $(n \in \mathbf{N})$ byly definovány v příkladě **10.8.7.** Množina

$$Q = [P_7 - U(a, b_1)] \cup (a) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (b_n) \subset P_7$$

je souvislá; body b_n $(n \in \mathbf{N})$ jsou dělicími body množiny Q.

10.8.6. Existuje prosté spojité zobrazení prostoru P_{10} na prostor P_{11} i prosté spojité zobrazení prostoru P_{11} na prostor P_{10}; avšak neexistuje homeomorfní zobrazení prostoru P_{10} na prostor P_{11}. Důkaz posledního tvrzení lze opřít o to, že předně existuje takové okolí U bodu $(0, 0)$ v prostoru P_{11}, že pro každé v U obsažené okolí V bodu $(0, 0)$ v prostoru P_{11} množina $\mathrm{Fr}\, V$ obsahuje aspoň pět bodů, a že za druhé v každém okolí W bodu $(0, 0)$ v prostoru P_{11} je obsaženo takové okolí T bodu $(0, 0)$ v prostoru P_{11}, že množina $\mathrm{Fr}\, V$ neobsahuje víc než pět bodů.

10.8.7. Buďtež $S_1 \subset P$, $S_2 \subset P$ souvislé množiny. Aby množina $S_1 \cup S_2$ byla souvislá, k tomu je nutné a stačí, aby množiny S_1, S_2 nebyly oddělené.

10.8.8. Budiž $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ soustava souvislých bodových množin prostoru P. Nechť pro žádnou volbu dvou množin $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$ nejsou A, B oddělené. Pak množina $\bigcup U\ (X \in \mathfrak{M})$ je souvislá.

10.8.9. Aby prostor $P \neq \emptyset$ byl souvislý, k tomu je nutné a stačí, aby platilo:

$$X \subset P\,, \quad \emptyset \neq X \neq P \Rightarrow \operatorname{Fr} X \neq \emptyset\,.$$

10.8.10. Budiž $S \subset P$, $S \neq \emptyset$; budiž $P - S = A \cup B$ s oddělenými A, B. Pro každou od S různou $X \subset S$ nechť množina $P - X$ je souvislá. Pak množiny $A \cup S$, $B \cup S$ jsou souvislé.

10.8.11. Nechť P, Q jsou dva více než jednobodové souvislé prostory. Pak prostor $P \times Q$ nemá žádný dělicí bod.

10.8.12. Komponenty prostoru $P \times Q$ jsou množiny $X \times Y$, kde X (Y) probíhá komponenty prostoru P (Q).

10.8.13. Budiž P souvislý prostor. Nechť množina $S \subset P$ má konečně mnoho komponent. Budiž $P - S = A \cup B$ s oddělenými A, B. Pak také $S \cup A$ má konečný počet komponent, nejvýš rovný počtu komponent množiny S.

10.8.14. Nechť množiny $A \subset P$, $B \subset P$ jsou uzavřené; nechť $A \cup B$ je souvislá; nechť $A \cap B$ má konečně mnoho komponent. Pak množina A nemá více komponent než množina $A \cap B$.

10.8.15. Ve cvičení **10.8.14** je dovoleno slovo „uzavřené" nahradit slovem „otevřené".

10.8.16. Budiž P souvislý prostor. Budiž f spojitá funkce v oboru P. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $c \in P$, $f(a) < f(b) < f(c)$. Budiž:

$$x \in P\,, \quad x \neq b \Rightarrow f(x) \neq f(b)\,.$$

Pak je b dělicí bod prostoru P.

10.8.17. Buďtež P, Q více než jednobodové souvislé prostory. Budiž f spojitá funkce v oboru $P \times Q$. Pak prostor $P \times Q$ obsahuje nejvýš dva takové body ξ, že:

$$x \in P \times Q\,, \quad x \neq \xi \Rightarrow f(x) \neq f(\xi)\,.$$

10.8.18. Aby prostor P měl nekonečně mnoho komponent, k tomu je nutné a stačí, aby existovala spojitá funkce f v oboru P, pro kterou moh $f^1(P) = \aleph_0$.

10.8.19. Tvrzení věty **10.3.2** neplatí pro prostor $P = P_1 - (M \cup N)$ (viz příklad **10.8.1** a cvič. 10.8.2).

10.8.20. Ve větě **10.3.6** nelze předpoklad, že P je kontinuum, nahradit předpokladem, že P je souvislá množina. To lze odůvodnit příkladem, ve kterém $P \subset P_1$ (viz příklad **10.8.1**).

10.8.21. Ve větě **10.3.7** nelze předpoklad, že P je kontinuum, nahradit předpokladem, že P je souvislá množina.

10.8.22. FH-prostor P budiž kontinuum; budiž $a \in P$. Budiž M množina těch $x \in P$, ke kterým existuje takové kontinuum $K \subset P$, že $K \neq P$, $a \in K$, $x \in K$. Pak M je hustá množina.

10.8.23. Budiž P souvislý prostor; buďtež $K_1 \subset P$, $K_2 \subset P$ kontinua. Pro $x \in K_1$, $y \in K_2$ nechť existuje $z \in P$, který roztíná P mezi x, y. Pak existuje takový $a \in P$, že $P - (a) = A \cup B$, kde $A \supset K_1$, $B \supset K_2$ a množiny A, B jsou oddělené.

10.8.24. FH-prostor P budiž kontinuum; A, B buďtež neprázdné disjunktní uzavřené bodové množiny. Pak existuje takové kontinuum $K \subset P$, že $K \cap A \neq \emptyset \neq K \cap B$, avšak pro každé od K různé kontinuum $H \subset K$ je buďto $H \cap A = \emptyset$ nebo $H \cap B = \emptyset$.

10.8.25. FH-prostor P budiž kontinuum; budiž $M \subset P$, $M \neq \emptyset$. Pak existuje takové kontinuum $K \subset P$, že $K \supset M$, avšak $M - H \neq \emptyset$ pro každé od K různé kontinuum $H \subset K$.

10.8.26. Buďiž $0 < x < 1$, $a_1 = (0, 0)$, $a_2 = (0, 1)$, $b = (0, x)$. Pak bod b rozpojuje prostor P_5 (viz příklad **10.8.5**) mezi body a_1, a_2, avšak bod b neroztíná P_5 mezi a_1, a_2.

10.8.27. Budiž $a = (0, 0)$, $b = (0, 1)$, $c = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $c_n = \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}\right)$ pro $n \in \mathbf{N}$, $S = (c) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (c_n)$. Množina S roztíná prostor P_2 (viz příklad **10.8.2**) mezi body a, b. Neexistuje $M \subset P_2$, která by ireducibilně roztínala P_2 mezi a, b. Bod c rozpojuje P_2 mezi a, b.

10.8.28. Budiž H množina všech racionálních čísel, K množina všech iracionálních čísel. Budiž $P \subset \mathbf{E}_2$ množina všech těch $(x, y) \in \mathbf{E}_2$, pro něž platí buďto $x \in H$, $y \in H$ nebo $x \in K$, $y \in K$. Pak P je souvislý prostor. Důkaz stručně naznačíme. Je-li $P = A \cup B$, $A \neq \emptyset \neq B$ a jsou-li A, B oddělené, plyne ze souvislosti prostoru $\mathbf{E}_1$, že musí existovat takové reálné číslo a, že každá z obou množin A, B obsahuje bod tvaru (a, y). Protože A, B jsou otevřené, můžeme předpokládat $a \in K$. Budiž $(a, b) \in A$, $(a, c) \in B$. Existuje takové číslo $\delta > 0$, že

$$x \in K_0 \Rightarrow (x, b) \in A\,, \quad (x, c) \in B\,, \quad \text{kde} \quad K_0 = \mathscr{E}_x\,[x \in K, a < x < a + \delta]\,.$$

Pro každé $x \in K_0$ existuje takové největší $f(x) \in \mathbf{E}_1$, že předně $b < f(x) < c$ a za druhé

$$a < y < f(x)\,, \quad y \in K \Rightarrow (x, y) \in A\,.$$

Pro každé $x \in K_0$ jest $[x, f(x)] \in \overline{A} \cap \overline{B} \subset \mathbf{E}_2 - P$ a tedy $f(x) \in H$. Budiž $\{r_n\}_1^\infty$ posloupnost, jejímiž členy jsou právě ta $y \in H$, pro která $b < y < c$. Jest $K_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, kde $M_n = \mathscr{E}_x\,[x \in K_0, f(x) = r_n]$. Existuje takové $n \in \mathbf{N}$ a takový interval $J \subset \mathscr{E}_x[a < x < a + \delta]$, že: $x \in J \cap K \Rightarrow f(x) = r_n$. Pro $x \in J \cap K$ jest $(x, r_n) \in \bar{A} \cap \bar{B}$; totéž musí pak platit pro $x \in J \cap H$. To je nemožné, neboť $x \in H \Rightarrow (x, r_n) \in P \subset \mathbf{E}_2 - \bar{A} \cap \bar{B}$.

10.8.29. Budiž P týž prostor jako ve cvič. **10.8.28**. Budiž D množina těch čísel $x \in \mathbf{E}_1$, pro něž $2^n . x$ je celé při vhodném $n \in \mathbf{N}$. Budiž Q množina těch $(x, y) \in P$, pro něž $x \in \mathbf{E}_1 - D$. Všechny komponenty prostoru Q jsou jednobodové. Body $(x, y) \in Q$, $(\xi, \eta) \in Q$ náležejí právě tehdy oba do téže kvasikomponenty prostoru Q, jestliže $x = \xi$. Důkaz posledního tvrzení lze vést podobně jako důkaz ve cvič. **10.8.28**.

10.8.30. Budiž D triadické diskontinuum (viz definici **9.6.4**); budiž R (S) množina všech přístupných (nepřístupných) bodů množiny D. Budiž $a = (0, 1)$. Pro $x \in D$ budiž $L(x) = U[a, (x, 0)]$. Budiž Q_1 množina všech těch $(x, y) \in \mathbf{E}_2$ s racionálním y, pro něž existuje takové $\xi \in R$, že $(x, y) \in L(\xi)$. Budiž Q_2 množina všech těch $(x, y) \in \mathbf{E}_2$ s iracionálním y, pro něž existuje takové $\xi \in S$, že $(x, y) \in L(\xi)$. Budiž $P = Q_1 \cup Q_2 \subset \mathbf{E}_2$. Každá více než jednobodová souvislá část P obsahuje bod a. Nicméně prostor P je souvislý; důkaz stručně naznačíme. Budiž $P = A \cup B$ s oddělenými A, B, kde $a \in A$, $B \neq \emptyset$; máme dojít ke sporu. Je-li $\xi \in S$, budiž $\xi \in S_1$ nebo $\xi \in S_2$ podle toho, zda $Q_2 \cap L(\xi) \subset A$ či $B \cap L(\xi) \neq \emptyset$. Je-li $\xi \in S_2$, pak existuje nejmenší takové $f(\xi) \in \mathbf{E}_1$, že $0 < f(\xi) < 1$ a že $(x, y) \in A$ pro každý $(x, y) \in L(\xi)$ s iracionálním $y > f(\xi)$. Pro $\xi \in S_2$ budiž $\varphi(\xi)$ ten bod $(x, y) \in L(\xi)$, pro který $y = f(\xi)$. Pak platí: $\xi \in S_2 \Rightarrow \varphi(\xi) \in \bar{A} \cap \bar{B} \subset \mathbf{E}_2 - P$; z toho plyne, že $f(\xi)$ je racionální, a tudíž $S_2 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, kde hodnota $f(\xi)$ je táž pro všecky $\xi \in E_n$; budiž $f(\xi) = a_n$ pro $\xi \in E_n$. Pro každé $\xi \in D$ existuje bod $\psi(\xi) \in L(\xi)$ s druhou souřadnicí rovnou a_n. Pro $\xi \in R$ jest $\psi(\xi) \in P \subset \mathbf{E}_2 - (\bar{A} \cap \bar{B})$; pro $\xi \in E_n$ jest $\psi(\xi) = \varphi(\xi) \in \bar{A} \cap \bar{B}$. Z toho plyne, že množina E_n je řídká v D, takže $R \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = R \cup S_2$ je první kategorie v D; z toho plyne, že S_1 je hustá v D. Je-li nyní $\xi \in D$, $x \in L(\xi)$ a je-li U otevřené okolí bodu x, pak existuje takové $\eta \in S_1$, že $L(\eta) \cap U \neq \emptyset$. Protože množina $U \cap L(\eta)$ je hustá v $L(\eta)$, je také $P \cap L(\eta) \cap U \neq \emptyset$, tedy $A \cap U \neq \emptyset$, neboť $P \cap L(\eta) \subset A$. Z toho plyne, že $\bar{A} \supset P$ a to je nemožné.

10.8.31. Budiž opět $P_1 = (P_1, u)$ prostor z příkladu **10.8.1**; budiž opět $a_0 = (0, 0)$, $a_1 = (1, 0)$ a budiž $T = U(a_0, a_1) - (a_0)$. Pro $X \subset P_1$ budiž $vX = uX$, jestliže $a_0 \in X \cup u(X \cap T)$, jinak budiž $vX = u(X) - (a_0)$. Budiž w F-modifikace topologie v v množině P_1. Množina $S = P_1 - T$ je souvislá při topologii w, ale není souvislá při topologii v.

10.8.32. Budiž u přirozená topologie v $\mathbf{E}_1$. Budiž $Q = \mathscr{E}_x[0 \leqq x \leqq 1]$; budiž ω symbol různý od prvků množiny Q; budiž $P = Q \cup (\omega)$. Nechť množina $F \subset P$ se skládá z prvku ω a z čísel n^{-1} ($n \in \mathbf{N}$). Topologii v množině P definujeme takto. Pro $X \subset P$ jest $\bar{X} - [(0) \cup (\omega)] = u[\bar{X} - (\omega)] - (0)$; mimo to: $0 \in \bar{X} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \in u(X - F)$, $\omega \in \overline{X} \Leftrightarrow$ buďto $\omega \in X$ nebo $0 \in u[(X \cap F) - (\omega)]$. Pak P je H-prostor a je to kontinuum. Množina F je v P uzavřená a $K = (\omega)$ je její komponenta; avšak $K \cap \operatorname{Fr} F = \emptyset$. Z toho plyne, že v **10.3.6** nelze vynechat předpoklad, že P je F-prostor. Rovněž tak nelze v **10.3.6** vynechat předpoklad, že P je H-prostor. Abychom to nahlédli, můžeme právě popsanou topologii v množině P nahradit její F-modifikací a položit

$$F = (\omega) \cup (0) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{E}_x \left[\frac{1}{2n+1} \leqq x \leqq \frac{1}{2n}\right], \quad K = (\omega).$$

10.8.33. Je-li $a \in P_1$, $b \in P_1$, $a \neq b$ (viz příklad **10.8.1**), pak existuje nekonečně mnoho oblouků $C \subset P$ s koncovými body a, b.

10.8.34. Budiž $P = P_4$ nebo $P = P_6$ (viz příklady **10.8.4, 10.8.6**). Budiž $\mathfrak{C} \neq \emptyset$ disjunktní soustava oblouků $C \subset P$. Budiž $\mathfrak{U}$ pokrytí prostoru P. Pak existuje jen konečně mnoho takových $C \in \mathfrak{C}$, pro něž platí: $X \in \mathfrak{U} \Rightarrow C - X \neq \emptyset$.

10.8.35. Je-li P některý z prostorů P_9, P_{10}, P_{11} (viz příklady **10.8.9** až **10.8.11**) a je-li $C \subset P$ oblouk, pak množina $P - C$ není hustá. Naproti tomu pro $P = \mathbf{E}_2$ je množina $P - C$ hustá pro každý oblouk $C \subset P$.

10.8.36. Budiž P množina těch bodů $(x, y) \in \mathbf{E}_2$, pro něž jest: $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x + y \leqq 1$. Existuje taková disjunktní soustava $\mathfrak{C}$ oblouků, že $P = \bigcup (X \in \mathfrak{C})$. Každá taková soustava $\mathfrak{C}$ je nespočetná.

10.8.37. Podle **10.5.25** existují v každém kontinuu P aspoň dva takové body x, že prostor $P - (x)$ je souvislý. Naproti tomu kontinuum P_5 (viz příklad **10.8.5**) obsahuje jediný takový bod a, že $P - (a)$ je semikontinuum a lze udat podobné kontinuum, které neobsahuje žádný takový bod a.

10.8.38. Budiž $P = P_1$ nebo $P = P_6$ (viz příklady **10.8.1, 10.8.6**). Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Existuje taková topologická kružnice $C \subset P$, že $a \in C$, $b \in C$.

10.8.39. Budiž $0 \leqq t \leqq 1$, $a(t) = (0, t)$, $Q(t) = \mathscr{E}_x\, [x \in P_5, x > 0]$ (viz příklad **10.8.5**). Pak množina $Q(t) \cup (a(t))$ je ireducibilně souvislá mezi body $(1, 0)$, $a(t)$.

10.8.40. Budiž f funkce v oboru $\mathbf{E}_1$. Aby množina $\mathscr{E}_{(x,y)}\, [y = f(x)]$ obsahovala kontinuum, k tomu je nutné a stačí, aby existoval takový interval J, že funkce $f \mid J$ je spojitá.

10.8.41. Budiž $\varphi(0) = 0$; pro $x \in \mathbf{E}_1 - (0)$ budiž $\varphi(x) = \sin \frac{1}{x}$. Nechť množina všech členů posloupnosti $\{r_n\}_1^{\infty}$ je množina všech racionálcíh čísel. Pro $x \in \mathbf{E}_1$ budiž

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \varphi(x - r_n\} \,.$$

Budiž $P = \mathscr{E}_{(x,y)}\,[y = f(x)] \subset \mathsf{E}_2$. Pak P je lineárně orientovaný prostor, který neobsahuje žádné kontinuum.

10.8.42. Budiž f funkce v oboru E_1. Množina $\mathscr{E}_{(x,y)}\,[y = f(x)] \subset \mathsf{E}_2$ budiž souvislá. Pak ke každému $a \in \mathsf{E}_1$ existují takové číselné posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, že $a_n < a < b_n$ pro všecka n, $\lim a_n = \lim b_n = a$, $\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(a)$.

10.8.43. Budiž f funkce první třídy v oboru E_1. Nechť ke každému $a \in \mathsf{E}_1$ existují takové číselné posloupnosti $\{a_n\}$, $\{a_n\}$, že $a_n < a < b_n$ pro všecka n, $\lim a_n = \lim b_n = a$, $\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(a)$. Pak prostor $P = \mathscr{E}_{(x,y)}\,[y = f(x)] \subset \mathsf{E}_2$ je souvislý; důkaz stručně naznačíme. Budiž $P = A \cup B$ s neprázdnými oddělenými A, B. Pro $x \in \mathsf{E}_1$ budiž $x \in A_0$ v případě $[x, f(x)] \in A$, $x \in B_0$ v případě $[x, f(x)] \in B$. Budiž C množina všech bodů spojitosti funkce f. Je-li $x \in A_0 \cap C$, pak x je vnitřním bodem intervalu obsaženého v A_0; existuje největší takový interval, který označíme $J(x)$. Podobně pro $x \in B_0 \cap C$ budiž $J(x)$ největší z intervalů s vnitřním bodem x obsažených v B_0. Každý $J(x)$ $(x \in C)$ je uzavřený interval. Podle **9.5.26** je množina C hustá v E_1; totéž platí o množině $S = \bigcup J(x)$ $(x \in C)$. Je-li T množina všech krajních bodů všech intervalů $J(x)$ $(x \in C)$, plyne z hustoty množiny S, že $S \cup \overline{T} = \mathsf{E}_1$. Protože $A_0 \neq \emptyset \neq B_0$, jest $T \neq \emptyset$; snadno se zjistí, že $T \subset \overline{A}_0 \cap \overline{B}_0$. Podle **9.5.26** existuje $c \in \overline{T}$, který je bodem spojitosti funkce $f \mid \overline{T}$. Pro určitost nechť $c \in A_0$. Bod c leží uvnitř takového intervalu U, že $U \cap \overline{T} \subset A_0$. Jest $U \subset A_0$. Kdyby totiž bylo $U \cap B_0 \neq \emptyset$, bylo by $U \cap B_0 \cap S \neq \emptyset$, neboť $\mathsf{E}_1 = S \cup \overline{T}$, $U \cap \overline{T} \subset A_0$. Podle definice množiny S by existovalo takové $x_1 \in C$, že $J(x_1) \subset B_0$, $J(x_1) \cap U \neq \emptyset$. Protože U obsahuje bod $c \in A_0 \subset \mathsf{E}_1 - J(x_1)$, ležel by v U některý krajní bod d intervalu $J(x_1)$; protože interval $J(x_1) \subset B_0$ je uzavřený, bylo by $d \in B_0$ a to je nemožné, neboť $d \in U \cap T \subset A_0$. Tím je dokázáno, že $U \subset A_0 = P - B_0$. Protože U je okolí bodu c, jest $c \in \mathsf{E}_1 - \overline{B}_0$. To je nemožné, neboť $c \in \overline{T}$, $T \subset \overline{B}_0$, a tedy $\overline{T} \subset \overline{B}_0$.