§ 7. SPOJITÁ ZOBRAZENÍ

7.1. Spojitost

Definice **7.1.1.** Budiž f zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Pravíme, že bod $a \in P$ je *bodem spojitosti* zobrazení f, jestliže

$$a \in \overline{M} \Rightarrow f(a) \in \overline{f^1(M)}$$

pro každou bodovou množinu $M \subset P$.

7.1.1. Budiž f zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Budiž $a \in P$. Aby a byl bodem spojitosti zobrazení f, k tomu je nutné a stačí, aby pro každé okolí V bodu $f(a)$ v prostoru P_1 byla množina $f^{-1}(V)$ okolím bodu a v prostoru P.

Důkaz. I. Budiž a bodem spojitosti. Budiž V okolí bodu $f(a) \in P_1$. Jestliže $U = f^{-1}(V)$ není okolím bodu $a \in P$, je $a \in \overline{P - U}$. Podle definice bodu spojitosti je

$$f(a) \in \overline{f^1(P - U)} = \overline{f^1(P) - V} \subset \overline{P_1 - V}$$

a to je spor.

II. Není-li a bodem spojitosti, pak existuje taková $M \subset P$, že $a \in \overline{M}$, $f(a) \in P_1 - \overline{f^1(M)}$. Množina $V = P_1 - f^1(M)$ je tedy okolím bodu $f(a) \in P_1$ a pro $U = f^{-1}(V)$ máme $U \subset P - M$. Kdyby U byla okolím bodu $a \in P$, byla by podle **4.2.4** také $P - M$ okolím bodu $a \in P$ a to je spor.

7.1.2. Budiž f zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Je-li a isolovaný bod prostoru P, je a bodem spojitosti zobrazení f.

7.1.3. Budiž f funkce v oboru P, kde P je prostor. Budiž $a \in P$. Aby a byl bodem spojitosti funkce f, k tomu je nutné a stačí, aby ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existovalo takové okolí U bodu a, že $x \in U \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

7.1.4. Budiž f zobrazení L-prostoru P do prostoru P_1. Nechť pro bodové posloupnosti $\{a_n\}$ obsažené v prostoru P platí

$$\lim a_n = a \Rightarrow \lim f(a_n) = f(a) . \tag{1}$$

Pak je a bod spojitosti zobrazení f. Je-li $M \subset P$, $a \in \overline{M}$, pak v L-prostoru P existuje taková bodová posloupnost $\{a_n\}$, že $a_n \in M$ pro všecka n, $\lim a_n = a$. Potom je však $f(a_n) \in f^1(M)$ pro všecka n, $\lim f(a_n) = f(a)$, takže $f(a) \in \overline{f^1(M)}$ podle **6.3.7.**

7.1.5. Budiž f zobrazení prostoru P do prostoru P_1, který je H-prostorem nebo L-prostorem. Budiž $a \in P$ bod spojitosti zobrazení f. Pak pro bodové posloupnosti $\{a_n\}$ obsažené v prostoru P platí (1). Budiž V okolí bodu $f(a) \in P_1$. Podle **7.1.1** je $U = f^{-1}(V)$ okolí bodu $a \in P$. Je-li $\lim a_n = a$, existuje takový index k, že $n > k \Rightarrow a_n \in U$ a tedy $n > k \Rightarrow f(a_n) \in V$. Tudíž $\lim f(a_n) = f(a)$ podle **6.3.5** nebo podle **6.3.10.**

7.1.6. Budiž f zobrazení L-prostoru P do prostoru P_1, který je H-prostorem nebo L-prostorem. Budiž $a \in P$. Aby a byl bodem spojitosti zobrazení f, k tomu je nutné a stačí, aby pro bodové posloupnosti $\{a_n\}$ obsažené v P platilo (1).

Definice **7.1.2.** Zobrazení f prostoru P do prostoru P_1 se nazývá *spojité*, jestliže každý $x \in P$ je bodem spojitosti zobrazení f, neboli jestliže pro množiny $M \subset P$ platí

$$f^1(\overline{M}) \subset \overline{f^1(M)} .$$

Budiž f zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Budiž Q_1 vnořen do P_1 a budiž $f^1(P) \subset Q_1 \subset P_1$. Potom v definicích **7.1.1** a **7.1.2** nezáleží na tom, zda na f nazíráme jako na zobrazení P do P_1 či do Q_1. Proto při vyšetřování otázek spojitosti je zpravidla dovoleno omezit se na případ zobrazení f prostoru P na prostor P_1.

7.1.7. Budiž f prosté zobrazení prostoru P na prostor P_1. Aby f bylo homeomorfní, k tomu je nutné a stačí, aby obě zobrazení f, f_{-1} byla spojitá.

7.1.8. Budiž f zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Budiž Q vnořen do P. Je-li $a \in Q$ bodem spojitosti zobrazení f, je a také bodem spojitosti jeho zúžení $f \mid Q$. Je-li f spojité, je také $f \mid Q$ spojité.

7.1.9. Budiž f zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Budiž g zobrazení prostoru P_1 do prostoru P_2. Budiž h zobrazení složené z f a g. Je-li $a \in P$ bod spojitosti zobrazení f a je-li současně $f(a)$ bod spojitosti zobrazení g, je a bod spojitosti zobrazení h.

7.1.10. Zobrazení složené ze dvou spojitých zobrazení je spojité.

7.1.11. Buďtež u a v dvě topologie v P. Aby byla u jemnější než v, k tomu je nutné a stačí, aby identické zobrazení P na P bylo spojité jakožto zobrazení (P, u) na (P, v).

7.1.12. Budiž f spojité zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Budiž V okolí množiny $M_1 \subset P_1$. Pak je $f^{-1}(V)$ okolí množiny $f^{-1}(M) \subset P$. Viz **4.2.8** a **7.1.1.**

7.1.13. Budiž f spojité zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Budiž $A \subset P_1$, $B \subset P_1$. Jsou-li A, B oddělené v prostoru P_1, jsou $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ oddělené v prostoru P. Jsou-li A, B H-oddělené v prostoru P_1, jsou $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ H-oddělené v prostoru P. Je-li G okolí $A \subset P_1$ a je-li H okolí $B \subset P_1$, je $f^{-1}(G)$ okolí $f^{-1}(A) \subset P$ a $f^{-1}(H)$ je okolí $f^{-1}(B) \subset P$. Je-li $G \cap B = H \cap A = \emptyset$, je $f^{-1}(G) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(H) \cap f^{-1}(A) = \emptyset$. Je-li $G \cap H = \emptyset$, je $f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) = \emptyset$.

7.1.14. Budiž f spojité zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Je-li G_1 otevřená množina prostoru P_1, je $f^{-1}(G_1)$ otevřená množina prostoru P. Viz **4.4.12** a **7.1.12.**

7.1.15. Budiž f zobrazení prostoru P do F-prostoru P_1. Pro každou otevřenou $G_1 \subset P_1$ nechť také $f^{-1}(G_1) \subset P$ je otevřená. Pak f je spojité. Je-li $a \in P$ a je-li V okolí $f(a) \in P_1$, pak podle **4.2.3** a **4.5.6** existuje taková otevřená $G_1 \subset P_1$, že $f(a) \in G_1 \subset V$. Množina

$f^{-1}(G_1)$ je otevřená v P a obsahuje bod a. Tedy $f^{-1}(G_1)$ je okolí $a \in P$ podle **4.4.13** a tudíž $f^{-1}(V)$ je okolí $a \in P$ podle **4.2.4**, takže f je spojitá podle **7.1.1**.

7.1.16. Budiž f spojité zobrazení prostoru (P, v) do prostoru P_1. Je-li u topologie v P jemnější než v, je f spojité i jako zobrazení (P, u) do P_1.

7.1.17. Budiž f spojité zobrazení prostoru (P, u) do F-prostoru P_1. Budiž v F-modifikace topologie u. Pak f je spojité i jako zobrazení (P, v) do P_1. Viz **7.1.14** a **7.1.15**.

7.1.18. Budiž f spojité zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Je-li F_1 uzavřená množina prostoru P_1, je $f^{-1}(F_1)$ uzavřená množina prostoru P. Množina $P_1 - F_1$ je otevřená v P_1, takže podle **7.1.14** je $P - f^{-1}(F_1) = f^{-1}(P - F_1)$ otevřená v P.

7.1.19. Budiž f zobrazení prostoru P do F-prostoru P_1. Pro každou uzavřenou $F_1 \subset P_1$ nechť také $f^{-1}(F_1) \subset P$ je uzavřená. Pak f je spojité. Plyne ze **7.1.15**, neboť $f^{-1}(P_1 - F_1) = P - f^{-1}(F_1)$.

7.1.20. Budiž f spojité zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Pro každý $x \in P_1$ je $f^{-1}(x)$ uzavřená v prostoru P. Viz **7.1.18**.

Definice **7.1.3.** Budiž f zobrazení prostoru P na prostor P_1. Pravíme, že f je *přesně spojité*, jestliže

$$M_1 \subset P_1\,, \quad M = f^{-1}(M_1) \Rightarrow \overline{M}_1 = f^1(\overline{M})\,.$$

7.1.21. Přesně spojité zobrazení je spojité. Je-li $M_0 \subset P$, $M_1 = f^1(M_0)$, $M = f^{-1}(M_1)$, pak je $M_0 \subset M$ a tedy $f^1(\overline{M_0}) \subset f^1(\overline{M}) = \overline{M_1} = \overline{f_1(M_0)}$.

7.1.22. Prosté zobrazení prostoru P na prostor P_1 je homeomorfní právě tehdy, jestliže je přesně spojité.

7.1.23. Budiž f zobrazení prostoru P na množinu P_1. Aby v P_1 existovala taková topologie v, že jakožto zobrazení P na (P_1, v) je f spojité, k tomu je nutné a stačí, aby pro každý $y \in P_1$ množina $f^{-1}(y)$ byla uzavřená v P. Je-li tato podmínka splněna, pak existuje v P_1 právě jedna taková topologie u, že jakožto zobrazení P na (P_1, u) je f přesně spojité; je-li w jakákoli topologie v P_1, je f právě tehdy spojité jakožto zobrazení P na (P_1, w), je-li w hrubší než u.

Důkaz. I. Podmínka je nutná podle **7.1.20.** Nechť je tedy splněna.

II. Pro každou $M_1 \subset P_1$ položme $uM_1 = f^1(\overline{M})$, kde $M = f^{-1}(M_1)$. Snadno se zjistí, že u je topologie v P_1, tj. že jsou splněny axiomy ($\bar{\mathrm{I}}$) a ($\bar{\mathrm{II}}$). Mimo to je patrné, že je-li v topologie v P_1, je f přesně spojité jakožto zobrazení P na (P_1, v) právě tehdy, jestliže $v = u$.

III. Je-li f spojité jakožto zobrazení f na (P_1, w) a je-li $M_1 \subset P_1$, $M = f^{-1}(M_1)$, je $u(M_1) = f^1(\overline{M}) \subset w\, f^1(M) = wM_1$ a tudíž w je hrubší než u.

IV. Je-li w hrubší než u a je-li $M_0 \subset P$, $M_1 = f^1(M_0)$, $M = f^{-1}(M_1)$, jest $M_0 \subset M$, tedy $f^1(\overline{M_0}) \subset f^1(\overline{M}) = uM_1 \subset wM_1 = w\, f^1(M_0)$. Tudíž je f spojité jakožto zobrazení P na (P_1, w).

7.1.24. Každé spojité zobrazení se dá složit z přesně spojitého a z prostého spojitého zobrazení. Budiž f spojité zobrazení prostoru P na prostor (P_1, w). Podle **7.1.23** existuje v P_1 topologie u, která je jemnější než w a má tu vlastnost, že g je přesně spojité, znamená-li g totéž zobrazení jako f, ale pokládané za zobrazení P na (P_1, u). Je-li h identické zobrazení P_1 na P_1, pokládané za zobrazení (P_1, u) na (P_1, w), pak zobrazení f je složeno z přesně spojitého zobrazení g a z prostého zobrazení h. Při tom h je spojité podle **7.1.11.**

Příklad **7.1.1.** Prostor P se skládá z množiny $\mathbf{N}$ všech celých kladných čísel, z množiny $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ a z jednoho dalšího prvku ω. Budeme v P definovat tři topologie u, v, w. Je-li $M \subset P$, pak $\omega \in uM$ znamená, že buďto $\omega \in M$ nebo M obsahuje nekonečně mnoho sudých $n \in \mathbf{N}$; $\omega \in vM$ znamená, že buďto $\omega \in M$ nebo M obsahuje nekonečně mnoho $n \in \mathbf{N}$; je-li $n \in \mathbf{N}$ sudé, pak $n \in uM$ znamená, že $n \in M$; je-li $n \in \mathbf{N}$ liché, pak $n \in uM$ znamená, že buďto $n \in M$ nebo M obsahuje nekonečně mnoho takových $(a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, že $2b - 1 = n$; je-li $n \in \mathbf{N}$, pak $n \in vM$ znamená, že buďto $n \in M$ nebo M obsahuje nekonečně mnoho takových $(a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, že $b = n$; je-li $c \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, pak $c \in uM$ znamená $c \in M$ a rovněž $c \in vM$ znamená $c \in M$. Posléze w je F-modifikace topologie v. Položme $f(c) = c$ pro $c \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $f(2n - 1) = f(2n) = n$ pro $n \in \mathbf{N}$, $f(\omega) = \omega$. Snadno se dokáže:

(1) Pokládáme-li f za zobrazení prostoru (P, u) na prostor (P, v), pak f je přesně spojité zobrazení; (P, u) je F-prostor, ale (P, v) není F-prostor.

(2) Pokládáme-li f za zobrazení prostoru (P, u) na prostor (P, w), pak (P, u), (P, w) jsou F-prostory a f jespojité; neexistuje však žádný takový F-prostor Q, aby bylo možno složit f z přesně spojitého zobrazení (P, u) na Q a z prostého zobrazení Q na (P, w).

7.1.25. Budiž f přesně spojité zobrazení prostoru P na prostor P_1. Aby množiny $A \subset P_1$, $B \subset P_1$ byly oddělené v prostoru P_1, k tomu je nutné a stačí, aby $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ byly oddělené v prostoru P. Viz **5.1.2** a definici **7.1.3.**

Definice **7.1.4.** Zobrazení f prostoru P na prostor P_1 nazveme *uzavřené*, jestliže pro každou uzavřenou $M \subset P$ také $f^1(M) \subset f^1(P)$ je uzavřená.

Definice **7.1.5.** Zobrazení f prostoru P na prostor P_1 nazveme *polouzavřené*, jestliže pro každou $M_1 \subset P_1$, pro kterou $f^{-1}(M_1)$ je uzavřená v P, je M_1 uzavřená v P_1.

7.1.26. Každé uzavřené zobrazení je polouzavřené.

7.1.27. Budiž f zobrazení množiny P na množinu P_1. Budiž u topologie v P a budiž v její F-modifikace. Budiž u_1 topologie v P_1 a budiž v_1 její F-modifikace. Aby f bylo uzavřené (polouzavřené) jakožto zobrazení (P, u) na (P_1, u_1), k tomu je nutné a stačí, aby totéž platilo, pokládáme-li f za zobrazení (P, v) na (P_1, v_1).

7.1.28. Každé přesně spojité zobrazení je polouzavřené.

Jestliže v příkladě **7.1.1** pokládáme f za zobrazení F-prostoru (P, u) na F-prostor (P, w), pak f je spojité polouzavřené zobrazení, ale f není přesně spojité.

7.1.29. Budiž f uzavřené spojité zobrazení F-prostoru P na prostor P_1. Pak P_1 je F-prostor a f je přesně spojité. Budiž $M_1 \subset P_1$, $M = f^{-1}(M_1)$. Protože P je F-prostor, je $\overline{M}$ uzavřená v prostoru P; protože f je uzavřené, je $f^1(\overline{M})$ uzavřená v prostoru P_1, tj.

$\overline{f^1(\overline{M})} = f^1(\overline{M})$, a tedy $\overline{f^1(M)} \subset f^1(\overline{M})$. Protože f je spojité, je také obráceně $\overline{f^1(M)} \supset f^1(\overline{M})$; tudíž $\overline{f^1(M)} = f^1(\overline{M})$, tj. $\overline{M_1} = f^1(\overline{M})$ a to znamená, že f je přesně spojité. Mimo to jsme viděli, že $\overline{f^1(\overline{M})} = f^1(\overline{M}) = \overline{M_1}$, tedy $\overline{\overline{M_1}} = \overline{M_1}$, tj. P_1 je F-prostor.

Jestliže (P, u) není F-prostor a jestliže v je F-modifikace topologie u, pak identické zobrazení P na P, pokládané za zobrazení prostoru (P, u) na prostor (P, v), je spojité uzavřené zobrazení, které není přesně spojité.

7.1.30. B u d i ž f z o b r a z e n í F-p r o s t o r u P n a m n o ž i n u P_1. A b y v P_1 e x i s t o v a l a t a k o v á F-t o p o l o g i e v, ž e f j a k o ž t o z o b r a z e n í P n a (P_1, v) j e s p o j i t é, k t o m u j e n u t n é a s t a č í, a b y p r o k a ž d ý $y \in P_1$ m n o ž i n a $f^{-1}(y) \subset P$ b y l a u z a v ř e n á. J e - l i t a t o p o d m í n k a s p l n ě n a, p a k v P_1 e x i s t u j e p r á v ě j e d n a t a k o v á F-t o p o l o g i e u, ž e f j a k o ž t o z o b r a z e n í P n a (P_1, u) j e s p o j i t é a p o l o u z a v ř e n é; j e s t l i ž e p a k w j e F-t o p o l o g i e v P_1, j e f j a k o ž t o z o b r a z e n í P n a (P_1, w)

[1] p r á v ě t e h d y s p o j i t é, j e - l i t o p o l o g i e w h r u b š í n e ž u;

[2] p r á v ě t e h d y p o l o u z a v ř e n é, j e - l i t o p o l o g i e w j e m n ě j š í n e ž u.

D ů k a z. I. Podmínka je nutná podle **7.1.20.** Nechť tedy je splněna.

II. Podle **7.1.23** existuje v P_1 zcela určitá taková topologie u_0, že f jakožto zobrazení P na (P_1, u_0) je přesně spojité. Budiž u F-modifikace topologie u_0. Je-li w F-topologie v P_1, je f právě tehdy spojité jakožto zobrazení P na (P_1, w), je-li w hrubší než u; to plyne ze **7.1.23**, protože F-topologie w je (viz **4.5.15**) právě tehdy hrubší než u_0, je-li hrubší než u. Zejména f je spojité jakožto zobrazení P na (P_1, u).

III. Podle **7.1.27** a **7.1.28** je f polouzavřené jakožto zobrazení P na (P_1, u). Z toho plyne (viz **4.5.13**), že f je polouzavřené jakožto zobrazení P na (P_1, w), jestliže F-topologie w je jemnější než u. Obráceně budiž w taková topologie v P_1, že f je polouzavřené jakožto zobrazení P na (P_1, w). Je-li $M_1 \subset P_1$ uzavřená při topologii u, je M_1 uzavřená i při topologii u_0. Protože f je spojité vzhledem k u_0, je $M = f^{-1}(M_1)$ uzavřená v P podle **7.1.18.** Protože f je polouzavřené vzhledem k w, je M_1 uzavřená při topologii w. Tudíž w je jemnější než u podle **4.5.14.**

7.1.31. Každé spojité zobrazení f F-prostoru P na F-prostor P_1 se dá složit z polouzavřeného spojitého zobrazení prostoru P na F-prostor P_0 a z prostého spojitého zobrazení prostoru P_0 na prostor P_1. Označme w danou F-topologii prostoru P_1. Podle **7.1.30** existuje v P_1 F-topologie u jemnější než w, která má tu vlastnost, že g je polouzavřené a spojité, znamená-li g totéž zobrazení jako f, ale pokládané za zobrazení P na (P_1, u). Je-li h identické zobrazení P_1 na P_1, pokládané za zobrazení (P_1, u) na (P_1, w), pak zobrazení f je složeno ze zobrazení g, h a prosté zobrazení h je spojité podle **7.1.11.**

7.1.32. Budiž P prostor; budiž $a \in P$; buďtež f, g funkce v oboru P; nechť a je bodem spojitosti i pro f i pro g. Pro $x \in P$ budiž

$$\begin{aligned} f_1(x) &= |f(x)| \, ; \\ f_2(x) &= \max\,[f(x), g(x)] \, ; \\ f_3(x) &= \min\,[f(x), g(x)] \, ; \\ f_4(x) &= f(x) + g(x) \, ; \\ f_5(x) &= f(x) - g(x) \, ; \\ f_6(x) &= f(x) \, . \, g(x) \, ; \\ f_7(x) &= \frac{f(x)}{1 + |f(x)|} \, . \end{aligned}$$

Pak a je bodem spojitosti každé z funkcí $f_1, f_2, \ldots, f_7$. Je-li $g(a) \neq 0$ a je-li f_8 taková funkce v oboru P, že

$$x \in P \, , \quad g(x) \neq 0 \Rightarrow f_8(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \, ,$$

je a bodem spojitosti funkce f_8. Je-li $|f(a)| < 1$ a je-li f_9 taková funkce v oboru P, že

$$x \in P \, , \quad |f(x)| < 1 \Rightarrow f_9(x) = \frac{f(x)}{1 - |f(x)|} \, ,$$

je a bodem spojitosti funkce f_9. Správnost všech tvrzení plyne ze **7.1.3.**

7.1.33. Budiž P prostor; budiž $\{f_n\}$ posloupnost funkcí v oboru P; pro každý $x \in P$ budiž $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$, takže také f

je funkce v oboru P; nechť $a \in P$ je bodem spojitosti všech funkcí f_n. Aby a byl bodem spojitosti funkce f, k tomu je nutné a stačí, aby ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existoval takový index $m(\varepsilon)$ a takové okolí $U(\varepsilon)$ bodu a, že

$$x \in U(\varepsilon) \Rightarrow |f_{m(\varepsilon)}(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

Důkaz. I. Je-li podmínka splněna a je-li $\varepsilon > 0$, budiž $m = m(\frac{1}{3} . \varepsilon)$, $U_1 = U(\frac{1}{3} . \varepsilon)$. Podle **7.1.3** existuje takové okolí U_2 bodu a, že $x \in U_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow |f_m(x) - f_m(a)| < \frac{1}{3} . \varepsilon$. Podle **4.2.5** je $V = U_1 \cap U_2$ okolí bodu a a jest

$$x \in V \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqq |f_m(x) - f(x)| + |f_m(x) - f_m(a)| + \\ + |f_m(a) - f(a)| < \varepsilon$$

(viz **4.2.3**). Tudíž a je bod spojitosti pro f podle **7.1.3.**

II. Nechť a je bod spojitosti pro f a nechť $\varepsilon > 0$. Existuje takový index $m(\varepsilon)$, že $|f_{m(\varepsilon)}(a) - f(a)| < \frac{1}{3} . \varepsilon$. Podle **4.2.5** a **7.1.3** existuje takové okolí $U(\varepsilon)$ bodu a, že

$$x \in U(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \tfrac{1}{3} . \varepsilon , \quad |f_{m(\varepsilon)}(x) - f_{m(\varepsilon)}(a)| < \tfrac{1}{3} . \varepsilon .$$

Pak je

$$x \in U(\varepsilon) \Rightarrow f_{m(\varepsilon)}(x) - f(x)| \leqq \\ \leqq |f_{m(\varepsilon)}(x) - f_{m(\varepsilon)}(a)| + |f_{m(\varepsilon)}(a) - f(a)| + |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

7.2. Inversní spojitost a oboustranná spojitost

Definice **7.2.1.** Budiž f zobrazení prostoru P na prostor P_1; budiž $b \in P_1$. Pravíme, že b je *bod inversní spojitosti* zobrazení f, je-li pro každou bodovou množinu $M \subset P$:

$$b \in \overline{f^1(M)} \Rightarrow f^{-1}(b) \cap \overline{M} \neq \emptyset .$$

7.2.1. Budiž f zobrazení prostoru P na prostor P_1; budiž $b \in P_1$. Aby b byl bod inversní spojitosti pro f, k tomu je nutné a stačí, aby pro každé okolí U množiny $f^{-1}(b) \subset P$ byla množina

$$V = \mathscr{E}_y \quad [y \in P_1, f^{-1}(y) \subset U]$$

okolím bodu $b \in P_1$.

Důkaz. I. Budiž b bod inversní spojitosti pro f. Je-li U okolí množiny $f^{-1}(b) \subset P$, budiž $M = P - U$. Pak je $f^{-1}(b) \subset P - \overline{M}$ neboli $f^{-1}(b) \cap \overline{M} = \emptyset$. Z toho plyne podle definice **7.2.1**, že $b \in P_1 - \overline{f^1(M)}$ neboli, že $V = P_1 - f^1(M)$ je okolí bodu $b \in P_1$. Pro $y \in P_1$ je však zřejmě: $y \in V \Leftrightarrow f^{-1}(y) \subset U$.

II. Jestliže b není bod inversní spojitosti pro f, pak existuje taková $M \subset P$, že $b \in \overline{f^1(M)}$, $f^{-1}(b) \cap \overline{M} = \emptyset$. Množina $U = P - M$ je pak okolím množiny $f^{-1}(b) \subset P$ a množina $V = \mathscr{E}_y\ [f^{-1}(y) \subset U] = P_1 - f^1(M)$ není okolím bodu $b \in P_1$.

7.2.2. Budiž f zobrazení prostoru P na prostor P_1. Budiž $b \in P_1$ bod inversní spojitosti pro f. Je-li U okolí množiny $f^{-1}(b) \subset P$, je $f^1(U)$ okolí bodu $b \in P_1$. To plyne ze **7.2.1** na základě **4.2.4**, neboť

$$y \in P_1, \quad f^{-1}(y) \subset U \Rightarrow y \in f^1(U) .$$

Příklad **7.2.1.** Uvažujme prostory P, P_1 vnořené do $\mathbf{E}_1$; P se skládá z čísel

$$0, 1, 2, 3, \ldots, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots,$$

P_1 z čísel $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ Budiž f zobrazení P na P_1 definované takto:

$$x \leqq 1 \Rightarrow f(x) = x ; \quad x > 1 \Rightarrow f(x) = x^{-1} .$$

Snadno se dokáže:

(1) Zobrazení f je přesně spojité.

(2) $0 \in P_1$ není bod inversní spojitosti zobrazení f.

(3) Pro každé okolí U bodu 0 neboli množiny $f^{-1}(0)$ v prostoru P je $f^1(U)$ okolí bodu 0 v prostoru P_1.

7.2.3. Budiž f zobrazení prostoru P na prostor P_1. Budiž $b \in P_1$ bod inversní spojitosti zobrazení f. Budiž $\{a_n\}$ taková bodová posloupnost v prostoru P, že $\lim f(a_n) = b$. Pak ke každému okolí U množiny $f^{-1}(b) \subset P$ existuje takový index k, že $a_n \in U$ pro všecka $n > k$. Neexistuje-li takový index k, pak existuje taková posloupnost $\{a_{i_n}\}$ vybraná z $\{a_n\}$, že $a_{i_n} \in M$ pro všecka n, kde $M = P - U$. Protože U je okolí množiny $f^{-1}(b)$, je $f^{-1}(b) \cap \overline{M} = \emptyset$. Z toho plyne podle definice **7.2.1**, že $b \in P_1 - \overline{f^1(M)}$, tj. že $P_1 - f^1(M)$ je okolí bodu $b \in P_1$. Podle **6.3.3** je však $\lim_{n \to \infty} f(a_{i_n}) = b$, takže existuje takový index k, že $n > k \Rightarrow f(a_{i_n}) \in P_1 - f^1(M)$. To je spor, neboť $a_{i_n} \in M$ pro všecka n.

7.2.4. Budiž f zobrazení prostoru P na L-prostor P_1; budiž $b \in P_1$. Pro každé okolí U množiny $f^{-1}(b) \subset P$ nechť ke každé v P obsažené posloupnosti $\{a_n\}$, pro kterou $\lim f(a_n) = b$, existuje takový index k, že $a_n \in U$ pro všecka $n > k$. Pak je b bod inversní spojitosti zobrazení f. Není-li b bod inversní spojitosti pro f, pak existuje taková $M \subset P$, že $b \in \overline{f^1(\overline{M})}$, $f^{-1}(b) \cap \overline{M} = \emptyset$. Množina $U = P - \overline{M}$ je pak okolím množiny $f^{-1}(b) \subset P$. Protože $b \in \overline{f^1(\overline{M})}$, existuje v L-prostoru P_1 taková bodová posloupnost $\{b_n\}$, že $b_n \in f^1(M)$ pro všecka n, $\lim b_n = b$. V prostoru P existuje taková bodová posloupnost $\{a_n\}$, že pro všecka n je $f(a_n) = b_n$, $a_n \in M$. Nyní musí existovat takový index k, že $n > k \Rightarrow a_n \in U$; to je spor.

Definice **7.2.2.** Zobrazení f prostoru P na prostor P_1 nazveme *inversně spojité*, jestliže každý $y \in P_1$ je bod inversní spojitosti pro f.

7.2.5. Budiž f zobrazení prostoru P na prostor P_1. Aby f bylo inversně spojité, k tomu je nutné a stačí, aby pro všecky bodové množiny $M \subset P$ platilo:

$$f^1(\overline{M}) \supset \overline{f^1(\overline{M})}\,.$$

Důkaz. I. Je-li podmínka splněna a je-li $b \in P_1$, $M \subset P$, $b \in \overline{f^1(\overline{M})}$, jest $b \in f^1(\overline{M})$, tj. existuje takový bod $a \in \overline{M}$, že $f(a) = b$. Pak je $a \in f^{-1}(b) \cap \overline{M} \neq \emptyset$ a tudíž je b bod inversní spojitosti zobrazení f.

II. Není-li podmínka splněna, pak existuje takový bod $b \in P_1$ a taková množina $M \subset P$, že $b \in \overline{f^1(\overline{M})} - f^1(\overline{M})$. Protože $b \in P_1 - f^1(\overline{M})$, je $f^{-1}(b) \cap \overline{M} = \emptyset$. Avšak $b \in \overline{f^1(\overline{M})}$, takže b není bod inversní spojitosti pro f.

7.2.6. Budiž f prosté zobrazení prostoru P na prostor P_1. Aby f bylo inversně spojité, k tomu je nutné a stačí, aby inversní zobrazení f_{-1} bylo spojité.

7.2.7. Budiž f inversně spojité zobrazení prostoru P na prostor P_1. Budiž $A \subset P_1$, $B \subset P_1$. Jsou-li množiny $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ oddělené v prostoru P, jsou A, B oddělené v prostoru P_1. Jsou-li $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ H-oddělené v prostoru P, jsou A, B H-oddělené v prostoru P_1. Je-li U_1 okolí $f^{-1}(A) \subset P$ a je-li U_2 okolí $f^{-1}(B) \subset P$, plyne ze **4.2.8** a **7.2.1**, že $V_1 = \mathscr{E}_y\, [f^{-1}(y) \subset U_1]$ je okolí $A \subset P_1$ a že $V_2 = \mathscr{E}_y\, [f^{-1}(y) \subset U_2]$ je okolí $B \subset P_1$. Je-li $U_2 \cap f^{-1}(A) = \emptyset = U_1 \cap f^{-1}(B)$, jest $V_2 \cap A = \emptyset = V_1 \cap B$. Je-li $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, jest $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

7.2.8. Budiž f zobrazení prostoru P na prostor P_1. Budiž Q_1 vnořen do P_1, takže $Q = f^{-1}(Q_1)$ je vnořen do P a zúžení $f \mid Q$ je zobrazení prostoru Q na prostor Q_1. Je-li $b \in Q_1$ bod inversní spojitosti pro f, je b bod inversní spojitosti také pro $f \mid Q$. Je-li zobrazení f inversně spojité, je také $f \mid Q$ inversně spojité.

Příklad **7.2.2.** Uvažujme prostory P, P_1 vnořené do $\mathbf{E}_1$; P se skládá z čísel $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$; $P_1 = P - (1)$. Definujme zobrazení f prostoru P na prostor P_1 takto:

$$f(1) = 0\,, \quad x \neq 1 \Rightarrow f(x) = x\,.$$

Snadno se dokáže:

(1) Zobrazení f je spojité a také je inversně spojité.

(2) Zúžení $f \mid P - (0)$ není inversně spojité, protože $0 \in f^1(P - (0))$ není bod inversní spojitosti pro $f \mid P - (0)$.

7.2.9. Inversně spojité zobrazení je uzavřené. Budiž f inversně spojité zobrazení prostoru P na prostor P_1. Množina $M \subset P$ budiž uzavřená. Pak je $M = \overline{M}$ a tedy $f^1(M) \supset \overline{f^1(M)}$ podle **7.2.5**, takže množina $f^1(M) \subset P_1$ je uzavřená.

V příkladě **7.2.2** je f spojité a inversně spojité zobrazení P na P_1; množina $G = (1)$ je otevřená v prostoru P, ale $f^1(G) = (0)$ není otevřená v prostoru P_1.

7.2.10. Uzavřené zobrazení f F-prostoru P na prostor P_1 je inversně spojité. Budiž $M \subset P$. Protože P je F-prostor, je $\overline{M} \subset P$ uzavřená množina. Je-li f uzavřené, je také $f^1(\overline{M}) \subset P_1$ uzavřená. Protože $f^1(\overline{M}) \supset f^1(M)$, je $f^1(\overline{M}) \supset \overline{f^1(M)}$ podle **4.4.7** a zobrazení f je inversně spojité podle **7.2.5.**

Jestliže prostor (P, u) není F-prostor, budiž v F-modifikace topologie u. Identické zobrazení P na P jakožto zobrazení prostoru (P, u) na prostor (P, v) je uzavřené, ale není inversně spojité.

7.2.11. Budiž f inversně spojité zobrazení prostoru P na prostor (P_1, v). Budiž u topologie v P_1 jemnější než v. Pak je f inversně spojité též jako zobrazení P na (P_1, u). Viz **7.2.5.**

7.2.12. Budiž f inversně spojité zobrazení F-prostoru P na prostor (P_1, v). Je-li u F-modifikace topologie v, je f inversně spojité též jako zobrazení P na (P_1, u). Viz **7.2.9** a **7.2.10.**

7.2.13. Budiž f zobrazení prostoru P na množinu P_1. Existuje taková topologie u v množině P_1, že je-li w libovolná topologie v P_1, pak f je právě tehdy inversně spojité jakožto zobrazení P na (P_1, w), jestliže w je jemnější než u. Zejména je f inversně spojité jakožto zobrazení P na (P_1, u). Topologie u je jednoznačně určena. Je-li P F-prostor, je také (P_1, u) F-prostor.

Důkaz. I. Pro $M \subset P$ položme $\varphi(M) = \mathcal{E}_y\, [y \in P_1, f^{-1}(y) \subset M]$. Pro $y \in P_1$ budiž $\mathfrak{B}(y)$ soustava všech množin $\varphi(X)$, kde X probíhá všecka okolí množiny $f^{-1}(y) \subset P$. Snadno se zjistí, že soustavy $\mathfrak{B}(y)$ $(y \in P_1)$ splňují axiomy (I$\mathfrak{U}$) až (IV$\mathfrak{U}$) (viz **4.3.1**), takže podle **4.3.3** tyto soustavy $\mathfrak{B}(y)$ definují topologii u v množině P_1. Snadno se také zjistí, že pro $y \in P_1$ je $\mathfrak{B}(y)$ soustava všech u-okolí bodu $y \in P_1$.

II. Ze **7.2.1** plyne předně, že f je inversně spojité jakožto zobrazení P na (P_1, u), a za druhé, že f je právě tehdy inversně spojité jakožto zobrazení P na (P_1, w), jestliže každé u-okolí libovolného bodu $y \in P_1$ je také jeho w-okolím neboli jestliže topologie w je jemnější než u. Že topologie u je jednoznačně určena, je zřejmé.

III. Je-li P F-prostor a je-li v F-modifikace topologie u, pak f je podle **7.2.12** inversně spojité jakožto zobrazení P na (P_1, v), takže podle II v musí být jemnější než u. Protože v je hrubší než u, je $v = u$, tj. u je F-topologie.

Definice **7.2.3.** Budiž f zobrazení prostoru P na prostor P_1. Pravíme, že f je *oboustranně spojité*, jestliže f je spojité a současně též inversně spojité.

7.2.14. Budiž f zobrazení prostoru P na prostor P_1. Aby f bylo oboustranně spojité, k tomu je nutné a stačí, aby pro všecky množiny $M \subset P$ bylo:

$$f^1(\bar{M}) = \overline{f^1(M)} .$$

Viz **7.2.5** a definici **7.1.2.**

7.2.15. Oboustranně spojité zobrazení je přesně spojité.

7.2.16. Budiž f zobrazení prostoru P na množinu P_1. Existuje nejvýš jedna taková topologie u v množině P_1, že f je oboustranně spojité jakožto zobrazení P na (P_1, u). Viz **7.1.23** a **7.2.15.**

7.2.17. Budiž f zobrazení F-prostoru P na prostor P_1. Aby f bylo oboustranně spojité, k tomu je nutné a stačí, aby f bylo současně spojité i uzavřené.

Důkaz. I. Je-li f oboustranně spojité, je f spojité a podle **7.2.9** také uzavřené. (Předpoklad, že P je F-prostor, v této části nepotřebujeme.)

II. Je-li f spojité a uzavřené, je f oboustranně spojité podle **7.2.10.**

7.2.18. Budiž f oboustranně spojité zobrazení F-prostoru P na prostor P_1. Pak také P_1 je F-prostor. Viz **7.1.29** a **7.2.17.**

7.2.19. Budiž f oboustranně spojité zobrazení prostoru P na prostor P_1. Budiž $A \subset P_1$, $B \subset P_1$. Aby A, B bylyoddělené v prostoru P_1, k tomu je nutné a stačí, aby $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ byly oddělené v prostoru P. Aby A, B byly H-oddělené v prostoru P_1, k tomu je nutné a stačí, aby $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ byly H-oddělené v prostoru P. Viz **7.1.13** a **7.2.7.**

7.2.20. Budiž f oboustranně spojité zobrazení normálního prostoru P na prostor P_1. Pak také P_1 je normální. Podle **7.2.18** je P_1 F-prostor. Jsou-li $A \subset P_1$, $B \subset P_1$ disjunktní a uzavřené, jsou $f^{-1}(A) \subset P$, $f^{-1}(B) \subset P$ disjunktní a podle **7.1.18** uzavřené. Protože P je normální, jsou $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ H-oddělené, takže podle **7.2.19** také A, B jsou H-oddělené.

7.2.21. Budiž f oboustranně spojité zobrazení dědičně normálního prostoru P na prostor P_1. Pak také P_1 je dědičně normální. Podle **7.2.18** je P_1 F-prostor. Jsou-li $A \subset P_1$, $B \subset P_1$ oddělené, jsou podle **7.2.19** $f^{-1}(A) \subset P$, $f^{-1}(B) \subset P$ oddělené a tudíž podle **5.4.9** H-oddělené, takže A, B jsou H-oddělené podle **7.2.19** a P_1 je dědičně normální podle **5.4.9.**

Definice **7.2.4.** Budiž $\mathfrak{R}$ *rozklad* (viz článek **1.3**) prostoru P. Pravíme, že $\mathfrak{R}$ je *uzavřený,* jestliže každý pás je uzavřená množina. Pravíme, že $\mathfrak{R}$ je *shora spojitý,* jestliže ke každému okolí U kteréhokoli pásu $R \subset P$ existuje takové okolí W pásu R, že pro každý pás X platí buďto $X \cap W = \emptyset$ nebo $X \subset U$.

7.2.22. Budiž $\mathfrak{R}$ rozklad prostoru P. Aby existovalo oboustranně spojité zobrazení f prostoru P na nějaký prostor P_1, při kterém by se $\mathfrak{R}$ skládal ze všech množin $f^{-1}(y)$ $(y \in P_1)$, k tomu je nutné a stačí, aby rozklad $\mathfrak{R}$ byl uzavřený a shora spojitý.

Důkaz. I. Budiž f takové oboustranně spojité zobrazení prostoru P na prostor P_1, že $y \in P_1 \Rightarrow f^{-1}(y) \in \mathfrak{R}$. Pak je $\mathfrak{R}$ uzavřený podle **7.1.20.** Budiž $R \in \mathfrak{R}$ a budiž U okolí množiny R. Existuje takový bod $b \in P_1$, že $R = f^{-1}(b)$. Podle **7.2.1** množina $V = \mathscr{E}_y\,[f^{-1}(y) \subset U]$ je okolím bodu $b \in P_1$. Podle **7.1.12** je $W = f^{-1}(V)$ okolí množiny $R \subset P$. Je-li $X \in \mathfrak{R}$, $X \cap W \neq \emptyset$, je zřejmě $X \subset U$. Tudíž rozklad $\mathfrak{R}$ je shora spojitý.

II. Budiž $\mathfrak{R}$ uzavřený a shora spojitý rozklad prostoru P. Existuje takové zobrazení f prostoru P na soustavu $\mathfrak{R}$, že pro každý $x \in P$ je $f(x)$ pás rozkladu $\mathfrak{R}$ obsahující bod x. Pro $R \in \mathfrak{R}$ je $f^{-1}(R) = R$, takže z uzavřenosti rozkladu $\mathfrak{R}$ podle **7.1.23** plyne, že do $\mathfrak{R}$ můžeme zavést topologii tak, aby vzhledem k ní zobrazení f bylo přesně spojité. Podle **7.1.21** je f spojité; zbývá dokázat, že f je také inversně spojité. Budiž $M_0 \subset P$; podle **7.2.14** máme dokázat, že $f^1(\overline{M}_0) = \overline{f^1(M_0)}$. Budiž $M_1 = f^1(M_0)$, $M = f^{-1}(M_1)$. Pak je $f^1(M) = M_1$ a z definice **7.1.3** plyne, že $f^1(\overline{M}) = \overline{f^1(M_0)}$, takže je třeba pouze dokázat, že $f^1(\overline{M}_0) = f^1(\overline{M})$. Jest $M_0 \subset M \Rightarrow f^1(\overline{M}_0) \subset f^1(\overline{M})$. Jestliže tedy předpokládáme, že $f^1(\overline{M}_0) \neq f^1(\overline{M})$, pak existuje pás $R \in f^1(\overline{M}) - f^1(\overline{M}_0)$; snadno si uvědomíme, že to znamená $R \cap \overline{M} \neq \emptyset = R \cap \overline{M}_0$. Protože $R \cap \overline{M}_0 = \emptyset$, je $U = P - \overline{M}_0$ okolí množiny R v prostoru P. Protože rozklad $\mathfrak{R}$ je shora spojitý, existuje takové okolí W množiny $R \subset P$, že pro $X \in \mathfrak{R}$ je buďto $X \cap W = \emptyset$ nebo $X \subset U$. Protože $R \cap \overline{M} \neq \emptyset$, existuje bod $a \in R \cap \overline{M}$. Podle **4.2.8** je W okolí bodu a, takže podle **4.2.9** existuje bod $x \in W \cap \cap M$. Pro pás $f(x)$ obsahující x máme $f(x) \cap W = \emptyset$, a tudíž $f(x) \subset U$. Avšak $x \in M$, takže $f(x) \in f^1(M) = M_1 = f^1(M_0)$. Tedy existuje takový $x_0 \in M_0$, že $x_0 \in f(x) \subset U = P - M_0$ a to je spor.

7.3. Spojité funkce v normálních prostorech

Definice **7.3.1.** Budiž $M \subset \mathbf{E}_1$, $M \neq \emptyset$. *Supremum* množiny M, značka sup M, je nejmenší takové číslo α, že $x \in M \Rightarrow x \leqq \alpha$; neexistuje-li takové $\alpha \in \mathbf{E}_1$, položíme $\alpha = \infty$. *Infimum* množiny M, značka inf M, je rovné $-\beta$, je-li β supremum množiny $\mathcal{E}_x[-x \in M]$.

Definice **7.3.2.** Budiž P prostor; budiž f funkce v oboru $Q \subset P$. *Oscilace* funkce f v bodě $a \in P$ je infimum množiny všech takových čísel $\varepsilon > 0$, k nimž existuje takové okolí U bodu a, že

$$x \in Q \cap U\,, \quad y \in Q \cap U \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,;$$

neexistuje-li takové $\varepsilon \in \mathbf{E}_1$, budiž ∞ oscilace funkce f v bodě a.

7.3.1. Budiž P prostor; budiž f funkce v oboru $Q \subset P$. Není-li $a \in P$ hromadným bodem množiny Q (zejména tedy, jestliže $a \in P - \overline{Q}$), pak oscilace funkce f v bodě a je rovna nule. Viz **4.2.10.**

7.3.2. Budiž P prostor; budiž f funkce v oboru P; budiž $Q \subset P$. Pro každý $a \in P$ je oscilace f v bodě a rovna nebo větší než oscilace zúžení $f \mid Q$ v bodě a.

7.3.3. Budiž P prostor; budiž f funkce v oboru $Q \subset P$. Aby bod $a \in Q$ byl bodem spojitosti funkce f, k tomu je nutné a stačí, aby oscilace funkce f v bodě a byla rovna 0. Viz **7.1.3.**

7.3.4. Budiž P $\mathcal{F}$-prostor; budiž f funkce v oboru $Q \subset P$; budiž $c \in \mathbf{E}_1$, $c > 0$. Množina G všech těch $x \in P$, v nichž oscilace funkce f je menší než c, je otevřená. Je-li $a \in G$, pak existuje takové číslo ε, že $0 < \varepsilon < c$, a takové okolí U bodu a, že

$$x \in Q \cap U\,, \quad y \in Q \cap U \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,.$$

Podle **4.5.1** a **4.5.5** existuje takové okolí V bodu a, že U je okolím každého $z \in V$. Zřejmě $V \subset G$, takže G je okolí bodu a podle **4.2.4.** Tudíž G je otevřená podle **4.2.8** a **4.4.12.**

7.3.5. Budiž P F-prostor; budiž f funkce v oboru $Q \subset P$. Množina všech těch $x \in P$, v nichž oscilace funkce f je rovna 0, je G_δ-množina.

7.3.6. Budiž P F-prostor; budiž f funkce v oboru P. Množina bodů spojitosti funkce f je G_δ-množina.

Definice **7.3.3.** Budiž P jakákoli množina. Budiž $\{f_n\}$ posloupnost funkcí v oboru P. O funkci f v oboru P pravíme, že je *stejnoměrnou limitou* posloupnosti $\{f_n\}$, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takový index k, že

$$x \in P\,, \quad n > k \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Jestliže stejnoměrná limita existuje, je jednoznačně určena posloupností $\{f_n\}$, neboť pro každý $x \in P$ je

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,.$$

7.3.7. Budiž P libovolná množina. Budiž $\{f_n\}$ posloupnost funkcí v oboru P. Aby existovala stejnoměrná limita posloupnosti $\{f_n\}$, k tomu je nutné a stačí, aby ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existoval takový index k, že

$$x \in P\,, \quad m > k\,, \quad n > k \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon\,.$$

7.3.8. Budiž P prostor. Budiž $\{f_n\}$ posloupnost funkcí v oboru P. Nechť existuje stejnoměrná limita f posloupnosti $\{f_n\}$. Budiž $a \in P$. Aby a byl bod spojitosti funkce f, k tomu je nutné a stačí, aby ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existoval takový index k, že pro všecka $n > k$ je oscilace funkce f_n v bodě a menší než ε.

Důkaz. I. Nechť podmínka je splněna. Je-li $\varepsilon > 0$, pak existuje takový index k, že pro všecka $n > k$: [1] $x \in P \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$,

[2] oscilace funkce f_n v bodě a je menší než ε. Zvolme libovolně $n > k$. Existuje takové okolí U bodu a, že: $x \in U$, $y \in U \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$. Protože $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pro všecky $x \in P$, jest: $x \in U$, $y \in U \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 3\varepsilon$. Tedy oscilace funkce f v bodě a je $\leqq 3\varepsilon$. Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, je a bod spojitosti funkce f podle **7.3.3.**

II. Budiž a bod spojitosti funkce f. Je-li $\varepsilon > 0$, pak existuje takový index k, že

$$x \in P\,, \quad n > k \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \tfrac{1}{5}\varepsilon\,.$$

Podle **7.1.3** existuje takové okolí U bodu a, že $x \in U \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \tfrac{1}{5}\varepsilon$. Tudíž

$$x \in U\,, \quad y \in U\,, \quad n > k \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \tfrac{4}{5}\varepsilon\,.$$

Z toho plyne, že pro $n > k$ oscilace f_n v bodě a je $\leqq \tfrac{4}{5}\varepsilon < \varepsilon$.

7.3.9. Nechť ke každé dvojici (A, B) disjunktních uzavřených množin F-prostoru P existuje taková spojitá funkce f v oboru P, že

$$x \in A \Rightarrow f(x) = 0\,, \quad x \in B \Rightarrow f(x) = 1\,.$$

Pak je P normální prostor. Máme dokázat, že množiny A, B jsou H-oddělené. Položíme-li $G = \mathscr{E}_x\,[f(x) < \tfrac{1}{2}]$, $H = \mathscr{E}_x\,[f(x) > \tfrac{1}{2}]$, jest $A \subset G$, $B \subset H$, $G \cap H = \emptyset$ a množiny G, H jsou otevřené podle **7.1.14.** Tudíž A, B jsou H-oddělené podle **5.1.15.**

7.3.10. Budiž P normální prostor. Buďtež $A \subset P$, $B \subset P$ disjunktní uzavřené množiny. Pak existuje taková spojitá funkce f v oboru P, že

(1) $\quad x \in P \Rightarrow 0 \leqq f(x) \leqq 1\,, \quad x \in A \Rightarrow f(x) = 0\,, \quad x \in B \Rightarrow f(x) = 1\,.$

Důkaz. I. Pro $n = 0, 1, 2, \ldots$ budiž H_n množina všech takových čísel t, že $0 \leqq t \leqq 1$ a že číslo $2^n \cdot t$ je celé. Budiž $H = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n$.

II. Položme $G(1) = P - B$; podle **4.4.13** je $G(1)$ okolí množiny A. Podle **4.5.8** a **5.4.6** existuje takové otevřené okolí $G(0)$ množiny A, že $\overline{G(0)} \subset G(1)$.

III. Nechť pro určité $n = 0, 1, 2, \ldots$ je už každému $t \in H_n$ přiřazena množina $G(t)$ tak, že

$$t_1 \in H_n\,, \quad t_2 \in H_n\,, \quad t_1 < t_2 \Rightarrow \overline{G(t_1)} \subset G(t_2)\,.$$

(Pro $n = 0$ tomu tak je podle II.) Ukážeme, že takové množiny $G(t)$ existují též pro $t \in H_{n+1}$. Je-li $t \in H_{n+1}$, pak může být $t \in H_n$; v tomto případě je množina $G(t)$ už definována. Je-li však $t \in H_{n+1} - H_n$, $t_1 = t - 2^{-n-1}$, $t_2 = t + 2^{-n-1}$, pak je $t_1 \in H_n$, $t_2 \in H_n$, $t_1 < t_2$, a tudíž $\overline{G(t_1)} \subset G(t_2)$. Množina $\overline{G(t_1)}$ je uzavřená a podle **4.4.13** je $G(t_2)$ jejím okolím, takže existuje taková otevřená množina $G(t)$, že $\overline{G(t_1)} \subset G(t) \subset \subset \overline{G(t)} \subset \overline{G(t_2)}$. Snadno se zjistí, že množiny $G(t)$ ($t \in H_{n+1}$) mají žádanou vlastnost.

IV. Můžeme tudíž každému $t \in H$ takovým způsobem přiřadit otevřenou množinu $G(t)$, že $G(0) \supset A$, $G(1) = P - B$ a že

$$t_1 \in H\,, \quad t_2 \in H\,, \quad t_1 < t_2 \Rightarrow \overline{G(t_1)} \subset G(t_2)\,.$$

V. Pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ definujeme takto funkci f_n v oboru P. Pro $x \in B$ budiž $f_n(x) = 1$. Je-li $x \in P - B$, pak jistě některé $t \in H_n$ má tu vlastnost, že $x \in G(t)$ (neboť vždy $t = 1$ má tuto vlastnost); budiž $f_n(x)$ nejmenší takové t. Pak je $x \in P \Rightarrow 0 \leqq f_n(x) \leqq 1$, $x \in A \Rightarrow f_n(x) = 0$, $x \in B \Rightarrow f_n(x) = 1$. Snadno se dokáže, že každý bod prostoru P má takové okolí U, že buďto $U = P - \overline{G(1 - 2^{-n})}$ nebo $U = G(2^{-n})$ nebo posléze $U = G(t_2) - \overline{G(t_1)}$, kde $t_1 \in H_n$, $t_2 \in H_n$, $0 \leqq t_2 - t_1 \leqq \leqq 2^{-n+1}$. Z definice funkce f_n je patrné, že v každém případě

$$x \in U\,, \quad y \in U \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leqq 2^{-n}\,.$$

Z toho plyne, že v každém bodě je oscilace funkce f_n nejvýš rovna 2^{-n}.

VI. Zřejmě pro každé n: $x \in P \Rightarrow |f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leqq 2^{-n-1}$. Protože $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n-1} = 2^{-k-1}$, jest pro každé k

$$x \in P\,, \quad m > k\,, \quad n > k \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| \leqq 2^{-k-1}\,.$$

Z toho plyne podle **7.3.7** existence stejnoměrné limity f posloupnosti $\{f_n\}$. Podle **7.3.3** a **7.3.8** je f spojitá funkce, která zřejmě má vlastnost (1).

7.3.11. Budiž P $\mathcal{F}$-prostor. Nechť ke každé uzavřené bodové množině F a ke každé omezené spojité funkci φ v oboru F existuje taková spojitá funkce f v oboru P, že zúžení $f \mid F$ splyne s φ. Pak P je normální prostor.

Důkaz. Jsou-li A, B disjunktní uzavřené množiny, pak $F = A \cup B$ podle **4.4.6** je uzavřená. Definujme funkci φ v oboru F takto:

$$x \in A \Rightarrow \varphi(x) = 0 , \quad x \in B \Rightarrow \varphi(x) = 1 .$$

Ze **4.6.6** a **7.1.19** plyne, že funkce φ je spojitá. Tudíž existuje taková spojitá funkce f v oboru P, že $f \mid F = \varphi$. Podle **7.3.9** je P normální.

7.3.12. Budiž P normální prostor. Budiž F uzavřená bodová množina; budiž φ spojitá funkce v oboru F. Existuje taková spojitá funkce f v oboru P, že zúžení $f \mid F$ splyne s φ. Je-li φ omezená, můžeme požadovat, aby také f byla omezená.

Důkaz. I. Za předpokladu, že: $x \in F \Rightarrow |\varphi(x)| \leqq 1$, budeme definovat takovou spojitou funkci g v oboru P, že

(2) $$x \in F \Rightarrow |\varphi(x) - g(x)| \leqq \tfrac{2}{3} , \quad x \in P \Rightarrow |g(x)| \leqq \tfrac{1}{3} .$$

Za tím účelem položme

$$A = \mathscr{E}_x [x \in F, -1 \leqq \varphi(x) \leqq -\tfrac{1}{3}] , \quad B = \mathscr{E}_x [x \in F, \tfrac{1}{3} \leqq \varphi(x) \leqq 1] .$$

Množiny A, B jsou disjunktní a podle **4.6.6** a **7.1.18** jsou uzavřené. Podle **7.3.10** existuje taková spojitá funkce h v oboru P, že $x \in P \Rightarrow 0 \leqq h(x) \leqq 1$, $x \in A \Rightarrow h(x) = 0$, $x \in B \Rightarrow h(x) = 1$. Budiž: $x \in P \Rightarrow g(x) = \frac{1}{3} [2h(x) - 1]$. Pak je g spojitá funkce v oboru P, která splňuje (1).

II. Podržme předpoklad $x \in F \Rightarrow |\varphi(x)| \leqq 1$ a definujme rekurentně posloupnost $\{\varphi_n\}_1^\infty$ spojitých funkcí v oboru F a současně posloupnost $\{g_n\}_1^\infty$ spojitých funkcí v oboru P tak, aby bylo

(3) $$x \in F \Rightarrow |\varphi_n(x) - g_n(x)| \leqq \tfrac{2}{3} ,$$

(4) $$x \in P \Rightarrow |g_n(x)| \leqq \tfrac{1}{3} .$$

Pro $n = 1$ stačí položit

(5) $$x \in F \Rightarrow \varphi_1(x) = \varphi(x)$$

a definovat g_1 pomocí I. Jestliže při určitém n funkce φ_n a g_n jsou už definovány, definujeme φ_{n+1} takto:

(6) $$x \in F \Rightarrow \varphi_{n+1}(x) = \tfrac{3}{2}[\varphi_n(x) - g_n(x)] .$$

Podle **7.1.8** a **7.1.32** je φ_{n+1} spojitá funkce v oboru F; podle (3) je $x \in F \Rightarrow |\varphi_{n+1}(x)| \leqq 1$, takže g_{n+1} opět můžeme definovat pomocí I.

III. Nyní položme pro $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$(7) \qquad x \in P \Rightarrow f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} (\tfrac{2}{3})^{i-1} g_i(x) .$$

Podle **7.1.32** je f_n spojitá funkce v oboru P. Z (5), (6) a (7) následuje

$$(8) \qquad x \in F \Rightarrow f_n(x) = \varphi(x) - (\tfrac{2}{3})^n \varphi_{n+1}(x) .$$

Ze (4) a (7) plyne podle **7.3.7** existence stejnoměrné limity f posloupnosti $\{f_n\}$. Podle **7.3.3** a **7.3.8** je funkce f spojitá. Ze (3), (4) a (8) plyne, že zúžení $f \mid F$ je totožné s φ. Posléze plyne ze (4) a (7), že

$$x \in P \Rightarrow |f(x)| \leqq 1 .$$

IV. Tím je dokázáno, že ke každé spojité funkci φ v oboru F s vlastností $x \in F \Rightarrow |\varphi(x)| \leqq 1$ existuje spojitá funkce f v oboru P s vlastností $x \in P \Rightarrow |f(x)| \leqq 1$, jejíž zúžení $f \mid F$ je totožné s φ. Jestliže funkce φ místo vztahu $|\varphi(x)| \leqq 1$ splňuje obecnější vztah $|\varphi(x)| \leqq c$, kde $c > 0$, položíme $\varphi_0(x) = c^{-1} . \varphi(x)$, takže $|\varphi_0(x)| \leqq 1$ pro všecka $x \in F$, určíme spojité rozšíření f_0 funkce φ_0 na obor P tak, aby bylo $|f_0(x)| \leqq 1$ pro všecka $x \in P$ a položíme $f(x) = c\, f_0(x)$.

V. Posléze budiž dána neomezená spojitá funkce φ v oboru F. Pro $x \in F$ položme

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{1 + |\varphi(x)|} .$$

Podle **7.1.32** je ψ spojitá funkce v oboru F; zřejmě $x \in F \Rightarrow |\psi(x)| < 1$. Existuje taková spojitá funkce g v oboru P, že $x \in P \Rightarrow |g(x)| \leqq 1$, $x \in F \Rightarrow g(x) = \psi(x)$. Bodová množina $M = \mathscr{E}_x\,[|g(x)| = 1]$ je uzavřená podle **7.1.18** a zřejmě $F \cap M = \emptyset$. Tudíž ze **7.3.10** plyne, že existuje taková spojitá funkce h v oboru P, že

$$x \in P \Rightarrow 0 \leqq h(x) \Rightarrow 1 , \quad x \in F \Rightarrow h(x) = 1 , \quad x \in M \Rightarrow h(x) = 0 .$$

Definujme funkci k v oboru P takto:

$$x \in P \Rightarrow k(x) = g(x) . h(x) .$$

Podle **7.1.32** funkce k je spojitá; zřejmě $x \in P \Rightarrow |k(x)| < 1$, $x \in F \Rightarrow$ $\Rightarrow k(x) = \psi(x)$. Posléze nechť

$$x \in P \Rightarrow f(x) = \frac{k(x)}{1 - |k(x)|}.$$

Pak f je spojitá (viz **7.1.32**) funkce v oboru P a zřejmě $x \in F \Rightarrow f(x) =$ $= \varphi(x)$.

7.3.13. Budiž P prostor. Budiž f spojitá funkce v oboru P. Bodová množina $M = \mathscr{E}_x\ [f(x) = 0]$ je uzavřená a současně je to G_δ-množina. M je uzavřená podle **7.1.18.** Jest $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde $G_n = \mathscr{E}_x\ [|f(x)| < n^{-1}]$ je otevřená podle **7.1.14.**

7.3.14. Budiž P normální prostor. Nechť uzavřená množina M je G_δ-množinou. Pak existuje taková spojitá funkce f v oboru P, že $x \in P \Rightarrow 0 \leqq f(x) \leqq 1$, $x \in M \Leftrightarrow f(x) = 0$. Existují takové otevřené množiny G_n, že $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Pro každé n podle **7.3.10** existuje taková spojitá funkce g_n v oboru P, že $x \in P \Rightarrow 0 \leqq g_n(x) \leqq 1$, $x \in M \Rightarrow g_n(x) = 0$, $x \in P - G_n \Rightarrow g_n(x) = 1$. Vztah

$$x \in P \Rightarrow f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} g_i(x)$$

definuje spojitou (viz **7.1.32**) funkci v oboru P. Jest

$$x \in P\,, \quad m > k\,, \quad n > k \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| \leqq \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-k}\,,$$

takže podle **7.3.7** existuje stejnoměrná limita f posloupnosti $\{f_n\}$. Podle **7.3.3** a **7.3.8** je f spojitá funkce v oboru P. Pro $x \in P$ jest $0 \leqq$ $\leqq f_n(x) \leqq \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} < 1$, tedy $0 \leqq \lim f_n(x) = f(x) \leqq 1$. Pro $x \in M$ je zřejmě $f(x) = 0$. Je-li $x \in P - M$, pak existuje takový index i, že $x \in P - G_i$, takže $g_i(x) = 1$. Pro $n \geqq i$ je potom $f_n(x) \geqq 2^{-i}$, takže $f(x) = \lim f_n(x) \geqq 2^{-i} > 0$.

7.3.15. Budiž P F-prostor. Nechť ke každé uzavřené množině F a ke každé funkci φ v oboru F existuje taková funkce f v oboru P, že zúžení $f \mid F$ splyne s φ a že každý bod množiny

$P - F$, jakož i každý bod spojitosti funkce φ, je bodem spojitosti funkce f. Pak prostor P je dědičně normální. Nechť A, B jsou oddělené bodové množiny. Máme dokázat, že A, B jsou H-oddělené. Protože P je F-prostor, je množina $F = \overline{A} \cup \overline{B}$ uzavřená podle **4.4.6.** Definujme funkci φ v oboru F takto:

$$x \in \overline{A} \Rightarrow \varphi(x) = 0 , \quad x \in F - \overline{A} \Rightarrow \varphi(x) = 1 .$$

Snadno se přesvědčíme, že každý bod $x \in F - (\overline{A} \cap \overline{B})$ je bodem spojitosti funkce φ. Tudíž existuje taková funkce f v oboru P, že $f \mid F = \varphi$ a že každý bod $x \in P - (\overline{A} \cap \overline{B})$ je bodem spojitosti funkce f. Zúžení $f \mid P - (\overline{A} \cap \overline{B})$ je spojitá funkce podle **7.1.8**, takže ze **7.1.14** plyne, že množiny

$$U = \mathscr{E}_x \quad [x \in P - (\overline{A} \cap \overline{B}),\ f(x) < \tfrac{1}{2}] ,$$
$$V = \mathscr{E}_x \quad [x \in P - (\overline{A} \cap \overline{B}),\ f(x) > \tfrac{1}{2}]$$

jsou relativně otevřené v $P - (\overline{A} \cap \overline{B})$. Protože P je F-prostor, je $\overline{A} \cap \overline{B}$ uzavřená podle **4.4.5** a tedy $P - (\overline{A} \cap \overline{B})$ je otevřená, takže podle **4.6.7** také množiny U, V jsou otevřené v P. Z **5.1.2** plyne snadno, že $A \subset U$, $B \subset V$. Zřejmě $U \cap V = \emptyset$. Tudíž A, B jsou H-oddělené podle **5.1.15** a prostor P je dědičně normální podle **5.4.9.**

7.3.16. Budiž P dědičně normální prostor. Ke každé uzavřené množině F a ke každé funkci φ v oboru F existuje taková funkce f v oboru P, že zúžení $f \mid F$ splyne s φ a že každý bod množiny $P - F$, jakož i každý bod spojitosti funkce φ, je bodem spojitosti funkce f.

Důkaz. I. Budiž C množina všech bodů spojitosti funkce φ a budiž $D = F - C$. Prostor $P - D$ vnořený do P je normální a množina $C = F \cap (P - D)$ je relativně uzavřená v $P - D$ podle **4.6.4.** Zúžení $\varphi \mid C$ je spojitá funkce podle **7.1.8.** Tudíž ze **7.3.12** plyne, že existuje taková spojitá funkce g v oboru $P - D$, že: $x \in C \Rightarrow g(x) = \varphi(x)$. Definujme funkci f v oboru P takto:

$$x \in D \Rightarrow f(x) = \varphi(x) , \quad x \in P - D \Rightarrow f(x) = g(x) .$$

Zřejmě $f \mid F = \varphi$.

II. Budiž $a \in P - F$. Pak je $a \in P - D$. Je-li $\varepsilon > 0$, pak podle **7.1.3** existuje takové relativní okolí V bodu a v prostoru $P - D$, že

$$x \in V \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

Podle **4.6.2** existuje takové okolí W bodu a v prostoru P, že $W \cap \cap (P - D) = V$. Také $P - F$ je okolí bodu a v prostoru P (viz **4.4.13**), takže podle **4.2.5** též $U = W \cap (P - F)$ je okolí bodu a v prostoru P. Protože $D \subset F$, je $U \subset V$, takže $x \in U \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Tudíž a je bod spojitosti funkce f podle **7.1.3.**

III. Budiž $a \in C$. Pak je a bodem spojitosti jak pro $\varphi = f \mid F$, tak i pro $g = f \mid P - D$. Je-li tedy $\varepsilon > 0$; pak podle **7.1.3** existuje takové relativní okolí V bodu a v prostoru F a takové relativní okolí W bodu a v prostoru $P - D$, že $x \in V \cup W \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Jest $F \cup \cup (P - D) = P$, $a \in F \cap (P - D)$, takže podle **4.6.18** je $V \cup W$ okolí bodu a v prostoru P. Tudíž a je bod spojitosti funkce f podle **7.1.3.**

7.4. Drobné poznámky

7.4.1. Budiž f spojité zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Budiž $M_1 \subset P_1$, $M = f^{-1}(M_1)$. Pak je $\psi(M) \leqq \psi(M_1)$. Podle definice **4.12.2** existuje taková soustava $\mathfrak{B}$ okolí množiny $M_1 \subset P_1$, že moh $\mathfrak{B} = = \psi(M_1)$ a že $M_1 = \bigcap V$ $(V \in \mathfrak{B})$. Jest $M = f^{-1}(M_1) = \bigcap f^{-1}(V)$ $(V \in \mathfrak{B})$. Množiny $f^{-1}(V)$ $(V \in \mathfrak{B})$ jsou okolí množiny $M \subset P$ podle **7.1.12** a tvoří soustavu, jejíž mohutnost je $\leqq \psi(M_1)$. Tudíž $\psi(M) \leqq \psi(M_1)$.

7.4.2. Budiž P prostor; budiž $a \in P$. Budiž f spojitá funkce v oboru P. Je-li $\omega(a) = 1$ nebo $\omega(a) > \aleph_0$, pak existuje takové okolí U bodu a, že: $x \in U \Rightarrow f(x) = f(a)$. Je-li $f(a) = c$, pak pseudocharakter bodu $c \in \mathbf{E}_1$ je zřejmě roven $\aleph_0$, takže $\psi[f^{-1}(c)] \leqq \aleph_0$ podle **7.4.1.** Tudíž $f^{-1}(c) = \mathscr{E}_x [f(x) = f(a)]$ je okolí bodu a podle **4.12.25.**

7.4.3. Budiž P normální prostor; budiž $a \in P$. Nechť ke každé spojité funkci f v oboru P existuje takové okolí U bodu a, že $x \in U \Rightarrow f(x) = f(a)$. Pak je buďto $\omega(a) = 1$ nebo $\omega(a) > \aleph_0$. Budiž $\{U_n\}$ posloupnost okolí bodu a. Ze **4.12.1** a **4.12.2** plyne snadno, že stačí ukázat, že také $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ je okolí bodu a. Pro každé n podle **4.4.13** a **4.5.6** existuje taková otevřená množina G_n, že $a \in G_n \subset \subset U_n$. Podle **7.3.10** existuje taková spojitá funkce g_n v oboru P, že

$x \in P \Rightarrow 0 \leqq g_n(x) \leqq 1$; $g_n(a) = 0$, $x \in P - G_n \Rightarrow g_n(x) = 1$. Definujme funkci f_n v oboru P takto:

$$x \in P \Rightarrow f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} g_i(x) .$$

Funkce f_n je spojitá (viz **7.1.32**) a jest

$$x \in P , \quad m > k , \quad n > k \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-k} .$$

Z toho plyne podle **7.3.7**, že existuje stejnoměrná limita f posloupnosti $\{f_n\}$. Podle **7.3.3** a **7.3.8** je f spojitá funkce v oboru P. Snadno se přesvědčíme, že $f(a) = 0$ a že

$$x \in P , \quad f(x) = 0 \Rightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n .$$

Podle předpokladu existuje takové okolí U bodu a, že $x \in U \Rightarrow f(x) = f(a)$. Tudíž $U \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, takže $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ je okolí bodu a podle **4.2.4.**

7.4.4. Budiž f inversně spojité zobrazení prostoru P na prostor P_1. Budiž $M_1 \subset P_1$, $M = f^{-1}(M_1)$. Pak je $\psi(M) \geqq \psi(M_1)$.
Existuje taková soustava $\mathfrak{U}$ okolí množiny $M \subset P$, že moh $\mathfrak{U} = \psi(M)$ a že $M = \bigcap U$ $(U \in \mathfrak{U})$. Pro každé $U \in \mathfrak{U}$ budiž $\varphi(U) = \mathscr{E}_y\,[y \in P_1,$ $f^{-1}(y) \subset U]$. Jest $M_1 = \bigcap \varphi(U)$ $(U \in \mathfrak{U})$. Množiny $\varphi(U)$ $(U \in \mathfrak{U})$ jsou okolí množiny $M_1 \subset P_1$ podle **4.2.8** a **7.2.1** a tvoří soustavu, jejíž mohutnost je $\leqq \psi(M)$. Tudíž $\psi(M_1) \leqq \psi(M)$.

7.4.5. Budiž f oboustranně spojité zobrazení prostoru P na prostor P_1. Budiž $M_1 \subset P_1$, $M = f^{-1}(M_1)$. Pak je

$$\chi(M) = \chi(M_1) , \quad \psi(M) = \psi(M_1) , \quad \omega(M) = \omega(M_1) .$$

Důkaz. I. Pro $X \subset P$ budiž $\varphi(X) = \mathscr{E}_y\,[y \in P_1, f^{-1}(y) \subset X]$. Je-li U okolí množiny $M \subset P$, je $\varphi(U)$ okolí množiny $M_1 \subset P_1$ podle **4.2.8** a **7.2.1.**

II. Je-li V okolí $M_1 \subset P_1$, je $f^{-1}(V)$ okolí $M \subset P$ podle **7.1.12.**

III. Existuje taková úplná soustava $\mathfrak{V}$ okolí M_1 v prostoru P_1, že moh $\mathfrak{V} = \chi(M_1)$. Množiny $f^{-1}(V)$ $(V \in \mathfrak{V})$ tvoří soustavu okolí M v prostoru P, jejíž mohutnost je $\chi(M_1)$. Je-li U libovolné okolí množiny M

v prostoru P, pak $\varphi(U)$ je okolí M_1 v P_1; protože soustava $\mathfrak{V}$ je úplná, existuje takové $V \in \mathfrak{V}$, že $V \subset \varphi(U)$; zřejmě $f^{-1}(V) \subset U$. Tudíž množiny $f^{-1}(V)$ $(V \in \mathfrak{V})$ tvoří úplný systém okolí M v P, takže $\chi(M) \leqq \chi(M_1)$.

IV. Existuje taková úplná soustava $\mathfrak{U}$ okolí množiny $M \subset P$, že moh $\mathfrak{U} = \chi(M)$. Množiny $\varphi(U)$ $(U \in \mathfrak{U})$ tvoří soustavu okolí množiny $M_1 \subset P_1$ a mohutnost této soustavy je $\leqq \chi(M)$. Je-li V libovolné okolí množiny $M_1 \subset P_1$, jest $f^{-1}(V)$ okolí množiny $M \subset P$ a protože soustava $\mathfrak{U}$ je úplná, existuje taková $U \in \mathfrak{U}$, že $U \subset f^{-1}(V)$; zřejmě $\varphi(U) \subset V$. Tudíž množiny $\varphi(U)$ $(U \in \mathfrak{U})$ tvoří úplnou soustavu okolí množiny $M_1 \subset P_1$, takže $\chi(M_1) \leqq \chi(M)$ a tedy podle III $\chi(M_1) = \chi(M)$.

V. Podle **7.4.1** a **7.4.4** je $\psi(M) = \psi(M_1)$.

VI. Podle **4.4.12** a **4.12.1** je právě tehdy $\omega(M) = 1$, je-li M okolím M v prostoru P, a je právě tehdy $\omega(M_1) = 1$, je-li M_1 okolím M_1 v prostoru P_1. Je-li M okolím M v prostoru P, je $\varphi(M) = M_1$ okolím M_1 v prostoru P_1; je-li M_1 okolím M_1 v prostoru P_1, je $f^{-1}(M_1) = M$ okolím M v prostoru P. Tudíž $\omega(M) = 1 \Leftrightarrow \omega(M_1) = 1$.

VII. Je-li $\omega(M_1) > 1$, pak existuje taková soustava $\mathfrak{V}$ okolí množiny $M_1 \subset P_1$, že moh $\mathfrak{V} = \omega(M_1)$ a že $\bigcap V$ $(V \in \mathfrak{V})$ není okolím množiny $M_1 \subset P_1$. Soustava množin $f^{-1}(V)$ $(V \in \mathfrak{V})$ má mohutnost $\omega(M_1)$ a skládá se z okolí množiny $M \subset P$; protože $\bigcap f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcap V)$, množina $\varphi[\bigcap f^{-1}(V)] = \bigcap V$ není okolím $M_1 \subset P_1$, takže $\bigcap f^{-1}(V)$ nemůže být okolím $M \subset P$. Tudíž $\omega(M) \leqq \omega(M_1)$.

VIII. Je-li $\omega(M) > 1$, pak existuje taková soustava $\mathfrak{U}$ okolí množiny $M \subset P$, že moh $\mathfrak{U} = \omega(M)$ a že $\bigcap U$ $(U \in \mathfrak{U})$ není okolím $M \subset P$. Soustava množin $\varphi(U)$ $(U \in \mathfrak{U})$ má mohutnost nejvýš $\omega(M)$ a skládá se z okolí $M_1 \subset P_1$; protože $\bigcap \varphi(U) = \varphi(\bigcap U)$, jest $f^{-1}[\bigcap \varphi(U)] \subset \bigcap U$, takže $f^{-1}[\bigcap \varphi(U)]$ podle **4.2.4** není okolím $M \subset P$ a tedy $\bigcap \varphi(U)$ nemůže být okolím $M_1 \subset P_1$. Tudíž $\omega(M_1) \leqq \omega(M)$ a tedy podle VII $\omega(M_1) = \omega(M)$.

7.4.6. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž f_z zobrazení prostoru R do prostoru $P(z)$. Budiž $S = \mathfrak{P}\, P(z)$ $(z \in \mathbf{C})$. Budiž f zobrazení R do S definované tak, že pro každý $x \in R$ a pro každé $z \in \mathbf{C}$ je $f_z(x)$ z-souřadnice bodu $f(x) \in S$. Aby bod $a \in R$ byl bodem spojitosti zobrazení f, k tomu je nutné a stačí, aby pro každé $z \in \mathbf{C}$ byl a bodem spojitosti zobrazení f_z. Aby zobrazení f bylo spojité, k tomu je nutné a stačí, aby všecka zobrazení f_z ($z \in \mathbf{C}$) byla spojitá.

Důkaz. I. Budiž $z_0 \in \mathbf{C}$. Existuje takové zobrazení φ prostoru S na prostor $P(z_0)$, že pro každý $b \in S$ je $\varphi(b)$ z_0-souřadnice bodu b. Ze **7.1.1** plyne, že zobrazení φ je spojité. Zřejmě je f_{z_0} zobrazení složené ze zobrazení f a φ. Jestliže tedy $a \in R$ je bod spojitosti pro f, pak podle **7.1.9** je a bod spojitosti též pro f_{z_0}.

II. Nechť bod $a \in R$ je pro každé $z \in \mathbf{C}$ bodem spojitosti zobrazení f_z. Budiž V okolí bodu $f(a) = b$ v prostoru S. Podle definice **6.2.1** existuje taková konečná množina $K \subset \mathbf{C}$, že $\mathfrak{P}_z W(z) \subset V$, kde $W(z)$ je pro $z \in K$ vhodně volené okolí bodu $b(z)$ v prostoru $P(z)$ a pro $z \in \mathbf{C} - K$ je $W(z) = P(z)$. Protože a je bod spojitosti zobrazení f_z, plyne ze **7.1.1**, že pro každé $z \in \mathbf{C}$ je množina $U(z) = f_z^{-1}[W(z)]$ okolím bodu a v prostoru R. Zřejmě $f^{-1}(V) \supset \bigcap U(z)$ ($z \in K$), takže podle **4.2.4** je $f^{-1}(V)$ okolím bodu a v prostoru R. Tudíž je a bod spojitosti pro f podle **7.1.1.**

7.5. Cvičení k § 7

7.5.1. Budiž f spojité zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Je-li A F_σ-množina prostoru P_1, je $f^{-1}(A)$ F_σ-množina prostoru P. Je-li B G_δ-množina prostoru P_1, je $f^{-1}(B)$ G_δ-množina prostoru P.

7.5.2. Budiž f zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Budiž $Q_1 \cup Q_2 = P$, $a \in Q_1 \cap Q_2$. Je-li a bod spojitosti obou zúžení $f \mid Q_1$, $f \mid Q_2$, je a také bod spojitosti zobrazení f.

7.5.3. Budiž f zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Budiž $P = Q_1 \cup Q_2$; množiny $Q_1 - Q_2$, $Q_2 - Q_1$ buďtež oddělené v prostoru P. Jestliže obě zúžení $f \mid Q_1$, $f \mid Q_2$ jsou spojitá, pak také zobrazení f je spojité.

7.5.4. Budiž f zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Buďtež Q_1, Q_2 dvě uzavřené (dvě otevřené) množiny prostoru P; budiž $Q_1 \cup Q_2 = P$. Jestliže obě zúžení $f \mid Q_1$, $f \mid Q_2$ jsou spojitá, pak také zobrazení f je spojité.

7.5.5. Množina bodů spojitosti charakteristické funkce bodové množiny $M \subset P$ jest $P - \operatorname{Fr} M$.

7.5.6. Budiž f zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Aby f bylo *spojité*, k tomu je nutné a stačí, aby bylo $\overline{f^{-1}(M)} \subset f^{-1}(\overline{M})$ pro každou bodovou množinu $M \subset P_1$.

7.5.7. Budiž f spojité zobrazení prostoru P na prostor P_1. Pak jest

$$\mathscr{E}_{(x,y)}\ [x \in P,\ y \in P_1,\ y = f(x)]$$

uzavřená množina prostoru $P \times P_1$.

7.5.8. Budiž f zobrazení prostoru P na prostor P_1. Budiž $T_1 \cup T_2 = P_1$, $b \in T_1 \cap T_2$, $S_1 = f^{-1}(T_1)$, $S_2 = f^{-1}(T_2)$. Je-li b bod inversní spojitosti obou zúžení $f \mid S_1$, $f \mid S_2$, je b také bod inversní spojitosti zobrazení f.

7.5.9. Budiž f zobrazení prostoru P na prostor P_1. Buďtež T_1, T_2 uzavřené množiny prostoru P_1; budiž $T_1 \cup T_2 = P_1$, $S_1 = f^{-1}(T_1)$, $S_2 = f^{-1}(T_2)$. Jestliže obě zúžení $f \mid S_1$, $f \mid S_2$ jsou inversně spojitá, pak také zobrazení f je inversně spojité.

7.5.10. Jsou-li P, Q topologické prostory a je-li $f(x, y) = x$ pro $(x, y) \in P \times Q$, pak zobrazení f prostoru $P \times Q$ na prostor P je přesně spojité, ale nemusí být uzavřené (a tudíž nemusí být inversně spojité; viz **7.2.9**).