Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces

Chapitre I: Quelques préliminaires

In: Guido Fubini (author); Eduard Čech (author): Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces. (French). Paris: Gauthier-Villars & Cie, 1931. pp. [1]--7.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402558

INTRODUCTION

A LA

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

DES SURFACES

CHAPITRE I.

QUELQUES PRÉLIMINAIRES.

---

1. **Transformations homographiques et corrélations.** — Les propriétés métriques d'une figure géométrique sont les propriétés qui se conservent lorsqu'on soumet la figure à un mouvement; l'étude de ces propriétés est le but de la géométrie métrique. Au contraire, la géométrie projective n'étudie pas toutes ces propriétés, mais seulement celles qui se conservent lorsqu'on soumet la figure à une transformation homographique. En conséquence beaucoup d'éléments très importants pour la géométrie métrique (par exemple la distance de deux points, l'angle de deux droites ou de deux plans, les sphères, les cercles) ne peuvent jouer aucun rôle dans la géométrie projective.

Dans la géométrie projective un point est défini par quatre coordonnées *homogènes* x, y, z, t, qui ne peuvent pas être nulles en même temps (et qui se réduisent à trois, si l'on étudie seulement les points d'un plan, par exemple, du plan $t = 0$). Un point ne change pas si l'on multiplie ses coordonnées homogènes par un même facteur $\rho \neq 0$; de manière que (si l'on exclut seulement les points du plan $t = 0$) nous pouvons choisir $\rho = \frac{1}{t}$, et rendre ainsi $t = 1$. On dit alors que les trois coordonnées x, y, z sont non homogènes.

Une transformation homographique fait correspondre à un point x, y, z, t, ou (comme nous dirons souvent plus simplement) à un point x le point x' défini par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t, \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t, \\ t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t, \end{cases}$$

où les a_{ik} sont des constantes, dont le déterminant $A = |a_{ik}|$ est différent de zéro. Si nous considérons seulement les points d'une courbe ou d'une surface, c'est-à-dire les points dont les coordonnées sont des fonctions d'un ou de deux paramètres, *nous n'excluons pas* que les a_{ik} soient des fonctions de ces paramètres; il suffira que leurs rapports soient des constantes, c'est-à-dire il suffira que les a_{ik} se réduisent à des constantes en les divisant par un même facteur ρ. Cela porte des complications à la théorie : nous pourrons les surmonter en *normalisant* les coordonnées homogènes des points de la courbe ou de la surface que l'on veut étudier.

Un plan sera défini par une équation

$$(2)\qquad \xi x + \eta y + \zeta z + \tau t = 0.$$

Nous indiquerons le premier membre de cette équation par la notation $S\xi x$, et nous ferons usage de notations analogues pour des cas semblables. Les ξ, η, ζ, τ seront considérés comme les coordonnées (homogènes) du plan (2); nous l'appellerons le plan ξ, η, ζ, τ, ou, plus simplement, le plan ξ.

Dans la géométrie du plan (par exemple du plan $t = 0$), une équation

$$(2_2)\qquad S\xi x = \xi x + \eta y + \zeta z = 0$$

définit la droite ξ de coordonnées ξ, η, ζ.

Une corrélation est définie par des équations

$$(3)\qquad \begin{cases} \xi' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t, \\ \eta' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t, \\ \zeta' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t, \\ \tau' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t. \end{cases}$$

Sur les coefficients a_{ik} nous pouvons répéter ce que nous avons dit plus haut. Aux plans ξ' passant par un point x' (de manière que

$S\xi' x' = 0$) correspondent les points x satisfaisant à l'équation

$$\begin{aligned} &a_{11}xx' + a_{22}yy' + a_{33}zz' + a_{44}tt' \\ &+ a_{12}x'y + a_{21}xy' + a_{13}x'z + a_{31}xz' \\ &+ a_{23}y'z + a_{32}yz' + \ldots + a_{34}z't + a_{43}t'z = 0. \end{aligned}$$

Cette équation ne change pas, en échangeant les points x, x', seulement si $a_{rs} = a_{sr}$, ou si $a_{rs} + a_{sr} = 0$ (r, $s = 1, 2, 3, 4$). Si $a_{rs} = a_{sr}$, la corrélation (3) se réduit à la polarité définie par la quadrique

$$\begin{aligned} &a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz \\ &\quad + 2a_{14}xt + 2a_{23}yz + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0. \end{aligned}$$

Si au contraire $a_{rs} + a_{sr} = 0$ (et en conséquence $a_{rr} + a_{rr} = 0$, c'est-à-dire $a_{rr} = 0$), alors les équations (3) définissent un *système nul*. Les ξ', définies par les équations (3) satisfont identiquement à $S\xi' x = 0$. Et chaque point x appartient au plan correspondant ξ'. Chaque droite qui sort d'un point x et appartient au plan correspondant ξ' est transformée en elle-même par la corrélation (3); par cette méthode on obtient toutes les droites transformées en elles-mêmes. Toutes ces droites engendrent un *complexe linéaire*. En effet, la droite qui joint les points x_1, x_2 est transformée en elle-même seulement si

$$a_{12}(x_1y_2 - x_2y_1) + a_{13}(x_1z_2 - x_2z_1) + \ldots + a_{34}(z_1t_2 - t_1z_2) = 0.$$

Et cette équation est une équation *linéaire* à laquelle doivent satisfaire les *coordonnées plückériennes*

$$y_1z_2 - z_1y_2, \quad x_1z_2 - z_1x_2, \quad \ldots$$

de la droite considérée. Le lieu de ces droites est en conséquence un *complexe linéaire*.

On peut développer une étude semblable pour le cas des corrélations planes. Dans ce cas on trouve encore les polarités par rapport à une conique, si $a_{rs} = a_{sr}$ (r, $s = 1, 2, 3$). Mais on ne trouve rien d'analogue aux systèmes nuls; en effet, si $a_{rs} + a_{sr} = 0$, le déterminant $A = |a_{rs}|$ du troisième ordre serait identiquement nul; ce que nous avons toujours exclu.

2. Quelques formules élémentaires. — Les mineurs de la matrice

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \end{vmatrix}$$

sont les coordonnées plückériennes de la droite r qui joint les points x_1 et x_2. Nous indiquerons par la même notation (x_1, x_2) : 1° la droite r; 2° la matrice précédente; 3° l'ensemble de ses mineurs. Et nous nous servirons de notations semblables dans des cas analogues. Si l'on a quatre points x_1, x_2, x_3, x_4, nous indiquerons par (x_1, x_2, x_3, x_4) le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix}.$$

Si les premiers trois points ne sont pas en ligne droite, le plan ξ qui les contient a des coordonnées qui satisfont aux équations

$$S\xi x_1 = S\xi x_2 = S\xi x_3 = 0,$$

et qui par conséquent sont proportionnelles aux compléments algébriques de x_4, y_4, z_4, t_4 dans le précédent déterminant. Nous indiquerons par la même notation (x_1, x_2, x_3) : 1° ces compléments; 2° leur matrice; 3° le plan ξ. Les coordonnées de ce plan seront donc $\rho\,(x_1, x_2, x_3)$, où $\rho \neq 0$ est un facteur arbitraire. On écrira donc $(x_1, x_2, x_3) = 0$ pour dire que les points x_1, x_2, x_3 sont en ligne droite et que les compléments précédents sont nuls tous les quatre.

Si une droite r est l'intersection de deux plans ξ_1 et ξ_2, nous disons qu'elle est la droite (ξ_1, ξ_2) en indiquant par (ξ_1, ξ_2) : 1° cette droite; 2° la matrice formée par les coordonnées des deux plans; 3° ses mineurs, qui sont les coordonnées plückériennes de la droite r.

Si les plans ξ_1, ξ_2 passent tous les deux par les points x_1, x_2, alors les droites (x_1, x_2) et (ξ_1, ξ_2) coïncident et leurs coordonnées sont identiques ou proportionnelles. Nous pourrons donc écrire

$$(x_1, x_2) = \rho(\xi_1, \xi_2),$$

où ρ est un facteur de proportionnalité. Cette équation, on doit se le rappeler, *ne signifie pas* que

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = \rho(\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z_1 t_2 - t_1 z_2 = \rho(\zeta_1 \tau_2 - \tau_1 \zeta_2).$$

Elle signifie au contraire que

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = \rho(\zeta_1 \tau_2 - \zeta_2 \tau_1),$$
$$z_1 y_2 - y_1 z_2 = \rho(\tau_1 \xi_2 - \tau_2 \xi_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si nous posons

$$x = x^{(1)}, \qquad y = x^{(2)}, \qquad z = x^{(3)}, \qquad t = x^{(4)},$$
$$\xi = \xi^{(1)}, \qquad \eta = \xi^{(2)}, \qquad \ldots,$$
$$x_1^{(i)} x_2^{(j)} - x_1^{(j)} x_2^{(i)} = p_{ij}, \qquad \xi_1^{(i)} \xi_2^{(j)} - \xi_1^{(j)} \xi_2^{(i)} = \pi_{ij},$$

l'équation précédente signifie que

$$p_{12} : \pi_{34} = p_{13} : \pi_{42} = p_{14} : \pi_{23} = p_{23} : \pi_{14} = p_{34} : \pi_{12} = p_{42} : \pi_{13}.$$

Pour le démontrer, il suffit de remarquer qu'en substituant aux plans ξ_1, ξ_2 deux plans de leur faisceau, les (ξ_1, ξ_2) restent multipliés par un même facteur, et que, en substituant aux points x_1, x_2, deux points de la même droite, les (x_1, x_2) restent aussi multipliés par un même facteur. On peut donc rendre par exemple

$$x_1 = y_2 = \xi_1 = \eta_2 = 0,$$

et la vérification de la propriété énoncée n'offre alors plus de difficulté.

Si nous avons deux droites (x_1, x_2) et (x_3, x_4), nous poserons

$$\text{(4)} \qquad S(x_1, x_2)(x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Ce déterminant sera nul seulement si les points x_i appartiennent à un même plan, c'est-à-dire si les deux droites se rencontrent. Indiquons par p_{ij} les coordonnées de la première droite et par q_{ij} les coordonnées de la seconde $(i, j = 1, 2, 3, 4)$. En développant le second membre de l'équation (4) selon les mineurs de la matrice (x_1, x_2) on reconnaît que cette expression est égale à

$$p_{12} q_{34} + p_{13} q_{42} + p_{14} q_{23} + q_{12} p_{34} + q_{13} p_{42} + q_{14} p_{23}.$$

Si l'on a une droite (x_1, x_2), qui joint les points x_1, x_2, et une seconde droite (ξ_1, ξ_2), qui est l'intersection des plans ξ_1, ξ_2, nous poserons

$$S(x_1, x_2)(\xi_1, \xi_2) = (x_1, x_2, x_3, x_4), \tag{4_1}$$

où x_3 et x_4 sont deux points de la droite (ξ_1, ξ_2) choisis de manière que $(x_3, x_4) = (\xi_1, \xi_2)$. Évidemment cette expression est égale au produit des matrices (x_1, x_2) et (ξ_1, ξ_2). On en déduit que

$$S(x_1, x_2)(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} Sx_1\xi_1 & Sx_1\xi_2 \\ Sx_2\xi_1 & Sx_2\xi_2 \end{vmatrix}. \tag{4_3}$$

3. **Formes apolaires.** — Si x_1, x_2 sont les deux coordonnées homogènes d'un point d'une droite, alors une équation

$$F_2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \qquad (a_{12} = a_{21})$$

définit deux points de la droite. Une autre forme

$$\Phi_2 = c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2 \qquad (c_{12} = c_{21})$$

sera dite *apolaire* à la forme F_2 si

$$a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{12} = 0. \tag{5}$$

Cette équation nous dit que les points où $F_2 = 0$, et ceux où $\Phi_2 = 0$ se divisent harmoniquement. Il s'agit donc d'une condition invariante, quand on soumet la droite à une transformation homographique. Si $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$ (*ce que nous supposerons toujours dorénavant*), les points, où $F_2 = 0$, ne coïncident pas. Et nous pourrons faire un changement de coordonnées de manière que $a_{11} = a_{22} = 0$. L'équation (5) se réduit alors à la $c_{12} = 0$.

Soit maintenant une forme cubique

$$F_3 = \sum_1^2 a_{rst}x_rx_sx_t$$
$$(a_{rst} = a_{srt} = a_{rts} = \ldots).$$

L'équation $F_3 = 0$ définit trois points A, B, C. S'ils ne coïncident pas tous les trois, nous pourrons considérer le point A′, conjugué harmonique de A par rapport aux points B et C, le point B′ conjugué de B par rapport à A et C, le point C′ conjugué de C par rapport à A et B.

On peut alors déterminer deux points P, Q qui séparent harmoniquement chacun des couples A et A′, B et B′, C et C′. Ces points sont définis par l'équation obtenue en égalant à zéro le Hessien de la forme F_3

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} \qquad \left(F_{rs} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_r \partial x_s}\right).$$

Puisqu'il s'agit de propriétés projectives, il suffit de le démontrer, en réduisant la forme F_3 à une forme canonique, par exemple à la forme $a\,(x_1^3 + x_2^3)$, ou à la forme $3\,a\,x_1^2\,x_2$ (si deux des points A, B, C coïncident. Dans le premier cas, les points A′, B′, C′ annulent la forme $F'_3 = a\,(x_1^3 - x_2^3)$ et le Hessien est proportionnel à $x_1\,x_2$. Dans le deuxième cas les points A′, B′, C′ sont confondus avec le point $x_1 = 0$ et annulent la forme $F'_3 = a x_1^3$, pendant que le Hessien est proportionnel à x_1^2. Si les points A, B, C coïncident tous les trois, alors les points A′, B′, C′ sont indéterminés, la forme F'_3 et le Hessien sont identiquement nuls.

En laissant aux coordonnées x la plus grande généralité, et en écrivant

$$F_3 = \Sigma\, a_{rst} x_r x_s x_t,$$

on trouve que son Hessien est proportionnel à

$$(a_{111}a_{122} - a_{112}^2)x_1^2 + (a_{111}a_{222} - a_{112}a_{122})x_1 x_2 + (a_{112}a_{222} - a_{122}^2)x_2^2.$$

On vérifie sans difficulté qu'il est identiquement nul seulement si les trois points satisfaisant à l'équation $F_3 = 0$ coïncident. S'il n'est pas nul, la forme $F_2 = \Sigma\, a_{rs}\, x_r\, x_s$ lui sera proportionnel seulement si

$$(6) \qquad \begin{cases} a_{111}a_{22} - 2\,a_{112}a_{12} + a_{122}a_{11} = 0, \\ a_{112}a_{22} - 2\,a_{122}a_{12} + a_{222}a_{11} = 0. \end{cases}$$

Si ces équations sont satisfaites, nous dirons que F_2 et F_3 sont apolaires, *même dans le cas que le Hessien de* F_3 *soit identiquement nul.* En supposant différent de zéro le discriminant $a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2$ de la forme F_2, on déduit des équations (6) que les points, où $F_3 = 0$, ou sont tous les trois différents l'un de l'autre, ou coïncident tous les trois. Dans le dernier cas on peut supposer $a_{112} = a_{221} = a_{222} = 0$ et des équations (6) on déduit $a_{22} = 0$. Par conséquent le point qui annule la forme $F_3 = a_{111}\, x_1^3$ *est un des points qui annulent la forme* $F_2 = x_1\,(a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2)$. Voilà l'interprétation de la condition d'apolarité dans le cas que le Hessien de F_3 soit identiquement nul.