Kapitola III.

Projektivní diferenciální geometrie křivek.

Aritmetické křivky ve dvojrozměrném prostoru.

306. Ve **306** až **344** předpokládáme, že $m=2$. Buď $C_a x(u)$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) regulární ar. křivka třídy $r\geqq 2$. Buď $\varphi(u)$ (u v $\langle a, b\rangle$) funkce třídy $s\geqq 1$. Buď

$$(1) \qquad D\varphi=\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x\dfrac{dx}{du}\dfrac{d^2x}{du^2}\right)}}\frac{d\varphi}{du}.$$

Když $r\geqq n+1$, $s\geqq n>1$, buď

$$D^2\varphi=D(D\varphi),\quad D^3\varphi=D(D^2\varphi),\ \ldots\ D^n\varphi=D(D^{n-1}\varphi).$$

Když $r\geqq 3$, jest

$$(2) \qquad (x\,Dx\,D^2x)=1.$$

Operace D nazývá se diferenciální parametr ar. křivky $C_a x(u)$. Diferenciální parametr D jest nezávislý na volbě parametru u: je-li také v parametr ar. křivky $C_a x(u)$, a je-li $\varphi(u)=\psi(v)$, jest $D\varphi=D\psi$.

Důkaz je snadný.

307. Buď u parametr regulární ar. křivky $C_a x(u)$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$); buď D diferenciální parametr pro $C_a x$. Pravíme, že u jest 1° positivní, 2° negativní, 3° normální parametr ar. křivky $C_a x$, když 1° $Du>0$, 2° $Du<0$, 3° $Du=1$ pro všecka u z $\langle a, b\rangle$. Buď $a\leqq u_0\leqq b$; buď c libovolná konstanta. Pak

$$(1) \qquad v=\int_{u_0}^{u}\frac{du}{Du}+c=\int_{u_0}^{u}\sqrt[3]{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right)}\,du+c$$

jest normální parametr pro $C_a x(u)$.

Buďte u_1, u_2 dvě různá čísla z $\langle a, b\rangle$. Z definice regulární ar. křivky je zřejmé, že nemůže býti

$$(Du)_{u=u_1} > 0, \ (Du)_{u=u_2} < 0.$$

308. Buď $C_a x(u)$ (u v $\langle a+0, \ b-0\rangle$) regulární ar. křivka třídy $r \geqq 2$. Buď D diferenciální parametr pro $C_a x$. Buď

(1) $$\xi = \xi(u) = (x Dx).$$

Množství ar. přímek $\xi(u)$ (u v $\langle a+0, \ b-0\rangle$) jest duální ar. křivka $\mathfrak{C}_a \xi(u)$ třídy $r-2$. Pravíme, že duální ar. křivka $\mathfrak{C}_a \xi(u)$ jest adjungována k ar. křivce $C_a\, x(u)$ a píšeme

$$\mathfrak{C}_a\, \xi(u) = \text{Adj. } C_a\, x(u).$$

Jest též

(2) $$\mathfrak{C}\left\{\xi(u)\right\} = \text{Adj. } C\left\{x(u)\right\}.$$

Duální ar. křivka $\mathfrak{C}_a \xi(u)$ jest regulární, je-li třídy 2, zejména tedy, kdykoli $r \geqq 4$.

Viz **192** a **193**.

309. Buď $C_a x(u)$ regulární ar. křivka třídy $r \geqq 4$; buď D diferenciální parametr pro $C_a x(u)$. Buď

$$\mathfrak{C}_a\ \xi(u) = \text{Adj. } C_a\ x(u).$$

Pak D jest diferenciální parametr pro $\mathfrak{C}_a \xi(u)$.

Dle **306** a **308** jest

(1) $$\xi(u) = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(x \dfrac{dx}{du} \dfrac{d^2x}{du^2}\right)}} \left(x \frac{dx}{du}\right).$$

Dle **193** (3) je tedy

$$\left(\xi \frac{d\xi}{du} \frac{d^2\xi}{du^2}\right) = \left(x \frac{dx}{du} \frac{d^2 x}{du^2}\right).$$

310. Buď $C_a x(u)$ regulární ar. křivka třídy $r \geqq 4$; buď D diferenciální parametr pro $C_a x$. Buď

$$\mathfrak{C}_a\ \xi(u) = \text{Adj. } C_a\ x(u).$$

Pak jest

(1) $$(\xi D\xi) = x.$$

a

(2) $$C_a\ x(u) = \text{Adj. } \mathfrak{C}_a\ \xi(u).$$

Dle **192** (2) a **309** (1) jest

$$\left(\xi \frac{d\xi}{du}\right) = \sqrt[3]{\left(x \frac{dx}{du} \frac{d^2x}{du^2}\right)}\ x,$$

z čehož vychází (1). Z (1) a **309** plyne (2).

311. Buď $C_a x(u)$ regulární ar. křivka třídy $r \geqq 2$. Buď

$$\mathfrak{C}_a\, \xi(u) = \text{Adj.}\, C_a\, x(u).$$

Buď K unimodulární kolineace ar. bodů; buď $K' = \text{Adj.}\, K$. Buď $x(u) \sim x'(u)$ v K; buď $\xi(u) \sim \xi(u')$ v K'. Pak jest

$$\mathfrak{C}_a\, \xi'(u) = \text{Adj.}\, C_a\, x'(u).$$

Ježto K jest unimodulární, jest

$$\left(x\, \frac{dx}{du}\, \frac{d^2x}{du^2}\right) = \left(x'\, \frac{dx'}{du}\, \frac{d^2x'}{du^2}\right).$$

Tedy $C_a x(u)$ a $C_a x'(u)$ mají týž diferenciální parametr D a $Dx \sim Dx'$ v K. Tedy dle **43** (1) $(x\, Dx) \sim (x'\, Dx')$ v K'.

312. Buď $C_a x(u)$ $(u \text{ v } \langle a+0, b-0\rangle)$ regulární ar. křivka třídy $r \geqq 2$. Pravíme, že $C_a x(u)$ jest virtuální třídy $r+2$, když: 1^0 souřadnice ar. přímky $\left(x\, \frac{dx}{du}\right)$ jsou funkce třídy r v $\langle a, b\rangle$; 2^0 výraz $\left(x\, \frac{dx}{du}\, \frac{d^2x}{du^2}\right)$ jest funkce třídy r v $\langle a, b\rangle$.

Snadno se vidí, že, když $C_a x$ je třídy $r+2$, a když $\varrho(u) = \varrho$ je funkce třídy r, ar. křivka $C_a \varrho x$ jest virtuální třídy $r+2$. Tím jsme vedeni k tomuto rozšíření pojmu virtuální třídy: Buď $C_a x(u)$ $(u \text{ v } \langle a+0, b-0\rangle)$ regulární ar. křivka třídy r $(2 \leqq r \leqq 3)$. Buď $\varrho = \varrho(u)$ funkce třídy $r-2$ v $\langle a, b\rangle$. Pravíme, že $C_a \varrho x$ jest regulární ar. křivka virtuální třídy r. V tomto případě pod symboly

$$\left(\rho x, \frac{d(\rho x)}{du}\right); \left(\rho x, \frac{d(\rho x)}{du}, \frac{d^2(\rho x)}{du^2}\right),$$

jež samy o sobě nemusí míti význam, rozumíme resp.:

$$\rho^2 \left(x\, \frac{dx}{du}\right),\ \rho^3 \left(x\, \frac{dx}{du}\, \frac{d^2x}{du^2}\right).$$

O křivce $C\{x\}$ pravíme, že jest virtuální třídy $r \geqq 4$, když ar. křivka $C_a x$ jest virtuální třídy r.

Z definice virtuální třídy následuje ihned: Je-li $C_a x(u)$ regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 4$, Adj. $C_a x$ jest regulární duální ar. křivka virtuální třídy r.

313. Buď $C_a x(u)$ regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 4$ Buď D diferenciální parametr ar. křivky $C_a x$. Buď

$$\mathfrak{C}_a\, \xi(u) = \text{Adj.}\, C_a\, x(u).$$

Pak jest

(1) $$Sx\xi = 0,\ Sx D\xi = 0,\ S\xi Dx = 0,$$

(2) $$Sx D^2\xi = 1,\ S Dx D\xi = -1,\ S\xi D^2 x = 1,$$

(3) $$S Dx D^2\xi = 0,\ S D^2 x D\xi = 0.$$

Rovnice (1) vycházejí ihned ze **308** (1) a **310** (1). Dle **306** (2) a **308** (1) jest

$$S\xi D^2 x = S(x Dx) D^2 x = (x Dx D^2 x) = 1,$$

což je třetí rovnice (2). Dle **310** (2) platí tedy též prvá rovnice (2). Druhá rovnice (2) vychází pak odtud, že

$$0 = D(Sx D\xi) = S Dx D\xi + Sx D^2\xi.$$

Ze **308** (1) plyne derivováním

$$D\xi = (x D^2 x);$$

tedy

$$S D^2 x D\xi = S D^2 x (x D^2 x) = (D^2 x, x, D^2 x) = 0,$$

což je druhá rovnice (3). Dle duality platí tedy též prvá rovnice (3).

314. Buď $C_a x(u)$ regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 4$. Buď

(1) $$\mathfrak{C}\{\eta(u)\} = \mathrm{Adj}.\, C\{x(u)\}.$$

Když a jen když

(2) $$S\left(\frac{dx}{du}\frac{d^2\eta}{du^2} - \frac{d^2x}{du^2}\frac{d\eta}{du}\right) = 0,$$

existuje konstanta λ taková, že

(3) $$\mathfrak{C}_a\ \frac{1}{\lambda}\,\eta(u) = \mathrm{Adj}.\, C_a\, x(u).$$

Buď $\mu = \mu(u) \neq 0$ funkce třídy 1; buď $\Delta = \mu\,\dfrac{d}{du}$. Pak jest

(4) $$\Delta x = \mu\frac{dx}{du},\ \Delta^2 x = \Delta\left(\mu\frac{dx}{du}\right) = \mu^2\frac{d^2x}{du^2} + \Delta\mu\,.\,\frac{dx}{du}$$

a stejně pro η. Tedy

$$S(\Delta x\,\Delta^2\eta - \Delta^2 x\,\Delta\eta) = \mu^3 S\left(\frac{dx}{du}\frac{d^2\eta}{du^2} - \frac{d^2x}{du^2}\frac{d\eta}{du}\right).$$

Klademe-li $\mu = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(x\,\dfrac{dx}{du}\,\dfrac{d^2x}{du^2}\right)}}$, vidíme, že rovnice (2) jest ekvivalentní s rovnicí

(5) $$S(Dx D^2\eta - D^2 x D\eta) = 0.$$

Buď $\mathfrak{C}_a \xi(u) = \text{Adj. } C_a x(u)$. Dle (1) existuje $\lambda = \lambda(u)$ takové, že $\eta(u) = \lambda(u)\, \xi(u)$. Máme ukázati, že $D\lambda = 0$, když a jen když platí (5). Avšak

$$S(Dx\, D^2\eta - D^2x\, D\eta) = S[Dx\, D^2(\lambda\xi) - D^2x\, D(\lambda\xi)] =$$
$$= \lambda S(Dx\, D^2\xi - D^2x\, D\xi) + D\lambda\, S(2Dx\, D\xi - \xi D^2x) + D^2\lambda\, S\xi Dx,$$

tedy dle **313**

$$S(Dx\, D^2\eta - D^2x\, D\eta) = -3 D\lambda.$$

315. Buď $C_a x(u)$ regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 3$. Buď $\lambda(u)$ funkce třídy 1. Buď

$$\eta(u) = \lambda(u) \left(x \frac{dx}{du}\right).$$

Pak existuje $\mu(u)$ třídy 1 taková, že

$$x(u) = \mu(u) \left(\eta \frac{d\eta}{du}\right).$$

Když a jen když $\lambda(u) = \mu(u)$, jest

$$\mathfrak{C}_a \eta(u) = \text{Adj. } C_a x(u).$$

Vskutku dle **192** (2) jest

$$\left(\eta \frac{d\eta}{du}\right) = [\lambda(u)]^2 \left(x \frac{dx}{du} \frac{d^2x}{du^2}\right) x(u).$$

316. Buď $C_a x(u)$ regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 4$. Buď D diferenciální parametr ar. křivky $C_a x(u)$. Buď $\mathfrak{C}_a \xi(u) = \text{Adj. } C_a x(u)$. Výraz $k(u)$ definovaný rovnicí

$$2k(u) = S\, D^2x\, D^2\xi \tag{1}$$

nazývá se prvý unimodulární invariant ar. křivky $C_a x(u)$; $k(u)$ je též prvý unimodulární invariant duální ar. křivky $\mathfrak{C}_a \xi(u)$. Jest

$$2k(u) = -S(Dx\, D^2x)(D\xi\, D^2\xi), \tag{2}$$

$$2k(u) = -\,.\,\frac{S\left(\dfrac{dx}{du}\dfrac{d^2x}{du^2}\right)\left(\dfrac{d\xi}{du}\dfrac{d^2\xi}{du^2}\right)}{\left[\left(x\dfrac{dx}{du}\dfrac{d^2x}{du^2}\right)\right]^2}. \tag{3}$$

Buď K unimodulární kolineace ar. bodů; buď $x(u) \sim x'(u)$ v K. Pak $k(u)$ jest prvý unimodulární invariant ar. křivky $C_a x'(u)$.

Dle **90** jest

$$S(Dx\,D^2x)\,(D\xi\,D^2\xi)=\begin{vmatrix} S\,Dx\,D\xi & S\,Dx\,D^2\xi \\ S\,D^2x\,D\xi & S\,D^2x\,D^2\xi \end{vmatrix},$$

z čehož plyne (2) dle (1) a **313**.

Buď $\mu=\mu(u)\neq 0$ funkce třídy 1; buď $\Delta=\mu\dfrac{d}{du}$. Pak jest dle **314** (4)

$$(4)\qquad (\Delta x\,\Delta^2 x)=\mu^3\left(\frac{dx}{du}\,\frac{d^2x}{du^2}\right),\ (\Delta\xi\,\Delta^2\xi)=\mu^3\left(\frac{d\xi}{du}\,\frac{d^2\xi}{du^2}\right)$$
$$(x\,\Delta x\,\Delta^2 x)=\mu^3\left(x\frac{dx}{du}\,\frac{d^2x}{du^2}\right),$$

tedy

$$\frac{S(\Delta x\,\Delta^2 x)(\Delta\xi\,\Delta^2\xi)}{(x\,\Delta x\,\Delta^2 x)^2}=\frac{S\left(\dfrac{dx}{du}\,\dfrac{d^2x}{du^2}\right)\left(\dfrac{d\xi}{du}\,\dfrac{d^2\xi}{du^2}\right)}{\left(x\dfrac{dx}{du}\,\dfrac{d^2x}{du^2}\right)^2}.$$

Klademe-li $\mu=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(x\dfrac{dx}{du}\,\dfrac{d^2x}{du^2}\right)}}$, obdržíme (3).

Že $k(u)$ je prvý unimodulární invariant pro $\mathfrak{C}_a\,\xi(u)$, vychází z (1), **309** a **310**.

Že $k(u)$ je prvý unimodulární invariant pro $C_a\,x'(u)$, vychází z (1) a **311**.

317. Buď $C_a\,x(u)$ regulární ar. křivka virtuální třídy $r\geq 5$. Buď D diferenciální parametr ar. křivky $C_a\,x(u)$. Buď $\mathfrak{C}_a\,\xi(u)=$ Adj. $C_a\,x(u)$. Výraz $n(u)$ definovaný rovnicí

$$(1)\qquad 2n(u)=S[(Dx\,D^2x)\,(D\xi\,D^3\xi)-(Dx\,D^3x)\,(D\xi\,D^2\xi)]$$

nazývá se druhý unimodulární invariant ar. křivky $C_a\,x(u)$. Druhý unimodulární invariant duální ar. křivky $\mathfrak{C}_a\,\xi(u)$ jest roven $-n(u)$. Jest

$$(2)\qquad 2n(u)=\frac{S\left[\left(\dfrac{dx}{du}\,\dfrac{d^2x}{du^2}\right)\left(\dfrac{d\xi}{du}\,\dfrac{d^3\xi}{du^3}\right)-\left(\dfrac{dx}{du}\,\dfrac{d^3x}{du^3}\right)\left(\dfrac{d\xi}{du}\,\dfrac{d^2\xi}{du^2}\right)\right]}{\left(x\dfrac{dx}{du}\,\dfrac{d^2x}{du^2}\right)^{7/3}}.$$

Buď K unimodulární kolineace ar. bodů; buď $x(u)\sim x'(u)$ v K. Pak $n(u)$ jest druhý unimodulární invariant ar. křivky $C_a\,x'(u)$.

Formule (2) odvodí se z (1) podobně jako formule **316** (3). Že druhý unimodulární invariant duální ar. křivky $\mathfrak{C}_a\,\xi(u)$ rovná se $-n(u)$, vychází z (1), **309** a **310**. Že $n(u)$ je druhý unimodulární invariant pro $C_a\,x'(u)$, vychází z (1) a **311**.

318. Buď $C_a\,x(u)$ regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geq 4$. Buď D diferenciální parametr ar. křivky $C_a\,x(u)$. Buď $\mathfrak{C}_a\,\xi(u) =$ $=$ Adj. $C_a\,x(u)$. Buď

$$X = (D\xi\, D^2\xi), \; \Xi = (Dx\, D^2x). \tag{1}$$

Pak jest

$$SX\xi = 1,\; SXD\xi = 0,\; SXD^2\xi = 0, \tag{2}$$

$$S\Xi x = 1,\; S\Xi Dx = 0,\; S\Xi D^2x = 0, \tag{3}$$

$$(x, Dx, X) = 1,\; (\xi, D\xi, \Xi) = 1. \tag{4}$$

Buď $k(u)$ prvý unimodulární invariant ar. křivky $C_a x(u)$. Jest

$$2k(u) = -\,SX\Xi. \tag{5}$$

Buď $r \geq 5$; buď $n(u)$ druhý unimodulární invariant ar. křivky $C_a\,x(u)$. Jest

$$Dk + n = S\Xi\, DX, \tag{6}$$

$$Dk - n = SX\,D\Xi. \tag{7}$$

Druhá a třetí rovnice (3) jsou zřejmé dle definice Ξ. Prvá rovnice (3) vychází ze **306** (2). Duálně obdrží se rovnice (2). Prvá rovnice (4) vychází z prvé (2) dle **308** (1); duálně se obdrží druhá (4). Z (1) a **316** (2) plyne (5); z (1) a **317** (1) plyne

$$2n(u) = S(\Xi\, DX - XD\Xi). \tag{8}$$

Z (5) plyne derivováním

$$-2Dk = S(\Xi\, DX + XD\Xi). \tag{9}$$

Z (8) a (9) plynou rovnice (6) a (7).

319. Buď $C_a x(u)$ regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geq 4$. Buď D diferenciální parametr ar. křivky $C_a x(u)$. Buď $\mathfrak{C}_a\,\xi(u) =$ $=$ Adj. $C_a\,x(u)$. Buď

$$X = (D\xi\, D^2\xi),\; \Xi = (Dx\, D^2x).$$

Buď $k(u)$ prvý unimodulární invariant ar. křivky $C_a x(u)$. Pak jest

$$D^2x = X + 2k(u)\,x, \tag{1}$$

$$D^2\xi = \Xi + 2k(u)\,\xi. \tag{2}$$

Buď $r \geq 5$; buď $n(u)$ druhý unimodulární invariant ar. křivky $C_a\,x(u)$. Pak jest

$$DX = (n - Dk)\,x, \tag{3}$$

$$D\Xi = -(n + Dk)\,\xi. \tag{4}$$

Dle **318** (4) ar. body x, Dx, X jsou lin. nezávislé. Lze tedy určiti $\lambda_0, \lambda_1, \mu$ tak, že

$$D^2x = \lambda_0 x + \lambda_1 Dx + \mu X.$$

Odtud plyne dle **313** a **316** (1)

$$1 = S\xi D^2 x = \mu S\xi X,$$
$$0 = SD\xi D^2 x = -\lambda_1 + \mu SXD\xi,$$
$$2k = SD^2\xi D^2 x = \lambda_0 + \mu SXD^2\xi,$$

z čehož dle **318** (2) vychází (1). Duálně obdrží se (2).

Ze **318** (2) vychází derivováním

$$S\xi DX = 0, \quad SD\xi DX = 0.$$

Tedy DX náleží do Adj. $\{\xi, D\xi\} = \{(\xi D\xi)\}$. Tedy dle **310** (1) existuje ν takové, že

$$DX = \nu x.$$

Dle **318** (3) je tedy

$$\nu = S\Xi DX,$$

z čehož plyne (3) dle **318** (6). Podobně obdrží se (4).

320. Buďte $C_a x(u) (u \text{ v } \langle a+0, b-0\rangle)$, $C_a x'(u) (u \text{ v } \langle a+0, b-0\rangle)$ regulární ar. křivky virtuální třídy $r \geq 5$. Buďte $k(u), n(u)$ $(k'(u), n'(u))$ resp. prvý a druhý unimodulární invariant ar. křivky $C_a x(u)$ $(C_a x'(u))$. Když a jen když

$$k(u) = k'(u), \quad n(u) = n'(u), \quad (u \text{ v } \langle a, b\rangle)$$

existuje unimodulární kolineace K taková, že pro všecka u z $\langle a, b\rangle$ jest

$$x(u) \sim x'(u) \text{ v } K.$$

Je zřejmé, že podmínky jsou nutné. Že stačí, vychází snadno z **68**, **318** (4) a **319** (1), (3).

Orientace křivky ve dvojrozměrném prostoru.

321. Buďte $\{x(u_i)\}$ $(i = 1, 2, 3)$ tři různé body křivky $C\{x(u)\}$ třídy $r \geq 1$. Pravíme, že body $\{x(u_1)\}$, $\{x(u_2)\}$, $\{x(u_3)\}$ jsou v positivní (negativní) orientaci vzhledem k parametru u křivky $C\{x\}$, když číslo

$$(u_2 - u_1)\,(u_3 - u_2)\,(u_1 - u_3)$$

jest kladné (záporné). Vyměníme-li mezi sebou dva z bodů

$\{x(u_i)\}$ $(i=1,2,3)$, přejde positivní (negativní) orientace v negativní (positivní).

Je-li také $v=\varphi(u)$ parametr křivky $C\{x(u)\}$, jest orientace vzhledem k v táž, jako orientace vzhledem k u nebo opačná dle toho, zda $\frac{d\varphi}{du}>0$ či $\frac{d\varphi}{du}<0$.

Buď $r\geqq 2$ a $C\{x(u)\}$ buď regulární. Buď $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}=$ Adj. $C\{x(u)\}$. Orientace přímek $\{\xi(u_i)\}$ $(i=1,2,3)$ duální křivky $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ vzhledem k u rovná se orientaci bodů $\{x(u_i)\}$ křivky $C\{x(u)\}$ vzhledem k u.

Zřejmé.

322. Buď $\{x(u_0)\}$ bod křivky $C\{x(u)\}$. Buď y ar. bod neobsažený v $\left\{x(u_0), \left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_0}\right\}$. Buď $\left(x\,\frac{dx}{du}\,y\right)_{u=u_0}>0$. Buď W dosti malé okolí bodu $\{x(u_0)\}$; buď C^W průřez křivky $C\{x(u)\}$ s okolím W. Jsou-li $\{x(u_i)\}$ $(i=1,2,3)$ tři různé body křivky C^W, jest jejich orientace vzhledem k parametru u rovna orientaci přímek $\{(y, x(u_i))\}$ svazku Adj. $\{y\}$ vzhledem k ar. bodu y.

Buď $x(u_0)=x_0, \left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_0}=x_1$. Ježto $(x_0\,x_1\,y)\neq 0$, můžeme položiti

$$x(u)=\lambda_0(u)\,x_0+\lambda_1(u)\,x_1+\lambda_2(u)\,y. \tag{1}$$

Jest

$$\lambda_0(u_0)=1,\quad \lambda_1(u_0)=0.$$

$$\left(\frac{d\lambda_0}{du}\right)_{u=u_0}=0,\ \left(\frac{d\lambda_1}{du}\right)_{u=u_0}=1.$$

Můžeme tedy určiti $\varepsilon>0$ tak malé, že pro $u_0-\varepsilon\leqq u\leqq u_0+\varepsilon$ jest

$$\frac{\lambda_1(u)}{\lambda_0(u)}=\mu(u)>0,\ \frac{d\mu}{du}>0. \tag{2}$$

Dle **164** lze zvoliti W tak malé, že průřez C^W křivky $C\{x(u)\}$ s okolím W je křivka a že u je v $\langle u_0-\varepsilon,\ u_0+\varepsilon\rangle$, kdykoli bod $\{x(u)\}$ jest obsažen v C^W. Buďte u_1, u_2, u_3 tři různá čísla z $\langle u_0-\varepsilon,\ u_0+\varepsilon\rangle$. Ježto $(x_0\,x_1\,y)>0$, orientace přímek $\{(y, x(u_i))\}$ $(i=1,2,3)$ svazku Adj. $\{y\}$ vzhledem k ar. bodu y rovná se dle **93** a dle (1) orientaci bodů $\{\lambda_0(u_i)\,x_0+\lambda_1(u_i)\,x_1\}$ $(i=1,2,3)$ řady bodové $\{x_0, x_1\}^{\sigma}$ vzhledem k ar. přímce $(x_0\,x_1)$, tedy dle **92** rovná se orientaci jednorozměrných bodů $\{|\lambda_0(u_i),\ \lambda_1(u_i)|_b\}=\{|1, \mu(u_i)|_b\}$. Jsou tedy přímky $\{(y, x(u_i))\}$ svazku Adj. $\{y\}$ v positivní nebo negativní orientaci vzhledem k ar. bodu y dle toho, zda výraz

$$V=[\mu(u_2)-\mu(u_1)]\,[\mu(u_3)-\mu(u_2)]\,[\mu(u_1)-\mu(u_3)]$$

je kladný či záporný. Dle věty o střední hodnotě je však

$$\mu(u_2) - \mu(u_1) = (u_2 - u_1)\left(\frac{d\mu}{du}\right)_{v=v_3},$$

$$\mu(u_3) - \mu(u_2) = (u_3 - u_2)\left(\frac{d\mu}{du}\right)_{v=v_1},$$

$$\mu(u_1) - \mu(u_2) = (u_1 - u_2)\left(\frac{d\mu}{du}\right)_{v=v_2},$$

kde také čísla v_1, v_2, v_3 náležejí do $\langle u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon \rangle$. Je tedy

$$V = k(u_2 - u_1)(u_3 - u_2)(u_1 - u_3),$$

kde

$$k = \left(\frac{d\mu}{du}\right)_{u=v_1} \cdot \left(\frac{d\mu}{du}\right)_{u=v_2} \left(\frac{d\mu}{du}\right)_{u=v_3},$$

takže $k > 0$ dle (2).

323. Buď $C_a x(u)$ regulární ar. křivka třídy $r \geqq 2$; buď D diferenciální parametr ar. křivky $C_a x$. Buď $\{x(u_0)\}$ bod křivky $\{Cx(u)\}$; buď y ar. bod takový, že

$$(1) \qquad \left(x(u_0), [Dx]_{u=u_0}, y\right) > 0.$$

Existuje $\varepsilon > 0$ takové, že, když $\{z\}$ je průsečík přímky Adj. $\{y, x(u)\}$ $(0 < |u - u_0| < \varepsilon)$ s tečnou křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$, orientace bodů $\{y\}$, $\{z\}$, $\{x(u)\}$ řady bodové $\{y, x(u)\}^\sigma$ vzhledem k ar. přímce $(y, x(u))$ jest positivní.

Dle (1) lze určiti $\lambda_0(u)$, $\lambda_1(u)$, $\lambda_2(u)$ tak, že

$$(2) \qquad x(u) = \lambda_0(u)\, x_0 + \lambda_1(u)\, x_1 + \lambda_2(u)\, y,$$

kde

$$x_0 = x(u_0), \quad x_1 = [Dx]_{u=u_0}.$$

Položme

$$\varphi(u) = \left(x_0, x_1, x(u)\right).$$

Dle **306** (2) jest

$$\varphi(u_0) = 0, \quad (D\varphi)_{u=u_0} = 0, \quad (D^2\varphi)_{u=u_0} = 1;$$

odtud snadno vychází, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro $0 < |u - u_0| < \varepsilon$ jest $\varphi(u) > 0$. Dle (2) je však $\varphi(u) = \lambda_2(u)\ (x_0 x_1 y)$, takže dle (1) pro $0 < |u - u_0| < \varepsilon$ jest $\lambda_2(u) > 0$. Dle (2) můžeme položiti

$$z = \lambda_0(u)\, x_0 + \lambda_1(u)\, x_1 = x(u) - \lambda_2(u)\, y.$$

Orientace bodů $\{y\}$, $\{z\}$, $\{x(u)\}$ vzhledem k ar. přímce $(y, x(u))$ rovná se orientaci jednorozměrných bodů

$$\{|1, 0|_b\}, \quad \{|-\lambda_2(u), 1|_b\}, \quad \{|0, 1|_b\}$$

a je tedy positivní, když $\lambda_2(u) > 0$.

Oskulační kuželosečka ($m = 2$).

324. Buď $C_a x(u)$ regulární ar. křivka virtuální třídy $s \geqq 4$. Buď D diferenciální parametr ar. křivky $C_a x$. Buď $\mathfrak{C}_a \xi(u) =$ Adj. $C_a x(u)$. Buď $\Xi(u) = (Dx, D^2x)$. Buď

$$\overset{u}{P}_r = (D\xi)^2 - 2\xi\,\Xi - 2k\,\xi^2. \tag{1}$$

Buď $\{x(u_0)\}$ bod křivky $C\{x(u)\}$. Kuželosečka $C[\overset{u_0}{P}_r]$ nazývá se oskulační kuželosečka křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$.

Je-li křivka $C\{x(u)\}$ třídy $r \geqq 4$, má $C\overset{u_0}{P}_r]$ — a žádná jiná kuželosečka — pětibodový styk s $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$.

Buď nejprve $r \geqq 5$. Zřejmě jest

$$S\overset{u}{P}_r\, x(u) = 0. \tag{2}$$

Dle **319** (2), (4) jest, je-li n druhý unimodulární invariant ar. křivky $C_a x(u)$,

$$D\overset{u}{P}_r = 2n\,\xi^2. \tag{3}$$

Zřejmě $\xi(u)$ má s $C\{x(u)\}$ dvojbodový styk v $\{x(u)\}$; tedy dle **174** $[\xi(u)]^2$ má s $C\{x(u)\}$ čtyřbodový styk v $\{x(u)\}$; tedy dle (2), (3) a **183** mají $\overset{u}{P}_r$ a $C\{x(u)\}$ pětibodový styk v $\{x(u)\}$. Tedy dle **180** $C[\overset{u}{P}_r]$ a $C\{x(u)\}$ mají pětibodový styk v $\{x(u)\}$.

Výsledek přenese se na případ $r = 4$ dle **178.**

Předpokládejme nyní, že kuželosečka $C[Q]_r$, kde

$$Q_r = [a_{00}\,\xi^2 + a_{11}(D\xi)^2 + a_{22}\,\Xi^2 + 2a_{01}\,\xi D\xi + 2a_{02}\,\xi\,\Xi + 2a_{12}\,D\xi\,.\,\Xi]_{u=u_0}$$

má s $C\{x(u)\}$ v $\{x(u_0)\}$ pětibodový styk. Zřejmě, ať jakkoli zvolíme a_{ik}, má $Q_r - a_{22}\Xi^2$ jednobodový styk s $C\{x(u)\}$ v $\{x(u_0)\}$. Odtud snadno vidíme, že $a_{22} = 0$; jinak by totiž $C[Q_r]$ neměla v $\{x(u_0)\}$ ani jednobodový styk s $C\{x(u)\}$. Podobně vidíme, že jest $a_{12} = 0$; jinak by $C[Q_r]$ měla v $\{x(u_0)\}$ právě jednobodový styk s $C\{x(u)\}$. Ježto $\overset{u_0}{P}_r$ i Q_r mají v $\{x(u_0)\}$ pětibodový styk v $\{x(u_0)\}$ s $C\{x(u)\}$, totéž platí i o přímkové formě

$$Q_r - a_{11}\overset{u_0}{P}_r = \xi(u_0)\,[(a_{00} - 2ka_{11})\,\xi + 2a_{01}\,D\xi + 2(a_{02} + a_{11})\,\Xi]_{u=u_0}.$$

Odtud snadno vychází, že ar. přímka

$$[(a_{00} - 2ka_{11})\,\xi + 2a_{01}\,D\xi + 2(a_{02} + a_{11})\,\Xi]_{u=u_0} \tag{4}$$

má v $\{x(u_0)\}$ trojbodový styk s $C\{x(u)\}$. Ježto $\{x(u_0)\}$ není inflexní bod pro $C\{x(u)\}$, je to jen tak možno, že výraz (4) rovná se 0_r, takže

$$Q_r = a_{11} \overset{u_0}{P}_r, \quad C[Q_r] = C[\overset{u_0}{P}_r].$$

325. Buď $C_a\, x(u)$ regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 4$. Buď D diferenciální parametr ar. křivky $C_a x$. Buď $\mathfrak{C}_a \xi(u) = \text{Adj. } C_a x(u)$. Buď $\{y\}$ libovolný bod. Položme

$$y = \left(\lambda_0 x + \lambda_1 \frac{dx}{du} + \lambda_2 \frac{d^2x}{du^2}\right)_{u=u_0}, \tag{1}$$

$$\eta = \left(\lambda_0 \xi + \lambda_1 \frac{d\xi}{du} + \lambda_2 \frac{d^2\xi}{du^2}\right)_{u=u_0}. \tag{2}$$

Přímka $\{\eta\}$ jest polára bodu $\{y\}$ vzhledem k oskulační kuželosečce křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$.

Definujeme-li $\overset{u}{P}_r$ jako ve **324**, stačí patrně ukázati, že, ať jakkoli zvolíme u, polára bodu $\{z\}$, kde

$$z = \mu_0 x + \mu_1 Dx + \mu_2 D^2 x \tag{3}$$

vzhledem k $C[\overset{u}{P}_r]$ jest $\{\zeta\}$, kde

$$\zeta = \mu_0 \xi + \mu_1 D\xi + \mu_2 D^2 \xi. \tag{4}$$

Formule (3) a (4) definují korelaci K. Ukažme nejprve, že K jest polarita vzhledem k jisté kuželosečce C_2. Dle **56** (1) máme ukázati, že

$$Sx\, D\xi = S\xi\, Dx, \; Sx\, D^2\xi = S\xi\, D^2x, \; SDx\, D^2\xi = SD\xi\, D^2x,$$

což je správné dle **313**. Ukažme dále, že $C_2 = C[\overset{u}{P}_r]$. Dle **50** stačí ukázati, že $Sz\zeta = 0$, když a jen když $S\overset{u}{P}_r z = 0$. Dle (3), (4), **313** a **316** (1) jest však

$$Sz\,\zeta = 2\mu_0\mu_2 - \mu_1^2 + 2k\,\mu_2^2.$$

Dle (3), **313, 318** (3) a **324** (1) jest

$$S\overset{u}{P}_r z = -2\mu_0\mu_2 + \mu_1^2 - 2k\mu_2^2.$$

326. Buď $C_a x(u)$ regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 5$; buď $n(u)$ druhý unimodulární invariant ar. křivky $C_a x(u)$. Buď $\{x(u_0)\}$ bod křivky $C\{x(u)\}$. Pravíme, že $\{x(u_0)\}$ jest sextaktický bod křivky $C\{x(u)\}$, když $n(u_0) = 0$. Když a jen když existuje kuželosečka obsahující všecky body křivky $C\{x(u)\}$, jsou všecky body křivky $C\{x(u)\}$ sextaktické. Když $C\{x(u)\}$ je třídy $\geqq 5$, jest bod $\{x(u_0)\}$ sextaktický pro

$C\{x(u)\}$, když a jen když oskulační kuželosečka křivky $C\{x(u)\}$ má v tomto bodě s $C\{x(u)\}$ šestibodový styk.

Že oskulační kuželosečka křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$ má s $C\{x(u)\}$ šestibodový styk v $\{x(u_0)\}$, když a jen když $n(u_0)=0$, vychází ze **184** a **324** (3): vskutku $[\xi(u_0)]^3$ nemůže míti v $\{x(u_0)\}$ pětibodový styk s $C\{x(u)\}$, ježto jinak by $\{x(u_0)\}$ byl inflexní pro $C\{x(u)\}$. Odtud je zřejmé, že všecky body kuželosečky jsou sextaktické. Obráceně, je-li identicky $n(u)=0$, vychází ze **324** (3), že přímková forma $\overset{u}{P}_r$ nezávisí na u, takže dle **324** (2) všecky body křivky $C\{x(u)\}$ náležejí pevné kuželosečce.

Norma křivky ($m=2$).

327. Buď $C_a x(u)$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) regulární ar. křivka virtuální třídy $r\geqq 2$. Buď D diferenciální parametr ar. křivky $C_a x(u)$. Buď $\varrho(u)$ (u v $\langle a, b\rangle$) funkce třídy $r-2$ všude různá od nuly. Pak diferenciální parametr ar. křivky $C_a\varrho(u)x(u)$ jest $\frac{1}{\varrho}D$.

Důkaz je snadný.

328. Buď $C_a x(u)$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) regulární ar. křivka virtuální třídy $r\geqq 2$. Buď $\mathfrak{C}_a\xi(u)=\text{Adj. } C_a x(u)$. Buď $\varrho(u)$ (u v $\langle a, b\rangle$) funkce třídy $r-2$ všude různá od nuly. Pak jest

$$\mathfrak{C}_a\rho(u)\,\xi(u)=\text{Adj. } C_a\rho(u)\,x(u).$$

Vychází snadno ze **308** a **327**.

329. Buď $C_a x(u)$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) regulární ar. křivka virtuální třídy $r\geqq 5$. Buď D diferenciální parametr ar. křivky $C_a x$. Buď $\varrho(u)$ (u v $\langle a, b\rangle$) funkce třídy $r-2$ všude různá od nuly. Buď k (n) prvý (druhý) unimodulární invariant ar. křivky $C_a x(u)$; týž význam měj $\bar{k}(\bar{n})$ pro $C_a\varrho x$. Pak jest

$$\bar{k}=\frac{1}{\rho^2}\left[k+\frac{D^2\rho}{\rho}-\frac{3}{2}\left(\frac{D\rho}{\rho}\right)^2\right], \tag{1}$$

$$\bar{n}=\rho^{-3}n. \tag{2}$$

Buď $\bar{D}$ diferenciální parametr ar. křivky $C_a\varrho x$. Buď $\mathfrak{C}_a\xi=\text{Adj. } C_a x$. Dle **316** (1), **317** (1) a **328** jest

$$2\bar{k}=S\bar{D}^2(\rho x)\,\bar{D}^2(\rho\xi),$$

$$2\bar{n}=S[\bar{D}(\rho x),\ \bar{D}^2(\rho x)]\,[\bar{D}(\rho\xi),\ \bar{D}^3(\rho\xi)]-S[\bar{D}(\rho x),\ \bar{D}^3(\rho x)]\,[\bar{D}(\rho\xi),\ \bar{D}^2(\rho\xi)].$$

Dle **327** je však $\bar{D} = \frac{1}{\varrho} D$, tedy

$$\bar{D}(\rho x) = Dx + \frac{D\rho}{\rho} x, \quad \bar{D}^2(\rho x) = \frac{1}{\rho}\left[D^2 x + \frac{D\rho}{\rho} Dx + \left(\frac{D^2\rho}{\rho} - \frac{(D\rho)^2}{\rho^2}\right) x\right]$$

a stejně pro ξ, takže

$$2\bar{k} = \frac{1}{\rho^2} S\left[D^2 x + \frac{D\rho}{\rho} Dx + \left(\frac{D^2\rho}{\rho} - \frac{(D\rho)^2}{\rho^2}\right) x\right]\left[D^2\xi + \frac{D\rho}{\rho} D\xi + \left(\frac{D^2\rho}{\rho} - \frac{(D\rho)^2}{\rho^2}\right)\xi\right],$$

z čehož vychází (1) dle **313** a **316** (1). Dále jest dle **308** (1)

$$[\bar{D}(\rho x), \bar{D}^2(\rho x)] = \frac{1}{\rho}\left[(Dx\, D^2 x) + \frac{D\rho}{\rho} D\xi - \frac{D^2\rho}{\rho}\xi\right]$$

a podobně pro $[\bar{D}(\varrho x), \bar{D}^3(\varrho x)]$. Tedy

$$[\bar{D}(\rho x), \bar{D}^3(\rho x)] = \bar{D}[\bar{D}(\rho x), \bar{D}^2(\rho x)] =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\left[(Dx\, D^3 x) - \frac{D\rho}{\rho}(Dx\, D^2 x) + \frac{D\rho}{\rho} D^2\xi - 2\left(\frac{D\rho}{\rho}\right)^2 D\xi - \left(\frac{D^3\rho}{\rho} - 2\frac{D\rho\, D^2\rho}{\rho^2}\right)\xi\right],$$

takže dle **306** (2), **313** a **316** (2) jest

$$S[\bar{D}(\rho x)\, \bar{D}^3(\rho x)]\,[\bar{D}(\rho\xi)\, \bar{D}^2(\rho\xi)] =$$

$$= \frac{1}{\rho^3}\left[S(Dx\, D^3 x)\,(D\xi\, D^2\xi) + 2\frac{D\rho}{\rho} k - \frac{D^3\rho}{\rho} + 2\frac{D\rho\, D^2\rho}{\rho^2} + 2\frac{(D\rho)^3}{\rho^3}\right].$$

Podobně se nalezne, že

$$S[\bar{D}(\rho x)\, \bar{D}^2(\rho x)]\,[\bar{D}(\rho\xi)\, \bar{D}^3(\rho\xi)] =$$

$$= \frac{1}{\rho^3}\left[S(Dx\, D^2 x)\,(D\xi\, D^3\xi) + 2\frac{D\rho}{\rho} k - \frac{D^3\rho}{\rho} + 2\frac{D\rho\, D^2\rho}{\rho^2} + 2\frac{(D\rho)^3}{\rho^3}\right].$$

Odečtením obdrží se (2).

330. Buď $C\{x(u)\}$ regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 5$ bez sextaktických bodů. Buď $\varepsilon = \pm 1$. Buď n druhý unimodulární invariant ar. křivky $C_a x(u)$. Buď

(1) $$x_{\varepsilon, N} = \varepsilon \sqrt[8]{n} \,.\, x(u).$$

Ar. křivka $C_a x_{\varepsilon, N}$ nazývá se norma křivky $C\{x(u)\}$, a to positivní (negativní) norma, když $\varepsilon = 1$ ($\varepsilon = -1$). Označení

(2) $$C_a x_{\varepsilon, N} = N_\varepsilon C\{x\}.$$

Norma křivky $C\{x\}$ jest regulární ar. křivka virtuální třídy $r - 2$.

Že jsme k této definici oprávněni, plyne ze **329**. Vskutku, když ϱ je funkce třídy 3 a $\varrho \neq 0$, jest $\varrho^{-3}n$ druhý unimodulární invariant pro $C_a \varrho x$, a

$$\varepsilon \sqrt[3]{\varrho^{-3}n} \, . \, \varrho x = \varepsilon \sqrt[3]{n} \, . \, x. \tag{3}$$

331. Je-li $C_a x(u)$ regulární ar. křivka třídy $r \geqq 7$ bez sextaktických bodů, jest $N_\varepsilon C\{x\}$ regulární ar. křivka virtuální třídy $r-3 \geqq 5$, jejíž druhý unimodulární invariant rovná se identicky $\varepsilon = \pm 1$. Obráceně, když druhý unimodulární invariant regulární ar. křivky třídy $r \geqq 5$ rovná se identicky $\varepsilon = \pm 1$, jest $N_\varepsilon C\{x\} = C_a x$.

Prvá část snadno se dokáže; druhá část je zřejmá.

332. Buď $C\{x(u)\}$ regulární křivka třídy $r \geqq 5$ bez sextaktických bodů. Buď

$$C_a x_{\varepsilon, N} = N_\varepsilon C\{x\}. \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

Buď K kolineace ar. bodů. Buď (v. **41**) $K = UP$, kde U jest unimodulární kolineace a P je podobnost. Buď $x \sim x'$ v K, $x_{\varepsilon, N} \sim x'_{\varepsilon, N}$ v U. Pak jest

$$C_a x'_{\varepsilon, N} = N_\varepsilon C\{x'\}.$$

Důkaz je snadný.

333. Buď $C\{x(u)\}$ regulární křivka virtuální třídy $r \geqq 5$ bez sextaktických bodů. Buď $\mathfrak{C}\{\xi\} = \text{Adj.}\, C\{x\}$, $C_a x_{\varepsilon, N} = N_\varepsilon C\{x\}$ $(\varepsilon = \pm 1)$, $\mathfrak{C}_a \xi_{\varepsilon, N} = N_\varepsilon \mathfrak{C}\{\xi\}$. Pak jest

$$\mathfrak{C}_a \xi_{-\varepsilon, N} = \text{Adj.}\, C_a x_{\varepsilon, N}.$$

Vychází snadno odtud, že, když n jest druhý unimodulární invariant pro $C_a x(u)$, $-n$ jest druhý unimodulární invariant pro Adj. $C_a x$ (v. **317**).

334. Buď $C\{x(u)\}$ regulární křivka virtuální třídy $r \geqq 5$ bez sextaktických bodů. Buď $C_a x_{\varepsilon, N} = N_\varepsilon C\{x\}$ $(\varepsilon = \pm 1)$. Normální parametr s_ε ar. křivky $C_a x_{\varepsilon, N}$ nazývá se positivní (když $\varepsilon = 1$) nebo negativní (když $\varepsilon = -1$) normální parametr křivky $C\{x\}$.

Dle **307** (1) jest, je-li n druhý unimodulární invariant pro $C_a x$ a je-li c konstanta:

$$s_\varepsilon = \varepsilon \int_{u_0}^{u} \sqrt[8]{n} \sqrt[3]{\left(x \frac{dx}{du} \frac{d^2 x}{du^2}\right)} du + c. \tag{1}$$

335. Buď s positivní (negativní) normální parametr regulární křivky $C\{x(u)\}$ třídy $r \geqq 5$ bez sextaktických bodů.

Buď $\mathfrak{C}\{\xi(u)\} = \text{Adj.}\ C\{x(u)\}$. Pak s jest negativní (positivní) normální parametr duální křivky $\mathfrak{C}_a\xi(u)$.

Vychází ihned ze **333** a **334**.

336. Buď $C\{x(u)\}$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) regulární křivka třídy $r \geqq 5$ bez sextaktických bodů. Buď $C[\overset{u}{P}_r]$ oskulační kuželosečka křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u)\}$. Buď $s(u)$ positivní normální parametr křivky $C\{x(u)\}$. Jsou-li u_1, u_2 dvě různá čísla z $\langle a+0,\ b-0\rangle$, jest bod $\{x(u_1)\}$, uvnitř (vně) kuželosečky $C[\overset{u_2}{P}_r]$, když $s(u_1)-s(u_2)>0$ ($s(u_1)-s(u_2)<0$).

Definujme $\overset{u}{P}_r$ jako ve **324** (1). Dle **88** bod $\{y\}$ jest uvnitř nebo vně kuželosečky $C[\overset{u}{P}_r]$ dle toho, zda $S\overset{u}{P}_r y<0$ či $S\overset{u}{P}_r y>0$. Máme tedy ukázati, že

$$[s(u_1)-s(u_2)]\ S\overset{u_2}{P}_r x(u_1)<0.$$

Ježto $S\overset{u_1}{P}_r x(u_1)=0$, stačí ukázati, že, je-li $u=\varphi(s)$, $F(s)=S\overset{u}{P}_r x(u_1)$ (u_1 pevné) je stoupající funkce s. Dle **324** (3) a **334** (1) je však

$$\frac{dF}{ds}=2\,|n|^{\frac{2}{3}}\,[S\xi(u)\,x(u_1)]^2.$$

Je tedy $\frac{dF}{ds}\geqq 0$; rovnost nemůže nastati identicky v žádném intervalu; neboť pak by bylo v takovém intervalu identicky v u: $S\xi(u)\,x(u_1)=0$, tedy též $S\frac{d\xi}{du}x(u_1)=0$, $S\frac{d^2\xi}{du^2}x(u_1)=0$, z čehož by vycházelo $\left(\xi\frac{d\xi}{du}\frac{d^2\xi}{du^2}\right)=0$, což je nemožné, neboť dle **193** $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}=\text{Adj.}\ C\{x(u)\}$ jest regulární duální křivka.

Lokální jehlan křivky ($m=2$).

337. Buď $C\{x(u)\}$ regulární křivka virtuální třídy $r\geqq 6$ bez sextaktických bodů. Buď D diferenciální parametr ar. křivky $C_a x(u)$. Buď $\mathfrak{C}_a\xi(u)=\text{Adj.}\ C_a x(u)$. Buď $k(u)$ ($n(u)$) prvý (druhý) unimodulární invariant ar. křivky $C_a x(u)$. Buď

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_0 &= \sqrt[3]{n}\,x,\quad x_1 = Dx+\frac{1}{3}\frac{Dn}{n}x,\\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\left[D^2x+\frac{1}{3}\frac{Dn}{n}Dx+\left\{\frac{1}{18}\left(\frac{Dn}{n}\right)^2-k\right\}x\right]. \end{aligned}$$

Jest

$$(2)\qquad C_a x_0 = N_1 C\{x\},$$

$$(3)\qquad (x_0 x_1 x_2)=1.$$

Jehlan x_0, x_1, x_2 jest křivkou $C\{x(u)\}$ a bodem $\{x(u)\}$ úplně určen; nazývá se lokální jehlan křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u)\}$.

Buď K kolineace ar. bodů; buď $K = UP$, kde U jest unimodulární kolineace a P jest podobnost. Buď $x(u) \backsim x'(u)$ v K; buď $x_i \backsim x'_i$ v $U\,(i = 0, 1, 2)$. Jehlan x'_0, x'_1, x'_2 jest lokální jehlan křivky $C\{x'(u)\}$ v bodě $\{x'(u)\}$.

Buď

$$\xi_0 = -\sqrt[3]{n}\,\xi,\quad \xi_1 = D\xi + \frac{1}{3}\frac{Dn}{n}\xi,$$
$$\xi_2 = -\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\left[D^2\xi + \frac{1}{3}\frac{Dn}{n}D\xi + \left\{\frac{1}{18}\left(\frac{Dn}{n}\right)^2 - k\right\}\xi\right]. \tag{4}$$

Duální jehlan ξ_0, ξ_1, ξ_2 jest lokální duální jehlan duální křivky $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ v přímce $\{\xi(u)\}$. Jest

$$\begin{gathered} Sx_0\xi_0 = 0,\quad Sx_1\xi_0 = 0,\quad Sx_2\xi_0 = -1,\\ Sx_0\xi_1 = 0,\quad Sx_1\xi_1 = -1,\quad Sx_2\xi_1 = 0,\\ Sx_0\xi_2 = -1,\quad Sx_1\xi_2 = 0,\quad Sx_2\xi_2 = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

takže jehlan x_0, x_1, x_2 a duální jehlan $-\xi_2, -\xi_1, -\xi_0$ jsou adjungované.

Přímka $\{x_0 x_2\} = \{\xi_1\}$ nazývá se projektivní normála křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u)\}$.

Buď

$$\overset{u}{P}_r = \xi_1^2 - 2\xi_0\xi_2; \tag{6}$$

$C[\overset{u}{P}_r]$ jest oskulační kuželosečka křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u)\}$. Body $\{x_0\}$, $\{x_2\}$ jsou obsaženy v $C[\overset{u}{P}_r]$; tečny kuželosečky $C[\overset{u}{P}_r]$ v těchto bodech jsou $\{\xi_0\}$, $\{\xi_2\}$.

Že ar. bod x_0 je křivkou $C\{x\}$ a bodem $\{x(u)\}$ úplně určen, viděli jsme ve **330**. Lehko se vidí, že totéž platí o x_1; vskutku, je-li s positivní normální parametr křivky $C\{x\}$, jest patrně $x_1 = \frac{dx_0}{ds}$. Ostatně ze **327** a **329** vychází snadno, že x_1 se nemění, přejdeme-li od $C_a x$ k $C_a \varrho x$. Z duality a ze **333** vychází, že také ar. přímky ξ_0, ξ_1 jsou křivkou $C\{x\}$ a bodem $\{x(u)\}$ úplně určeny.

Rovnice (3) plyne ihned z (1) a **306** (2). Rovnice (5) vycházejí ze **313** a **316** (1).

Ze (4) a **319** (2) se snadno nalezne, že přímková forma $\overset{u}{P}_r$ definovaná v (6) rovná se přímkové formě $\overset{u}{P}_r$ definované ve **324** (1). Snadno se nahlédne, že forma $\overset{u}{P}_r$ jest křivkou $C\{x(u)\}$ a bodem $\{x(u)\}$ úplně určena. Nejprve je zřejmé, že, přejdeme-li od $C_a x$ k $C_a \varrho x$ — čímž nechť $\overset{u}{P}_r$ přejde v $\overset{u}{Q}_r$ — jest $\overset{u}{Q}_r = \varphi(\varrho)\overset{u}{P}_r$. Vskutku $C[\overset{u}{Q}_r] = C[\overset{u}{P}_r]$, neboť dle **324** existuje jen jedna kuželosečka mající v $\{x(u)\}$ pětibodový styk s $C\{x(u)\}$. Viděli jsme však, že x_1 se nemění, přejdeme-li od $C_a x$ k $C_a \varrho x$. Je tedy

$$S\overset{u}{Q}_r x_1 = \varphi(\rho)\, S\overset{u}{P}_r x_1.$$

Avšak dle (5) a (6) jest $S\overset{u}{P}_r x_1 = 1$, a zřejmě je též $S\overset{u}{Q}_r x_1 = 1$. Tedy $\varphi(\varrho) = 1$ a $\overset{u}{P}_r = \overset{u}{Q}_r$, jak tvrzeno.

Z rovnic (5) vidíme snadno, že, přejdeme-li od $C_a x$ k $C_a \varrho x$, přejde ξ_2 v $\xi_2 + \lambda(\varrho)\xi_0$. Je tedy

$$\overset{u}{Q}_r = \xi_1^2 - \xi_0\xi_2 - \lambda\xi_0^2.$$

Ježto $\overset{u}{Q}_r = \overset{u}{P}_r$, jest $\lambda = 0$. Tedy ar. přímka ξ_2 je křivkou $C\{x\}$ a bodem $\{x(u)\}$ úplně určena. Z rovnic (5) vychází, že totéž platí o $x_2 = -(\xi_1\, \xi_2)$.

Z (5) a (6) se snadno nalezne, že body $\{x_0\}$, $\{x_2\}$ jsou obsaženy v $C[\overset{u}{P}_r]$ a že tečny kuželosečky $C[\overset{u}{P}_r]$ v těchto bodech jsou $\{\xi_0\}$, $\{\xi_2\}$;

338. B u ď t e $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ d v ě r e g u l á r n í k ř i v k y t ř í d y $r \geq 6$ b e z s e x t a k t i c k ý c h b o d ů o s p o l e č n é m b o d ě $\{x(u_0)\} = \{y(v_0)\}$. B u ď x_0, x_1, x_2 l o k á l n í j e h l a n k ř i v k y $C\{x\}$ v b o d ě $\{x(u_0)\}$; b u ď y_0, y_1, y_2 l o k á l n í j e h l a n k ř i v k y $C\{y\}$ v t é m ž b o d ě. K d y ž a j e n k d y ž $x_0 = y_0$, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, m a j í k ř i v k y $C\{x\}$ a $C\{y\}$ s e d m i- b o d o v ý s t y k v $\{x(u_0)\}$.

Že podmínka je nutná, vychází snadno ze **178**. Předpokládejme tedy. že $x_0 = y_0$, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$. Ze **337** je patrné, že $C\{x\}$ a $C\{y\}$ mají v $\{x(u_0)\}$ touž oskulační kuželosečku, z čehož se ihned vidí, že $C\{x\}$ a $C\{y\}$ mají pětibodový styk v $\{x(u_0)\}$. Dle **178** můžeme tedy předpokládati, že

$$\left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0}. \qquad \left(0 \leq \alpha \leq 4;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right) \tag{1}$$

Buď D (Δ) diferenciální parametr ar. křivky $C_a x$ ($C_a y$). Buď $\mathfrak{C}_a \xi(u) = $ Adj. $C_a x(u)$, $\mathfrak{C}_a \eta(v) = $ Adj. $C_a y(v)$. Buď $k(u)(n(u))$ prvý (druhý) unimodulární invariant ar. křivky $C_a x(u)$; týž význam pro $C_a y(v)$ mějte $k'(v)$, $n'(v)$. Ježto ar. body

$$x(u_0),\ \left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_0},\ \left(\frac{d^2x}{du^2}\right)_{u=u_0}$$

jsou lin. nezávislé, jest

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\left(\frac{d^5 y}{dv^5}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^5 x}{du^5}\right)_{u=u_0} &= \lambda_0 x(u_0) + \lambda_1 \left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_0} + \lambda_2 \left(\frac{d^2 x}{du^2}\right)_{u=u_0},\\
\left(\frac{d^6 y}{dv^6}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^6 x}{du^6}\right)_{u=u_0} &= \mu_0 x(u_0) + \mu_1 \left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_0} + \mu_2 \left(\frac{d^2 x}{du^2}\right)_{u=u_0}.
\end{aligned}
$$

Pro zkrácení položme

$$
\left(x(u_0), \left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_0}, \left[\frac{d^2x}{du^2}\right]_{u=u_0}\right) = \alpha \neq 0.
$$

Z (1) a (2) obdržíme po snadném počtu, že pro $u = u_0$, $v = v_0$ jest

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&y = x,\ \Delta y = Dx,\ \Delta^2 y = D^2 x,\ \Delta^3 y = D^3 x,\\
&\Delta^4 y - D^4 x = -\frac{1}{3}\lambda_2 \alpha^{-\frac{10}{8}} \frac{dx}{du},\\
&\Delta^5 y - D^5 x = \lambda_0 \alpha^{-\frac{5}{8}} x - \frac{2}{3}\lambda_2 \alpha^{-\frac{5}{8}} \frac{d^2 x}{du^2} +\\
&+ \left[\left(2\lambda_1 - \frac{1}{3}\mu_2\right)\alpha^{-\frac{5}{8}} + \frac{23}{9}\left(x \frac{dx}{du} \frac{d^3 x}{du^3}\right)\lambda_2 \alpha^{-\frac{8}{8}}\right]\frac{dx}{du}.
\end{aligned}
$$

Ze (3) a **308** (1) se nalezne, že pro $u = u_0$, $v = v_0$ jest

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
&\eta = \xi,\ \Delta\eta = D\xi,\ \Delta^2\eta = D^2\xi,\\
&\Delta^3\eta - D^3\xi = -\frac{1}{3}\lambda_2 \alpha^{-3}\xi,\\
&\Delta^4\eta - D^4\xi = \left[\left(2\lambda_1 - \frac{1}{3}\mu_2\right)\alpha^{-\frac{4}{8}} + \frac{7}{3}\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^3x}{du^3}\right)\lambda_2\alpha^{-\frac{7}{8}}\right]\xi - \frac{2}{3}\lambda_2\alpha^{-1}D\xi.
\end{aligned}
$$

Ze (3), (4), **90, 313, 316** (1) a **317** (1) se nalezne, že pro $u = u_0$, $v = v_0$ jest

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
&n' - n = \frac{1}{6}\lambda_2\alpha^{-3},\\
&\Delta n' - Dn = -\frac{7}{3}\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^3x}{du^3}\right)\lambda_2\alpha^{-\frac{7}{8}} - \left(2\lambda_1 - \frac{1}{3}\mu_2\right)\alpha^{-\frac{4}{8}}.
\end{aligned}
$$

Ježto $x_0 = y_0$, $x_1 = y_1$, vychází z (5) a **337** (1), že

$$
(6)\qquad \lambda_2 = 0,\quad \mu_2 = 6\lambda_1.
$$

Z (1), (2) a (6) vychází dle **179,** že $C\{x\}$ a $C\{y\}$ mají sedmibodový styk v $\{x(u_0)\}$.

339. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ dvě regulární křivky třídy $r \geqq 6$. Bod $\{x(u_0)\}$ křivky $C\{x(u)\}$ (bod $\{y(v_0)\}$ křivky $C\{y(v)\}$)

nebuď sextaktický. Existuje kolineace K ar. bodů, v níž $\{y(v_0)\} \sim \{x(u_0)\}$ a jež je taková, že, když $y(v) \sim y'(v)$ v K, křivky $C\{x(u)\}$ a $C\{y'(v)\}$ mají sedmibodový styk v $\{x(u_0)\}$.

Buď x_0, x_1, x_2 lokální jehlan křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$; buď y_0, y_1, y_2 lokální jehlan křivky $C\{y(v)\}$ v bodě $\{y(v_0)\}$. Žádanou vlastnost má dle **338** ta kolineace, v níž $y_0 \sim x_0$, $y_1 \sim x_1$, $y_2 \sim x_2$.

Projektivní křivost ($m = 2$).

340. Buď $C\{x(u)\}$ regulární křivka virtuální třídy $r \geqq 7$. Buď D diferenciální parametr ar. křivky $C_a x$. Buďte $k(u)$ a $n(u)$ první a druhý unimodulární invariant ar. křivky $C_a x(u)$. Buď

$$(1) \qquad \varkappa(u) = |n|^{-\frac{2}{3}}\left[k + \frac{1}{3}\frac{D^2 n}{n} - \frac{7}{18}\left(\frac{Dn}{n}\right)^2\right].$$

Hodnota výrazu $\varkappa(u)$ pro dané u jest křivkou $C\{x\}$ a bodem $\{x(u)\}$ úplně určena; pravíme, že $\varkappa(u)$ je projektivní křivost křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u)\}$. Projektivní křivost duální křivky Adj. $C\{x(u)\}$ jest rovněž $\varkappa(u)$.

Buď K kolineace ar. bodů; buď $x(u) \sim x'(u)$ v K; pak $\varkappa(u)$ je také projektivní křivost křivky $C\{x'(u)\}$ v bodě $\{x'(u)\}$.

Že $\varkappa$ se nemění, přejdeme-li od $C_a x$ k $C_a \varrho x$, vychází snadno ze **327** a **329.** Že $\varkappa$ se nemění kolineacemi, je zřejmé. Ze **309, 316** a **317** je patrné, že $\varkappa(u)$ je projektivní křivost duální křivky Adj. $C\{x\}$.

341. Buď $C\{x(u)\}$ regulární křivka třídy $r \geqq 7$ bez sextaktických bodů. Buď s_1 (s_{-1}) positivní (negativní) normální parametr křivky $C\{x(u)\}$. Buď $\varkappa$ projektivní křivost křivky $C\{x(u)\}$. Buď x_0, x_1, x_2 lokální jehlan křivky $C\{x(u)\}$. Buď ξ_0, ξ_1, ξ_2 lokální duální jehlan duální křivky Adj. $C\{x(u)\}$. Buď $\varepsilon = \pm 1$. Platí rovnice

$$(1) \qquad \frac{dx_0}{ds_\varepsilon} = \varepsilon x_1, \quad \frac{dx_1}{ds_\varepsilon} = \varepsilon(x_2 + \varkappa x_0), \quad \frac{dx_2}{ds_\varepsilon} = \varepsilon(\varkappa x_1 + x_0),$$

$$(2) \qquad \frac{d\xi_0}{ds_\varepsilon} = -\varepsilon\xi_1, \quad \frac{d\xi_1}{ds_\varepsilon} = -\varepsilon(\xi_2 + \varkappa\xi_0), \quad \frac{d\xi_2}{ds_\varepsilon} = -\varepsilon(\varkappa\xi_1 + \xi_0).$$

Stačí dokázati rovnice (1); vskutku dle **335** rovnice (2) obdrží se z (1) dle principu duality. Ježto $s_{-1} + s_1 =$ konstantě, můžeme předpokládati, že $\varepsilon = 1$. Dle **334** (1) jest $\dfrac{d}{ds_1} = n^{-\frac{1}{3}} D$. Ze **319** (1), (3) a **337** (1) obdrží se po snadném počtu rovnice (1).

342. Buď $C\{x(u)\}$ regulární křivka třídy $r \geqq 6$ bez sextaktických bodů. Buď ξ_0, ξ_1, ξ_2 lokální duální jehlan duální křivky Adj. $C\{x(u)\}$. Buď

$$\overset{u}{P}_r = 5\xi_1(\xi_1^2 - 2\xi_0\xi_2) + 4\xi_0^3. \tag{1}$$

Buď $\{x(u_0)\}$ bod křivky $C\{x(u)\}$. Algebraická křivka $C[\overset{u_0}{P}_r]$ má tyto vlastnosti, jimiž jest úplně určena: 1^0 má v $\{x(u_0)\}$ dvojný bod; 2^0 jedna její větev má v $\{x(u_0)\}$ sedmibodový styk s $C\{x(u)\}$; 3^0 přímková forma $\overset{u_0}{P}_r$ je stupně 3. Tečnou druhé větve algebraické křivky $C[\overset{u_0}{P}_r]$ v $\{x(u_0)\}$ jest projektivní normála křivky $C\{x(u)\}$ v tomto bodě.

Stačí provésti důkaz za předpokladu, že $r \geqq 8$. Buď s positivní normální parametr křivky $C\{x(u)\}$. Buď $\varkappa$ projektivní křivost křivky $C\{x(u)\}$. Dle (1) a **341** (2) jest

$$\frac{d}{ds}\overset{u}{P}_r = -5(\xi_2 + \varkappa\xi_0)(\xi_1^2 - 2\xi_0\xi_2) - 2\xi_0^2\xi_1 \tag{2}$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\overset{u}{P}_r = \left[10\varkappa\xi_1 + \left(9 - 5\frac{d\varkappa}{ds}\right)\xi_0\right](\xi_1^2 - 2\xi_0\xi_2) - 8\varkappa\xi_0^3. \tag{3}$$

Forma ξ_0 má zřejmě v $\{x(u)\}$ dvojbodový styk s $C\{x\}$; dle **174** má tedy forma ξ_0^3 v $\{x(u)\}$ šestibodový styk s $C\{x\}$. Forma v hranaté závorce napravo ve (3) má zřejmě v $\{x(u)\}$ jednobodový styk s $C\{x\}$; dle **337** (6) má forma $\xi_1^2 - 2\xi_0\xi_2$ v $\{x(u)\}$ pětibodový styk s $C\{x\}$. Tedy dle (3) forma $\frac{d^2}{ds^2}\overset{u}{P}_r$ má v $\{x(u)\}$ šestibodový styk s $C\{x\}$. Dle (2) jest forma (2) incidentní s $\{x(u)\}$; dle **183** má tedy $\frac{d}{ds}\overset{u}{P}_r$ v $\{x(u)\}$ sedmibodový styk s $C\{x\}$. Forma (1) je zřejmě incidentní s $\{x(u)\}$; tedy — opět dle **183** — má $\overset{u}{P}_r$ v $\{x(u)\}$ osmibodový styk s $C\{x\}$.

Dle **170, 171, 188, 189** a **337** má $C[\overset{u}{P}_r]$ dvojný bod v $\{x(u)\}$, jedna její větev má v $\{x(u)\}$ sedmibodový styk s $C\{x\}$ a tečnou druhé větve v $\{x(u)\}$ jest projektivní normála křivky $C\{x\}$ v tomto bodě.

Buď nyní Q_r přímková forma třetího stupně, mající v $\{x(u)\}$ osmibodový styk s $C\{x\}$ a taková, že algebraická křivka $C[Q_r]$ má v $\{x(u)\}$ dvojný bod. Ze **188** snadno vychází, že tečnou jedné větve algebraické křivky $C[P_r]$ v $\{x(u)\}$ jest $\{\xi_0\}$, takže dle **188**

$$Q_r = a\xi_0^2\xi_2 + b\xi_0\xi_1\xi_2 + A\xi_0^3 + B\xi_0^2\xi_1 + C\xi_0\xi_1^2 + D\xi_1^3.$$

Ježto Q_r má v $\{x(u)\}$ osmibodový styk s $C\{x\}$, snadno se vidí, že forma

$\xi_1(b\xi_0\xi_2 + D\xi_1^2)$ má v $\{x(u)\}$ čtyřbodový styk s $C\{x\}$, z čehož bez obtíže se odvodí, že

$$b + 2D = 0. \tag{4}$$

Ze (4) vychází, že forma $\xi_1(b\xi_0\xi_2 + D\xi_1^2)$ má v $\{x(u)\}$ šestibodový styk s $C\{x\}$. Odtud snadno se vidí, že forma $\xi_0(a\xi_0\xi_2 + C\xi_1^2)$ má v $\{x(u)\}$ pětibodový styk s $C\{x\}$, z čehož plyne, že

$$a + 2C = 0. \tag{5}$$

Z (5) vychází, že forma $\xi_0(a\xi_0\xi_2 + C\xi_1^2)$ má v $\{x(u)\}$ sedmibodový styk s $C\{x\}$. Odtud snadno se vidí, že forma $B\xi_0^2\xi_1$ má v $\{x(u)\}$ šestibodový styk s $C\{x\}$, což jen tak je možné, že

$$B = 0. \tag{6}$$

Dle (1), (4), (5) a (6) jest

$$A\overset{u}{P}_r - 4Q_r = [(5A - 4D)\xi_1 - 4C\xi_0](\xi_1^2 - 2\xi_0\xi_2). \tag{7}$$

Forma $A\overset{u}{P}_r - 4Q_r$ má v $\{x(u)\}$ osmibodový styk s $C\{x\}$; ježto $C\{x(u)\}$ nemá sextaktických bodů, má forma $\xi_1^2 - 2\xi_0\xi_2$ v $\{x(u)\}$ právě pětibodový styk s $C\{x\}$. Tedy ar. přímka

$$(5A - 4D)\xi_1 - 4C\xi_0$$

má v $\{x(u)\}$ trojbodový styk s $C\{x\}$; tato ar. přímka je tedy nulová, ježto $C\{x\}$ jest regulární. Tedy dle (7)

$$Q_r = \tfrac{1}{4}A\overset{u}{P}_r, \quad C[Q_r] = C[\overset{u}{P}_r].$$

343. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ dvě regulární křivky třídy $r+6$ ($r \geq 1$) bez sextaktických bodů. Buď s (s') positivní normální parametr křivky $C\{x(u)\}$ ($C\{y(v)\}$). Buď $\varkappa$ ($\varkappa'$) projektivní křivost této křivky. Buď $\{x(u_0)\}$ ($\{y(v_0)\}$) bod křivky $C\{x(u)\}$ ($C\{y(v)\}$). Když a jen když

$$\left(\frac{d^\alpha\varkappa}{ds^\alpha}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^\alpha\varkappa'}{ds'^\alpha}\right)_{v=v_0}, \qquad \left(0 \leq \alpha \leq r-1;\ \frac{d^0}{ds^0} = \frac{d^0}{ds'^0} = 1\right) \tag{1}$$

existuje kolineace K, v níž $\{y(v_0)\} \sim \{x(u_0)\}$, $y(v) \sim y'(v)$ a jež je taková, že křivky $C\{x(u)\}$ a $C\{y'(v)\}$ mají $(r+7)$-bodový styk v $\{x(u_0)\}$.

Že podmínka je nutná, vychází snadno ze **178**. Předpokládejme tedy, že rovnice (1) jsou splněny. Dle **338** a **339** můžeme předpokládati, že $C\{x(u)\}$ a $C\{y(v)\}$ mají sedmibodový styk v $\{x(u_0)\} = \{y(v_0)\}$; máme pak ukázati, že tento styk jest $(r+7)$-bodový. Dokazujíce indukcí, můžeme míti za dokázáno, že styk jest $(r+6)$-bodový, takže dle **178** můžeme předpokládati, že

$$\left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0}. \qquad \left(0 \leq \alpha \leq r+5;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right) \tag{2}$$

Ježto $C\{x(u)\}$ jest regulární, jest

$$\left(\frac{d^{r+6}y}{dv^{r+6}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{r+6}x}{du^{r+6}}\right)_{u=u_0} = \lambda_0\, x(u_0) + \lambda_1 \left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_0} + \lambda_2 \left(\frac{d^2x}{du^2}\right)_{u=u_0}. \tag{3}$$

Dle **179** stačí ukázati, že $\lambda_2 = 0$. Dle (1), (2), **316** (1), **317** (1), **334** (1) a **340** (1) jest, je-li $\mathfrak{C}_a\xi = \text{Adj. } C_a x$, $\mathfrak{C}_a\eta = \text{Adj. } C_a y$, je-li $D(D')$ diferenciální parametr a $n(n')$ druhý unimodulární invariant ar. křivky $C_a x(u)$ $(C_a y(v))$:

$$0 = \left(\frac{d^{r-1}\varkappa'}{ds'^{r-1}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{r-1}\varkappa}{ds^{r-1}}\right)_{u=u_0} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[n(u_0)\right]^{-\frac{r+4}{8}} \left\{\left[D'^{r+1} n'(v)\right]_{v=v_0} - \left[D^{r+1} n(u)\right]_{u=u_0}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{1}{6} n^{-\frac{r+4}{3}} S(DxD^2x)(D\xi,\ D'^{r+4}\eta - D^{r+4}\xi)\right\}_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}},$$

tedy, ježto $C\{x\}$ nemá sextaktických bodů,

$$\left\{S(DxD^2x)(D\xi,\ D'^{r+4}\eta - D^{r+4}\xi)\right\}_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}} = 0. \tag{4}$$

Položme

$$\left(x(u_0),\ \left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_0},\ \left[\frac{d^2x}{du^2}\right]_{u=u_0}\right) = \alpha \neq 0.$$

Dle (2), (3) a **308** (1) jest

$$(D'^{r+4}\eta)_{v=v_0} - (D^{r+4}\xi)_{u=u_0} = -\frac{\lambda_2}{3}\alpha^{-\frac{r+5}{8}}\xi(u_0),$$

takže dle (4) a **310** (1) jest

$$\lambda_2\left[S(DxD^2x)(\xi D\xi)\right]_{u=u_0} = \lambda_2\left(xDxD^2x\right)_{u=u_0} = 0,$$

tedy $\lambda_2 = 0$ dle **306** (2).

344. Buďte $C\{x(u)\}$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) a $C\{y(v)\}$ (v v $\langle \alpha+0, \beta-0\rangle$) dvě regulární křivky virtuální třídy $r \geqq 7$ bez sextaktických bodů. Buď $s(u)$ positivní normální parametr křivky $C\{x\}$; buď $\varkappa(u)$ projektivní křivost křivky $C\{x\}$. Když a jen když existuje funkce $\varphi(v)$ třídy r v $\langle\alpha,\beta\rangle$ taková, že $1^0\ \frac{d\varphi}{dv} \neq 0$ všude v $\langle\alpha,\beta\rangle$; $2^0\ \varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ nebo $\varphi(\alpha)=b$, $\varphi(\beta)=a$; $3^0\ s[\varphi(v)]$ jest positivní normální parametr křivky $C\{y\}$; $4^0\ \varkappa[\varphi(v)]$ jest projektivní křivost křivky $C\{y\}$: existuje kolineace K ar. bodů, v níž $C\{x\} \sim C\{y\}$.

Že podmínky jsou nutné, dokáže se snadno; předpokládejme tedy, že jsou splněny. Dle **161** můžeme předpokládati, že $\alpha=a$, $\beta=b$, $\varphi(v)=v$. Buď x_0, x_1, x_2 (y_0, y_1, y_2) lokální jehlan křivky $C\{x\}$ ($C\{y\}$). Dle **341** jest

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\frac{dx_0}{ds}=x_1, \quad \frac{dx_1}{ds}=x_2+\varkappa x_0, \quad \frac{dx_2}{ds}=\varkappa x_1+x_0, \\ &\frac{dy_0}{ds}=y_1, \quad \frac{dy_1}{ds}=y_2+\varkappa y_0, \quad \frac{dy_2}{ds}=\varkappa y_1+y_0. \end{aligned}$$

Dle (1) a **68** existuje žádaná kolineace K.

Rovinné křivky ($m=3$).

345. Ve všech následujících odstavcích předpokládáme $m=3$.

Buď ξ vlastní ar. rovina; buď T prostor dvojrozměrných ar. bodů. Buď $C\{x(u)\}$ křivka, jejíž všecky body jsou incidentní s ξ (rovinná křivka; v. **197**). Buď $\mathfrak{K}$ projektivní korespondence mezi Adj. ξ a T o jednotce ξ; buď $\mathfrak{K}^* =$ Ass. $\mathfrak{K}$. Buď $x(u) \sim \bar{x}(u)$ v $\mathfrak{K}$. Teorie křivky $C\{\bar{x}(u)\}$ podaná v předchozích odstavcích dá se dle **151** pomocí korespondencí $\mathfrak{K}$ a $\mathfrak{K}^*$ přenésti na $C\{x(u)\}$. Na př. nazveme normálním parametrem křivky $C\{x(u)\}$ normální parametr křivky $C\{\bar{x}(u)\}$. Je-li $C_a\bar{x}_N$ positivní norma křivky $C\{\bar{x}\}$ a $x_N \sim \bar{x}_N$ v $\mathfrak{K}$, nazveme $C_a x_N$ positivní normou křivky $C\{x\}$ vzhledem k ar. rovině ξ; také můžeme přenésti pojem oskulační kuželosečky atd.

Aritmetické křivky v trojrozměrném prostoru.

346. Buď $C_a x(u)$ ar. křivka. (Buď $C\{x(u)\}$ křivka.) Ve **158** (ve **161**) jsme udali podmínky, kdy proměnná $v=\varphi(u)$ jest parametrem pro $C_a x$ (pro $C\{x\}$). Často jest výhodné považovati $\varphi(u)$ za parametr jen tehdy, když $\frac{d\varphi}{du}>0$; pravíme pak, že ar. křivka $C_a x$ (křivka $C\{x\}$) jest orientována. Orientovati ar. křivku (křivku) lze zřejmě dvěma a jen dvěma způsoby; mluvíme o dvou opačně orientovaných ar. křivkách (křivkách). Je-li u parametr orientované ar. křivky (orientované křivky), jest $-u$ parametr opačně orientované ar. křivky (křivky).

347. Buď $C_a x(u)$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) regulární ar. křivka třídy $r\geqq 3$. Pravíme, že $C_a x(u)$ jest virtuální třídy $r+3$, když:

1° souřadnice ar. přímky $\left(x\dfrac{dx}{du}\right)$ jsou funkce třídy r v $\langle a, b\rangle$;

2° souřadnice ar. roviny $\left(x\dfrac{dx}{du}\dfrac{d^2x}{du^2}\right)$ jsou funkce třídy r v $\langle a, b\rangle$;

3° výraz $\left(x\dfrac{dx}{du}\dfrac{d^2x}{du^2}\dfrac{d^3x}{du^3}\right)$ jest funkce třídy r v $\langle a, b\rangle$.

Snadno se vidí, že, když $C_a x$ je třídy $r+3$ a když $\varrho(u)=\varrho$ je funkce třídy r, ar. křivka $C_a \varrho x$ jest virtuální třídy $r+3$. Tím jsme vedeni k tomuto rozšíření pojmu virtuální třídy.

Buď $C_a x(u)$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) regulární ar. křivka třídy r ($3\leqq r\leqq 5$). Buď $\varrho=\varrho(u)$ funkce třídy $r-3$ v $\langle a, b\rangle$. Pravíme, že $C_a \varrho x$ jest regulární ar. křivka virtuální třídy r. V tomto případě pod symboly:

$$\left(\rho x, \frac{d(\rho x)}{du}\right), \quad \left(\rho x, \frac{d(\rho x)}{du}, \frac{d^2(\rho x)}{du^2}\right), \quad \left(\rho x, \frac{d(\rho x)}{du}, \frac{d^2(\rho x)}{du^2}, \frac{d^3(\rho x)}{du^3}\right),$$

jež samy o sobě nemusí míti význam, rozumíme resp.:

$$\rho^2\left(x\frac{dx}{du}\right), \quad \rho^3\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right), \quad \rho^4\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right).$$

O křivce $C\{x(u)\}$ pravíme, že jest virtuální třídy $r\geqq 5$, když ar. křivka $C_a x(u)$ jest virtuální třídy r.

348. Buď $C_a x(u)$ regulární ar. křivka virtuální třídy $r\geqq 3$. Buď

$$\omega = \operatorname{sgn}\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right) = \pm 1. \tag{1}$$

Pravíme, že ω je znamení ar. křivky $C_a x(u)$. Pravíme též, že ω je znamení křivky $C\{x(u)\}$.

Snadno se vidí, že ω se nemění, ani když od u přejdeme k jinému parametru $v=\varphi(u)$, ani když od ar. křivky $C_a x$ přejdeme k ar. křivce $C\{x\}$.

349. Buď $C_a x(u)$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) orientovaná regulární ar. křivka virtuální třídy $r\geqq 3$. Buď $\varphi(u)$ (u v $\langle a, b\rangle$) funkce třídy $s\geqq 1$. Buď

$$D\varphi = \frac{1}{\sqrt[6]{\left|\left(x\dfrac{dx}{du}\dfrac{d^2x}{du^2}\dfrac{d^3x}{du^3}\right)\right|}}\frac{d\varphi}{du}. \tag{1}$$

Když $r \geqq n+2$, $s \geqq n > 1$, buď

$$D^2\varphi = D(D\varphi),\ D^3\varphi = D(D^2\varphi),\ \ldots\ D^n\varphi = D(D^{n-1}\varphi).$$

Když $r \geqq 5$, jest

(2) $$(x\,Dx\,D^2x\,D^3x) = \omega,$$

při čemž ω je znamení ar. křivky $C_a x$. Operace D nazývá se diferenciální parametr orientované ar. křivky $C_a x(u)$. Diferenciální parametr D jest nezávislý na volbě parametru u orientované ar. křivky $C_a x(u)$: je-li také $v = \varphi(u)$ parametr orientované ar. křivky $C_a x(u)$ — tedy $\frac{d\varphi}{du} > 0$ — a je-li $\varphi(u) = \psi(v)$, jest $D\varphi = D\psi$. Diferenciální parametr opačně orientované ar. křivky $C_a x(-v)$ jest $-D$.

Důkaz je snadný.

350. Buď v parametr orientované regulární ar. křivky $C_a x(u)$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) virtuální třídy $r \geqq 3$; buď D její diferenciální parametr. Pravíme, že v jest normální parametr orientované ar. křivky $C_a x(u)$, když $Dv = 1$ (u v $\langle a, b\rangle$). Buď $a \leqq u_0 \leqq b$; buď c libovolná konstanta. Pak

(1) $$v = \int_{u_0}^{u} \frac{du}{Du} + c = \int_{u_0}^{u} \sqrt[6]{\left|\left(x \frac{dx}{du}\, \frac{d^2x}{du^2}\, \frac{d^3x}{du^3}\right)\right|}\, du + c$$

jest normální parametr orientované ar. křivky $C_a x(u)$ a $-v$ jest normální parametr opačně orientované ar. křivky.

Důkaz je snadný.

351. Buď $C_a x(u)$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) orientovaná regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 4$. Buď D její diferenciální parametr. Buď

(1) $$p(u) = (x\,Dx).$$

Množství ar. přímek $p(u)$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) jest rozvinutelná ar. osnova $\Gamma_a p(u)$ třídy $r-3$. Pravíme, že ar. osnova $\Gamma_a p(u)$ jest asociována k orientované ar. křivce $C_a x(u)$ a píšeme

$$\Gamma_a p(u) = \mathrm{Ass.}\ C_a x(u).$$

Jest též

$$\Gamma\left\{p(u)\right\} = \mathrm{Ass.}\ C\left\{x(u)\right\}.$$

K opačně orientované ar. křivce $C_a x(-v)$ jest asociována ar. osnova $\Gamma_a - p$.

Důkaz je snadný.

352. Buď $C_a x(u)$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) orientovaná regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 6$. Buď D její diferenciální parametr. Buď ω znamení křivky $C\{x\}$. Buď

(1) $$\xi(u) = \omega\,(x\,Dx\,D^2x).$$

Množství ar. rovin $\xi(u)$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) jest regulární duální ar. křivka $\mathfrak{C}_a \xi(u)$ virtuální třídy r. Pravíme, že orientovaná duální ar. křivka $\mathfrak{C}_a \xi(u)$ jest adjungována k orientované ar. křivce $C_a x(u)$ a píšeme

$$\mathfrak{C}_a \xi(u) = \text{Adj. } C_a x(u).$$

Jest též

$$\mathfrak{C}\left\{\xi(u)\right\} = \text{Adj. } C\left\{x(u)\right\}.$$

K opačně orientované ar. křivce $C_a x(-v)$ jest adjungována duální ar. křivka $\mathfrak{C}_a \xi(-v)$. Ar. rovina $\xi(u)$ dá se definovati, kdykoli $r \geqq 3$.

Vychází snadno ze **201** a **202** (v. též **353** (1)).

353. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 6$. Buď D její diferenciální parametr. Buď ω znamení křivky $C\{x(u)\}$. Buď $\mathfrak{C}_a \xi(u) = \text{Adj. } C_a x(u)$. Pak ω je znamení duální křivky $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ a D je diferenciální parametr orientované duální ar. křivky $\mathfrak{C}_a \xi(u)$.

Dle **352** (1) jest

(1) $$\xi(u) = \frac{1}{\sqrt{\left|\left(x \dfrac{dx}{du} \dfrac{d^2x}{du^2} \dfrac{d^3x}{du^3}\right)\right|}} \left(x \frac{dx}{du} \frac{d^2x}{du^2}\right),$$

takže dle **202** (4) jest

$$\left(\xi \frac{d\xi}{du} \frac{d^2\xi}{du^2} \frac{d^3\xi}{du^3}\right) = \left(x \frac{dx}{du} \frac{d^2x}{du^2} \frac{d^3x}{du^3}\right),$$

čímž teorém je dokázán. Povšimněme si, že dle **349** (2) jest

(2) $$(\xi\,D\xi\,D^2\xi\,D^3\xi) = \omega.$$

354. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 6$. Buď ω znamení křivky $C\{x\}$. Buď

$$\Gamma_a p(u) = \text{Ass. } C_a x(u),$$
$$\mathfrak{C}_a \xi(u) = \text{Adj. } C_a x(u).$$

Pak jest

(1) $$\Gamma_a\, \omega p(u) = \text{Ass. } \mathfrak{C}_a \xi(u),$$
$$C_a - x(u) = \text{Adj. } \mathfrak{C}_a \xi(u).$$

Buď D diferenciální parametr pro $C_a x(u)$ a tedy dle **353** též pro $\mathfrak{C}_a \xi(u)$. Ze **201** (2), **202** (3), **349** (1) a **353** (1) se snadno nalezne, že

$$(\xi D\xi) = \omega (x Dx), \tag{2}$$
$$(\xi D\xi D^2\xi) = -\omega x. \tag{3}$$

Ze (2), (3), **351** (1) a **352** (1) vychází (1).

355. Buď $C_a x(u)$ regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 3$. Buď ω znamení křivky $C\{x\}$. Buď K kolineace ar. bodů. Buď $x(u) \sim x'(u)$ v K. Znamení křivky $C\{x'(u)\}$ jest ω $(-\omega)$, když K jest positivní (negativní) kolineace.

Zřejmé.

356. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 6$. Buď

$$\Gamma_a p(u) = \text{Ass.}\, C_a x(u),$$
$$\mathfrak{C}_a \xi(u) = \text{Adj.}\, C_a x(u).$$

Buď K unimodulární kolineace ar. bodů; buď $K' = \text{Adj.}\, K$, $K^* = \text{Ass.}\, K$. Buď $x(u) \sim x'(u)$ v K; buď $p(u) \sim p'(u)$ v K^*; buď $\xi(u) \sim \xi'(u)$ v K'. Pak jest

$$\Gamma_a p'(u) = \text{Ass.}\, C_a x'(u),$$
$$\mathfrak{C}_a \xi'(u) = \text{Adj.}\, C_a x'(u).$$

Důkaz je snadný (v. **311**).

357. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 6$. Buď D její diferenciální parametr. Buď $\mathfrak{C}_a \xi(u) = \text{Adj.}\, C_a x(u)$. Pak jest

$$\begin{aligned} &Sx\xi = 0, \quad SxD\xi = 0, \quad SxD^2\xi = 0, \quad SxD^3\xi = -1, \\ &S\xi Dx = 0, \quad SDxD\xi = 0, \quad SDxD^2\xi = 1, \quad S\xi D^3x = 1, \\ &S\xi D^2x = 0, \quad SD^2xD\xi = -1, \quad SD^2xD^2\xi = 0, \\ &SD^3xD\xi = 0, \quad SDxD^3\xi = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Rovnice

$$S\xi x = 0, \quad S\xi Dx = 0, \quad S\xi D^2x = 0$$

vycházejí ze **352** (1). Z téže rovnice a ze **349** (2) vychází rovnice $S\xi D^3x = 1$. Rovnice

$$SxD\xi = 0, \quad SxD^2\xi = 0$$

vycházejí ze **354** (3). Z téže rovnice a ze **353** (2) vychází rovnice $SxD^3\xi = -1$. Ježto

$$0 = D(S\xi D^2x) = S\xi D^3x + SD^2xD\xi,$$
$$0 = D(SxD^2\xi) = SxD^3\xi - SDxD^2\xi,$$

jest

$$SD^2x\,D\xi = -1, \quad SDx\,D^2\xi = 1.$$

Dále jest ukázati, že $S\,D^2\,x\,D^2\,\xi = 0$. Dle **354** (2) je však $(\xi\,D^2\,\xi) = = \omega\,(x\,D^2 x)$, takže dle **102** $\{\xi,\,D^2\xi\} = \text{Adj.}\ \{x,\,D^2x\}$, takže ar. rovina $D^2\xi$ je vskutku incidentní s ar. bodem D^2x. Konečně jest

$$SD^3x\,D\xi = D\,(SD^2x\,D\xi) - SD^2x\,D^2\xi = 0,$$
$$SDx\,D^3\xi = D\,(SDx\,D^2\xi) - SD^2x\,D^2\xi = 0.$$

358. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 6$. Buď

$$\mathfrak{C}\{\eta(u)\} = \text{Adj.}\,C\,\{x(u)\}. \tag{1}$$

Když a jen když

$$S\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^2\eta}{du^2} = 0, \tag{2}$$

existuje konstanta λ taková, že

$$\mathfrak{C}_a\frac{1}{\lambda}\,\eta\,(u) = \text{Adj.}\ C_a\,x\,(u). \tag{3}$$

Z (1) snadno vychází, že

$$S\frac{dx}{du}\frac{d\eta}{du} = 0. \tag{4}$$

Buď $\mu = \mu(u) \neq 0$ funkce třídy 1; buď $\Delta = \mu\dfrac{d}{du}$. Pak jest

$$\Delta x = \mu\frac{dx}{du}, \quad \Delta^2 x = \Delta\left(\mu\frac{dx}{du}\right) = \mu^2\frac{d^2x}{du^2} + \Delta\mu\,.\,\frac{dx}{du}$$

a stejně pro η. Tedy

$$S\Delta^2 x\,\Delta^2\eta = \mu^4 S\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^2\eta}{du^2} + \mu^2\Delta\mu\frac{d}{du}\left(S\frac{dx}{du}\frac{d\eta}{du}\right) + (\Delta\mu)^2\,S\frac{dx}{du}\frac{d\eta}{du},$$

takže dle (4)

$$S\Delta^2x\,\Delta^2\eta = \mu^4\,S\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^2\eta}{du^2}.$$

Klademe-li

$$\mu = \frac{1}{\sqrt[6]{\left|\left(x\dfrac{dx}{du}\dfrac{d^2x}{du^2}\dfrac{d^3x}{du^3}\right)\right|}},$$

vidíme, že rovnice (2) jest ekvivalentní s rovnicí

$$SD^2x\,D^2\eta = 0. \tag{5}$$

Buď $\mathfrak{C}_a \xi(u) = \text{Adj. } C_a x(u)$. Dle (1) existuje $\lambda = \lambda(u)$ takové, že $\eta(u) = \lambda(u)\xi(u)$. Máme ukázati, že $D\lambda = 0$, když a jen když platí (5). Avšak

$$SD^2x D^2\eta = SD^2x(\lambda D^2\xi + 2D\lambda D\xi + \xi D^2\lambda),$$

tedy dle **357** (1)

$$SD^2x D^2\eta = -2D\lambda.$$

359. Buď $C_a x(u)$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) orientovaná regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geq 6$. Souřadnice ar. roviny $\eta = \eta(u)$ buďte funkce třídy 1 v $\langle a, b\rangle$. Když a jen když jest identicky v $\langle a, b\rangle$

$$\left(\eta \frac{d\eta}{du}\right) = \omega\left(x \frac{dx}{du}\right), \qquad (\omega = \pm 1) \tag{1}$$

jest

$$\mathfrak{C}_a \pm \eta(u) = \text{Adj. } C_a x(u). \tag{2}$$

Mimo to je pak ω znamení křivky $C\{x\}$.

Buď D diferenciální parametr orientované ar. křivky $C_a x(u)$. Rovnice (1) je zřejmě ekvivalentní s rovnicí

$$(\eta D\eta) = \omega(x Dx). \tag{3}$$

Platí-li (2), platí (3) a tedy též (1) dle **354** (2). Předpokládejme tedy, že platí (1). Pak jest především

$$Sx\eta = S\frac{dx}{du}\eta = S\frac{dx}{du}\frac{d\eta}{du} = 0$$

a tedy též

$$S\frac{d^2x}{du^2}\eta = \frac{d}{du}\left(S\frac{dx}{du}\eta\right) - S\frac{dx}{du}\frac{d\eta}{du} = 0,$$

takže $\{\eta\} = \text{Adj. } \left\{x, \frac{dx}{du}, \frac{d^2x}{du^2}\right\}$. Odtud plyne, že, je-li

$$\mathfrak{C}_a \xi(u) = \text{Adj. } C_a x(u),$$

existuje $\lambda = \lambda(u)$ takové, že $\eta(u) = \lambda\xi(u)$, takže

$$(\eta D\eta) = \lambda^2(\xi D\xi),$$

tedy dle (3) a **354** (2) $\lambda^2 = 1$, tedy $\eta = \pm\xi$, v souhlase se (2).

360. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geq 6$. Buď D její diferenciální parametr. Buď $\mathfrak{C}_a \xi(u) = \text{Adj. } C_a x(u)$. Buď ω znamení křivky $C\{x\}$. Výraz $q(u)$

definovaný rovnicí

$$q(u) = SD^3x\,D^2\xi = -SD^2x\,D^3\xi \tag{1}$$

nazývá se prvý unimodulární invariant orientované ar. křivky $C_a x(u)$. Výraz $\Theta(u)$ definovaný rovnicí

$$\Theta(u) = -SD^3x\,D^3\xi = -\frac{\omega}{\left(x\,\frac{dx}{du}\,\frac{d^2x}{du^2}\,\frac{d^3x}{du^3}\right)}\,S\,\frac{d^3x}{du^3}\,\frac{d^3\xi}{du^3} \tag{2}$$

nazývá se druhý unimodulární invariant orientované ar. křivky $C_a x(u)$. Prvý (druhý) unimodulární invariant opačně orientované ar. křivky jest rovněž $q(u)$ (jest $-\Theta(u)$). Prvý (druhý) unimodulární invariant orientované duální ar. křivky Adj. $C_a x(u)$ jest rovněž $q(u)$ (jest $-\Theta(u)$).

Buď K unimodulární kolineace ar. bodů; buď $x(u) \sim x'(u)$ v K. Pak $q(u)$ ($\Theta(u)$) jest prvý (druhý) unimodulární invariant orientované ar. křivky $C_a x'(u)$.

Že oba výrazy definující $q(u)$ jsou rovné, plyne ze **357** (1); vskutku

$$0 = D(SD^2x\,D^2\xi) = SD^3x\,D^2\xi + SD^2x\,D^3\xi.$$

Rovnost obou výrazů definujících Θ ukáže se podobně jako ekvivalence rovnic **358** (2), (5).

Že prvý (druhý) unimodulární invariant opačně orientované ar. křivky jest $q(u)$ ($-\Theta(u)$) vychází ze **349** a **352**. Že prvý (druhý) unimodulární invariant orientované duální ar. křivky Adj. $C_a x(u)$ jest $q(u)$ ($-\Theta(u)$), vychází ze **353** a **354**. Poslední tvrzení teorému vychází ze **356**.

361. Rovnice $q = SD^3x\,D^2\xi$ ukazuje, že výraz $q(u)$ závisí na ar. bodu x a jeho derivacích dle u až po řád 5 včetně. Má tedy prvý unimodulární invariant význam, kdykoli $C_a x(u)$ je třídy 5. Ostatně ze **349** (1) vychází snadným počtem

$$\begin{aligned} D^3x = {} & \left|\left(x\,\frac{dx}{du}\,\frac{d^2x}{du^2}\,\frac{d^3x}{du^3}\right)\right|^{-\frac{1}{4}} \left\{ \frac{d^3x}{du^3} - \frac{1}{2}\,\frac{\left(x\,\frac{dx}{du}\,\frac{d^2x}{du^2}\,\frac{d^4x}{du^4}\right)}{\left(x\,\frac{dx}{du}\,\frac{d^2x}{du^2}\,\frac{d^3x}{du^3}\right)}\,\frac{d^2x}{du^2} + \right. \\ & \left. + \left[-\frac{1}{6}\,\frac{\left(x\,\frac{dx}{du}\,\frac{d^2x}{du^2}\,\frac{d^5x}{du^5}\right) + \left(x\,\frac{dx}{du}\,\frac{d^3x}{du^3}\,\frac{d^4x}{du^4}\right)}{\left(x\,\frac{dx}{du}\,\frac{d^2x}{du^2}\,\frac{d^3x}{du^3}\right)} + \frac{2}{9}\,\frac{\left(x\,\frac{dx}{du}\,\frac{d^2x}{du^2}\,\frac{d^4x}{du^4}\right)^2}{\left(x\,\frac{dx}{du}\,\frac{d^2x}{du^2}\,\frac{d^3x}{du^3}\right)^2} \right] \frac{dx}{du} \right\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Dále jest dle **349** (1) a **353** (1)

$$D^2\xi = \left|\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)\right|^{-\frac{5}{8}} \left\{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^4x}{du^4}\right) + \left(x\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right) - \frac{7}{6}\frac{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^4x}{du^4}\right)}{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)}\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^3x}{du^3}\right) + \right.$$

$$\left. + \left[-\frac{1}{2}\frac{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^5x}{du^5}\right) + \left(x\frac{dx}{du}\frac{d^3x}{du^3}\frac{d^4x}{du^4}\right)}{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)} + \frac{5}{6}\frac{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^4x}{du^4}\right)^2}{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)^2}\right]\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right)\right\}. \tag{2}$$

Dle (1) a (2) jest

$$q = SD'xD^2\xi = \left|\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)\right|^{-\frac{4}{8}}\left[-\frac{2}{3}\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^5x}{du^5}\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{5}{3}\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^3x}{du^3}\frac{d^4x}{du^4}\right) + \frac{77}{36}\frac{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^4x}{du^4}\right)^2}{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)^2}\right]. \tag{3}$$

Ukažme dále, že také výraz $3\,Dq + 4\,\Theta$ má význam, kdykoli $C_a\,x(u)$ je třídy 5, t. j. že se dá vyjádřiti pomocí x, $\frac{dx}{du}, \frac{d^2x}{du^2}, \frac{d^3x}{du^3}, \frac{d^4x}{du^4}, \frac{d^5x}{du^5}$. Dle (3) a **349** (1) jest

$$Dq = \left|\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)\right|^{-\frac{8}{8}}\left[-\frac{2}{3}\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^6x}{du^6}\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{7}{3}\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^3x}{du^3}\frac{d^5x}{du^5}\right) + \frac{31}{6}\frac{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^4x}{du^4}\right)\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^5x}{du^5}\right)}{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)}\right] + \ldots, \tag{4}$$

kde vynechané členy závisejí pouze na x, $\frac{dx}{du}, \frac{d^2x}{du^2}, \frac{d^3x}{du^3}, \frac{d^4x}{du^4}$. Dále jest dle **353** (1)

$$\frac{d^3\xi}{du^3} = \left|\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)\right|^{-\frac{1}{8}}\left\{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^5x}{du^5}\right) + 2\left(x\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^4x}{du^4}\right) - \frac{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^4x}{du^4}\right)}{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)}\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^4x}{du^4}\right) + \right.$$

$$\left. + \varphi\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right)\right\} + \zeta,$$

kde ar. rovina ζ náleží do Adj. $\left\{\frac{d^3x}{du^3}\right\}$ a

$$\varphi = -\frac{1}{2}\,\frac{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^6x}{du^6}\right)+2\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^3x}{du^3}\frac{d^5x}{du^5}\right)+\left(x\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\frac{d^4x}{du^4}\right)}{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)}+$$

$$+\frac{3}{2}\,\frac{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^4x}{du^4}\right)\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^5x}{du^5}\right)}{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)^2}-\frac{3}{2}\,\frac{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^4x}{du^4}\right)^3}{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)^3},$$

takže dle druhé definice výrazu Θ ve **360** (2)

$$\Theta=\left|\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)\right|^{-\frac{8}{3}}\left[\frac{1}{2}\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^6x}{du^6}\right)+2\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^3x}{du^3}\frac{d^5x}{du^5}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{3}{2}\,\frac{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^4x}{du^4}\right)\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^5x}{du^5}\right)}{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)}\right]+\dots \tag{5}$$

kde vynechané členy obsahují pouze $x, \frac{dx}{du}, \frac{d^2x}{du^2}, \frac{d^3x}{du^3}, \frac{d^4x}{du^4}$. Dle (4) a (5) jest

$$3Dq+4\Theta=\left|\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)\right|^{-\frac{8}{3}}\left[\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^3x}{du^3}\frac{d^5x}{du^5}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{19}{2}\,\frac{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^4x}{du^4}\right)\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^5x}{dx^5}\right)}{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)}\right]+\dots, \tag{6}$$

kde opět vynechané členy obsahují jen $x, \frac{dx}{du}, \frac{d^2x}{du^2}, \frac{d^3x}{du^3}, \frac{d^4x}{du^4}$.

362. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární křivka virtuální třídy $r \geqq 6$. Buď D její diferenciální parametr. Buď ω znamení křivky $C\{x\}$. Buď $\mathfrak{C}_a \xi(u) = \mathrm{Adj.}\ C_a x(u)$. Buď

$$X = -\omega\,(D\xi D^2\xi D^3\xi),\quad \Xi = -\omega\,(Dx D^2x D^3x). \tag{1}$$

Pak jest

$$SX\xi = 1,\quad SXD\xi = 0,\quad SXD^2\xi = 0,\quad SXD^3\xi = 0, \tag{2}$$

$$S\Xi x = 1,\quad S\Xi Dx = 0,\quad S\Xi D^2x = 0,\quad S\Xi D^3x = 0, \tag{3}$$

$$(x, Dx, D^2x, X) = \omega,\quad (\xi, D\xi, D^2\xi, \Xi) = -\omega. \tag{4}$$

Buď $\Theta(u)$ druhý unimodulární invariant orientované ar.

křivky $C_a x(u)$. Jest

(5) $$\Theta = -SX\Xi.$$

Ar. bod $X + \Theta x$ (ar. rovina Ξ) má význam, kdykoli $C_a x(u)$ je třídy 5 (třídy 3).

Druhá, třetí a čtvrtá rovnice (2) a (3) jsou zřejmé. Prvá se obdrží ze **349** (2), resp. **353** (2). Prvá rovnice (4) vychází z prvé rovnice (2) a ze **352** (1); druhá (4) vychází z prvé (3) a ze **354** (3). Dle (1) a **98** (2) jest

$$SX\Xi = \begin{vmatrix} SDxD\xi, & SD^2xD\xi, & SD^3xD\xi \\ SDxD^2\xi, & SD^2xD^2\xi, & SD^3xD^2\xi \\ SDxD^3\xi, & SD^2xD^3\xi, & SD^3xD^3\xi \end{vmatrix}.$$

Odtud vychází (5) dle **357** a **360** (2). Rovnice (5) obdrží se také snadno ze (2), (3), **357** a **364** (1), (2).

Z (1) vidíme snadno, že

(6) $$X = -\frac{1}{\left(x\dfrac{dx}{du}\dfrac{d^2x}{du^2}\dfrac{d^3x}{du^3}\right)}\left(\frac{d\xi}{du}\frac{d^2\xi}{du^2}\frac{d^3\xi}{du^3}\right),\quad \Xi = -\frac{1}{\left(x\dfrac{dx}{du}\dfrac{d^2x}{du^2}\dfrac{d^3x}{du^3}\right)}\left(\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right).$$

Odtud je patrné, že Ξ má význam, kdykoli $C_a x$ je třídy 3. Dále jest dle (6), **353** (1) a **109** (2)

$$X = -\frac{1}{2}\left|\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)\right|^{-\frac{8}{3}}\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^6x}{du^6}\right)x + \ldots,$$

kde vynechané členy obsahují pouze $x, \dfrac{dx}{du}, \dfrac{d^2x}{du^2}, \ldots \dfrac{d^5x}{du^5}$. Odtud a ze **361** (5) vychází, že $X + \Theta x$ má význam, kdykoli $C_a x$ je třídy 5.

363. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 7$. Buď D její diferenciální parametr. Buď ω znamení křivky $C\{x\}$. Buď $\mathfrak{C}_a \xi(u) = \text{Adj. } C_a x(u)$. Buď

(1) $$X = -\omega(D\xi D^2\xi D^3\xi),\quad \Xi = -\omega(DxD^2xD^3x).$$

Výraz $\nu(u)$ definovaný rovnicí

(2) $$\nu(u) = S(\Xi DX - XD\Xi)$$

nazývá se třetí unimodulární invariant orientované ar. křivky $C_a x(u)$. Třetí unimodulární invariant opačně orientované ar. křivky (třetí unimodulární invariant orientované duální křivky $\mathfrak{C}_a \xi(u)$) jest rovněž $\nu(u)$. Buď $\Theta(u)$ druhý unimodulární invariant ar. křivky $C_a x(u)$. Pak jest

(3) $$2S\Xi DX = \nu - D\Theta, \quad 2SXD\Xi = -\nu - D\Theta.$$

Buď $q(u)$ prvý unimodulární invariant orientované ar. křivky $C_a x(u)$. Výraz $\tau(u)$ definovaný rovnicí

(4) $$\tau(u) = 3D^2q - \frac{9}{10}q^2 - 5\nu$$

nazývá se čtvrtý unimodulární invariant orientované ar. křivky $C_a x(u)$. Čtvrtý unimodulární invariant opačně orientované ar. křivky (čtvrtý unimodulární invariant orientované duální ar. křivky $\mathfrak{C}_a \xi(u)$) jest rovněž $\tau(u)$. Výraz $\nu + D\Theta$, $(\tau - D\Theta)$ má význam, kdykoli $C_a x(u)$ je třídy 4 (třídy 6).

Přejdeme-li od $C_a x(u)$ k opačně orientované ar. křivce (k duální ar. křivce $\mathfrak{C}_a \xi(u)$), přejdou D, x, ξ resp. v $-D, x, -\xi$ $(D, \xi, -x)$, tedy X, Ξ resp. ve $-X, \Xi (-\Xi, X)$, takže $\nu(u)$ se nemění. Tedy ani $\tau(u)$ se nemění; neboť $q(u)$ se nemění dle **360**. Dle **360** (2) jest

$$-D\Theta = S(\Xi DX + XD\Xi).$$

Odtud a že (2) vychází (3). Ve **362** jsme viděli, že ar. rovina Ξ závisí pouze na $x, \frac{dx}{du}, \frac{d^2x}{du^2}, \frac{d^3x}{du^3}$. Tedy dle **364** (4) výraz $\nu + D\Theta$ závisí pouze na $x, \frac{dx}{du}, \frac{d^2x}{du^2}, \frac{d^3x}{du^3}, \frac{d^4x}{du^4}$. Dle **361** výraz $3Dq + 4\Theta$ nezávisí na $\frac{d^6x}{du^6}, \frac{d^7x}{du^7}$. Tedy výraz

$$\tau - D\Theta = D(3Dq + 4\Theta) - \frac{9}{10}q^2 - 5(\nu + D\Theta)$$

nezávisí na $\frac{d^7x}{du^7}$. Mimo to jest

$$\tau - D\Theta = D(3Dq + 4\Theta) + \dots$$

kde vynechané členy obsahují pouze $x, \frac{d^ix}{du^i}$ $(1 \leq i \leq 5)$. Avšak dle **349** (1) a **361** (6)

$$D(3Dq + 4\Theta) = \left|\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)\right|^{-\frac{8}{3}} \left[\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^3x}{du^3}\frac{d^6x}{du^6}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{19}{2}\frac{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^4x}{du^4}\right)\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^6x}{du^6}\right)}{\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)}\right] + \dots,$$

kde vynechané členy obsahují pouze x, $\frac{d^i x}{du^i}$ $(1 \leqq i \leqq 5)$. Je tedy

$$\tau - D\Theta = \left|\left(x \frac{dx}{du} \frac{d^2x}{du^2} \frac{d^3x}{du^3}\right)\right|^{-\frac{3}{2}} \left[\left(x \frac{dx}{du} \frac{d^3x}{du^3} \frac{d^6x}{du^6}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{19}{2} \frac{\left(x \frac{dx}{du} \frac{d^2x}{du^2} \frac{d^4x}{du^4}\right)\left(x \frac{dx}{du} \frac{d^2x}{du^2} \frac{d^6x}{du^6}\right)}{\left(x \frac{dx}{du} \frac{d^2x}{du^2} \frac{d^3x}{du^3}\right)}\right] + \dots, \tag{5}$$

kde vynechané členy obsahují pouze x, $\frac{dx}{du}$, $\frac{d^2x}{du^2}$, $\frac{d^3x}{du^3}$, $\frac{d^4x}{du^4}$, $\frac{d^5x}{du^5}$.

364. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 6$. Buď D její diferenciální parametr; buď $q(u)$ $(\Theta(u))$ její prvý (druhý) unimodulární invariant. Buď $\mathfrak{C}_a \xi(u) = \text{Adj. } C_a x(u)$. Buď ω znamení křivky $C\{x\}$. Buď

$$X = -\omega\,(D\xi D^2\xi D^3\xi), \quad \Xi = -\omega\,(Dx D^2x D^3x).$$

Pak jest

$$D^3x = qDx + \Theta x + X, \tag{1}$$

$$D^3\xi = qD\xi - \Theta\xi - \Xi. \tag{2}$$

Rovnice (1) má význam, kdykoli $C_a x(u)$ je třídy 5.

Buď $r \geqq 7$; buď $\nu(u)$ třetí unimodulární invariant orientované ar. křivky $C_a x(u)$. Pak jest

$$DX = \frac{1}{2}(\nu - D\Theta)\,x, \tag{3}$$

$$D\Xi = -\frac{1}{2}(\nu + D\Theta)\,\xi. \tag{4}$$

Rovnice (4) má význam, kdykoli $C_a x(u)$ je třídy 4. Píšeme-li rovnici (3) ve tvaru

$$D(X + \Theta x) = \frac{1}{2}(\nu + D\Theta)\,x + \Theta Dx, \tag{5}$$

má význam, kdykoli $C_a x(u)$ je třídy 6.

Dle **362** (4) ar. body x, Dx, D^2x, X jsou lin. nezávislé. Lze tedy určiti $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \mu$ tak, že

$$D^3x = \lambda_0 x + \lambda_1 Dx + \lambda_2 D^2x + \mu X.$$

Odtud plyne dle **357**, **360** a **362** (2), že

$$1 = S\xi D^3x = \mu, \quad 0 = SD\xi D^3x = -\lambda_2,$$
$$q = SD^2\xi D^3x = \lambda_1, \quad -\Theta = SD^3\xi D^3x = -\lambda_0,$$

z čehož vychází (1). Duálně obdrží se (2).

Ze **362** (2) vychází derivováním

$$S\xi DX = 0, \quad SD\xi DX = 0, \quad SD^2\xi DX = 0.$$

Tedy DX náleží do Adj. $\{\xi, D\xi, D^2\xi\} = \{(\xi D\xi D^2\xi)\}$. Dle **354** (3) existuje tedy ν takové, že

$$DX = \nu x.$$

Dle **362** (3) je tedy

$$\nu = S\Xi DX,$$

z čehož vychází (3) dle **363** (3). Podobně obdrží se (4).

Že (1) má význam, kdykoli $C_a x(u)$ je třídy 5, vychází ze **362**. Že rovnice (4) (rovnice (5)) má význam, kdykoli $C_a x$ je třídy 4 (třídy (6)), vychází ze **362** a **363**.

365. Buďte $C_a x(u)$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$), $C_a x'(u)$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) regulární ar. křivky virtuální třídy $\geqq 7$. Buďte $q(u)$, $\Theta(u)$, $\nu(u)$ ($q'(u)$, $\Theta'(u)$, $\nu'(u)$) resp. prvý, druhý a třetí unimodulární invariant ar. křivky $C_a x(u)$ ($C_a x'(u)$). Když a jen když

$$q(u) = q'(u), \quad \Theta(u) = \Theta'(u), \quad \nu(u) = \nu'(u), \qquad (u \text{ v } \langle a, b\rangle)$$

existuje unimodulární kolineace K taková, že pro všecka u z $\langle a, b\rangle$ jest

$$x(u) \sim x'(u) \text{ v } K.$$

Je zřejmé, že podmínky jsou nutné. Že stačí, vychází snadno ze **68, 362** (4) a **364** (1), (3). Věta platí, i když $C_a x(u)$ a $C_a x'(u)$ jsou třídy $\geqq 6$, zavedeme-li v ní $\nu + D\Theta$ místo ν.

Orientace křivky v trojrozměrném prostoru.

366. Buďte $\{x(u_i)\}$ ($i = 1, 2, 3$) tři různé body orientované křivky $C\{x(u)\}$ třídy $r \geqq 1$. Pravíme, že body $\{x(u_1)\}$, $\{x(u_2)\}$, $\{x(u_3)\}$ jsou v positivní (negativní) orientaci vzhledem k orientované křivce $C\{x(u)\}$, když číslo

$$(u_2 - u_1)(u_3 - u_2)(u_1 - u_3)$$

jest kladné (záporné). Vyměníme-li mezi sebou dva z bodů $\{x(u_i)\}$ ($i = 1, 2, 3$), přejde positivní (negativní) orientace v negativní (positivní).

Když orientace bodů $\{x(u_i)\}$ ($i = 1, 2, 3$) vzhledem k orientované křivce $C\{x(u)\}$ jest positivní (negativní), orientace týchž bodů vzhledem k opačně orientované křivce jest negativní (positivní).

Buď $r \geqq 3$ a $C\{x(u)\}$ buď regulární. Buď $\mathfrak{C}\{\xi(u)\} = \text{Adj.}\ C\{x(u)\}$. Orientace rovin $\{\xi(u_i)\}$ $(i = 1, 2, 3)$ vzhledem k orientované duální křivce $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ rovná se orientaci bodů $\{x(u_i)\}$ vzhledem k orientované křivce $C\{x(u)\}$.

Zřejmé.

367. Buď $\{x(u_0)\}$ bod křivky $C\{x(u)\}$. Buď $\{yz\}$ přímka neincidentní s tečnou křivky $C\{x\}$ v $\{x(u_0)\}$. Buď $\left(x\dfrac{dx}{du}yz\right)_{u=u_0} > 0$. Buď W dosti malé okolí bodu $\{x(u_0)\}$; buď C^{W} průřez křivky $C\{x(u)\}$ s okolím W. Jsou-li $\{x(u_i)\}$ $(i = 1, 2, 3)$ tři různé body křivky C^{W}, jest jejich orientace vzhledem k orientované křivce $C\{x(u)\}$ rovna orientaci rovin Adj. $\{y, z, x(u_i)\}$ svazku [Adj. $\{y, z\}]^{\mathfrak{C}}$ vzhledem k ar. přímce (yz).

Buď $x(u_0) = x_0$, $\left[\dfrac{dx}{du}\right]_{u=u_0} = x_1$. Ježto $(x_0 x_1 y z) \neq 0$, můžeme položiti

$$x(u) = \lambda_0(u)\, x_0 + \lambda_1(u)\, x_1 + \lambda_2(u)\, y + \lambda_3(u)\, z. \tag{1}$$

Jest

$$\lambda_0(u_0) = 1, \quad \lambda_1(u_0) = 0,$$

$$\left(\frac{d\lambda_0}{du}\right)_{u=u_0} = 0, \quad \left(\frac{d\lambda_1}{du}\right)_{u=u_0} = 1.$$

Můžeme tedy určiti $\varepsilon > 0$ tak malé, že pro $u_0 - \varepsilon \leqq u \leqq u_0 + \varepsilon$ jest

$$\frac{\lambda_1(u)}{\lambda_0(u)} = \mu(u) > 0, \quad \frac{d\mu}{du} > 0. \tag{2}$$

Dle **164** lze zvoliti W tak malé, že průřez C^{W} křivky $C\{x(u)\}$ s okolím W je křivka a že u jest v $\langle u_0 - \varepsilon,\ u_0 + \varepsilon\rangle$, kdykoli bod $\{x(u)\}$ jest obsažen v C^{W}. Buďte u_0, u_1, u_2 tři různá čísla z $\langle u_0 - \varepsilon,\ u_0 + \varepsilon\rangle$. Ježto $(x_0 x_1 y z) > 0$, orientace rovin Adj. $\{y, z, x(u_i)\}$ svazku [Adj. $\{y, z\}]^{\mathfrak{C}}$ vzhledem k ar. přímce (yz) rovná se dle **140** a dle (1) orientaci bodů $\{\lambda_0(u_i)\, x_0 + \lambda_1(u_i)\, x_1\}$ řady bodové $\{x_0, x_1\}^{C}$ vzhledem k ar. přímce $(x_0 x_1)$, tedy dle **139** rovná se orientaci jednorozměrných bodů $\{|\lambda_0(u_i), \lambda_1(u_i)|_b\} = \{|1, \mu(u_i)|_b\}$. Jsou tedy roviny Adj. $\{y, z, x(u_i)\}$ svazku [Adj. $\{y, z\}]^{\mathfrak{C}}$ v positivní nebo negativní orientaci vzhledem k ar. přímce (yz) dle toho, zda výraz

$$V = [\mu(u_2) - \mu(u_1)]\,[\mu(u_3) - \mu(u_2)]\,[\mu(u_1) - \mu(u_3)]$$

je kladný či záporný. Dle věty o střední hodnotě a dle (2) je však (v. **322**)

$$V = k\,(u_2 - u_1)(u_3 - u_2)(u_1 - u_3); \quad k > 0.$$

368. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka třídy $r \geqq 4$; buď D její diferenciální parametr. Buď ω znamení křivky $C\{x(u)\}$. Buď $x(u_0)$ bod křivky $C\{x(u)\}$; buď y ar. bod takový, že

(1) $$\omega\left(x(u_0),\ [Dx]_{u=u_0},\ [D^2x]_{u=u_0}, y\right) > 0.$$

Existuje $\varepsilon > 0$ takové, že, když $\{z\}$ je průsečík oskulační roviny křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$ a přímky soumístné s $\{y, x(u)\}$ $(0 < |u - u_0| < \varepsilon)$, orientace bodů $\{y\}$, $\{z\}$, $\{x(u)\}$ řady bodové $\{y, x(u)\}^{\sigma}$ vzhledem k ar. přímce $(y, x(u))$ jest positivní či negativní dle toho, zda $u - u_0$ jest > 0 či < 0.

Dle (1) lze určiti $\lambda_0(u)$, $\lambda_1(u)$, $\lambda_2(u)$, $\lambda_3(u)$ tak, že

(2) $$x(u) = \lambda_0(u)\, x_0 + \lambda_1(u)\, x_1 + \lambda_2(u)\, x_2 + \lambda_3(u)\, y,$$

kde

$$x_0 = x(u_0),\ x_1 = [Dx]_{u=u_0},\ x_2 = [D^2x]_{u=u_0}.$$

Položme

$$\varphi(u) = (x_0, x_1, x_2, x(u)).$$

Dle **349** (2) jest

$$\varphi(u_0) = 0,\ (D\varphi)_{u=u_0} = 0,\ (D^2\varphi)_{u=u_0} = 0,\ (D^3\varphi)_{u=u_0} = \omega;$$

odtud snadno vychází, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro $0 < |u - u_0| < \varepsilon$ jest $\omega(u - u_0)\varphi(u) > 0$. Dle (2) je však $\varphi(u) = \lambda_3(u)\ (x_0 x_1 x_2 y)$, takže dle (1) pro $0 < |u - u_0| < \varepsilon$ jest $(u - u_0)\ \lambda_3\ (u) > 0$. Dle (2) můžeme položiti

$$z = \lambda_0(u)\, x_0 + \lambda_1(u)\, x_1 + \lambda_2(u)\, x_2 = x(u) - \lambda_3(u)\, y.$$

Orientace bodů $\{y\}$, $\{z\}$, $\{x(u)\}$ vzhledem k ar. přímce $(y, x(u))$ rovná se orientaci jednorozměrných bodů

$$\{|1, 0|_b\},\ \{|-\lambda_3(u), 1|_b\},\ \{|0, 1|_b\},$$

jež je positivní, když $\lambda_3(u) > 0$, čili když $u - u_0 > 0$.

Píšeme-li (1) ve tvaru ekvivalentním

(3) $$\omega\left(x \frac{dx}{du} \frac{d^2x}{du^2} y\right) > 0$$

platí věta i pro $r = 3$.

Oskulační kubická křivka.

369. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka třídy $r \geq 6$. Buď D její diferenciální parametr; buď $q(u)$, $\Theta(u)$, $\tau(u)$ resp. její prvý, druhý, čtvrtý unimodulární invariant*). Buď

---

*) Když $r = 6$, $\tau(u)$ nemusí míti význam, ježto závisí na $\frac{d^7x}{du^7}$; ve skutečnosti však v dalším se vyskytuje pouze $\tau - D\Theta$, což dle **363** nezávisí na $\frac{d^7x}{du^7}$.

$\mathfrak{C}_a \xi(u) = \text{Adj. } C_a x(u)$. Definujme Ξ jako ve **362.** Buď

$$
\begin{aligned}
\overset{u}{P}_r{}^{(1)} &= 30\xi D^2\xi - 20(D\xi)^2 - 9q\xi^2, \\
\overset{u}{P}_r{}^{(2)} &= 30\xi\Xi + 10D\xi D^2\xi - 12q\xi D\xi + 9(\Theta + Dq)\xi^2, \qquad (1)\\
\overset{u}{P}_r{}^{(3)} &= 20D\xi\,.\,\Xi + 10(D^2\xi)^2 - 3q\xi D^2\xi - 8q(D\xi)^2 + 2(4\Theta + 3Dq)\xi D\xi - (\tau - D\Theta)\xi^2.
\end{aligned}
$$

Kvadratická rovinová forma P_r má s křivkou $C\{x(u)\}$ sedmibodový styk v bodě $\{x(u_0)\}$, když a jen když

$$
P_r = \lambda_1\,.\,\overset{u_0}{P}_r{}^{(1)} + \lambda_2\,.\,\overset{u_0}{P}_r{}^{(2)} + \lambda_3\,.\,\overset{u_0}{P}_r{}^{(3)}. \tag{2}
$$

Kvadratická rovinová forma P'_r má s křivkou $C\{x(u)\}$ šestibodový styk v bodě $\{x(u_0)\}$, když a jen když

$$
P'_r = \lambda_1 \overset{u_0}{P}_r{}^{(1)} + \lambda_2 \overset{u_0}{P}_r{}^{(2)} + \lambda_3 \overset{u_0}{P}_r{}^{(3)} + \mu[\xi(u_0)]^2. \tag{3}
$$

Stačí provésti důkaz za předpokladu, že $r \geqq 7$. Zřejmě jest

$$
S\overset{u}{P}_r{}^{(1)} x(u) = 0, \quad S\overset{u}{P}_r{}^{(2)} x(u) = 0, \quad S\overset{u}{P}_r{}^{(3)} x(u) = 0. \tag{4}
$$

Dle (1), **363** (4) a **364** (2), (4) jest

$$
\begin{aligned}
D\overset{u}{P}_r{}^{(1)} &= -\overset{u}{P}_r{}^{(2)} - 21\Theta\xi^2, \\
D\overset{u}{P}_r{}^{(2)} &= \overset{u}{P}_r{}^{(3)} - \frac{3q}{10}\overset{u}{P}_r{}^{(1)} + (4\tau - 7D\Theta)\xi^2, \qquad (5)\\
D\overset{u}{P}_r{}^{(3)} &= \frac{1}{10}q\overset{u}{P}_r{}^{(2)} - \frac{1}{10}(4\Theta - Dq)\overset{u}{P}_r{}^{(1)} - \left[D(\tau - D\Theta) + \frac{3}{2}q\Theta\right]\xi^2.
\end{aligned}
$$

Dle (4) mají rovinové formy $\overset{u}{P}_r{}^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ jednobodový styk s $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u)\}$. Předpokládejme, že tyto formy mají s-bodový $(1 \leqq s \leqq 6)$ styk s $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u)\}$. Zřejmě také forma ξ^2 má s-bodový styk s $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u)\}$. Tedy dle (4), (5) a **183** formy $\overset{u}{P}_r{}^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ mají $(s+1)$-bodový styk s $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u)\}$. Kladouce postupně $s = 1, 2 \ldots 6$, vidíme, že rovinové formy $\overset{u}{P}_r{}^{(i)}$ mají sedmibodový styk s $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u)\}$, jak bylo tvrzeno. Zřejmě forma (2) má sedmibodový a forma (3) má šestibodový styk s $C\{x(u)\}$, ať jakkoli zvolíme $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu$.

Předpokládejme, že kvadratická rovinová forma

$$
\begin{aligned}
P'_r = \big[a_{00}\xi^2 &+ a_{11}(D\xi)^2 + a_{22}(D^2\xi)^2 + a_{33}\Xi^2 + 2a_{01}\xi D\xi + 2a_{02}\xi D^2\xi + 2a_{03}\xi\Xi + \\
&+ 2a_{12}D\xi D^2\xi + 2a_{13}D\xi\,.\,\Xi + 2a_{23}D^2\xi\,.\,\Xi\big]_{u=u_0}
\end{aligned}
$$

má v bodě $\{x(u_0)\}$ šestibodový styk s $C\{x(u)\}$. Všimneme-li si, že $\xi(u_0)$, $(D\xi)_{u=u_0}$, $(D^2\xi)_{u=u_0}$ mají po řadě právě trojbodový, právě dvojbodový, právě jednobodový styk s $C\{x\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$, kdežto $(\Xi)_{u=u_0}$ není incidentní s $\{x(u_0)\}$, vidíme snadno, že $a_{33}=0$; jinak by totiž P'_r nebyla incidentní s $\{x(u_0)\}$. Podobně vidíme, že také $a_{23}=0$; jinak by P'_r měla právě jednobodový styk s $C\{x\}$ v $\{x(u_0)\}$. Rovinová forma

$$2a_{12}\overset{u_0}{P}_r{}^{(2)}+a_{22}\overset{u_0}{P}_r{}^{(3)}-10P_r'$$

má zřejmě šestibodový styk v $\{x(u_0)\}$ s $C\{x\}$. Ježto však $a_{23}=a_{33}=0$, je dle (1)

$$Q_r'=2a_{12}\overset{u_0}{P}_r{}^{(2)}+a_{22}\overset{u_0}{P}_r{}^{(3)}-10P_r'=b_{00}\xi^2+b_{11}(D\xi)^2+2b_{01}\xi D\xi+$$
$$+2b_{02}\xi D^2\xi+2b_{03}\xi\Xi+2b_{13}D\xi\,.\,\Xi.$$

Forma Q'_r má s $C\{x\}$ šestibodový styk v $\{x(u_0)\}$. Je tedy $b_{13}=0$; jinak by Q'_r měla právě dvojbodový styk s $C\{x\}$ v $\{x(u_0)\}$. Dále jest $b_{03}=0$; jinak by Q'_r měla právě trojbodový styk s $C\{x\}$ v $\{x(u_0)\}$. Tedy dle (1)

$$Q_r''=20Q_r'+b_{11}\overset{u_0}{P}_r{}^{(1)}=b_{11}\overset{u_0}{P}_r{}^{(1)}+20a_{12}\overset{u_0}{P}_r{}^{(2)}+20a_{22}\overset{u_0}{P}_r{}^{(3)}-200P_r'=$$
$$=\xi(c_0\xi+c_1D\xi+c_2D^2\xi).$$

Forma Q''_r má s $C\{x\}$ šestibodový styk v $\{x(u_0)\}$. Je tedy $c_2=0$, neboť jinak by styk byl právě čtyřbodový; dále je $c_1=0$, jinak by styk Q''_r s $C\{x\}$ byl právě pětibodový. Tedy $Q''_r=c_0\xi^2$, čili platí (3), kde

$$\lambda_1=\tfrac{1}{200}b_{11},\ \lambda_2\tfrac{1}{10}a_{12},\ \lambda_3=\tfrac{1}{10}a_{22},\ \mu=-\tfrac{1}{200}c_0.$$

Zřejmě styk P'_r s $C\{x\}$ je sedmibodový, když a jen když $\mu=0$.

370. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka třídy $r\geqq 5$. Buď D její diferenciální parametr; buď $q(u)$ ($\Theta(u)$) její prvý (druhý) unimodulární invariant. Buď $\mathfrak{C}_a\xi(u)=$ Adj. $C_a x(u)$. Definujme Ξ jako ve **362**. Buď (v. **172**)

$$(1)\qquad \overset{u}{C}_3=C\begin{bmatrix}\xi, & D\xi, & \tfrac{3}{5}D^2\xi-\tfrac{9}{20}q\xi\\ D\xi, & \tfrac{3}{5}D^2\xi-\tfrac{9}{20}q\xi & -\tfrac{9}{5}\Xi+\tfrac{27}{20}qD\xi-\tfrac{9}{20}(3Dq+4\Theta)\xi\end{bmatrix}.$$

Kubická křivka $\overset{u_0}{C}_3$ — a žádná jiná kubická křivka — má šestibodový styk s křivkou $C\{x\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Pravíme, že $\overset{u_0}{C}_3$ jest oskulační kubická křivka křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$.

Že $\overset{u_0}{C}_3$ má s $C\{x\}$ šestibodový styk v $\{x(u_0)\}$, vychází snadno z (1), **180** a **369**. Obráceně buď C_3 kubická křivka mající s $C\{x\}$ šestibodový styk v bodě $\{x(u)\}$. Zřejmě přímka $\{\xi D\xi\}$ je tečnou a rovina $\{\xi\}$ jest oskulační rovinou kubické křivky C_3 v bodě $\{x(u)\}$. Dle **198** existují ar.

roviny η, ζ takové, že

$$C_3 = C\begin{bmatrix} \xi & D\xi & \eta \\ D\xi & \eta & \zeta \end{bmatrix}.$$

Dle **180** rovinové formy

$$\xi\eta - (D\xi)^2,\ \xi\zeta - \eta D\xi,\ \zeta D\xi - \eta^2$$

mají šestibodový styk s $C\{x\}$ v bodě $\{x(u)\}$. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládati, že $r \geqq 6$. Dle **369** existují čísla $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ taková, že

$$\xi\eta - (D\xi)^2 = \alpha_0\xi^2 + \alpha_1 \overset{u}{P}_r{}^{(1)} + \alpha_2 \overset{u}{P}_r{}^{(2)} + \alpha_3 \overset{u}{P}_r{}^{(3)}, \tag{2}$$

$$\xi\zeta - \eta D\xi = \beta_0\xi^2 + \beta_1 \overset{u}{P}_r{}^{(1)} + \beta_2 \overset{u}{P}_r{}^{(2)} + \beta_3 \overset{u}{P}_r{}^{(3)}, \tag{3}$$

$$\zeta D\xi - \eta^2 = \gamma_0\xi^2 + \gamma_1 \overset{u}{P}_r{}^{(1)} + \gamma_2 \overset{u}{P}_r{}^{(2)} + \gamma_3 \overset{u}{P}_r{}^{(3)}, \tag{4}$$

při čemž rovinové formy $\overset{u}{P}_r{}^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ jsou definovány ve **369** (1). Ar. rovina η jest incidentní s x; jinak by totiž — jak snadno se nahlédne — rovinová forma $\xi\eta - (D\xi)^2$ měla právě trojbodový styk s $C\{x\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Je tedy

$$\eta = a_0\xi + a_1 D\xi + a_2 D^2\xi$$
$$\xi\eta - (D\xi)^2 = a_0\xi^2 + a_1\xi D\xi + a_2\xi D^2\xi - (D\xi)^2,$$

takže dle (2) a **369** (1)

$$\alpha_2 = \alpha_3 = 0,\ \alpha_1 = \tfrac{1}{20},$$
$$a_0 = \alpha_0 - \tfrac{9}{20}q,\ a_1 = 0,\ a_2 = \tfrac{3}{2}, \tag{5}$$
$$\eta = (\alpha_0 - \tfrac{9}{20}q)\,\xi + \tfrac{3}{2}D^2\xi.$$

Klademe-li

$$\zeta = b_0\xi + b_1 D\xi + b_2 D^2\xi + b_3\Xi,$$

je dle (5)

$$\xi\zeta - \eta D\xi = b_0\xi^2 + (b_1 - \alpha_0 + \tfrac{9}{20}q)\,\xi D\xi + b_2\xi D^2\xi + b_3\xi\Xi - \tfrac{3}{2}D\xi D^2\xi.$$

Dle (3) a **369** (1) je tedy

$$\beta_3 = 0,\ \beta_2 = -\tfrac{3}{20},\ \beta_1 = 0,$$
$$b_0 = \beta_0 - \tfrac{27}{20}(Dq + \Theta),\ b_1 = \alpha_0 + \tfrac{27}{20}q,\ b_2 = 0,\ b_3 = -\tfrac{9}{2},$$
$$\zeta = [\beta_0 - \tfrac{27}{20}(Dq + \Theta)]\,\xi + (\alpha_0 + \tfrac{27}{20}q)\,D\xi - \tfrac{9}{2}\Xi. \tag{6}$$

Dle (5) a (6) jest

$$\zeta D\xi - \eta^2 = -(\alpha_0 - \tfrac{9}{20}q)^2\xi^2 + [\beta_0 - \tfrac{27}{20}(Dq + \Theta)]\,\xi D\xi -$$
$$- 3(\alpha_0 - \tfrac{9}{20}q)\,\xi D^2\xi + (\alpha_0 + \tfrac{27}{20}q)(D\xi)^2 - \tfrac{9}{4}(D^2\xi)^2 - \tfrac{9}{2}D\xi\,.\,\Xi.$$

Dle (4) a **369** (1) je tedy

$$\gamma_3 = -\tfrac{9}{40},\ \gamma_2 = 0,\ \gamma_1 = \tfrac{9}{400}q,$$
$$\alpha_0 = 0,\ \beta_0 = -\tfrac{9}{20}\Theta,$$

takže dle (5) a (6)

$$\eta = \tfrac{8}{3} D^2 \xi - \tfrac{9}{20} q\xi, \quad \zeta = -\tfrac{9}{2} \Xi + \tfrac{27}{20} q D\xi - \tfrac{9}{20}(3Dq + 4\Theta)\xi. \tag{7}$$

Z (1) a (7) vychází, že $C_3 = \overset{u}{C}_3$.

371. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka třídy $r \geqq 6$. Buď D její diferenciální parametr; buď $\Theta(u)$ ($\tau(u)$) její druhý (čtvrtý) unimodulární invariant.*) Buď $\overset{u}{C}_3$ oskulační kubická křivka křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u)\}$. Když a jen když pro $u = u_0$ jest

$$\Theta(u) = \tau(u) - D\Theta = 0, \tag{1}$$

mají $C\{x\}$ a $\overset{u_0}{C}_3$ sedmibodový styk v bodě $\{x(u_0)\}$; pravíme pak, že $\{x(u_0)\}$ jest septemtaktický bod křivky $C\{x(u)\}$. Všecky body kubické křivky jsou septemtaktické. Jsou-li všecky body křivky $C\{x(u)\}$ septemtaktické, jsou všecky tyto body obsaženy v pevné kubické křivce.

Že $C\{x\}$ a $\overset{u_0}{C}_3$ mají sedmibodový styk v $\{x(u_0)\}$, když a jen když pro $u = u_0$ platí (1), vychází snadno ze **180**, **369** a **370**. Že všecky body kubické křivky jsou septemtaktické, je zřejmé. Předpokládejme, že rovnice (1) jsou identicky splněny: stačí ukázati, že, zvolíme-li jakkoli u_0 a bod $\{y\}$ kubické křivky $\overset{u_0}{C}_3$, bod $\{y\}$ náleží křivce $\overset{u}{C}_3$ pro každé u. Užijme označení ze **369**. Dle (1) a **369** (5) jest, ježto můžeme předpokládati, že ar. bod y nezávisí na u,

$$\begin{aligned} & D(\overset{u}{SP}_r^{(1)}y) = -\overset{u}{SP}_r^{(2)}y, \\ & D(\overset{u}{SP}_r^{(2)}y) = \overset{u}{SP}_r^{(3)}y - \tfrac{3}{10}\, q(u)\, \overset{u}{SP}_r^{(1)}y, \\ & D(\overset{u}{SP}_r^{(3)}y) = \tfrac{1}{10}\, q(u)\, \overset{u}{SP}_r^{(2)}y - \tfrac{1}{10}(4\Theta(u) - Dq)\, \overset{u}{SP}_r^{(1)}y. \end{aligned} \tag{2}$$

Dle předpokladu jest

$$\overset{u_0}{SP}_r^{(1)}y = \overset{u_0}{SP}_r^{(2)}y = \overset{u_0}{SP}_r^{(3)}y = 0. \tag{3}$$

Ze (2) a (3) soudíme dle **63**, že pro všecka u jest

$$\overset{u}{SP}_r^{(1)}y = \overset{u}{SP}_r^{(2)}y = \overset{u}{SP}_r^{(3)}y = 0.$$

372. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka třídy $r \geqq 6$. Buď D její diferenciální parametr; buď $\Theta(u)$ ($\tau(u)$) její druhý (čtvrtý) unimodulární invariant. Buď $\mathfrak{C}_a \xi(u) = \text{Adj.}$

---

*) Viz pozn. pod čarou ve **369**.

$C_a\, x(u)$. Bod $\{x(u_0)\}$ nebuď septemtaktický bod křivky $C\{x(u)\}$. Buď $\overset{u_0}{C_3}$ oskulační kubická křivka křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Rovina

$$(1)\qquad \{(\tau - D\Theta)\,\xi - 2\Theta D\xi\} \qquad (u = u_0)$$

jest rovinou sedmibodového styku křivky $C\{x\}$ s kubickou křivkou $\overset{u_0}{C_3}$ v bodě $\{x(u_0)\}$.

Užijme označení ze **369**. Položme

$$(2)\qquad Q_r = \left[(\tau - D\Theta)\,\overset{u}{P}{}_r^{(2)} - 3\Theta\,\overset{u}{P}{}_r^{(3)}\right]_{u=u_0}.$$

Snadno nalezneme, že rovinová forma Q_r jest lin. závislá na rovinových formách

$$\begin{vmatrix} \xi, & D\xi \\ D\xi, & \frac{8}{9}D^2\xi - \frac{9}{20}q\xi \end{vmatrix}_{u=u_0}, \quad \begin{vmatrix} \xi, & \frac{8}{9}D^2\xi - \frac{9}{20}q\xi \\ D\xi, & -\frac{8}{9}\Xi + \frac{27}{20}qD\xi - \frac{9}{20}(3Dq + 4\Theta)\xi \end{vmatrix}_{u=u_0},$$

$$\begin{vmatrix} D\xi, & \frac{8}{9}D^2\xi - \frac{9}{20}q\xi \\ \frac{8}{9}D^2\xi - \frac{9}{20}q\xi, & -\frac{8}{9}\Xi + \frac{27}{20}qD\xi - \frac{9}{20}(3Dq + 4\Theta)\xi \end{vmatrix}_{u=u_0}$$

vzhledem k ar. bodu $\{x(u_0)\}$. Dle **369** má rovinová forma Q_r sedmibodový styk s křivkou $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Ze (2), **369** (1) a **48** (6) snadno nalezneme, že pro každý ar. bod z platí

$$S[Q_r;\ z]\, x(u_0) = 15\, Sy\left[(\tau - D\Theta)\,\xi - 2\Theta D\xi\right]_{u=u_0}.$$

Teorém nyní vychází ihned ze **226**.

373. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka třídy $r \geqq 6$. Buď $\Theta(u)$ její druhý unimodulární invariant. Buď $\Gamma\{p(u)\} = \text{Ass.}\, C\{x(u)\}$. Buď $\overset{u_0}{C_3}$ oskulační kubická křivka křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Když a jen když $\Theta(u_0) = 0$, mají $\Gamma\{p(u)\}$ a Ass. $\overset{u_0}{C_3}$ šestipřímkový styk v přímce $\{p(u_0)\}$.

Je-li $\{x(u_0)\}$ septemtaktický bod pro $C\{x\}$, je teorém zřejmý dle **221**. Předpokládejme tedy, že $\{x(u_0)\}$ není septemtaktický bod pro $C\{x\}$. Srovnáme-li **222** (2) a **225** (2), vidíme, že je třeba ukázati: Když a jen když $\Theta(u_0) = 0$, jest oskulační rovina křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$ rovinou sedmibodového styku křivky $C\{x\}$ s kubickou křivkou $\overset{u_0}{C_3}$ v tomto bodě. To však je zřejmé dle **372**.

Oskulační lin. kongruence a oskulační lin. komplex.

374. Buď q ar. komplex. Buď $R\{p(u)\}$ osnova třídy r. Pravíme, že q a $R\{p(u)\}$ mají s-přímkový $(1 \leqq s \leqq r+1)$ styk v přímce $\{p(u_0)\}$, když

$$\left[\frac{d^\alpha}{du^\alpha} Sqp(u)\right]_{u=u_0} = 0. \qquad \left(0 \leqq \alpha \leqq s-1;\ \frac{d^0}{du^0} = 1\right)$$

V. **174** a **208**.

Má-li ar. komplex $q \neq 0_p$ s-přímkový ($1 \leqq s \leqq r+1$) styk s osnovou $R\{p(u)\}$ třídy r v přímce $\{p(u_0)\}$, pravíme, že lin. komplex adjungovaný ke $\{q\}$ a osnova $R\{p(u)\}$ mají s-přímkový styk v $\{p(u_0)\}$. Pravíme, že lin. kongruence L obsažená v Adj. $\{q_1, q_2\}$ má s osnovou $R\{p(u)\}$ třídy r s-přímkový ($1 \leqq s \leqq r+1$) styk v přímce $\{p(u_0)\}$, když ar. komplex q_1 i ar. komplex q_2 má s $R\{p(u)\}$ s-přímkový styk v $\{p(u_0)\}$. Zřejmě tento styk nastane, když a jen když každý lin. komplex obsahující L má s-přímkový styk s $R\{p(u)\}$ v $\{p(u_0)\}$.

375. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka třídy $r \geqq 5$. Buď D její diferenciální parametr. Buď $\Gamma\{p(u)\} = \text{Ass.}\ C\{x(u)\}$. Buď $\overset{u}{L}$ lin. kongruence obsažená v

(1) $$\text{Adj.} \{(xDx),\ (xD^3x) - (DxD^2x)\}.$$

Lin. kongruence $\overset{u_0}{L}$ — a žádná jiná lin. kongruence — má s osnovou $\Gamma\{p(u)\}$ čtyřpřímkový styk v přímce $\{p(u_0)\}$. Pravíme, že $\overset{u_0}{L}$ jest oskulační lin. kongruence osnovy $\Gamma\{p(u)\}$ v přímce $\{p(u_0)\}$. Lin. kongruence $\overset{u_0}{L}$ jest parabolická a její řídící přímkou jest $\{p(u_0)\}$.

Můžeme předpokládati, že $r \geqq 6$ a $p(u) = (xDx)$. Dle **374** má ar. komplex r čtyřpřímkový styk s $\Gamma\{p(u)\}$ v $\{p(u_0)\}$, když a jen když q náleží do

$$\text{Adj.} \{p(u_0),\ (Dp)_{u=u_0},\ (D^2p)_{u=u_0},\ (D^3p)_{u=u_0}\}.$$

Dle **364** (1) a (3) je však

$$p(u) = (xDx),\ Dp = (xD^2x),\ D^2p = (xX) + (DxD^2x) + qp,$$
$$D^3p = 2(Dx, X) + qDp + (Dq - \Theta)p,$$

takže stačí ukázati, že 1° ar. komplexy (xDx), (xD^2x), $(xX) + (Dx, D^2x)$, (Dx, X) jsou lin. nezávislé a 2°

$$\{(x, Dx),\ (x, D^3x) - (Dx, D^2x)\} = \{(xDx),\ (x, X) - (Dx, D^2x)\} =$$
$$= \text{Adj.} \{(x, Dx),\ (xD^2x),\ (x, X) + (Dx, D^2x),\ (Dx, X)\},$$

což vychází snadno ze **106**, **362** (4) a **364** (1). Že lin. kongruence obsažená v (1) jest parabolická o řídící přímce $\{p(u_0)\}$, vychází dle **132** z identity (v. **349** (2))

$$S[\lambda(xDx)+\mu(xD^3x)-\mu(DxD^2x)][\lambda(xDx)+\mu(xD^3x)-\mu(DxD^2x)]=$$
$$=-2\mu^2(x, Dx, D^2x, D^3x)=-2\omega\mu^2.$$

Oskulační lin. kongruenci lze definovati i když $r=4$. Stačí si všimnouti, že

$$(xD^3x)-(DxD^2x)=-\frac{\omega}{6}\,\frac{\left(x\,\frac{dx}{du}\,\frac{d^2x}{du^2}\,\frac{d^5x}{du^5}\right)}{\left|\left(x\,\frac{dx}{du}\,\frac{d^2x}{du^2}\,\frac{d^3x}{du^3}\right)\right|^{\frac{4}{3}}}(xDx)+y(u),$$

$$\left\{(xDx),\ (xD^3x)-(DxD^2x)\right\}=\left\{(xDx),\ y(u)\right\},$$

při čemž $y(u)$ již nezávisí na $\frac{d^5x}{du^5}$.

376 Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka třídy $r\geqq 4$. Buď D její diferenciální parametr. Buď $\mathfrak{C}_a\xi(u)=$ Adj. $C_a x(u)$. Buď $\overset{u_0}{L}$ oskulační lin. kongruence osnovy Ass. $C\{x\}=$ $=\Gamma\{p(u)\}$ v přímce $\{p(u_0)\}$. Svazek přímek $\{y;\eta\}^\Gamma$ náleží do $\overset{u_0}{L}$, když a jen když

$$y=(\lambda x+\mu Dx)_{u=u_0},$$
$$\eta=(\lambda\xi+\mu D\xi)_{u=u_0}. \tag{1}$$

Stačí provésti důkaz za předpokladu, že $r\geqq 5$. Buď $\{y;\eta\}^\Gamma$ svazek přímek náležející do $\overset{u_0}{L}$. Jelikož lin. kongruence $\overset{u_0}{L}$ je parabolická o řídící přímce $\{p(u_0)\}$ a $\{p(u)\}=\{x\,Dx\}=\{\xi\,D\xi\}$, jest

$$y=(\lambda x+\mu Dx)_{u=u_0},\quad \eta=(\lambda'\xi+\mu' D\xi)_{u=u_0}.$$

Dle **352** (1) jest

$$\omega\eta=(x, Dx, \lambda' D^2x+\mu' D^3x).$$

Odtud snadno vidíme, že přímka

$$\{(\lambda x+\mu Dx,\ \lambda' D^2x+\mu' D^3x)\}_{u=u_0}$$

náleží do $\{y,\eta\}^\Gamma$ a tedy do $\overset{u_0}{L}$. Dle **375** je tedy pro $u=u_0$

$$S[(xD^3x)-(DxD^2x)](\lambda x+\mu Dx,\ \lambda' D^2x+\mu' D^3x)=0$$

čili dle **349** (2)

$$\omega(\mu\lambda'-\lambda\mu')=0,$$

$\{|\lambda', \mu'|_b\} = \{|\lambda, \mu|_b\}$, $\{\eta\} = \{\lambda\xi + \mu D\xi\}_{u=u_0}$. Podobně soudíme obráceně, že svazek přímek $\{y;\eta\}^r$ náleží do $\overset{u_0}{L}$, když platí (1).

377. Buď $C\{x(u)\}$ regulární křivka třídy $r \geqq 4$. Buď ω její znamení. Buď $\{p_0\}$ tečna křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Buď $\overset{u_0}{L}$ oskulační lin. kongruence osnovy Ass. $C\{x\}$ v přímce $\{p_0\}$. Buď $\mathfrak{K}$ korespondence mezi řadou bodovou soumístnou s $\{p_0\}$ a svazkem rovin soumístným s $\{p_0\}$, v níž libovolnému bodu $\{y\}$ incidentnímu s $\{p_0\}$ je přiřazena rovina $\{\eta\}$ taková, že svazek přímek $\{y;\eta\}^r$ náleží do $\overset{u_0}{L}$. Korespondence $\mathfrak{K}$ zachovává (mění) orientaci, když $\omega = 1$ $(\omega = -1)$.

Dle **376** přiřazuje $\mathfrak{K}$ trojici bodů v positivní orientaci vzhledem k (x, Dx) trojici rovin v positivní orientaci vzhledem ke $(\xi, D\xi)$. Teorém tedy vychází snadno ze **141** a **354** (2).

378. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka třídy $r \geqq 5$. Buď D její diferenciální parametr. Buď $\mathfrak{C}_a\xi(u) = \text{Adj.}\ C_a x(u)$. Buď $\Gamma\{p(u)\} = \text{Ass.}\ C\{x(u)\}$. Buď ω znamení křivky $C\{x(u)\}$. Buď $\overset{u}{K}$ lin. komplex adjungovaný ke

$$\left\{(DxD^2x) - \omega(D\xi D^2\xi)\right\} = \left\{\left(\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right) - \omega\left(\frac{d\xi}{du}\frac{d^2\xi}{du^2}\right)\right\}. \qquad (u = u_0) \tag{1}$$

Lin. komplex $\overset{u_0}{K}$ — a žádný jiný lin. komplex — má s osnovou $\Gamma\{p(u)\}$ pětipřímkový styk v přímce $\{p(u_0)\}$. Pravíme, že $\overset{u_0}{K}$ jest oskulační lin. komplex osnovy $\Gamma\{p(u)\}$ v přímce $\{p(u_0)\}$. Lin. komplex $\overset{u_0}{K}$ není speciální.

Můžeme předpokládati, že $r \geqq 7$. Definujme X jako ve **362**. Ve **375** jsme viděli, že ar. komplex $\overset{u}{r}$ má čtyřpřímkový styk s $\Gamma\{p(u)\}$ v $\{p(u)\}$, když a jen když $\overset{u}{r}$ náleží do $\{(xDx), (xX) - (DxD^2x)\}$. Má-li $\overset{u}{r}$ pětipřímkový styk s $\Gamma\{p\}$ v $\{p(u)\}$, je tedy tím spíše

$$\overset{u}{r} = \lambda(xDx) + \mu[(xX) - (DxD^2x)],$$

takže dle **364**

$$D\overset{u}{r} = (D\lambda + \theta\mu)(xDx) + D\mu[(xX) - (DxD^2x)] + \lambda(xD^2x). \tag{2}$$

Dle **183** má — pro každé u — ar. komplex $D\overset{u}{r}$ trojpřímkový styk s $\Gamma\{p\}$ v přímce $\{p(u_0)\}$, což ostatně snadno přímo se zjistí. Dle **184** má tedy ar. komplex $\overset{u_0}{r}$ pětipřímkový styk s $\Gamma\{p(u)\}$ v $\{p(u_0)\}$, když a jen když

$(\overset{u}{D} r)_{u=u_0}$ má čtyřpřímkový styk s $\Gamma\{p\}$ v $\{p(u_0)\}$, což dle (2) a **375** nastane, když a jen když $\lambda(u_0)=0$. Odtud vidíme, že lin. komplex adjungovaný k

$$\{(DxD^2x)-(xX)\}_{u=u_0}$$

jest (jediný) lin. komplex mající pětipřímkový styk s $\Gamma\{p\}$ v $\{p(u_0)\}$. Avšak

(3) $$(xX)=\omega(D\xi D^2\xi),$$

což takto dokážeme: Dle **357** a **362** (2) jest nejprve

$$\{x, X\}=\text{Adj.}\{D\xi, D^2\xi\},$$

takže dle **102** existuje ϱ takové, že

$$(xX)=\rho(D\xi D^2\xi).$$

Dle **353** (2) je tedy

$$S(xX)(\xi D^3\xi)=\rho S(\xi, D^3\xi)(D\xi, D^2\xi)=\omega\rho.$$

Dle **98** (1), **357** a **362** (2) je však

$$S(xX)(\xi D^3\xi)=\begin{vmatrix} Sx\xi & SxD^3\xi \\ SX\xi & SXD^3\xi \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1.$$

Srovnáním obdržíme $\omega\varrho=1$, $\varrho=\omega$, takže identita (3) je dokázána. Zbývá ukázati, že oba výrazy v (1) jsou rovné. Je-li však $\mu=\mu(u)\neq 0$ libovolná funkce třídy 1 a je-li $\Delta=\mu\frac{d}{du}$, jest

$$\Delta x=\mu\frac{dx}{du},\quad \Delta^2 x=\mu^2\frac{d^2x}{du^2}+\Delta\mu\,.\,\frac{dx}{du},\quad (\Delta x, \Delta^2 x)=\mu^3\left(\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right)$$

a podobně pro ξ, takže

$$(\Delta x, \Delta^2 x)-\omega(\Delta\xi, \Delta^2\xi)=\mu^3\left[\left(\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right)-\omega\left(\frac{d\xi}{du}\frac{d^2\xi}{du^2}\right)\right].$$

Zvolíme-li $\mu=\left|\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)\right|^{-\frac{1}{6}}$, jest $\Delta=D$, takže obdržíme (1).

379. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka třídy $r\geq 6$. Buď D její diferenciální parametr; buď $\Theta(u)$ její druhý unimodulární invariant. Buď $\Gamma\{p(u)\}=\text{Ass. } C\{x(u)\}$. Buď $\overset{u}{K}$ oskulační lin. komplex osnovy $\Gamma\{p\}$ v přímce $\{p(u)\}$. Když a jen když $\Theta(u_0)=0$, má lin. komplex $\overset{u_0}{K}$ šestipřímkový styk s osnovou $\Gamma\{p\}$ v přímce $\{p(u_0)\}$. Pravíme pak, že $\{p(u_0)\}$ jest sextaktická přímka osnovy $\Gamma\{p\}$. Když a jen když všecky přímky osnovy $\Gamma\{p(u)\}$ jsou obsaženy v pevném lin. komplexu, jsou všecky přímky této osnovy sextaktické.

Buď $\overset{u}{r} = (xX) - (Dx\, D^2x)$, takže dle **378** ar. komplex $\overset{u}{r}$ má pětipřímkový styk s $\Gamma\{p\}$ v $\{p(u)\}$. Máme ukázati, že ar. komplex $\overset{u_0}{r}$ má šestipřímkový styk s $\Gamma\{p\}$ v $\{p(u_0)\}$, když a jen když $\Theta(u_0) = 0$. Dle **378** (2) jest

$$D\overset{u}{r} = \Theta\,(x\,Dx). \tag{1}$$

Ar. komplex $D\overset{u}{r}$ má — pro každé u — čtyřpřímkový styk s $\Gamma\{p\}$ v $\{p(u_0)\}$. Dle **184** má $\overset{u_0}{r}$ šestipřímkový styk s $\Gamma\{p\}$ v $\{p(u_0)\}$, když a jen když $(D\overset{u}{r})_{u=u_0}$ má pětipřímkový styk s $\Gamma\{p\}$ v $\{p(u_0)\}$, což dle (1) a **378** nemůže jinak nastati, než že $\Theta(u_0) = 0$. Že všecky přímky osnovy $\Gamma\{p\,(u)\}$ jsou sextaktické, když tato osnova jest obsažena v pevném lin. komplexu, je zřejmé. Obráceně, když $\Theta(u) = 0$ identicky, je dle (1) ar. komplex $(xX) - (Dx,\, D^2x)$ pevný a je zřejmě incidentní s každou přímkou osnovy $\Gamma\{p\,(u)\}$.

380. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka třídy $r \geqq 6$. Buď D její diferenciální parametr. Buď $\Theta(u)$ její druhý unimodulární invariant. Buď $\mathfrak{C}_a \xi(u) = \text{Adj. } C_a x(u)$. Buď $\overset{u_0}{K}$ oskulační lin. komplex osnovy Ass. $C\{x\}$ v přímce $\{x\,Dx\}_{u=u_0}$. Buď $\{y\}$ libovolný bod. Položme

$$y = \left(\lambda_0 x + \lambda_1 Dx + \lambda_2 D^2x + \lambda_3 D^3x\right)_{u=u_0}, \tag{1}$$

$$\eta = \left(\lambda_0 \xi + \lambda_1 D\xi + \lambda_2 D^2\xi + \lambda_3\, [D^3\xi + \Theta\xi]\right)_{u=u_0}. \tag{2}$$

Rovina $\{\eta\}$ je polárou bodu $\{y\}$ vzhledem k $\overset{u_0}{K}$.

Buď K nulová korelace o basi

$$r = \left[(Dx\,D^2x) - (xX)\right]_{u=u_0}.$$

Dle **134** a **378** (1), (3) stačí ukázati, že

$$\eta = \omega\,(ry).$$

Avšak zřejmě

$$ry = \left[\lambda_0 (x, Dx, D^2x) + \lambda_1 (x, Dx, X) + \lambda_2 (x, D^2x, X) + \lambda_3 (Dx, D^2x, D^3x) - \lambda_3 (x, X, D^3x)\right]_{u=u_0},$$

takže stačí ukázati, že

$$\begin{gathered}(x, Dx, D^2x) = \omega\,\xi,\ (x, Dx, X) = \omega\, D\xi, \\ (x, D^2x, X) = \omega\, D^2\xi,\ (Dx, D^2x, D^3x) - (x, X, D^3x) = \omega\,(D^3\xi + \Theta\,\xi).\end{gathered} \tag{3}$$

Prvá rovnice (3) je zřejmá. Dle **364** (1), (3) jest

$$(x, Dx, X) = (xDxD^3x),$$
$$(x, D^2x, X) = D(xDxX),$$

z čehož plyne druhá a třetí rovnice (3). Dle **364** (1) jest

$$(x, X, D^3x) = -q(xDxD^3x) = -\omega q D\xi,$$

tedy dle **362** (1)

$$(Dx.\ D^2x, D^3x) - (x, X, D^3x) = -\omega\Xi + \omega q D\xi,$$

z čehož plyne čtvrtá rovnice (3) dle **364** (2).

Oskulační kuželosečka křivky a oskulační kuželosečky jejích průmětů.

381. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka třídy $r \geqq 5$. Buď D její diferenciální parametr; buď $q(u)$ její prvý unimodulární invariant. Buď $\mathfrak{C}_a \xi(u) = \text{Adj. } C_a x(u)$. Definujme Ξ jako ve **362**. Buď $\overset{u}{C}_3$ oskulační kubická křivka křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u)\}$. Buď

$$\overset{u}{C}_2 = C[\xi, 15(D^2\xi)^2 + 40 D\xi . \Xi - 12q(D\xi)^2]. \tag{1}$$

Algebraická křivka $\overset{u_0}{C}_2$ jest kuželosečka, jejíž všecky body jsou incidentní s $\{\xi(u_0)\}$ a jež má s $C\{x\}$ právě dvojbodový styk v $\{x(u_0)\}$. Pravíme, že $\overset{u_0}{C}_2$ jest oskulační kuželosečka křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Každá tečna kubické křivky $\overset{u_0}{C}_3$ jest incidentní s jedním bodem kuželosečky $\overset{u_0}{C}_2$. Každý bod kuželosečky $\overset{u_0}{C}_2$ jest incidentní s jednou tečnou kubické křivky $\overset{u_0}{C}_3$.

Že $\overset{u_0}{C}_2$ je kuželosečka, ukážeme ve **382**. Abychom ukázali, že $\overset{u_0}{C}_2$ má v $\{x(u_0)\}$ právě dvojbodový styk, můžeme předpokládati, že $r \geqq 6$. Dle **364** (2), (4) jest

$$D[15(D^2\xi)^2 + 40D\xi . \Xi - 12q(D\xi)^2] =$$
$$= -20(\nu + D\Theta)\xi D\xi - 12Dq . (D\xi)^2 - 30\Theta\xi D^2\xi + 6qD\xi D^2\xi + 10\Xi D^2\xi.$$

Snadno vidíme, že rovinová forma napravo má právě jednobodový styk s $C\{x\}$ v $\{x(u)\}$. Dle **183** a **184** je tedy patrno, že rovinová forma

$$[15(D^2\xi)^2 + 40D\xi . \Xi - 12q(D\xi)^2]_{u=u_0}$$

má v $\{x(u_0)\}$ právě dvojbodový styk s $C\{x\}$. Ježto $\xi(u_0)$ má s $C\{x\}$ trojbodový styk v $\{x(u_0)\}$, vychází z (1) a **180**, že $\overset{u_0}{C_2}$ a $C\{x\}$ mají právě dvojbodový styk v $\{x(u_0)\}$.

Tečna kubické křivky $\overset{u_0}{C_3}$ v bodě $\{x(u_0)\}$ je zřejmě incidentní s bodem $\{x(u_0)\}$ kuželosečky $\overset{u_0}{C_2}$.

Buď nyní $\{y\}$ bod křivky $\overset{u_0}{C_3}$ různý od $\{x(u_0)\}$. Buď

$$
\begin{aligned}
&\xi_0 = \xi(u_0),\\
(2)\qquad &\xi_1 = (D\xi)_{u=u_0},\\
&\xi_2 = (\tfrac{3}{2} D^2\xi - \tfrac{9}{20} q\xi)_{u=u_0},\\
&\xi_3 = [-\tfrac{9}{2}\Xi + \tfrac{27}{20} q D\xi - \tfrac{9}{20}(3Dq + 4\Theta)\xi]_{u=u_0},
\end{aligned}
$$

takže dle **370**

$$
(3)\qquad \overset{u_0}{C_3} = C\begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{bmatrix}.
$$

Z (1) a (2) vychází snadno, že

$$
(4)\qquad \overset{u_0}{C_2} = C[\xi_0;\ 3\xi_2^2 - 4\xi_1\xi_3].
$$

Buď x_0, x_1, x_2, x_3 jehlan adjungovaný ke $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ a buď

$$
y = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3.
$$

tedy $Sy\xi_i = \lambda_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$. Dle (3) jest

$$
(5)\qquad \lambda_0\lambda_2 - \lambda_1^2 = 0,\ \lambda_0\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2 = 0,\ \lambda_1\lambda_3 - \lambda_2^2 = 0.
$$

Kdyby bylo $\lambda_0 = 0$, bylo by dle (5) též $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, t. j. $\{y\} = \{x_3\} = \text{Adj.}\{\xi_0, \xi_1, \xi_2\} = \{x(u_0)\}$ proti předpokladu; můžeme tedy předpokládati, že $\lambda_0 = 1$, načež z (5) obdržíme $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = a^2$, $\lambda_3 = a^3$, takže

$$
y = y(a) = x_0 + ax_1 + a^2x_2 + a^3x_3.
$$

Odtud snadno vidíme, že kubická křivka $\overset{u_0}{C_3}$ splyne v okolí bodu $\{y\}$ s křivkou

$$
C\{x_0 + ux_1 + u^2x_2 + u^3x_3\},
$$

takže její tečna v $\{y\}$ obsahuje bod

$$
z = \left[\frac{d}{du}(x_0 + ux_1 + u^2x_2 + u^3x_3)\right]_{u=a} = x_1 + 2ax_2 + 3a^2x_3.
$$

Snadno však vidíme, že bod $\{z\}$ náleží kuželosečce $\overset{u_0}{C_2}$. Vskutku

$$
\begin{aligned}
&S\xi_0 z = 0,\ S\xi_1 z = 1,\ S\xi_2 z = 2a,\ S\xi_3 z = 3a^2,\\
&S(3\xi_2^2 - 4\xi_1\xi_3)z = 3\,.\,(2a)^2 - 4\,.\,3a^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Podobně se ukáže, že obráceně také každý bod kuželosečky $\overset{u_0}{C_2}$ jest incidentní s jednou tečnou kubické křivky $\overset{u_0}{C_3}$.

382. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka třídy $r \geqq 5$. Buď D její diferenciální parametr. Buď $q(u)$ její prvý unimodulární invariant. Buď $\overset{u_0}{C_2}$ oskulační kuželosečka křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Buď $\{z\}$ libovolný bod incidentní s oskulační rovinou křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$, tedy

$$z = [\lambda_0 x + \lambda_1 Dx + \lambda_2 D^2 x]_{u=u_0}. \tag{1}$$

Přímka $\{r\}$, kde

$$r = [4(5\lambda_0 + 3q\lambda_2)(xDx) + 15\lambda_1(xD^2x) + 20\lambda_2(DxD^2x)]_{u=u_0} \tag{2}$$

jest polárou bodu $\{z\}$ vzhledem ke kuželosečce $\overset{u_0}{C_2}$.

V dalším je všude položiti $u = u_0$. Buď $\mathfrak{K}$ projektivní korespondence mezi polem ar. bodů Adj. $\{\xi\}$ a prostorem T dvojrozměrných ar. bodů, v níž

$$x \sim y_0 = |1, 0, 0|_b,\ Dx \sim y_1 = |0, 1, 0|_b,\ D^2x \sim y_2 = |0, 0, 1|_b,$$

takže dle (1) je též $z \sim \bar{z}$ v $\mathfrak{K}$, kde

$$\bar{z} = \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = |\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2|_b.$$

Buď $\mathfrak{K}^* = \text{Ass.}\ \mathfrak{K}$, takže dle **146** v $\mathfrak{K}^*$ jest

$$(xDx) \sim \eta_2,\ (xD^2x) \sim -\eta_1,\ (DxD^2x) = \eta_0, \tag{3}$$

kde

$$\eta_0 = |1, 0, 0|_r,\ \eta_1 = |0, 1, 0|_r,\ \eta_2 = |0, 0, 1|_r.$$

Zřejmě každý bod kuželosečky $\overset{u_0}{C_2}$ jest incidentní s $\{\xi\}$. Snadno se vidí, že jest $\overset{u_0}{C_2} \sim \overline{C}_2$ v $\mathfrak{K}$, kde

$$\overline{C}_2 = C[15\eta_1^2 - 40\eta_0\eta_2 - 12q\eta_2^2]. \tag{4}$$

Ukažme na př., že, když bod $\{z\}$ náleží do $\overset{u_0}{C_2}$, bod $\{\bar{z}\}$ náleží do $\overline{C}_2$. Dle předpokladu a dle **381** (1) jest

$$15(SzD^2\xi)^2 + 40\,SzD\xi\,.\,Sz\Xi - 12q\,(SzD\xi)^2 = 0. \tag{5}$$

Dle (1) a **357**, **362** (3) je však

$$SzD\xi = -\lambda_2,\ SzD^2\xi = \lambda_1,\ Sz\Xi = \lambda_0,$$

tedy dle (5)

$$15\lambda_1^2 - 40\lambda_0\lambda_2 - 12q\lambda_2^2 = 0. \tag{6}$$

Zřejmě je však $S\bar{z}\eta_i = \lambda_i$ $(i = 0, 1, 2)$, takže ze (4) a (5) vidíme, že bod $\{\bar{z}\}$ náleží do $\bar{C}_2$.

Ježto $\bar{C}_2$ je kuželosečka, je dle definice v **151** také $\overset{u_0}{C_2}$ kuželosečkou. Dle (2) a (3) jest v $\mathfrak{R}^*$: $r \sim \zeta$, kde

$$\zeta = 4(5\lambda_0 + 3q\lambda_2)\eta_2 - 15\lambda_1\eta_1 + 20\lambda_2\eta_0.$$

Máme ukázati, že přímka $\{\zeta\}$ je polárou bodu $\{\bar{z}\}$ vzhledem k C_2. To však vychází ihned ze (4), ježto zřejmě

$$[15\eta_1^2 - 40\,\eta_0\eta_2 - 12q\eta_2^2; \bar{z}] = -\zeta.$$

383. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka třídy $r \geqq 5$. Buď $\Gamma_a p(u) =$ Ass. $C_a x(u)$. Buď $\{z\}$ libovolný bod incidentní s $\{p(u_0)\}$, tedy

$$z = \left(\mu_0 x + \mu_1 \frac{dx}{du}\right)_{u=u_0}.$$

Buď $\{r\}$ polára bodu $\{z\}$ vzhledem k oskulační kuželosečce křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Pak jest

$$\{r\} = \left\{\left(4\mu_0 p + 3\mu_1 \frac{dp}{du}\right)_{u=u_0}\right\}.$$

Vychází ihned ze **351** a **382.**

384. Buď $C_a\, x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka třídy $r \geqq 5$. Buď D její diferenciální parametr. Buď $q(u)$ $(\Theta(u))$ její prvý (druhý) unimodulární invariant. Buď $\mathfrak{C}_a \xi(u) =$ Adj. $C_a x(u)$. Definujme Ξ jako ve **362.** Buď $\{y\}$ bod neincidentní s $\{\xi(u_0)\}$. Buď $C\{x'(u)\}$ průmět křivky $C\{x\}$ s bodu $\{y\}$ do roviny $\{\xi(u_0)\}$. Rovinná křivka $C\{x'\}$ má v bodě $\{x'(u_0)\} = \{x(u_0)\}$ sextaktický bod, když a jen když bod $\{y\}$ náleží algebraické ploše $\overset{u_0}{M_3}$, při čemž

$$\overset{u}{M_3} = M\left[\xi^2\Xi + \xi D\xi D^2\xi - \tfrac{4}{9}(D\xi)^3 - \tfrac{3}{5}q\xi^2 D\xi + \tfrac{1}{10}(4\Theta + 3Dq)\xi^3\right]. \tag{1}$$

Algebraická plocha $\overset{u_0}{M_3}$ obsahuje oskulační kubickou křivku křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$.

Buď $\xi(u_0) = \xi_0$. Zřejmě můžeme předpokládati, že

$$x'(u) = S\xi_0 z\,.\,x(u) - S\xi_0 x(u)\,.\,z. \tag{2}$$

Buď $\mathfrak{R}$ projektivní korespondence mezi polem ar. bodů Adj. $\{\xi_0\}$ a prostorem T dvojrozměrných ar. bodů o jednotce ξ_0; buď $\mathfrak{R}^* =$ Ass. $\mathfrak{R}$. Buď v $\mathfrak{R}$: $x'(u) \sim \bar{x}(u)$. Buď $\mathfrak{C}_a\, \bar{\xi}(u) =$ Adj. $C_a\, \bar{x}(u)$. Buď Δ diferenciální parametr ar. křivky C_a $\bar{x}(u)$; buď $\bar{k}(u)$ ($\bar{n}(u)$) prvý (druhý) unimodulární invariant této ar. křivky. Buď $\bar{\Xi}(u) = (\varDelta\bar{x}, \varDelta^2\bar{x})$. Dle **319** jest

$$\Delta^2\xi = \bar{\Xi} + 2\bar{k}\xi,\quad \Delta\bar{\Xi} = -(\bar{n} + \Delta\bar{k})\,\xi. \tag{3}$$

Dle **308** (1) jest $\xi = (\bar{x}, \varDelta\bar{x})$. Zřejmě jest v $\mathfrak{K}^*$: $(x', \varDelta x') \sim \xi$, $(\varDelta x', \varDelta^2 x') \sim \bar{\Xi}$. Dle (3) je tedy patrně

$$\Delta^2(x', \Delta x') = (\Delta x', \Delta^2 x') + 2\bar{k}(x', \Delta x'),$$
$$\Delta(\Delta x', \Delta^2 x') = -(\bar{n} + \Delta\bar{k})(x', \Delta x')$$

a tedy též

$$\Delta^2(x', \Delta x', z) = (\Delta x', \Delta^2 x', z) + 2\bar{k}(x', \Delta x', z),\quad \Delta(\Delta x', \Delta^2 x', z) = -(\bar{n} + \Delta\bar{k})(x', \Delta x', z). \tag{4}$$

Dle **306** jest

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\bar{x}, \dfrac{d\bar{x}}{du}, \dfrac{d^2\bar{x}}{du^2}\right)}}\frac{d}{du} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\bar{x}, D\bar{x}, D^2\bar{x})}}\,D. \tag{5}$$

Ježto ξ_0 jest jednotkou při $\mathfrak{K}$, jest

$$(x', Dx', D^2x') = (\bar{x}, D\bar{x}, D^2\bar{x})\,\xi_0,$$

z čehož plyne

$$(x', Dx', D^2x', z) = (\bar{x}, D\bar{x}, D^2\bar{x})\,S\xi_0 z. \tag{6}$$

Ze (2) a **352** (1) plyne

$$(x', Dx', D^2x', z) = (S\xi_0 z)^3 (x, Dx, D^2x, z) = \omega\,(S\xi_0 z)^3 S\xi z,$$

takže dle (6)

$$(\bar{x}, D\bar{x}, D^2\bar{x}) = \omega\,(S\xi_0 z)^2 S\xi z,$$

tedy dle (5)

$$\Delta = \frac{\omega}{\sqrt[3]{(S\xi_0 z)^2 S\xi z}}\,D. \tag{7}$$

Dle (7) jest

$$(x', \Delta x', z) = \frac{\omega}{\sqrt[3]{(S\xi_0 z)^2 . S\xi z}}\,.\,(x', Dx', z),$$
$$\Delta(x', \Delta x', z) = \frac{1}{[(S\xi_0 z)^2 . S\xi z]^{\frac{2}{3}}}\left[(x', D^2x', z) - \frac{1}{3}\frac{Sz\,D\xi}{Sz\xi}(x', Dx', z)\right], \tag{8}$$

$$\Delta^2(x', \Delta x', z) = \frac{\omega}{(S\xi_0 z)^2 S\xi z}\Bigg[(x', D^3x', z) + (Dx', D^2x', z) -$$
$$- \frac{Sz\,D\xi}{Sz\xi}(x', D^2x', z) - \frac{1}{9}\left\{3\frac{Sz\,D^2\xi}{Sz\xi} - 5\left(\frac{Sz\,D\xi}{Sz\xi}\right)^2\right\}(x', Dx', z)\Bigg], \tag{9}$$

$$(\Delta x', \Delta^2 x', z) = \frac{\omega}{(S\xi_0 z)^2 S\xi z}(Dx', D^2x', z), \tag{10}$$

(11) $$\Delta(\Delta x', \Delta^2 x', z) = \frac{1}{[(S\xi_0 z)^2 \, S\xi z]^{\frac{4}{3}}} \left[(Dx', D^3 x', z) - \frac{Sz\,D\xi}{Sz\,\xi} (Dx, D^2 x, z) \right].$$

Ze (4), (8), (9), (10), (11) plyne

$$(x', D^3 x', z) - \frac{Sz\,D\xi}{Sz\,\xi}(x', D^2 x', z) - \frac{1}{9}\left[3\,\frac{Sz\,D^2\xi}{Sz\,\xi} - 5\left(\frac{Sz\,D\xi}{Sz\,\xi}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 18\,\bar{k}\,(Sz\,\xi_0)^{\frac{4}{3}}\,(Sz\,\xi)^{\frac{2}{3}}\right](x', Dx', z) = 0_r,$$

$$(Dx', D^3 x', z) - \frac{Sz\,D\xi}{Sz\,\xi}(Dx', D^2 x', z) + \omega\,(S\xi_0 z)^2\, S\xi z\,(x', Dx', z) = 0_r.$$

Dle (2) jest

$$(x', Dx', z) = (S\xi_0 z)^2\,(x, Dx, z), \quad (x', D^2 x', z) = (S\xi_0 z)^2\,(x, D^2 x, z) \text{ atd.},$$

takže jest

(12) $$(x, D^3 x, z) - \frac{Sz\,D\xi}{Sz\,\xi}(x, D^2 x, z) - \frac{1}{9}\left[3\,\frac{Sz\,D^2\xi}{Sz\,\xi} - 5\left(\frac{Sz\,D\xi}{Sz\,\xi}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 18\,\bar{k}\,(Sz\,\xi_0)^{\frac{4}{3}}\,(Sz\,\xi)^{\frac{2}{3}}\right](x, Dx, z) = 0_r,$$

$$(Dx, D^3 x, z) - \frac{Sz\,D\xi}{Sz\,\xi}(Dx, D^2 x, z) + \omega\,(\bar{n} + \Delta\bar{k})\,(S\xi_0 z)^2\, S\xi z\,(x, Dx, z) = 0_r.$$

Položme

$$z = \lambda_0 x + \lambda_1 Dx + \lambda_2 D^2 x + \lambda_3 D^3 x.$$

Dle **357** a **360** (1) jest

$$Sz\xi = \lambda_3, \quad Sz\,D\xi = -\lambda_2, \quad Sz\,D^2\xi = \lambda_1 + q\lambda_3, \quad Sz\,\Xi = \lambda_0,$$

takže

(13) $$z = Sz\,\Xi \,.\, x + (Sz\,D^2\xi - q\,Sz\,\xi)\,Dx - Sz\,D\xi \,.\, D^2 x + Sz\,\xi \,.\, D^3 x.$$

Ze (13) plyne

(14) $$\begin{aligned}(x, z, z) = 0_r &= (Sz\,D^2\xi - q\,Sz\,\xi)\,(x, Dx, z) - Sz\,D\xi\,(x, D^2 x, z) + Sz\,\xi\,(x, D^3 x, z),\\ (Dx, z, z) = 0_r &= -\,Sz\,\Xi\,(x, Dx, z) - Sz\,D\xi\,(Dx, D^2 x, z) + Sz\,\xi\,(Dx, D^3 x, z).\end{aligned}$$

Dosadíme-li do (12) hodnoty $(x, D^3 x, z)$, $(Dx, D^3 x, z)$ vypočtené ze (14), obdržíme

(15) $$\bar{k} = \frac{1}{(Sz\,\xi_0)^{\frac{4}{3}}\,(Sz\,\xi)^{\frac{2}{3}}}\left[-\frac{2}{3}\,\frac{Sz\,D^2\xi}{Sz\,\xi} + \frac{5}{18}\left(\frac{Sz\,D\xi}{Sz\,\xi}\right)^2 + \frac{1}{2}\,q\right],$$

$$\bar{n} + \Delta\bar{k} = -\frac{\omega}{(Sz\,\xi_0)^2\,(Sz\,\xi)^2}\,Sz\,\Xi.$$

Avšak dle (7), (15) a **364** (2) jest

$$\Delta \bar{k} = \frac{\omega}{(Sz\,\xi_0)^2\; Sz\,\xi}\left[\frac{2}{3}\,\frac{Sz\,\Xi}{Sz\,\xi} + \frac{5}{3}\,\frac{Sz\,D\xi\,.\,Sz\,D^2\xi}{(Sz\,\xi)^2} - \frac{20}{27}\left(\frac{Sz\,D\xi}{Sz\,\xi}\right)^3 - \right.$$
$$\left. - q\,\frac{Sz\,D\xi}{Sz\,\xi} + \frac{1}{6}(4\Theta + 3\,Dq)\right],$$

takže

$$\bar{n}(u) = -\frac{5}{3}\,\frac{\omega}{(Sz\,\xi_0)^2\,.\,Sz\,\xi}\,Sz\left[\xi^2\Xi + \xi D\,\xi D^2\xi - \frac{4}{9}(D\xi)^3 - \frac{3}{5}\,q\,\xi^2 D\xi + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{10}(4\Theta + 3\,Dq)\,\xi^3\right]. \tag{16}$$

Dle **326** má křivka $C\{\bar{x}\}$ v bodě $\{\bar{x}(u_0)\}$ a tedy též křivka $C\{x'\}$ v bodě $\{x'(u_0)\}$ sextaktický bod, když a jen když $\bar{n}(u_0) = 0$, t. j. dle (1) a (16), když bod $\{z\}$ náleží algebraické ploše $\overset{u_0}{M}_8$.

Právě dokázaný teorém můžeme však jednodušeji odvoditi zcela jinou metodou, kterou zde jen stručně naznačím. Buď $\overset{u_0}{C}_2$ oskulační kuželosečka rovinné křivky $C\{x'\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Buď $\Gamma(\Gamma_2)$ promítací kuželová osnova křivky $C\{x\}$ (kuželosečky $\overset{u_0}{C}_2$) o vrcholu $\{z\}$. Buď P'_r kvadratická rovinová forma (hodnosti 3) taková, že $M[P'_r] = M\Gamma_2$ (v. **281**). Snadno se ukáže, že $C\{x\}$ a $\overset{u_0}{C}_2$ mají v $\{x(u_0)\}$ šestibodový styk, když a jen když rovinová forma P_r má s křivkou $C\{x\}$ v $\{x_0\}$ šestibodový styk. Odtud vychází, že $C\{x'\}$ má v $\{x(u_0)\}$ sextaktický bod, když a jen když bod $\{z\}$ je vrchol kvadratické rovinové formy hodnosti 3, mající v $\{x(u_0)\}$ šestibodový styk s $C\{x\}$. Má-li však kvadratická rovinová forma P'_r šestibodový styk v $\{x(u_0)\}$ s $C\{x\}$, jest dle **369** (3)

$$P_r' = \lambda_1\,\overset{u_0}{P}{}_r^{(1)} + \lambda_2\,\overset{u_0}{P}{}_r^{(2)} + \lambda_3\,\overset{u_0}{P}{}_r^{(3)} + \mu\,[\xi(u_0)]^2,$$

kde $\overset{u_0}{P}{}_r^{(i)}\,(i = 1, 2, 3)$ jsou definovány ve **369** (1). Snadno vidíme, že hodnost formy P'_r není < 3, když $|\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|_b \neq 0_b$. Dle **53** je tato hodnost $= 3$ a bod $\{z\}$ je vrcholem formy P'_r, když a jen když $[P'_r;\, z] = 0_r$, tedy, ježto dle **369** (1) jest

$$P_r' = \lambda_1\,[30\,\xi D^2\xi - 20(D\xi)^2]_{u=u_0} + \lambda_2\,[30\,\xi\,\Xi + 10\,D\xi\,D^2\xi - 12\,q\,\xi D\,\xi]_{u=u_0} +$$
$$+ \lambda_3\,[20\,D\xi\,.\,\Xi + 10(D^2\xi)^2 - 3\,q\,\xi D^2\xi - 8\,q(D\xi)^2 + 2(4\Theta + 3\,Dq)\,\xi\,D\xi]_{u=u_0} + \nu\,[\xi(u_0)]^2,$$

když a jen když pro $u = u_0$ jest

$$\begin{aligned} &[15\lambda_1\,Sz\,D^2\xi + 3\lambda_2(5\,Sz\,\Xi - 2\,q\,Sz\,D\xi) + \lambda_3\{-\tfrac{8}{3}\,q\,Sz\,D^2\xi + (4\Theta + 3\,Dq)\,Sz\,D\xi\} + \\ &+ \nu\,Sz\,D\xi]\,\xi + [-20\lambda_1\,Sz\,D\xi + \lambda_2(5\,Sz\,D^2\xi - 6\,q\,Sz\,\xi) + \lambda_3\{10\,Sz\,\Xi - 8\,q\,Sz\,D\xi + \\ &+ (4\Theta + 3\,Dq)\,Sz\,\xi\}]\,D\xi + [15\lambda_1\,Sz\,\xi + 5\lambda_2\,Sz\,D\xi + \lambda_3(10\,Sz\,D^2\xi - \tfrac{8}{3}\,q\,Sz\,\xi)]\,D^2\xi + \\ &+ 5(3\lambda_2\,Sz\,\xi + 2\lambda_3\,Sz\,D\xi)\,\Xi = 0_r. \end{aligned} \tag{17}$$

Běží pouze o to, určiti, pro jaké z lze vyhověti rovnicím (17) tak, aby bylo $|\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|_b \neq 0_b$. Zřejmě to lze, když a jen když lze určiti $|\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|_b \neq 0_b$ tak, aby bylo

$$-20\lambda_1 Sz D\xi + \lambda_2 (5 Sz D^2\xi - 6q Sz\xi) + \lambda_3 \left\{10 Sz \Xi - 8q Sz D\xi + (4\Theta + 3Dq) Sz\xi\right\} = 0;$$
$$15\lambda_1 Sz\xi + 10\lambda_2 Sz D\xi + \lambda_3 (10 Sz D^2\xi - \tfrac{9}{2} q Sz\xi) = 0,$$
$$3\lambda_2 Sz\xi + 2\lambda_3 Sz D\xi = 0,$$

což nastane, když a jen když se rovná nule výraz

$$Sz \begin{vmatrix} -20D\xi & 5D^2\xi - 6q\xi & 10\Xi - 8qD\xi + (4\Theta + 3Dq)\xi \\ 15\xi & 5D\xi & 10D^2\xi - \tfrac{9}{2}q\xi \\ 0 & 3\xi & 2D\xi \end{vmatrix} =$$
$$= 450\, Sz\,[\xi^2\Xi + \xi D\xi D^2\xi - \tfrac{4}{9}(D\xi)^3 - \tfrac{9}{5} q\xi^2 D\xi + \tfrac{1}{10}(4\Theta + 3Dq)\xi^3],$$

v souhlase s teorémem.

Norma křivky ($m = 3$).

385. Buď $C_a x(u)$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) orientovaná regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 3$. Buď $\varrho(u)$ (u v $\langle a, b\rangle$) funkce třídy $r-3$ všude různá od nuly. Pak diferenciální parametr orientované ar. křivky $C_a \varrho(u)\, x(u)$ jest $\dfrac{1}{|\varrho|^{\frac{2}{3}}} D$.

Důkaz je snadný.

386. Buď $C_a x(u)$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) orientovaná regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 4$. Buď $\Gamma_a\, p(u) = \text{Ass. } C_a\, x(u)$. Buď $\varrho(u)$ (u v $\langle a, b\rangle$) funkce třídy $r-3$ všude různá od nuly. Pak jest

$$\Gamma_a\, |\varrho(u)|^{\frac{4}{3}}\, p(u) = \text{Ass } C_a\, \varrho(u)\, x(a).$$

Vychází snadno ze **351** a **385.**

387. Buď $C_a x(u)$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) orientovaná regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 3$. Buď $\mathfrak{C}_a \xi(u) = \text{Adj. } C_a x(u)$. Buď $\varrho(u)$ (u v $\langle a, b\rangle$) funkce třídy $r-3$ všude různá od nuly. Pak jest

$$\mathfrak{C}_a\, \varrho(u)\, \xi(u) = \text{Adj. } C_a\, \varrho(u)\, x(u).$$

Vychází snadno ze **352** a **385**. Můžeme také usuzovati takto: Dle **354** (2) jest

$$[\varrho\xi, D(\varrho\xi)] = \omega\, [\varrho x, D(\varrho x)].$$

Dle **359** je tedy $\mathfrak{C}_a \pm \varrho\xi = \text{Adj. } C_a \varrho x$. Snadno se nahlédne, že platí horní znamení.

388. Buď $C_a x(u)$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) orientovaná regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 6$. Buď D její diferenciální parametr. Buď $\varrho(u)$ (u v $\langle a, b\rangle$) funkce třídy $r-3$ všude různá od nuly. Buď $q(\Theta)$ prvý (druhý) unimodulární invariant orientované ar. křivky $C_a x(u)$; týž význam měj $\bar q(\bar\Theta)$ pro $C_a \varrho(u)\, x(u)$. Pak jest

(1) $$\bar q = |\rho|^{-\frac{4}{3}} \left[q + \frac{10}{3}\frac{D^2\rho}{\rho} - \frac{40}{9}\left(\frac{D\rho}{\rho}\right)^2\right],$$

(2) $$\bar\Theta = \rho^{-2}\,\Theta.$$

Buď $\bar D$ diferenciální parametr orientované ar. křivky $C_a \varrho x$. Buď $\mathfrak{C}_a \xi = \mathrm{Adj}.\ C_a x$. Dle **360** (1), (2) a **387** jest

$$\bar q = S \bar D^3 (\rho x)\, \bar D^2 (\rho\, \xi),$$
$$\bar\Theta = -\, S \bar D^3 (\rho x)\, \bar D^3 (\rho\, \xi).$$

Dle **385** je však $\bar D = |\varrho|^{-\frac{2}{3}} D$, tedy, klademe-li $\eta = \operatorname{sgn} \varrho = \pm 1$,

$$\bar D (\rho x) = \eta\, |\rho|^{\frac{1}{3}} \left(Dx + \frac{D\rho}{\rho}\, x\right),$$

$$\bar D^2 (\rho x) = \eta\, |\rho|^{-\frac{1}{3}} \left[D^2 x + \frac{4}{3}\frac{D\rho}{\rho} Dx + \left(\frac{D^2\rho}{\rho} - \frac{2}{3}\frac{(D\rho)^2}{\rho^2}\right) x\right],$$

$$\bar D^3 (\rho x) = \rho^{-1} \left[D^3 x + \frac{D\rho}{\rho} D^2 x + \left(\frac{7}{3}\frac{D^2\rho}{\rho} - \frac{22}{9}\frac{(D\rho)^2}{\rho^2}\right) Dx + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{D^3\rho}{\rho} - \frac{8}{3}\frac{D\rho\, D^2\rho}{\rho^2} + \frac{14}{9}\frac{(D\rho)^3}{\rho^3}\right) x\right]$$

a stejně pro ξ, takže

$$S\bar D^3 (\rho x)\, \bar D^2 (\rho \xi) = |\rho|^{-\frac{4}{3}}\, S \left[D^3 x + \frac{D\rho}{\rho} D^2 x + \left(\frac{7}{3}\frac{D^2\rho}{\rho} - \frac{22}{9}\frac{(D\rho)^2}{\rho^2}\right) Dx + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{D^3\rho}{\rho} - \frac{8}{3}\frac{D\rho\, D^2\rho}{\rho^2} + \frac{14}{9}\frac{(D\rho)^3}{\rho^3}\right) x\right] \left[D^2 \xi + \frac{4}{3}\frac{D\rho}{\rho} D\xi + \left(\frac{D^2\rho}{\rho} - \frac{2}{3}\frac{(D\rho)^2}{\rho^2}\right) \xi\right],$$

$$S\bar D^3 (\rho x)\, \bar D^3 (\rho \xi) = \rho^{-2}\, S \left[D^3 x + \frac{D\rho}{\rho} D^2 x + \left(\frac{7}{3}\frac{D^2\rho}{\rho} - \frac{22}{9}\frac{(D\rho)^2}{\rho^2}\right) Dx + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{D^3\rho}{\rho} - \frac{8}{3}\frac{D\rho\, D^2\rho}{\rho^2} + \frac{14}{9}\frac{(D\rho)^3}{\rho^3}\right) x\right] \left[D^3 \xi + \frac{D\rho}{\rho} D^2 \xi + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{7}{3}\frac{D^2\rho}{\rho} - \frac{22}{9}\frac{(D\rho)^2}{\rho^2}\right) D\xi + \left(\frac{D^2\rho}{\rho} - \frac{8}{3}\frac{D\rho\, D^2\rho}{\rho^2} + \frac{14}{9}\frac{(D\rho)^3}{\rho^3}\right) \xi\right],$$

z čehož vychází (1) a (2) dle **357** (1) a **360** (1), (2).

389. Buď $C_a x(u)$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) orientovaná regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 7$. Buď $\varrho(u)$ (u v $\langle a, b\rangle$) funkce třídy $r-3$ všude různá od nuly. Buď τ čtvrtý unimodulární invariant orientované ar. křivky $C_a x(u)$. Týž význam měj $\bar{\tau}$ pro $C_a \varrho(u)\, x(u)$. Pak jest

$$\bar{\tau} = |\rho|^{-\frac{8}{3}} \tau. \tag{1}$$

Buď D diferenciální parametr orientované ar. křivky $C_a x(u)$; buď $\Theta(u)$ její druhý unimodulární invariant; buď $\mathfrak{C}_a \xi(u) = \text{Adj. } C_a x(u)$. Týž význam měj resp. $\bar{D}$, $\bar{\Theta}$, $\mathfrak{C}_a \bar{\xi}$ pro $C_a \varrho x$. Ze **372** vychází snadno, že existuje $\sigma = \sigma(u)$ takové, že

$$(\bar{\tau} - \bar{D}\bar{\Theta})\bar{\xi} - 2\bar{\Theta}\bar{D}\bar{\xi} = \sigma\,[(\tau - D\Theta)\,\xi - 2\Theta D\xi]. \tag{2}$$

Dle **387** je však $\bar{\xi} = \varrho\xi$ a dle **388** (2) jest $\bar{\Theta} = \varrho^{-2}\Theta$; dle **385** jest $\bar{D} = \dfrac{1}{|\varrho|^{\frac{4}{3}}} D$, takže

$$\bar{D}\bar{\xi} = \frac{1}{|\rho|^{\frac{4}{3}}}(\rho D\xi + D\rho\,.\,\xi),\ \bar{D}\bar{\Theta} = \rho^{-3}(\rho D\Theta - 2D\rho\,.\,\Theta),$$

tedy

$$(\bar{\tau} - \bar{D}\bar{\Theta})\bar{\xi} - 2\bar{\Theta}\bar{D}\bar{\xi} = \rho\left\{\left[\bar{\tau} - \frac{1}{|\rho|^{\frac{8}{3}}} D\Theta - \frac{D\rho}{\rho}\,\Theta\right]\xi - \frac{2}{|\rho|^{\frac{8}{3}}} D\xi\right\}.$$

Porovnáním se (2) vychází

$$\begin{aligned} &\bar{\tau} - \frac{1}{|\rho|^{\frac{8}{3}}}\left(D\Theta + \frac{D\rho}{\rho}\,\Theta\right) = \frac{\sigma}{\rho}(\tau - D\Theta), \\ &\frac{\Theta}{|\rho|^{\frac{8}{3}}} = \frac{\sigma}{\rho}\,\Theta. \end{aligned} \tag{3}$$

Je-li $\Theta(u) \neq 0$, vychází (1) ze (3). Snadno se nahlédne, že platnost rovnice (1) nemůže přestati, když $\Theta(u) = 0$.

390. Buď $C\{x(u)\}$ regulární křivka třídy $r \geq 6$. Osnova Ass. $C\{x\}$ neměj sextaktických přímek. Buď $\eta = \pm 1$. Buď $\Theta(u)$ druhý unimodulární invariant orientované ar. křivky $C_a x(u)$. Buď

$$x_N = \eta\sqrt{|\Theta|}\, x(u). \tag{1}$$

Ar. křivka $C_a x_N$ nazývá se norma křivky $C\{x\}$; označení

$$C_a x_N = N C\{x\}. \tag{2}$$

Má tedy křivka $C\{x\}$ dvě normy ($\eta = +1$ a $\eta = -1$). Norma křivky $C\{x\}$ jest regulární ar. křivka virtuální třídy $r-3$.

Že jsme k definici normy oprávněni, vychází snadno ze **388** (2). Jest si všimnouti, že $|\Theta|$ se nemění, přejdeme-li od $C_a x(u)$ k opačně orientované ar. křivce (v. **360**).

391. Je-li $C\{x(u)\}$ orientovaná regulární křivka třídy $r \geqq 9$ a nemá-li osnova Ass. $C\{x\}$ sextaktických přímek, jest norma $N\, C\{x\}$ orientovaná regulární ar. křivka virtuální třídy $r-3$, jejíž druhý unimodulární invariant rovná se identicky ± 1. Obráceně, když druhý unimodulární invariant orientované regulární ar. křivky $C_a x(u)$ třídy $r \geqq 6$ rovná se identicky ± 1, jest $C_a x(u) = NC\{x\}$.

Důkaz je snadný.

392. Buď $C\{x(u)\}$ regulární křivka třídy $r \geqq 6$; osnova Ass. $C\{x\}$ neměj sextaktických přímek. Buď

$$C_a x_N = NC\{x\}.$$

Buď K kolineace ar. bodů. Buď $K = UP$, kde U jest kolineace modulu ± 1 a P jest podobnost. Buď $x \sim x'$ v K, $x_N \sim x'_N$ v U. Pak jest

$$C_a x_N' = NC\{x'\}.$$

Když K je positivní kolineace, tedy U unimodulární, je důkaz snadný. Stačí pak (v. **61**) doplniti důkaz pro jednu — libovolně zvolenou — negativní kolineaci, na př. pro tu, v níž

$$|1,0,0,0|_b \sim |1,0,0,0|_b,\quad |0,1,0,0|_b \sim |0,1,0,0|_b,$$
$$|0,0,1,0|_b \sim |0,0,1,0|_b,\quad |0,0,0,1|_b \sim |0,0,0,-1|_b,$$

což je rovněž snadné.

393. Buď $C\{x(u)\}$ regulární křivka třídy $r \geqq 8$; osnova Ass. $C\{x\}$ neměj sextaktických přímek. Buď $\mathfrak{C}\{\xi\} = \text{Adj. } C\{x\}$, $C_a x_N = NC\{x\}$, $\mathfrak{C}_a \xi_N = \text{Adj. } C_a x_N$. Pak jest

$$\mathfrak{C}_a \xi_N = N\mathfrak{C}\{\xi\}.$$

Vychází snadno odtud, že, když Θ je druhý unimodulární invariant orientované ar. křivky $C_a x(u)$, $-\Theta$ je druhý unimodulární invariant orientované duální ar. křivky Adj. $C_a x(u)$ (v. **360**).

394. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka třídy $r \geqq 6$. Buď $\Theta(u)$ její druhý unimodulární invariant. Osnova Ass. $C\{x\}$ neměj sextaktických přímek. O orientované ar. křivce $C_a x(u)$ — a též o orientované křivce $C\{x(u)\}$ — pravíme, že jest positivně (negativně) orientována, je-li $\Theta(u) > 0$ ($\Theta(u) < 0$). Je-li $C_a x(u)$ positivně (negativně) orientována, jest opačně orientovaná ar. křivka $C_a x(-v)$ negativně (positivně) orientována.

Vskutku dle **360** druhý unimodulární invariant opačně orientované ar. křivky rovná se $-\Theta$.

395. Buď $C\{x(u)\}$ orientovaná regulární křivka třídy $r \geq 6$. Osnova Ass. $C\{x\}$ neměj sextaktických přímek. Buď $C_a x_N = NC\{x(u)\}$. Normální parametr s orientované ar. křivky $C_a x_N$ nazývá se normálním parametrem orientované křivky $C\{x(u)\}$. Pro opačně orientovanou křivku jest $-s$ normálním parametrem.

Dle **350** (1) jest, je-li $\Theta(u)$ druhý unimodulární invariant orientované ar. křivky $C_a\, x(u)$ a je-li c konstanta:

(1) $$s = \int_{u_0}^{u} |\Theta|^{\frac{1}{8}} \sqrt[6]{\left|\left(x \frac{dx}{du} \frac{d^2x}{du^2} \frac{d^3x}{du^3}\right)\right|}\, du + c.$$

396. Buď $C\{x(u)\}$ orientovaná regulární křivka třídy $r \geq 8$. Osnova Ass. $C\{x\}$ neměj sextaktických přímek. Buď $\mathfrak{C}\{\xi(u)\} = \text{Adj. } C\{x(u)\}$. Je-li $C\{x(u)\}$ positivně (negativně) orientována, jest $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ negativně (positivně) orientována. Je-li s normální parametr pro $C\{x(u)\}$, jest s také normálním parametrem pro $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$.

Vychází snadno odtud, že druhý unimodulární invariant orientované duální ar. křivky Adj. $C_a\, x(u)$ liší se znamením od druhého unimodulárního invariantu orientované ar. křivky $C_a\, x(u)$.

397. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka třídy $r \geq 6$. Buď $\tau(u)$ její čtvrtý unimodulární invariant. Křivka $C\{x\}$ neměj septemtaktických bodů; osnova Ass. $C\{x\}$ buď obsažena v pevném lin. komplexu. Buď $\eta = \pm 1$. Buď

(1) $$x_N = \eta\, |\tau|^{\frac{3}{8}}\, x(u).$$

Ar. křivka $C_a x_N$ nazývá se norma křivky $C\{x\}$; označení

(2) $$C_a x_N = NC\{x\}.$$

Má tedy křivka $C\{x\}$ dvě normy ($\eta = +1$ a $\eta = -1$.) Norma křivky $C\{x\}$ jest regulární ar. křivka virtuální třídy $r - 3$.

Že jsme k definici normy oprávněni, vychází snadno ze **389** (1). Výraz $\tau(u)$, jak byl definován ve **363**, obsahuje ovšem sedmé derivace ar. bodu x, jichž existenci zde nepředpokládáme. Ježto však Ass. $C\{x\}$ náleží pevnému lin. komplexu, je dle **379** identicky $\Theta(u) = 0$, tedy též $D\Theta = 0$, $\tau = \tau - D\Theta$, a ve **363** jsme si všimli, že $\tau - D\Theta$ nezávisí na $\frac{d^7x}{du^7}$.

398. Je-li $C\{x(u)\}$ orientovaná regulární křivka třídy $r \geqq 9$ bez septemtaktických bodů a je-li osnova Ass. $C\{x\}$ obsažena v pevném lin. komplexu, jest norma $N\ C\{x\}$ orientovaná regulární ar. křivka virtuální třídy $r-3$, jejíž druhý (čtvrtý) unimodulární invariant rovná se identicky 0 (± 1). Obráceně, když druhý unimodulární invariant orientované regulární ar. křivky třídy $r \geqq 6$ rovná se identicky 0 a čtvrtý její unimodulární invariant rovná se identicky ± 1, jest $C_a\, x(u) = N\, C\{x\}$.

399. Buď $C\{x(u)\}$ regulární křivka třídy $r \geqq 6$ bez septemtaktických bodů. Osnova Ass. $C\{x\}$ buď obsažena v pevném lin. komplexu. Buď

$$C_a x_N = NC\{x\}.$$

Buď K kolineace ar. bodů. Buď $K = UP$, kde U jest kolineace modulu ± 1 a P jest podobnost. Buď $x \sim x'$ v K, $x_N \sim x'_N$ v U. Pak jest

$$C_a x'_N = NC\{x'\}.$$

Důkaz je snadný (v. **392**).

400. Buď $C\{x(u)\}$ regulární křivka třídy $r \geqq 8$ bez septemtaktických bodů; osnova Ass. $C\{x\}$ buď obsažena v pevném lin. komplexu. Buď $\mathfrak{C}\{\xi(u)\} =$ Adj. $C\{x(u)\}$, $C_a x_N = NC\{x\}$, $\mathfrak{C}_a \xi_N =$ Adj. $C_a x_N$. Pak jest

$$\mathfrak{C}_a\, \xi_N = N\mathfrak{C}\{\xi\}.$$

Vychází snadno odtud, že $C_a\, x(u)$ a Adj. $C_a\, x(u)$ mají týž čtvrtý unimodulární invariant (v. **363**).

401. Buď $C\{x(u)\}$ orientovaná regulární křivka třídy $r \geqq 6$ bez septemtaktických bodů. Osnova Ass. $C\{x\}$ buď obsažena v pevném lin. komplexu. Buď $C_a x_N = NC\{x\}$. Normální parametr s orientované regulární ar. křivky $C_a x_N$ nazývá se normálním parametrem orientované křivky $C\{x(u)\}$. Pro opačně orientovanou křivku jest $-s$ normálním parametrem.

Dle **350** (1) jest, je-li $\tau(u)$ čtvrtý unimodulární invariant orientované ar. křivky $C_a\, x(u)$ a je-li c konstanta:

$$(1) \qquad s = \int_{u_0}^{u} |\tau|^{\frac{1}{4}} \sqrt[6]{\left|\left(x\, \frac{dx}{du}\, \frac{d^2x}{du^2}\, \frac{d^3x}{du^3}\right)\right|}\, du + c.$$

402. Buď $C\{x(u)\}$ orientovaná regulární křivka třídy $r \geqq 8$ bez semptemtaktických bodů. Osnova Ass. $C\{x\}$ buď obsažena v pevném lin. komplexu. Buď $\mathfrak{C}\{\xi(u)\} = \text{Adj.}\ C\{x(u)\}$. Je-li s normální parametr pro $C\{x(u)\}$, jest s také normálním parametrem pro $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$.

Důkaz je snadný.

Lokální jehlan křivky ($m = 3$).

403. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka třídy $r \geqq 6$. Buď D její diferenciální parametr. Buďte $q(u)$, $\Theta(u)$, $\tau(u)$ její prvý, druhý, čtvrtý unimodulární invariant. Buď ω znamení křivky $C\{x\}$. Osnova Ass. $C\{x(u)\}$ neměj sextaktických přímek. Buď $\eta = \pm 1$. Buď $\varepsilon = \operatorname{sgn} \Theta = \pm 1$. Buď

(1)
$$\begin{aligned} x_0 &= \eta\,|\Theta|^{\frac{1}{2}} x,\quad x_1 = \varepsilon\eta\,|\Theta|^{\frac{1}{6}}\left[Dx - \frac{1}{2}\,\frac{\tau - D\Theta}{\Theta}\,x\right],\\ x_2 &= \eta\,|\Theta|^{-\frac{1}{6}}\left[D^2x - \frac{2}{3}\,\frac{\tau - D\Theta}{\Theta}\,Dx + \left(\frac{1}{6}\,\frac{(\tau - D\Theta)^2}{\Theta^2} - \frac{3}{10}\,q\right)x\right],\\ x_3 &= \varepsilon\eta\,|\Theta|^{-\frac{1}{2}}\left[D^3x - \frac{1}{2}\,\frac{\tau - D\Theta}{\Theta}\,D^2x + \left(\frac{1}{6}\,\frac{(\tau - D\Theta)^2}{\Theta^2} - \frac{7}{10}\,q\right)Dx +\right.\\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{36}\,\frac{(\tau - D\Theta)^3}{\Theta^3} + \frac{3}{20}\,q\,\frac{\tau - D\Theta}{\Theta} - \frac{3}{10}\,Dq - \frac{2}{5}\,\Theta\right)x\right]. \end{aligned}$$

Jest

(2)
$$C_a x_0 = NC\{x\},$$

(3)
$$(x_0\,x_1\,x_2\,x_3) = \omega.$$

Jehlan x_0, x_1, x_2, x_3 jest křivkou $C\{x\}$ a bodem $\{x(u)\}$ úplně určen až na libovolné znamení $\eta = \pm 1$ (tedy dvojznačně); nazývá se lokální jehlan křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u)\}$.

Buď K kolineace ar. bodů; buď $K = UP$, kde U jest kolineace modulu ± 1 a P jest podobnost. Buď $x(u) \sim x'(u)$ v K; buď $x_i \sim x'_i$ v U ($i = 0, 1, 2, 3$). Jehlan x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 jest lokální jehlan křivky $C\{x'(u)\}$ v bodě $\{x'(u)\}$.

Bod $\{x_3\}$ náleží oskulační kubické křivce $\overset{u}{C}_3$ křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u)\}$ a jest incidentní s rovinou sedmibodového styku křivky $C\{x\}$ s kubickou křivkou $\overset{u}{C}_3$ v bodě $\{x(u)\}$. Bod $\{x_2\}$ je průsečík tečny kubické křivky $\overset{u}{C}_3$ v bodě $\{x_3\}$ s oskulační rovinou křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u)\}$ a náleží tedy (v. **381**) oskulační kuželosečce $\overset{u}{C}_2$ křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u)\}$. Bod $\{x_1\}$ je průsečík tečny kuželosečky $\overset{u}{C}_2$ v bodě $\{x(u)\}$

s tečnou křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u)\}$. Bod $\{x_1\}$ je také průsečík oskulační roviny kubické křivky $\overset{u}{C}_3$ v bodě $\{x_3\}$ s tečnou křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u)\}$.

Buď $\{y\}$ bod incidentní s rovinou sedmibodového styku křivky $C\{x\}$ s kubickou křivkou $\overset{u}{C}_3$ v bodě $\{x(u)\}$. Dle **357** a **372** (1) jest

$$y = \lambda_0 x + \lambda_1 Dx + \lambda_2 [(\tau - D\Theta) D^2 x - 2\Theta D^3 x]. \tag{4}$$

Z (1), (4), **357, 362** (3) a **370** (1) najdeme snadno, že bod $\{y\}$ náleží kubické křivce $\overset{u}{C}_3$, když a jen když buď $\{y\} = \{x_0\}$ nebo $\{y\} = \{x_3\}$. Počítajíce jako ve **381** vidíme snadno, že bod $\{x_2\}$ jest průsečík tečny kubické křivky $\overset{u}{C}_3$ v bodě $\{x_3\}$ s oskulační rovinou křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u)\}$. Ze **187** vychází snadno, že polára bodu $\{x_2\}$ vzhledem ke kuželosečce $\overset{u}{C}_2$ jest tečnou této kuželosečky v $\{x_3\}$. Odtud dle (1) a **382** snadno vychází, že bod $\{x_1\}$ je průsečík tečny kuželosečky $\overset{u}{C}_2$ v bodě $\{x_3\}$ s tečnou křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u)\}$. Že bod $\{x_1\}$ jest incidentní s oskulační rovinou $\{\eta\}$ kubické křivky $\overset{u}{C}_3$ v bodě $\{x_3\}$, můžeme na př. takto nahlédnouti: Buď $\overset{u}{K}$ oskulační lin. komplex osnovy $\Gamma p(u) =$ Ass. $C\{x\}$ v přímce $\{p(u)\}$. Zřejmě $\overset{u}{K}$ je též oskulační komplex osnovy Ass. $\overset{u}{C}_3$ v přímce $\{p(u)\}$. Ze **371** a **379** se však lehko dokáže, že Ass. $\overset{u}{C}_3$ jest obsažena v pevném lin. komplexu, tedy patrně v $\overset{u}{K}$, což ovšem se také přímým počtem dá verifikovati. Odtud vychází, že oskulační lin. komplex osnovy Ass. $\overset{u}{C}_3$ jest $\overset{u}{K}$, z čehož plyne, že oskulační rovina $\{\zeta\}$ kubické křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x_3\}$ (na př.) je polárou tohoto bodu vzhledem ke $\overset{u}{K}$. Z (1) a **380** najde se pak snadno, že $S x_1 \zeta = 0$, jak bylo tvrzeno.

Buď $\varrho = \varrho(u)$ funkce třídy 6 všude různá od nuly. Přejdeme-li od $C_a x(u)$ k $C_a \varrho x(u)$, nechť přejde x_i ($i = 0, 1, 2, 3$) v $\{\bar{x}_i\}$. Dle (2) a **390** vychází, že $\bar{x}_0 = x_0$. Z předchozího pak následuje, že $\{\bar{x}_i\} = \{x_i\}$ ($i = 1, 2, 3$), tedy $\bar{x}_i = \lambda_i x_i$. Dle (1) a **351** je však $\Gamma_a\, \varepsilon |\Theta|^{-\frac{2}{5}} (x_0 x_1) =$ $=$ Ass. $C_a x$. Podobně jest $\Gamma_a\, \varepsilon |\bar{\Theta}|^{-\frac{2}{5}} (\bar{x}_0 \bar{x}_1) =$ Ass. $C_a \varrho x$, je-li $\bar{\Theta}$ druhý unimodulární invariant orientované ar. křivky $C_a \varrho x$. Dle **386** a **388** (2) je tedy

$$\varepsilon \lambda_1 |\varrho^{-2} \Theta|^{-\frac{2}{5}} (x_0 x_1) = \varepsilon |\varrho|^{\frac{4}{5}} |\Theta|^{-\frac{2}{5}} (x_0 x_1),$$

takže $\lambda_1 = 1$, $\bar{x}_1 = x_1$. Podobně vidíme, že $\lambda_2 = 1$, $\bar{x}_2 = x_2$, užívajíce **387** místo **386.** Z (1) a **349** (2) vychází (3). Ze (3) vidíme ihned, že $\lambda_3 = 1$, $\bar{x}_3 = x_3$.

Že lokální jehlan se nemění, změníme-li orientaci křivky, vidí se snadno odtud, že D, Θ a tedy i ε změní znamení, kdežto τ se nezmění (v. **349**, **360** a **363**).

Jak se chová lokální jehlan při positivní kolineaci K, je zřejmé. Že se chová v souhlase s teorémem, i když K je negativní kolineace, stačí verifikovati pro partikulární negativní kolineaci uvažovanou ve **392**, což je rovněž snadné.

404. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ dvě regulární křivky třídy $r \geq 6$ o společném bodě $\{x(u_0)\} = \{y(v_0)\}$. Osnovy Ass. $C\{x\}$, Ass. $C\{y\}$ nemějte sextaktických přímek. Buď x_0, x_1, x_2, x_3 lokální jehlan křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Když a jen když x_0, x_1, x_2, x_3 je také lokální jehlan křivky $C\{y\}$ v témž bodě, mají křivky $C\{x(u)\}$ a $C\{y(v)\}$ sedmibodový styk v $\{x(u_0)\}$.

Že podmínka je nutná, vychází snadno ze **178**. Předpokládejme tedy, že x_0, x_1, x_2, x_3 je lokální jehlan křivky $C\{y\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Buď $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ duální jehlan adjungovaný k x_0, x_1, x_2, x_3. Ze **357**, **360** (1), **362** (3) a **403** (1) vychází po snadném počtu, že — v obvyklém označení vzhledem k $C_a x(u)$ —

$$\xi_0 = \eta\,|\Theta|^{-\frac{1}{2}}\left[\Xi + \frac{1}{2}\,\frac{\tau - D\Theta}{\Theta}\,D^2\xi - \left(\frac{1}{6}\,\frac{(\tau - D\Theta)^2}{\Theta^2} + \frac{3}{10}q\right)D\xi + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{36}\,\frac{(\tau - D\Theta)^3}{\Theta^3} - \frac{3}{20}q\,\frac{\tau - D\Theta}{\Theta} + \frac{3}{10}Dq + \frac{2}{5}\Theta\right)\xi\right],$$
$$\xi_1 = \varepsilon\eta\,|\Theta|^{-\frac{1}{6}}\left[D^2\xi - \frac{2}{3}\,\frac{\tau - D\Theta}{\Theta}\,D\xi + \left(\frac{1}{6}\,\frac{(\tau - D\Theta)^2}{\Theta^2} - \frac{3}{10}q\right)\xi\right],$$
$$\xi_2 = -\,\eta\,|\Theta|^{\frac{1}{6}}\left[D\xi - \frac{1}{2}\,\frac{\tau - D\Theta}{\Theta}\,\xi\right],$$
$$\xi_3 = \varepsilon\eta\,|\Theta|^{\frac{1}{2}}\,\xi,$$

kde napravo je dosaditi $u = u_0$. Odtud a ze **370** nalezneme po snadném počtu (v. **198** (2), (3)) pro oskulační kubickou křivku $\overset{u_0}{C_3}$ křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$:

$$\overset{u_0}{C_3} = C\begin{bmatrix} \xi_3, & \xi_2, & \frac{3}{2}\xi_1 \\ \xi_2, & \frac{3}{2}\xi_1, & \frac{3}{2}\xi_0 \end{bmatrix}.$$

Ježto x_0, x_1, x_2, x_3 je též lokální jehlan křivky $C\{y\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$, je zřejmě $\overset{u_0}{C_3}$ též oskulační kubickou křivkou křivky $C\{y\}$ v $\{x(u_0)\}$. Mají tedy $C\{x\}$ a $C\{y\}$ šestibodový styk v $\{x(u_0)\}$. Dle **178** můžeme tedy předpokládati, že

$$(1) \qquad \left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0} = \left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} \qquad \left(0 \leq \alpha \leq 5;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right).$$

Buď $\varDelta$ diferenciální parametr ar. křivky $C_a y(v)$; buď $\bar{q}(v)$, $\bar{\Theta}(v)$, $\bar{\tau}(v)$ její prvý, druhý, čtvrtý unimodulární invariant; buď $\mathfrak{C}_a \eta(v) = \text{Adj. } C_a y(v)$;

buď $\overline{\omega}$ znamení křivky $C\{y\}$. Z (1) vychází snadno, že

$$(2)\quad \begin{gathered}(\Delta y)_{v=v_0}=(Dx)_{u=u_0},\ \overline{\omega}=\omega,\ \eta(v_0)=\xi(u_0),\\ (\Delta\eta)_{v=v_0}=(D\xi)_{u=u_0},\ (y,\Delta y,\Delta^2 y)_{v=v_0}=(x,Dx,D^2x)_{u=u_0},\end{gathered}$$

$$(3)\quad (\Delta^3 y)_{v=v_0}=(D^3x)_{u=u_0},\ (\Delta^2\eta)_{v=v_0}=(D^2\xi)_{u=u_0}.$$

Ze (3) vychází dle **360** (1), že

$$(4)\quad \bar{q}(v_0)=q(u_0).$$

Ježto křivky $C\{x\}$ a $C\{y\}$ mají v bodě $\{x(u_0)\}$ společný lokální jehlan, vidíme snadno z prvých dvou rovnic **403** (1), že

$$(5)\quad \overline{\Theta}(v_0)=\Theta(u_0),\ (\bar{\tau}-\Delta\overline{\Theta})_{v=v_0}=(\tau-D\Theta)_{u=u_0}.$$

Ze (2), (4), (5) vychází dle **362** (1) a **364** (2), že

$$(6)\quad (\Delta^3\eta)_{v=v_0}=(D^3\xi)_{u=u_0}.$$

Dle **353** (1) jest

$$D^3\xi=-\frac{\omega}{2}\left|\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)\right|^{-2}\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^6x}{du^6}\right)\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right)+\cdots,$$

kde vynechané členy neobsahují již $\dfrac{d^6x}{du^6}$. Dle (1) a (6) je tedy

$$(7)\quad \left(x(u_0),\left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_0},\left[\frac{d^2x}{du^2}\right]_{u=u_0};\left[\frac{d^6y}{dv^6}\right]_{v=v_0}-\left[\frac{d^6x}{du^6}\right]_{u=u_0}\right)=0.$$

Máme ukázati, že $C\{x\}$ a $C\{y\}$ mají sedmibodový styk v $\{x(u_0)\}$. Předpokládejme, že by tomu tak nebylo, že by tedy $C\{x\}$ a $C\{y\}$ měly právě šestibodový styk v $\{x(u_0)\}$. Ze (7) vychází pak dle **225** (2), že $\{\xi(u_0)\}$ jest rovinou sedmibodového styku křivek $C\{x\}$ a $C\{y\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Z (5) vychází dle **372**, že, klademe-li

$$(8)\quad \zeta=[(\tau-D\Theta)\xi-2\Theta D\xi]_{u=u_0},$$

rovina $\{\zeta\}$ jest rovinou sedmibodového styku v bodě $\{x(u_0)\}$ jak pro $C\{x\}$ a $\overset{u_0}{C_8}$, tak i pro $C\{y\}$ a $\overset{u_0}{C_8}$. Odtud snadno soudíme, že $\{\zeta\}$ jest rovinou sedmibodového styku křivek $C\{x\}$ a $C\{y\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Je tedy $\{\zeta\}=\{\xi(u_0)\}$, takže dle (8) $\Theta(u_0)=0$, což je spor, neboť Ass. $C\{x\}$ nemá sextaktických přímek.

405. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ dvě regulární křivky třídy $r\geqq 6$; osnovy Ass. $C\{x\}$, Ass. $C\{y\}$ nemějte sextaktických přímek. Buď $\{x(u_0)\}$, ($\{y(v_0)\}$) bod křivky $C\{x\}$ ($C\{y\}$). Existuje kolineace K ar. bodů, v níž $\{y(v_0)\} \sim \{x(u_0)\}$ a jež je taková, že, když $y(v) \sim y'(v)$ v K, křivky $C\{x(u)\}$ a $C\{y'(v)\}$ mají sedmibodový styk v $\{x(u_0)\}$.

Vychází ze **404** stejně, jako vychází **339** ze **338**.

406. Buď $C_a x(u)$ orientovaná regulární ar. křivka třídy $r \geqq 7$ bez septemtaktických bodů. Buď D její diferenciální parametr. Buď $q(u)$ ($\tau(u)$) její prvý (čtvrtý) unimodulární invariant. Osnova Ass. $C\{x\}$ buď obsažena v pevném lin. komplexu. Buď ω znamení křivky $C\{x\}$. Buď $\eta = \pm 1$. Buď $\varepsilon = \operatorname{sgn} \tau = \pm 1$. Znamení ε je křivkou $C\{x\}$ úplně určeno; pravíme, že ε je normální znamení křivky $C\{x\}$. Buď

$$x_0 = \eta\,|\tau|^{\frac{3}{8}}\,x,\ x_1 = \eta\,|\tau|^{\frac{1}{8}}\left(Dx + \frac{3}{8}\frac{D\tau}{\tau}\,x\right),$$

(1)
$$x_2 = \eta\,|\tau|^{-\frac{1}{8}}\left[D^2x + \frac{1}{2}\frac{D\tau}{\tau}Dx + \left(\frac{3}{32}\frac{(D\tau)^2}{\tau^2} - \frac{3}{10}\,q\right)x\right],$$

$$x_3 = \eta\,|\tau|^{-\frac{3}{8}}\left[D^3x + \frac{3}{8}\frac{D\tau}{\tau}D^2x + \left(\frac{3}{32}\frac{(D\tau)^2}{\tau^2} - \frac{7}{10}\,q\right)Dx + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{3}{256}\frac{(D\tau)^3}{\tau^3} - \frac{9}{80}\,q\frac{D\tau}{\tau} - \frac{3}{10}\,Dq\right)x\right].$$

Jest

(2)
$$C_a x_0 = NC\{x\},$$

$$(x_0 x_1 x_2 x_3) = \omega.$$

Jehlan x_0, x_1, x_2, x_3 jest orientovanou křivkou $C\{x\}$ a bodem $\{x(u)\}$ úplně určen až na libovolné znamení $\eta = \pm 1$ (tedy dvojznačně); nazývá se lokální jehlan orientované křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u)\}$. Jehlan x_0, $-x_1$, x_2, $-x_3$ jest lokální jehlan opačně orientované křivky $C\{x(-v)\}$ v bodě $\{x(u)\}$.

Buď K kolineace ar. bodů; buď $K = UP$, kde U jest kolineace modulu ± 1 a P jest podobnost. Buď $x(u) \sim x'(u)$ v K; buď $x_i \sim x_i'$ v U $(i = 0, 1, 2, 3)$. Jehlan x_0', x_1', x_2', x_3' jest lokální jehlan orientované křivky $C\{x'(u)\}$ v bodě $\{x'(u_0)\}$.

Bod $\{x_3\}$ náleží oskulační kubické křivce $\overset{u}{C}_3$ křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u)\}$. Bod $\{x_2\}$ je průsečík tečny kubické křivky $\overset{u}{C}_3$ v bodě $\{x_3\}$ s oskulační rovinou křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u)\}$ a náleží tedy (v. **381**) oskulační kuželosečce $\overset{u}{C}_2$ křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u)\}$. Bod $\{x_1\}$ je průsečík tečny kuželosečky $\overset{u}{C}_2$ v bodě $\{x(u)\}$ s tečnou křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u)\}$. Bod $\{x_1\}$

je také průsečík oskulační roviny kubické křivky $\overset{u}{C_3}$ v bodě $\{x_3\}$ s tečnou křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u)\}$.

Všimněme si nejprve, že $D\tau$ existuje, i když $r=7$. Ježto totiž Ass. $C\{x\}$ náleží pevnému lin. komplexu, nezávisí τ na $\frac{d^7x}{du^7}$, jak jsme již ve **397** upozornili.

Abychom zjistili, že jehlan x_0, x_1, x_2, x_3 jest orientovanou křivkou $C\{x\}$ a bodem $\{x(u)\}$ (dvojznačně) určen, stačí zjistiti, že, je-li $\varrho=\varrho(u)$ funkce třídy 7, x_i $(i=0,1,2,3)$ se nemění, přejdeme-li od $C_a x$ k $C_a \varrho x$. Buď $\varDelta$ diferenciální parametr orientované ar. křivky $C_a \varrho x$; buď $\bar{q}(u)$, $(\bar{\tau}(u))$ její prvý (čtvrtý) unimodulární invariant. Dle **385** jest

$$\Delta=|\rho|^{-\frac{2}{3}} D, \tag{4}$$

takže

$$\begin{aligned}
\Delta(\rho x) &= \operatorname{sgn} \rho \,.\, |\rho|^{\frac{1}{3}}\left(Dx+\frac{D\rho}{\rho} x\right), \\
\Delta^2(\rho x) &= \operatorname{sgn} \rho \,.\, |\rho|^{-\frac{1}{3}}\left[D^2 x+\frac{4}{3} \frac{D\rho}{\rho} Dx+\left(\frac{D^2 \rho}{\rho}-\frac{2}{3} \frac{(D\rho)^2}{\rho^2}\right) x\right], \\
\Delta^3(\rho x) &= \rho^{-1}\left[D^3 x+\frac{D\rho}{\rho} D^2 x+\left(\frac{7}{3} \frac{D^2 \rho}{\rho}-\frac{22}{9} \frac{(D\rho)^2}{\rho^2}\right) Dx+\right. \\
&\quad \left.+\left(\frac{D^3 \rho}{\rho}-\frac{8}{3} \frac{D\rho\, D^2 \rho}{\rho^2}+\frac{14}{9} \frac{(D\rho)^3}{\rho^3}\right) x\right].
\end{aligned} \tag{5}$$

Dle **388** (1) jest

$$\bar{q}(u)=|\rho|^{-\frac{4}{3}}\left(q+\frac{10}{3} \frac{D^2 \rho}{\rho}-\frac{40}{9} \frac{(D\rho)^2}{\rho^2}\right), \quad \bar{\tau}(u)=|\rho|^{-\frac{8}{3}} \tau, \tag{6}$$

takže dle (4)

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{q} &= \rho^{-2}\left[Dq-\frac{4}{3} \frac{D\rho}{\rho} q+\frac{10}{3} \frac{D^3 \rho}{\rho}-\frac{50}{3} \frac{D\rho\, D^2 \rho}{\rho^2}+\frac{400}{27}\left(\frac{D\rho}{\rho}\right)^3\right], \\
\Delta \bar{\tau} &= |\rho|^{-\frac{10}{3}}\left(D\tau-\frac{8}{3} \frac{D\rho}{\rho} \tau\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Z (1), (5), (6) a (7) vychází snadno, že, přejdeme-li od $C_a x$ k $C_a \varrho x$, jehlan x_0, x_1, x_2, x_3 změní se jen tak, že libovolné znamení η je nahrazeno znamením sgn $\varrho \,.\, \eta$.

Přejdeme-li od $C_a x$ k opačně orientované ar. křivce, přejde D v $-D$ dle **349**, kdežto q a τ se nezmění (v. **360** a **363**). Z (1) pak vycházi ihned, že jehlan x_0, x_1, x_2, x_3 přejde v jehlan x_0, $-x_1$, x_2, $-x_3$.

Ostatek teorému dokáže se stejně jako ve **403**.

407. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ dvě regulární křivky třídy $r \geqq 6$ o společném bodě $\{x(u_0)\} = \{y(v_0)\}$. Osnova Ass. $C\{x\}$ buď obsažena v pevném lin. komplexu; rovněž osnova Ass. $C\{y\}$. Buď $6 \leqq s \leqq r$. Buď $\{p_0\}$ tečna křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Když a jen když křivky $C\{x\}$ a $C\{y\}$ mají s-bodový styk v $\{x(u_0)\}$, mají osnovy Ass. $C\{x\}$ a Ass. $C\{y\}$ s-přímkový styk v $\{p_0\}$.

Že podmínka je nutná, vychází ze **221** a **222**. Předpokládejme tedy, že je splněna. Ježto $s \geqq 6$, a ježto lin. komplex K, jemuž náleží Ass. $C\{x\}$. jest jediný (v. **378**) lin. komplex, mající v $\{x(u_0)\}$ pětipřímkový styk s Ass. $C\{x\}$, náleží také osnova Ass. $C\{y\}$ do K. Vskutku dle **221** mají Ass. $C\{x\}$ a Ass. $C\{y\}$ $(s-1)$-přímkový styk v $\{p_0\}$. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládati, že $r \geqq s+1$. Buď q ar. komplex takový, že K jest adjungován ke $\{q\}$; buď K nulová korelace o basi q. Buď v K: $x(u) \sim \xi(u)$, $y(v) \sim \eta(v)$. Je zřejmé, že $\mathfrak{C}\{\xi\}$ a $\mathfrak{C}\{\eta\}$ mají s-rovinový styk v $\{\xi(u_0)\}$. Avšak ze **134** a **380** vychází snadno, že $\mathfrak{C}\{\xi\} =$ $=$ Adj. $C\{x\}$, $\mathfrak{C}\{\eta\} =$ Adj. $C\{y\}$. Ježto jednak $C\{x\}$ a $C\{y\}$ mají s-bodový styk v $\{x(u_0)\}$, jednak Adj. $C\{x\}$ a Adj. $C\{y\}$ mají s-rovinový styk v $\{\xi(u_0)\}$, vidíme snadno, srovnáme-li podmínky **204** (2) a **222** (2), že Ass. $C\{x\}$ a Ass. $C\{y\}$ mají s-přímkový styk v $\{p_0\}$.

408. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ dvě orientované regulární ar. křivky třídy $r \geqq 7$ bez septemtaktických bodů o společném bodě $\{x(u_0)\} = \{y(v_0)\}$. Osnova Ass. $C\{x\}$ buď obsažena v pevném lin. komplexu; rovněž osnova Ass. $C\{y\}$. Buď $\{p_0\}$ tečna křivky $C\{x\}$ v $\{x(u_0)\}$. Buď ε normální znamení křivky $C\{x\}$. Buď x_0, x_1, x_2, x_3 lokální jehlan orientované křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Když a jen když 1^0 x_0, x_1, x_2, x_3 je také lokální jehlan v $\{x(u_0)\}$ pro orientovanou křivku $C\{y\}$ nebo pro křivku opačně orientovanou, 2^0 ε je normální znamení křivky $C\{y\}$, mají křivky $C\{x\}$, $C\{y\}$ osmibodový styk v $\{x(u_0)\}$.

Že podmínka je nutná, vychází snadno ze **178** a **406**. Předpokládejme tedy, že je splněna, takže — volíme-li vhodně orientaci křivky $C\{y\}$ — x_0, x_1, x_2, x_3 je lokální jehlan v $\{x(u_0)\}$ i pro $C\{x\}$ i pro $C\{y\}$. Buď $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ duální jehlan adjungovaný k x_0, x_1, x_2, x_3. Ze **357**, **360** (1), **362** (3) a **406** (1) vychází po snadném počtu, že — v obvyklém označení vzhledem k $C_a x$ —

$$
\begin{aligned}
\xi_0 = \eta |\tau|^{-\frac{3}{8}} \Big[\Xi - \frac{3}{8} \frac{D\tau}{\tau} D^2\xi - \left(\frac{3}{32} \frac{(D\tau)^2}{\tau^2} + \frac{3}{10} q \right) D\xi + \\
+ \left(-\frac{3}{256} \frac{(D\tau)^3}{\tau^3} + \frac{9}{80} q \frac{D\tau}{\tau} + \frac{3}{10} Dq \right) \xi \Big],
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&\xi_1 = \eta|\tau|^{-\frac{1}{8}}\left[D^2\xi + \frac{1}{2}\frac{D\tau}{\tau}D\xi + \left(\frac{3}{32}\frac{(D\tau)^2}{\tau^2} - \frac{3}{10}q\right)\xi\right],\\
&\xi_2 = -\eta|\tau|^{\frac{1}{8}}\left(D\xi + \frac{3}{8}\frac{D\tau}{\tau}\xi\right),\quad \xi_3 = \eta|\tau|^{\frac{3}{8}}\xi,
\end{aligned}
$$

kde napravo je dosaditi $u = u_0$. Odtud a ze **370** nalezneme (všímajíce si, že $\Theta = 0$) po snadném počtu (v. **198** (2), (3)) pro oskulační kubickou křivku $\overset{u_0}{C}_3$ křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$:

$$
(2)\qquad \overset{u_0}{C}_3 = C\begin{bmatrix} \xi_3, & \xi_2, & \frac{3}{2}\xi_1 \\ \xi_2, & \frac{3}{2}\xi_1, & \frac{9}{2}\xi_0 \end{bmatrix}.
$$

Ježto také $C\{y\}$ má v $\{x(u_0)\}$ lokální jehlan x_0, x_1, x_2, x_3 a duální jehlan $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ jest adjungován k x_0, x_1, x_2, x_3, vychází ze (2), že $\overset{u_0}{C}_3$ je též oskulační kubickou křivkou křivky $C\{y\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Mají tedy $C\{x\}$ a $C\{y\}$ šestibodový styk v $\{x(u_0)\}$. Snadno však nahlédneme, že tento styk je sedmibodový. Položme

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
\overset{u_0}{Q}{}_r^{(1)} &= 3\xi_1\xi_3 - 2\xi_2^2,\\
\overset{u_0}{Q}{}_r^{(2)} &= 3\xi_0\xi_3 - \xi_1\xi_2,\\
\overset{u_0}{Q}{}_r^{(3)} &= \xi_1^2 - 2\xi_0\xi_2 - \frac{9}{10}\xi_3^2.
\end{aligned}
$$

Definujeme-li $\overset{u_0}{P}{}_r^{(1)}, \overset{u_0}{P}{}_r^{(2)}, \overset{u_0}{P}{}_r^{(3)}$ jako ve **369** (1), vychází z (1) po snadném počtu — všimneme-li si, že $\Theta = 0$ — že

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
\overset{u_0}{Q}{}_r^{(1)} &= \frac{1}{10}|\tau|^{\frac{1}{4}}\overset{u_0}{P}{}_r^{(1)},\\
\overset{u_0}{Q}{}_r^{(2)} &= \frac{1}{10}\overset{u_0}{P}{}_r^{(2)} - \frac{1}{40}\left(\frac{D\tau}{\tau}\right)_{u=u_0}\overset{u_0}{P}{}_r^{(1)},\\
\overset{u_0}{Q}{}_r^{(3)} &= |\tau|^{-\frac{1}{4}}\left[\frac{1}{10}\overset{u_0}{P}{}_r^{(3)} + \frac{1}{40}\left(\frac{D\tau}{\tau}\right)_{u=u_0}\overset{u_0}{P}{}_r^{(2)} - \left(\frac{1}{100}q + \frac{1}{320}\frac{(D\tau)^2}{\tau^2}\right)\overset{u_0}{P}{}_r^{(1)}\right],
\end{aligned}
$$

takže dle **369** rovinové formy $\overset{u_0}{Q}{}_r^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ mají s $C\{x\}$ sedmibodový styk v $\{x(u_0)\}$. Z tvaru forem $\overset{u_0}{Q}{}_r^{(i)}$ pak vychází, že mají v $\{x(u_0)\}$ také s $C\{y\}$ sedmibodový styk. Ze (3) pak snadno vychází, že, když a jen když ar. bod z náleží do $\{x_0, x_1\}$, jest $S[\overset{u_0}{Q}{}_r^{(i)}; z]\,x_0 = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Užijeme-li této poznámky místo věty **175** v úvaze provedené ve **178**, nalezneme, že $C\{x\}$ a $C\{y\}$ mají v $\{x(u_0)\}$ sedmibodový styk.

Dle **178** můžeme tedy předpokládati, že

$$(5)\qquad \left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0} = \left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0}. \qquad \left(0 \leqq \alpha \leqq 6;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right)$$

Máme ukázati, že styk křivek $C\{x\}$ a $C\{y\}$ v $\{x(u_0)\}$ jest osmibodový, tedy dle (5) a dle **179**, že existují čísla a, b taková, že

$$\left(\frac{d^7 y}{dv^7}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^7 x}{du^7}\right)_{u=u_0} = a x(u_0) + b \left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_0}.$$

Ježto $C\{x\}$ je regulární, je tomu tak, když a jen když

$$(6)\qquad \left(x(u_0), \left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_0}, \left[\frac{d^2 x}{du^2}\right]_{u=u_0}, \left[\frac{d^7 y}{dv^7}\right]_{v=v_0} - \left[\frac{d^7 x}{du^7}\right]_{u=u_0}\right) = 0,$$

$$(7)\qquad \left(x(u_0), \left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_0}, \left[\frac{d^3 x}{du^3}\right]_{u=u_0}, \left[\frac{d^7 y}{dv^7}\right]_{v=v_0} - \left[\frac{d^7 x}{du^7}\right]_{u=u_0}\right) = 0.$$

Rovnice (6) je však splněna dle **222** (2), neboť dle **407** osnovy Ass. $C\{x\}$, Ass. $C\{y\}$ mají sedmipřímkový styk v $\left\{\left(x\frac{dx}{du}\right)_{u=u_0}\right\}$. Buď $\bar\Theta$ (v) $(\bar\tau(v))$ druhý (čtvrtý) unimodulární invariant orientované ar. osnovy $C_a\, y(v)$; jest identicky $\bar\Theta(v) = 0$. Buď Δ diferenciální parametr orientované ar. osnovy $C_a\, y(v)$. Dle (5), (6) a **363** (5) jest

$$(8)\qquad \left(\Delta\bar\tau\right)_{v=v_0} - \left(D\tau\right)_{u=u^0} = \left|\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)\right|^{-\frac{5}{8}} \left(x, \frac{dx}{du}, \frac{d^3x}{du^3}, \frac{d^7 y}{dv^7} - \frac{d^7 x}{du^7}\right),$$

kde napravo je dosaditi $u = u_0$, $v = v_0$. Ježto orientované křivky $C\{x\}$. $C\{y\}$ mají týž lokální jehlan v bodě $\{x(u_0)\}$, vychází snadno ze **406** (1), že levá strana rovnice (8) je rovna nule. Totéž platí tedy i o pravé straně, z čehož vychází (7).

409. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ dvě regulární křivky třídy $r \geqq 7$ bez septemtaktických bodů. Osnova Ass. $C\{x\}$ buď obsažena v pevném lin. komplexu; rovněž osnova Ass. $C\{y\}$. Buď $\varepsilon(\varepsilon')$ normální znamení křivky $C\{x\}$ $(C\{y\})$. Buď $\{x(u_0)\}$ $(\{y(v_0)\})$ bod křivky $C\{x\}$ $(C\{y\})$. Když a jen když $\varepsilon = \varepsilon'$, existuje kolineace K ar. bodů, v níž $\{y(v_0)\} \backsim \{x(u_0)\}$ a jež je taková, že, když $y(v) \backsim y'(v)$ v K, křivky $C\{x\}$ a $C\{y'\}$ mají osmibodový styk v $\{x(u_0)\}$.

Vychází ze **408** stejně, jako **339** ze **338**.

Projektivní křivosti ($m = 3$).

410. Buď $C\{x(u)\}$ regulární křivka třídy $r \geqq 7$. Osnova Ass. $C\{x\}$ neměj sextaktických přímek. Buď D diferenciální parametr orientované ar. křivky $C_a x(u)$; buďte $q(u)$, $\Theta(u)$, $\tau(u)$ resp. její prvý, druhý, čtvrtý unimodulární invariant. Buď

$$(1)\quad \begin{aligned} T(u) &= \frac{1}{6}|\Theta|^{-\frac{4}{8}}\tau, \\ H(u) &= \frac{1}{36}|\Theta|^{-\frac{8}{8}}\left[-6\Theta D(\tau - D\Theta) + 8\tau D\Theta - \tau^2 + \frac{18}{5}q\Theta^2 - 7(D\Theta)^2\right]. \end{aligned}$$

Hodnota výrazu $T(u)$ ($H(u)$) pro dané u jest křivkou $C\{x\}$ a bodem $\{x(u)\}$ úplně určena; pravíme, že $T(u)$ ($H(u)$) jest prvá (druhá) projektivní křivost křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u)\}$.

Buď K kolineace ar. bodů; buď $x(u) \backsim x'(u)$ v K; pak $T(u)$ ($H(u)$) jest prvá (druhá) projektivní křivost křivky $C\{x'\}$ v bodě $\{x'(u)\}$.

Že $T(u)$ ($H(u)$) se nemění, přejdeme-li od $C_a x(u)$ k $C_a \varrho(u) x(u)$, vychází po snadném počtu z **385, 388** a **389**. Že $T(u)$ ($H(u)$) se nemění, změníme-li orientaci křivky $C\{x\}$, je zřejmé. Že $T(u)$ ($H(u)$) se nemění při kolineaci K, je zřejmé, je-li K positivní. Stačí tedy ukázati, že se $T(u)$ ($H(u)$) nemění při jedné negativní kolineaci, na př. při té, kterou jsme uvažovali ve **392**, což je snadné.

411. Buď $C\{x(u)\}$ orientovaná regulární křivka třídy $r \geqq 7$. Osnova Ass. $C\{x\}$ neměj sextaktických přímek. Je-li $C\{x(u)\}$ positivně (negativně) orientována, buď $\varepsilon = 1$ ($\varepsilon = -1$). Buď s normální parametr orientované křivky $C\{x(u)\}$. Buď $T(u)$ ($H(u)$) prvá (druhá) projektivní křivost křivky $C\{x\}$. Buď x_0, x_1, x_2, x_3 lokální jehlan křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u)\}$. Buď ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 duální jehlan adjungovaný k x_0, x_1, x_2, x_3. Platí rovnice

$$(1)\quad \begin{aligned} &\frac{dx_0}{ds} = \varepsilon(x_1 + 3Tx_0), \quad \frac{dx_1}{ds} = \varepsilon(x_2 + Tx_1 + 3Hx_0), \\ &\frac{dx_2}{ds} = \varepsilon\left(x_3 - Tx_2 + 4Hx_1 + \frac{2}{5}x_0\right), \quad \frac{dx_3}{ds} = \varepsilon\left(-3Tx_3 + 3Hx_2 + \frac{3}{5}x_1\right); \end{aligned}$$

$$(2)\quad \begin{aligned} &\frac{d\xi_0}{ds} = -\varepsilon\left(3T\xi_0 + 3H\xi_1 + \frac{2}{5}\xi_2\right), \quad \frac{d\xi_1}{ds} = -\varepsilon\left(\xi_0 + T\xi_1 + 4H\xi_2 + \frac{3}{5}\xi_3\right), \\ &\frac{d\xi_2}{ds} = -\varepsilon(\xi_1 - T\xi_2 + 3H\xi_3), \quad \frac{d\xi_3}{ds} = -\varepsilon(\xi_2 - 3T\xi_3). \end{aligned}$$

Dle **395** (1) jest $\frac{d}{ds} = |\Theta|^{-\frac{1}{8}} D$; dle **394** jest $\varepsilon = \operatorname{sgn}\Theta$. Rovnice (1) obdrží se po snadném počtu ze **363** (4), **364** (1), (3), **402** (1) a **410** (1). Tento počet dá se ostatně značně zjednodušiti takto: Stačí provésti důkaz rovnic (1) za předpokladu, že $r \geqq 13$. Pak ar. křivka $C_a \,|\, \Theta|^{\frac{1}{3}} x = NC\{x\}$ je třídy 7, takže můžeme předpokládati, že $C_a x = NC\{x\}$, tedy $\Theta = \varepsilon$ (v. **391**), což počet zjednodušuje.

Rovnice (2) plynou z (1) dle **69.**

412. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ regulární křivky třídy $r+6$ ($r \geqq 1$); osnovy Ass. $C\{x\}$, Ass. $C\{y\}$ nemějte sextaktických přímek. Křivky $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ buďte positivně orientovány. Buď $s(s')$ normální parametr orientované křivky $C\{x(u)\}$ ($C\{y(v)\}$). Buď $T(u)$ ($H(u)$) prvá (druhá) projektivní křivost křivky $C\{x\}$; týž význam měj $T'(v)$ ($H'(v)$) pro křivku $C\{y\}$. Buď $\{x(u_0)\}$ ($\{y(v_0)\}$) bod křivky $C\{x\}$ ($C\{y\}$). Když a jen když

$$\left(\frac{d^\alpha T}{ds^\alpha}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^\alpha T'}{ds'^\alpha}\right)_{v=v_0}, \quad \left(\frac{d^\alpha H}{ds^\alpha}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^\alpha H'}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0}, \tag{1}$$
$$\left(0 \leqq \alpha \leqq r-1;\ \frac{d^0}{ds^0} = \frac{d^0}{ds'^0} = 1\right)$$

existuje kolineace K, v níž $\{y(v_0)\} \sim \{x(u_0)\}$, $y(v) \sim y'(v)$, a jež je taková, že křivky $C\{x(u)\}$ a $C\{y'(v)\}$ mají $(r+7)$-bodový styk v $\{x(u_0)\}$.

Že podmínka je nutná, vychází snadno ze **178**. Předpokládejme tedy, že rovnice (1) jsou splněny. Dle **404** a **405** můžeme předpokládati, že $C\{x(u)\}$ a $C\{y(v)\}$ mají sedmibodový styk v $\{x(u_0)\} = \{y(v_0)\}$; máme pak ukázati, že tento styk jest $(r+7)$-bodový. Dokazujíce indukcí, můžeme míti za dokázáno, že styk jest $(r+6)$-bodový, takže dle **178** můžeme předpokládati, že

$$\left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0}. \qquad \left(0 \leqq \alpha \leqq r+5;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right) \tag{2}$$

Ježto $C\{x(u)\}$ je regulární, jest

$$\left(\frac{d^{r+6} y}{dv^{r+6}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{r+6} x}{du^{r+6}}\right)_{u=u_0} = \lambda_0 x(u_0) + \lambda_1 \left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_0} + \lambda_2 \left(\frac{d^2 x}{du^2}\right)_{u=u_0} + \lambda_3 \left(\frac{d^3 x}{du^3}\right)_{u=u_0}. \tag{3}$$

Dle **179** stačí ukázati, že $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ukažme nejprve, že $\lambda_3 = 0$; je užitečné všimnouti si, že při tom neužijeme rovnice

$$\left(\frac{d^{r-1} H}{ds^{r-1}}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^{r-1} H'}{ds'^{r-1}}\right)_{v=v_0}, \tag{4}$$

nýbrž pouze rovnice

$$\left(\frac{d^{r-1} T}{ds^{r-1}}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^{r-1} T'}{ds'^{r-1}}\right)_{v=v_0}. \tag{5}$$

Buď D diferenciální parametr orientované ar. křivky $C_a x(u)$; buď $q(u)$, $\Theta(u)$, $\tau(u)$ resp. její prvý, druhý, čtvrtý unimodulární invariant. Týž význam měj D', $q'(v)$, $\Theta'(v)$, $\tau'(v)$ pro orientovanou ar. křivku $C_a y(v)$. Ježto $\Theta(u)$ obsahuje nejvýš šesté derivace ar. bodu $x(u)$, je dle (2), (5) a **410** (1)

$$0=\left(\frac{d^{r-1}T'}{ds'^{r-1}}\right)_{v=v_0}-\left(\frac{d^{r-1}T}{ds^{r-1}}\right)_{u=u_0}=\frac{1}{6}\,|\Theta(u_0)|^{-\frac{4}{8}}\left[\left(\frac{d^{r-1}\tau'}{ds'^{r-1}}\right)_{v=v_0}-\left(\frac{d^{r-1}\tau}{ds^{r-1}}\right)_{u=u_0}\right],$$

$$\text{(6)}\qquad \left(\frac{d^{r-1}\tau'}{ds'^{r-1}}\right)_{v=v_0}=\left(\frac{d^{r-1}\tau}{ds^{r-1}}\right)_{u=u_0}.$$

Ve **363** jsme si však všimli, že $\tau-D\Theta=\tau-|\Theta|^{\frac{1}{8}}\dfrac{d\Theta}{ds}$ (v. **395** (1)) obsahuje nejvýš šesté derivace ar. bodu x; odtud, ze (2) a ze (6) následuje ihned, že

$$\text{(7)}\qquad \left(\frac{d^{r}\Theta'}{ds'^{r}}\right)_{v=v_0}=\left(\frac{d^{r}\Theta}{ds^{r}}\right)_{u=u_0}.$$

Ježto

$$\frac{d}{ds}=|\Theta|^{-\frac{1}{8}}\left|\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)\right|^{-\frac{1}{6}},$$

následuje ze (2) a (7), že

$$\text{(8)}\qquad \left(\frac{d^{r}\Theta'}{dv^{r}}\right)_{v=v_0}=\left(\frac{d^{r}\Theta}{du^{r}}\right)_{u=u_0}.$$

Avšak dle **361** (5) jest

$$\frac{d^r\Theta}{du^r}=\frac{\omega}{2}\left|\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)\right|^{-\frac{3}{8}}\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^{r+6}x}{du^{r+6}}\right)+\ldots,$$

kde vynechané členy obsahují nejvýš $(r+5)$-té derivace ar. bodu x, takže dle (2) a (8)

$$\text{(9)}\qquad \left(x(u_0),\left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_0},\left[\frac{d^2x}{du^2}\right]_{u=u_0},\left[\frac{d^{r+6}y}{dv^{r+6}}\right]_{v=v_0}-\left[\frac{d^{r+6}x}{du^{r+6}}\right]_{u=u_0}\right)=0.$$

tedy dle (3) $\lambda_3=0$, jak bylo tvrzeno.

K důkazu dalšího tvrzení, že také $\lambda_2=0$, potřebujeme již rovnice (4). Ze (2), (6), (7) a **410** (1) vychází snadno, že

$$\left(\frac{d^{r-1}H'}{ds'^{r-1}}\right)_{v=v_0}-\left(\frac{d^{r-1}H}{ds^{r-1}}\right)_{u=u_0}=$$

$$=-\frac{\operatorname{sgn}\Theta(u_0)}{6}\,|\Theta(u_0)|^{-\frac{5}{8}}\left[\left(\frac{d^{r-1}D'(\tau'-D'\Theta')}{ds'^{r-1}}\right)_{v=v_0}-\left(\frac{d^{r-1}D(\tau-D\Theta)}{ds^{r-1}}\right)_{u=u_0}\right]=$$

$$=-\frac{\operatorname{sgn}\Theta(u_0)}{6}\,|\Theta(u_0)|^{-\frac{1}{8}}\left[\left(\frac{d^{r}(\tau'-D'\Theta')}{ds'^{r}}\right)_{v=v_0}-\left(\frac{d^{r}(\tau-D\Theta)}{ds^{r}}\right)_{u=u_0}\right],$$

takže dle (4)

$$\left(\frac{d^r(\tau'-D'\Theta')}{ds'^r}\right)_{v=v_0}=\left(\frac{d^r(\tau-D\Theta)}{ds^r}\right)_{u=u_0},$$

z čehož vychází dle (2)

$$\left(\frac{d^r(\tau'-D'\Theta')}{dv^r}\right)_{v=v_0}=\left(\frac{d^r(\tau-D\Theta)}{du^r}\right)_{u=u_0}.$$

Ze (2), (9) a (10) následuje snadno dle **363** (5), že

$$\left(x(u_0),\left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_0},\left[\frac{d^3x}{du^3}\right]_{u=u_0},\left[\frac{d^{r+6}y}{dv^{r+6}}\right]_{v=v_0}-\left[\frac{d^{r+6}x}{du^{r+6}}\right]_{u=u_0}\right)=0,$$

takže také λ_2 ve (3) jest rovno nule.

413. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ regulární křivky třídy $r+7$ ($r\geq 0$); osnovy Ass. $C\{x\}$, Ass. $C\{y\}$ nemějte sextaktických přímek. Křivky $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ buďte positivně orientovány. Buď $s(s')$ normální parametr orientované křivky $C\{x(u)\}$ ($C\{y(v)\}$). Buď $T(u)$ ($H(u)$) prvá (druhá) projektivní křivost křivky $C\{x\}$; týž význam měj $T'(v)$ ($H'(v)$) pro křivku $C\{y\}$. Buď $\{x(u_0)\}$ ($\{y(v_0)\}$) bod křivky $C\{x\}$ ($C\{y\}$). Buď $\{p_0\}$ tečna křivky $C\{x\}$ v $\{x(u_0)\}$. Když a jen když*)

$$\left(\frac{d^\alpha T}{ds^\alpha}\right)_{u=u_0}=\left(\frac{d^\alpha T'}{ds'^\alpha}\right)_{v=v_0},\qquad (0\leq\alpha\leq r) \tag{1}$$

$$\left(\frac{d^\alpha H}{ds^\alpha}\right)_{u=u_0}=\left(\frac{d^\alpha H'}{ds'^\alpha}\right)_{v=v_0},\qquad (0\leq\alpha\leq r-1) \tag{2}$$

existuje kolineace ar. bodů K, v níž $\{y(v_0)\}\sim\{x(u_0)\}$, $y(v)\sim y'(v)$ a jež je taková, že osnovy Ass. $C\{x(u)\}$, Ass. $C\{y'(v)\}$ mají $(r+7)$-přímkový styk v přímce $\{p_0\}$.

Dokažme na př., že podmínka stačí; že je nutná, ukáže se podobně. Z (1) a (2) vychází dle **412** (dle **405**, když $r=0$), že existuje kolineace K, v níž $C\{y\}\sim C\{y'\}$ a taková, že křivky $C\{x\}$, $C\{y'\}$ mají $(r+7)$-bodový styk v bodě $\{x(u_0)\}=\{y'(v_0)\}$. Můžeme tedy předpokládati, že $y(v_0)=x(u_0)$ a že křivky $C\{x\}$ a $C\{y\}$ mají $(r+7)$-bodový styk v $\{x(u_0)\}$. Dle **178** můžeme předpokládati, že

$$\left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0}=\left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0}.\qquad \left(0\leq\alpha\leq r+6;\ \frac{d^0}{du^0}=\frac{d^0}{dv^0}=1\right)$$

---

*) Rovnice (2) ovšem odpadnou pro $r=0$.

Dle **222** (2) stačí ukázati, že jest

$$\text{(3)}\qquad \left(x(u_0), \left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_0}, \left[\frac{d^2x}{du^2}\right]_{u=u_0}, \left[\frac{d^{r+7}y}{dv^{r+7}}\right]_{v=v_0} - \left[\frac{d^{r+7}x}{du^{r+7}}\right]_{u=u_0}\right) = 0.$$

Rovnice (3) je však důsledkem rovnice $\left(\frac{d^rT}{ds^r}\right)_{u_0=u_0} = \left(\frac{d^rT'}{ds'^r}\right)_{v=v_0}$; stačí v úsudku, jenž nás vedl ke **412** (9), číslo r nahraditi číslem $r+1$.

414. Buďte $C\{x(u)\}$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$), $C\{y(v)\}$ (v v $\langle\alpha+0, \beta-0\rangle$) dvě regulární křivky třídy $r\geqq 7$. Osnovy Ass. $C\{x\}$, Ass. $C\{y\}$ nemějte sextaktických přímek. Buď $s(u)$ normální parametr orientované křivky $C\{x(u)\}$; buď $T(u)$ ($H(u)$) prvá (druhá) projektivní křivost křivky $C\{x(u)\}$. Když a jen když existuje funkce $\varphi(v)$ třídy r v $\langle\alpha, \beta\rangle$ taková, že 1⁰ $\frac{d\varphi}{dv} \neq 0$ všude v $\langle\alpha, \beta\rangle$; 2⁰ $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ (v tom případě buď $\varepsilon=1$) nebo $\varphi(\alpha)=b$, $\varphi(\beta)=a$ (v tom případě buď $\varepsilon=-1$); 3⁰ $\varepsilon s[\varphi(v)]$ jest normální parametr orientované křivky $C\{y(v)\}$; 4⁰ $T[\varphi(v)]$ a $H[\varphi(v)]$ jest pořadě prvá a druhá projektivní křivost křivky $C\{y\}$: existuje kolineace ar. bodů, v níž $C\{x\} \backsim C\{y\}$.

Vychází ze **411** stejně jako **344** vychází ze **341**.

415. Buď $C\{x(u)\}$ regulární křivka třídy $r\geqq 8$ bez septemtaktických bodů. Osnova Ass. $C\{x\}$ buď obsažena v pevném lin. komplexu. Buď D diferenciální parametr orientované ar. křivky $C_a x(u)$; buď $q(u)$ ($\tau(u)$) její prvý (čtvrtý) unimodulární invariant. Buď

$$\text{(1)}\qquad L(u) = \frac{1}{10}|\tau|^{-\frac{1}{3}}\left[q + \frac{5}{4}\frac{D^2\tau}{\tau} - \frac{45}{32}\left(\frac{D\tau}{\tau}\right)^2\right].$$

Hodnota výrazu $L(u)$ pro dané u je křivkou $C\{x\}$ a bodem $\{x(u)\}$ úplně určena; pravíme, že $L(u)$ jest projektivní křivost křivky $C\{x\}$ v bodě $\{x(u)\}$.

Buď K kolineace ar. bodů; buď $x(u) \backsim x'(u)$ v K; pak $L(u)$ jest projektivní křivost křivky $C\{x'\}$ v bodě $\{x'(u)\}$.

Že $L(u)$ se nemění, přejdeme-li od $C_a x(u)$ k $C_a \varrho(u)\, x(u)$, vychází po snadném počtu ze **385**, **388** a **389**. Že $L(u)$ se nemění, změníme-li orientaci křivky $C\{x\}$, je zřejmé. Že $L(u)$ se nemění kolineacemi, vidíme jako ve **410**.

416. Buď $C\{x(u)\}$ regulární křivka třídy $r\geqq 8$ bez septemtaktických bodů. Osnova Ass. $C\{x\}$ buď obsažena v pevném lin. komplexu. Buď s normální parametr orientované křivky

$C\{x(u)\}$, buď x_0, x_1, x_2, x_3 její lokální jehlan v bodě $\{x(u)\}$. Buď ε normální znamení křivky $C\{x\}$; buď $L(u)$ její projektivní křivost v bodě $x(u)$. Buď $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ duální jehlan adjungovaný k x_0, x_1, x_2, x_3. Platí rovnice

$$(1)\qquad \frac{dx_0}{ds}=x_1, \frac{dx_1}{ds}=x_2+3Lx_0, \frac{dx_2}{ds}=x_3+4Lx_1, \frac{dx_3}{ds}=3Lx_2-\frac{\varepsilon}{10}x_0,$$

$$(2)\qquad \frac{d\xi_0}{ds}=-3L\xi_1+\frac{\varepsilon}{10}\xi_3, \frac{d\xi_1}{ds}=-\xi_0-4L\xi_2, \frac{d\xi_2}{ds}=-\xi_1-3L\xi_3, \frac{d\xi_3}{ds}=-\xi_2.$$

Dle **401** (1) jest $\frac{d}{ds}=|\tau|^{-\frac{1}{4}}D$; dle **406** jest $\varepsilon=\operatorname{sgn}\tau$. Rovnice (1) obdrží se po snadném počtu ze **406** (1); tento počet dá se zjednodušiti předpokladem $\tau=\varepsilon$ (v. **398** a **411**). Rovnice (2) vycházejí z (1) dle **69.**

417. Buď $C\{x(u)\}$ regulární křivka třídy $r\geqq 7$ bez septemtaktických bodů. Osnova Ass. $C\{x\}$ buď obsažena v pevném lin. komplexu. Buď x_0, x_1, x_2, x_3 lokální jehlan orientované křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u)\}$. Buď $M[Q_r]$ kvadrika, mající v $\{x(u)\}$ osmibodový styk s $C\{x\}$ a nemající v $\{x(u)\}$ singulární bod. Tečná rovina kvadriky $M[Q_r]$ v bodě $\{x(u)\}$ jest Adj. $\{x_0, x_1, x_3\}$.

Stačí provésti důkaz za předpokladu, že $r\geqq 8$. Dle **369** a **408** (3), (4) jest

$$Q_r=\lambda_0(3\xi_1\xi_3-2\xi_2^2)+\lambda_1(3\xi_0\xi_3-\xi_1\xi_2)+\lambda_2\left(\xi_1^2-2\xi_0\xi_2-\frac{\varepsilon}{10}\xi_3^2\right),$$

kde $\varepsilon=\operatorname{sgn}\Theta$ a $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ jest duální jehlan adjungovaný k x_0, x_1, x_2, x_3. Měníme-li u ponechávajíce $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ pevné, jest dle **416**

$$\frac{dQ_r}{ds}=-2L\lambda_1(3\xi_1\xi_3-2\xi_2^2)+(2L\lambda_2-\lambda_0)(3\xi_0\xi_3-\xi_1\xi_2)+$$
$$+\lambda_1\left(\xi_1^2-2\xi_0\xi_2-\frac{\varepsilon}{10}\xi_3^2\right)+\frac{2\varepsilon}{5}\lambda_1\xi_3^2.$$

Ježto Q_r má s $C\{x\}$ osmibodový styk v $\{x(u)\}$, jest $\lambda_1=0$ dle **184**, takže

$$Q_r=\lambda_0(3\xi_1\xi_3-2\xi_2^2)+\lambda_2\left(\xi_1^2-2\xi_0\xi_2-\frac{\varepsilon}{10}\xi_3^2\right).$$

Teorém nyní plyne snadno ze **270.**

417. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ dvě regulární křivky třídy $r+7$ $(r\geqq 1)$ bez septemtaktických bodů. Osnova Ass. $C\{x\}$ buď obsažena v pevném lin. komplexu; rovněž osnova Ass.

$C\{y\}$. Buď $s(s')$ normální parametr orientované křivky $C\{x(u)\}$ $(C\{y(v)\})$. Buď $L(u)$ $(L'(v))$ projektivní křivost křivky $C\{x(u)\}$ $(C\{y(v)\})$. Buď ε normální znamení křivky $C\{x\}$. Když a jen když 1° ε jest normální znamení křivky $C\{y\}$, 2° existuje znamení $\alpha = \pm 1$ takové, že

$$\left(\frac{d^i L'}{ds'^i}\right)_{v=v_0} = \alpha^i \left(\frac{d^i L}{ds^i}\right)_{u=u_0}: \qquad (0 \leqq \alpha \leqq r-1) \tag{1}$$

existuje kolineace K, v níž $\{y(v_0)\} \sim \{x(u_0)\}$, $y(v) \sim y'(v)$, a jež je taková, že křivky $C\{x(u)\}$ a $C\{y'(v)\}$ mají $(r+8)$-bodový styk v $\{x(u_0)\}$.

Že podmínky jsou nutné, vychází snadno ze **178**. Předpokládejme tedy, že rovnice (1) jsou splněny. Můžeme předpokládati, že $\alpha = +1$; v opačném případě stačilo by změniti orientaci křivky $C\{y\}$. Dle **408** a **409** můžeme předpokládati, že $C\{x(u)\}$ a $C\{y(v)\}$ mají osmibodový styk v $\{x(u_0)\} = \{y(v_0)\}$; máme pak ukázati, že tento styk jest $(r+8)$-bodový. Dokazujíce indukcí, můžeme míti za dokázáno, že styk jest $(r+7)$-bodový, takže dle **178** můžeme předpokládati, že

$$\left(\frac{d^i x}{du^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i y}{dv^i}\right)_{v=v_0}. \qquad \left(0 \leqq i \leqq r+6; \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right). \tag{2}$$

Ježto $C\{x\}$ jest regulární, jest

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d^{r+7} y}{dv^{r+7}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{r+7} x}{du^{r+7}}\right)_{u=u_0} = \\ &= \lambda_0 x(u_0) + \lambda_1 \left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_0} + \lambda_2 \left(\frac{d^2 x}{du^2}\right)_{u=u_0} + \lambda_3 \left(\frac{d^3 x}{du^3}\right)_{u=u_0}. \end{aligned} \tag{3}$$

Dle **179** stačí ukázati, že $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Dle (2) a **222** (2) je však

$$\left(x(u_0), \left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_0}, \left[\frac{d^2 x}{du^2}\right]_{u=u_0}, \left[\frac{d^{r+7} y}{dv^{r+7}}\right]_{v=v_0} - \left[\frac{d^{r+7} x}{du^{r+7}}\right]_{u=u_0}\right) = 0; \tag{4}$$

vskutku dle **407** osnovy Ass. $C\{x\}$, Ass. $C\{y\}$ mají $(r+7)$-přímkový styk v $\left\{\left(x\frac{dx}{du}\right)_{u=u_0}\right\}$. Dle (4) jest ve (3): $\lambda_3 = 0$. Buď $\Theta(u)$, $\tau(u)$ po řadě druhý a čtvrtý unimodulární invariant orientované ar. křivky $C_a\, x(u)$; buď D její diferenciální parametr. Týž význam měj $\Theta'(v)$, $\tau'(v)$, $\varDelta$ pro orientovanou ar. křivku $C_a\, y(v)$. Dle **379** jest identicky $\Theta(u) = \Theta'(v) = 0$. Ježto

$$\left[\frac{d^{r-1} L'}{ds'^{r-1}}\right]_{v=v^0} = \left[\frac{d^{r-1} L}{ds^{r-1}}\right]_{u=u^0},$$

soudíme snadno ze (2), **401** (1), **415** (1), že

$$[\Delta^{r+1}\tau'(v)]_{v=v_0} - [D^{r+1}\tau(u)]_{u=u_0} = 0. \tag{5}$$

Ze (2), (4), (5) a **363** (5) vychází snadno, že

$$\left(x(u_0), \left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_0}, \left[\frac{d^3x}{du^3}\right]_{u=u_0}, \left[\frac{d^{r+7}y}{dv^{r+7}}\right]_{v=v_0} - \left[\frac{d^{r+7}x}{du^{r+7}}\right]_{u=u_0}\right) = 0.$$

Je tedy také $\lambda_2 = 0$ ve (4).

418. Buďte $C\{x(u)\}$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$), $C\{y(v)\}$ (v v $\langle \alpha+0, \beta-0\rangle$) dvě regulární křivky třídy $r \geqq 8$ bez septemtaktických bodů. Osnova Ass. $C\{x\}$ buď obsažena v pevném lin. komplexu; stejně osnova Ass. $C\{y\}$. Buď ε normální znamení křivky $C\{x\}$; buď $L\{u\}$ její projektivní křivost. Buď $s(u)$ normální parametr orientované křivky $C\{x(u)\}$. Když a jen když ε jest normální znamení křivky $C\{y\}$ a mimo to existuje funkce $\varphi(v)$ třídy r v $\langle \alpha, \beta\rangle$ taková, že 1° $\dfrac{d\varphi}{dv} \neq 0$ všude v $\langle \alpha, \beta\rangle$; 2° $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ (v tom případě buď $\delta = 1$) nebo $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$ (v tom případě buď $\delta = -1$); 3° $\delta s[\varphi(u)]$ jest normální parametr orientované křivky $C\{y\}$; 4° $L[\varphi(v)]$ jest projektivní křivost křivky $C\{y\}$: existuje kolineace ar. bodů, v níž $C\{x\} \sim C\{y\}$.