

Matematické listy Gerberta z Remeše

3. Abacistická počtářská pomůcka

In: Marek Otisk (author); Richard Psík (author); Gerbert of Reims (other): Matematické listy Gerberta z Remeše. (Czech). Praha: Centrum Vivarium FF OU, 2014. pp. 81–88.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/402407>

Terms of use:

- © Otisk, Marek
- © Psík, Richard
- © Matfyzpress

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

3. Abacistická počtářská pomůcka

*Ab antiquis mensa pythagorica, a modernis autem vel abax vel abacus
nuncupatur.*

(Turchillus Compotista, *Reguncule super abacum*, 135)

Gerbertus Latio numeros abacique figuras.

(Bern, Burgerbibliothek, MS 250, f. 1r; resp. Vatikan, Lat. 644, f. 77v–78r)¹

*Sed quum ea, de qua sermo est, disciplina apud omnes ferme occidentalium
partium incolas oblivioni tradita est, contingit et hanc calculandi disciplinam,
utpote cujus fructus cessante arte, ad cujus adminiculum reperta fuerat, non adeo
magnus advertebatur, in contemptum venisse, nisi quantum a summae pruden-
tiae viro Gerberto, cui Sapientis cognomen fuit, atque ab eximio doctore Hermanno
eorumque discipulis usque ad nostra tempora derivata a fontibus illorum, modica
licet, praedictae scientiae vena manavit.*

(Radulphus Laudunensis, *Tractatus de abaco*)²

*Cogis enim et crebris pulsas precibus ut tibi multiformes abaci rationes perse-
quar diligenter negligentia quidem apud nos iam paene demersas, sed a domino
papa Gerberto quasi quaedam seminaria breuiter et subtilissime seminatatas.*

(Bernelius, *Liber abaci*, praef., 16)

Když Martianus Capella nechá ve své *Svatbě Filologie s Merkurem* vystoupit na slavnostním shromáždění bohů úctyhodnou dámu Aritmetiku, objeví se důstojná a sebevědomá panna, která už svým vzezřením ohromuje přítomné bohy. Jejím zjevu totiž vévodí podivuhodný paprsek, který jí tryská z čela a symbolizuje jednotu, z něho dále prýští menší paprsky odkazující na mnohost čísel, jež vycházejí ze svého kořene a zase se v něj navracejí. Svou nadřazenost nad božstvy dává Aritmetika najevo svým majestátním vystupováním a zároveň žádá po přítomných nebeštanech, aby byla uznána za matku bohů, čehož se jí dostává. Na rozdíl od ostatních svobodných umění, která v personifikované podobě ctěných sester prezentují na svatebním shromáždění své znalosti a svou dovednost i užitečnost, nepotřebuje Aritmetika ke svému představení žádné přístroje ani pomůcky – vystačí si se svými šikovnými prsty³ a s abakem, který zůstal na scéně po vystoupení Aritmetčiny sestry Geometrie.⁴

¹ Srov. např. [Fo1], s. 28.

² [Bub], s. 389.

³ [MaNu], VII, 728–730, s. 261–262.

⁴ [MaNu], VII, 725, s. 259.

Tento abakus Martianus Capella popisuje jen velmi stručně: Jednalo se o desku, na níž se snadno zakreslovaly geometrické útvary,⁵ tzn. plnila podobnou funkci, jako např. školní tabule. A tak, jako aritmetické umění pracuje s nekonečnou řadou čísel, s níž se seznamujeme výhradně rozumovou úvahou, což pochopitelně vychází z povahy předmětu tohoto vědění, stejně tak v geometrii se setkáváme s obdobnou myšlenkovou abstrakcí přímků a tvarů, které lze všechny zaznačit do prachu na abacistické tabuli.⁶

3.1 Mensa geometricalis a abacisté raného středověku

Matematická pomůcka v podobě desky, která byla posypána pískem či prachem, a tudíž umožňovala nákresy geometrických obrazců⁷ či procesní provádění početních výpočtů, je stará cca 5 000 let. Samotné slovo *abax* či *abacus* se do latiny dostalo z řečtiny (*ἄβαξ*, gen. *ἄβακος*), která ho patrně přejala ze severozápadních sémitských jazyků (féníčtina či hebrejščina), v nichž odkazuje na prach nebo písek, jímž byla deska posypána. V řeckém prostředí termínu užívá např. Aristotelés v *Athénské ústavě*, kde abakus představuje názornou a početní pomůcku při sčítání hlasů na soudě, která umožňovala snadnou a rychlou orientaci ve výsledcích hlasování.⁸

Určité varianty abacistické pomůcky byly používány i v římské antice, ovšem v době raného středověku se doklady o práci s abakem na křesťanském Západě vytrácejí. Určitou výjimkou je např. Remigius z Auxerre, který v 9. století píše o abaku v komentáři k Martianově *Svatbě*. Ve shodě s Capellovým encyklopedickým spisem nazývá tuto počtářskou pomůcku *mensa geometricalis*,⁹ což se stalo častým označením této matematické tabule i v raném středověku mezi poslední třetinou 10. a počátkem 12. století. O rozšíření užívání této pomůcky se výrazně zasloužil také Gerbert. Jistě není náhodou, že Richer z Remeše zmiňuje Gerbertův abakus v souvislosti s geometrickým uměním,¹⁰ a rovněž samotný Gerbert v *Listě 5* poukazuje na užitečnost abaku při geometrických výpočtech. Dokladů o označování abaku pojmenováním *mensa* (nebo *tabula*) *geometricalis* je pak celá řada.¹¹

Druhým častým názvem abaku v raně středověkých textech je *mensa pythagorica* či *mensa Pythagorea*.¹² Toto pojmenování odráží ve středověku po

⁵ [MaNu], VI, 579, s. 203–204.

⁶ [MaNu], VI, 706, s. 250–251.

⁷ Srov. např. [Ber], 1, s. 21.

⁸ [Ath], 69, 1, s. 68; česky [AAÚ], s. 78–79.

⁹ [RIM], IV, 155, s. 21.

¹⁰ [Rch], III, 54, s. 198.

¹¹ Viz např. [Scr], s. 610, resp. 625; [Bub], s. 155, resp. 193, 250 nebo 285.

¹² Srov. např. citát z Turchillova abacistického pojednání uvedeného v úvodu této kapitoly. Dále pak viz např. [Bub], s. 157.

měrně časté tvrzení, že prvním abacistou (a významným matematikem, který se rozhodujícím způsobem zasloužil o toto umění) byl Pýthagorás,¹³ přestože zásluhy o abacistickou početní pomůcku se přičítaly i dalším osobnostem, např. Archytovi z Tarentu.¹⁴

Výjimečně bývají abacisté označováni jako *girbercisti*,¹⁵ což napovídá možné iniciační roli Gerberta při zovvuzívání abacistického nástroje v latinském křesťanském světě. Pro tuto hypotézu svědčí také nápis dochovaný na některých dobových vyobrazeních abacistické tabule (např. v bernském a vatikánském rukopise), který je citován v úvodu této kapitoly.

Automaticky však nelze říci, že by Gerbert byl prvním, kdo přišel s modifikovou podobou abaku a obnovil jeho užívání na evropském Západě, přestože jeho *Regulae de numerorum abaci rationibus*, jež byly připojeny k *Listu 5*, jsou dobově nejstarším dochovaným soustavným pojednáním o této problematice. Vždyť jako *doctor abaci* byl kupř. označen i Abbo z Fleury, který v komentáři k matematickému spisu *Calculus* Viktorina z Akvitánie popsal některé početní operace na raně středověkém abaku.¹⁶ Ještě kolem zlomu prvního milénia pak vznikly další delší texty, které byly patrně koncipovány jako doplnění Gerbertova stručného pojednání. Byly to *Regulae numerorum super abacum* a *Ratio numerorum abaci* od Herigera z Lobbes¹⁷ a *Liber abaci* od Bernelia mladšího z Paříže. Herigera i Bernelia lze označit za přímé či nepřímé Gerbertovy žáky.

V 11. a na počátku 12. století vznikla celá řada spisů, které pojednávají o abacistickém počtářství: vedle anonymních textů,¹⁸ včetně pojednání z pseudo-Boethiovy tzv. *Geometrie II*,¹⁹ jsou to např. texty Heřmana z Reichenau (*Qualiter multiplicationes fiant in abaco*),²⁰ Vavřince z Amalfi (*De divisione*),²¹ Garlanda Komputisty (*De abaco*),²² Radulfa z Laonu (*Liber de abaco*),²³ Adelarda z Bathu (*Regule abaci*)²⁴ či Turchilla Komputisty (*Reguncule super abacum*) ad.

¹³ Viz např. [Bub], s. 157. Srov. dále např. [Nik], I, 1, s. 1; [MaNu], VII, 729, s. 261; [BoAr], I, 1, s. 9; [CaIn], II, 4, s. 132; [IsEt], III, 2, s. 282; česky s. 283 a mnoho dalších.

¹⁴ Kupř. [Bub], s. 155.

¹⁵ [Bub], s. 291.

¹⁶ [AbC], s. 113–115. Srov. zejména [Bt4], s. 129 – 139; resp. s. 211. Viz také [Bub], s. 197–203,

¹⁷ [Bub], s. 205–225.

¹⁸ Viz např. [Bub], s. 225–290 nebo [Scr].

¹⁹ Edici textu viz [PBG], I, 19, s. 137–144; srov. [Bub], s. 155–161; vyobrazení pak [PBG], Taf. 1–21; komentář a popis [PBG] s. 83–94.

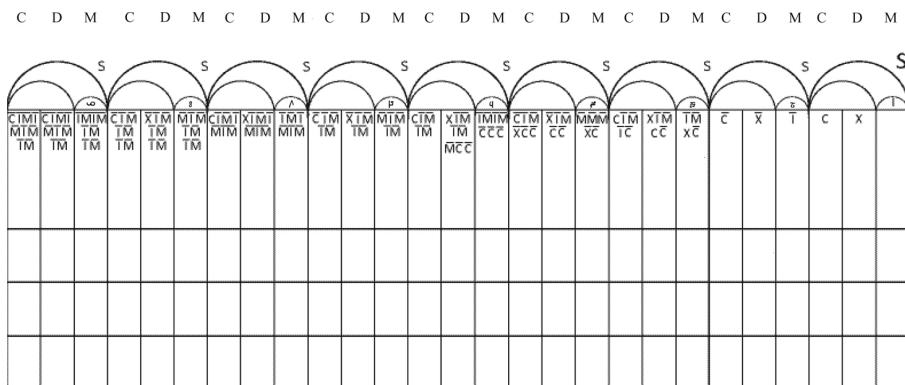
²⁰ Blíže viz [HeA].

²¹ Edici textu viz [LaA].

²² [GeA].

²³ Edici textu nabízí [RaA].

²⁴ Blíže viz [AAb].



Obr. 22 – Tzv. abakus z Echternachu; překresleno podle Luxemburg, Bibliothèque nationale de Luxembourg, MS 770 a Trier, Stadtbibliothek, MS 1093/1694, fol. 197r

3.2 Raně středověký abakus

Za dlouhou dobu svého používání nabyl abakus mnoha – někdy i velmi odlišných – podob. Variantu, jež se rozšířila v raném latinském středověku, lze charakterizovat jako deskový abakus, který byl členěn na sloupce a při provádění početních operací se užívaly žetony či destičky s čísly, které se podle stanovených pravidel kladly do příslušných sloupců. Popis raně středověkého abaku je doložen z konce 10. století v díle Richera z Remeše a také v počtářském traktátu Bernelia z Paříže, který byl patrně sepsán kolem roku 1000.²⁵ Navíc se dochovalo hned několik rukopisných vyobrazení středověkého sloupcového abaku, přičemž nejstarší z nich pocházejí ještě z konce 10. století. Jedná se o tzv. abakus z Echternachu²⁶ (obr. 22) a tzv. Bernský abakus²⁷ (obr. 23). Tato zobrazení nabízejí poměrně jasnou představu o tom, jak vypadal abakus, který byl užíván v latinské Evropě před rokem 1000. Patrně není náhodou, že tyto nárysy abacistické pomůcky relativně velmi dobře korespondují se zmíněnými nejstaršími popisy početní tabule.

Raně středověký abakus měl 27 sloupců (Richer, Echternach), jejichž počet bylo možno navýšit o další tři sloupce pro početní úkony se zlomky (Bernelius, Bern). Každý sloupec reprezentuje jeden desetinný řád při decimálním způsobu zápisu číselných hodnot, takže *mensa pythagorica* umožňovala počítat v číselných hodnotách od 10^0 po 10^{26} . Tyto desetinné řády jsou vždy vypsány v horní části každého sloupce a k jejich označení se užívalo římských číslic: pro jednotky I, pro desítky X, pro stovky C, pro vyšší řády se přidávala nad tyto římské číslice vodorovná čára – tzn. tisíce byly značeny jako Ī (často také

²⁵ Srov. např. [Ber], s. 9 nebo [Fo3], s. 240.

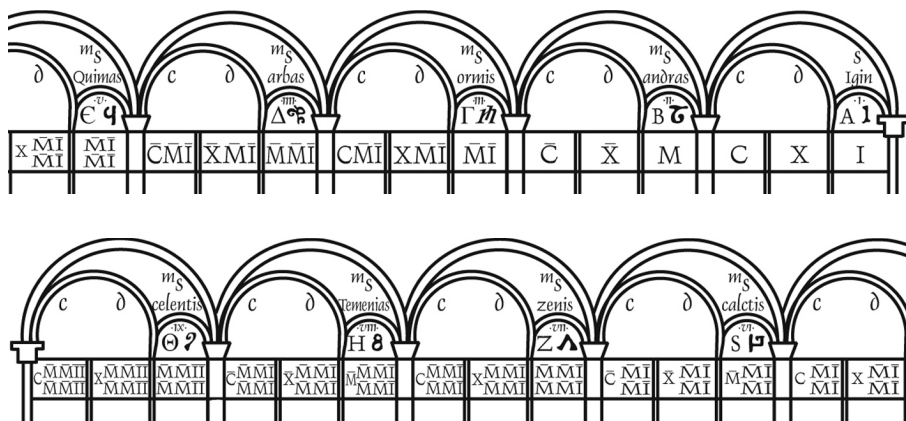
²⁶ Jeho podrobný popis, dataci i fotokopii nabízí [Bt3].

²⁷ Popis i vyobrazení nabízí [Fo1], s. 28, resp. s. 40; nebo [Fo3] s. 252.

M, resp. \bar{M} , z latinského *mille*, tj. tisíc), desetitisíce \bar{X} atd. až po stovky kvadrilionů, tj. $C \bar{I} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{I} \bar{M}$; resp. $C \bar{M} \bar{M} \bar{M} \bar{M} \bar{M} \bar{M} \bar{I}$ nebo $X \bar{C} \bar{C} \bar{C} \bar{C}$.

Sloupce byly zakončeny oblouky (tzv. *arcus Pythagorei*), které umožňovaly snadnější orientaci na početní tabuli, neboť seskupovaly vždy tři desetinné řády (tj. jednotky až stovky, tisíce až statisíce atd.). Pro přehlednost byla tato trojice desetinných míst doplněna také písmeny, která byla nadepsána nad jednotlivými sloupci. Tato písmena vyznačovala pozici v daných třech sloupcích (tj. v řádech tisíců až statisíců, miliónů a stovek miliónů atd.). Písmena S (*singularis*) či M (*monas*) vymezovala jednotky daného sloupce (tedy např. tisíce, biliony atd.), písmeno D (*decenum*)²⁸ desítky (tj. kupř. desítky miliard, desítky trilionů atp.) a písmeno C (*centum*) pak stovky (stovky milionů, stovky triliard etc.).

Samostatným obloukem byly mnohdy ukončeny sloupce pro jednotky daných trojic řádů a v tomto menším oblouku se nezřídka objevovaly symboly pro arabské číslice, s jejichž pomocí se na abaku počítalo. Jelikož tyto číslice byly v latinském křesťanském prostředí novinkou, kterou patrně pomáhal šířit i Gerbert, usnadňovaly některé abacistické tabule orientaci v těchto symbolech čísel – kupř. oxfordský rukopis St. John's College MS 17²⁹ uvádí v malých obloucích nejen západoarabské číslice, ale přidává i jejich jména a vše doplňuje ekvivalentními řeckými a římskými číslicemi (viz obr. 24).



Obr. 24 – Západoarabské číslice, včetně jejich slovních názvů a řeckých i římských ekvivalentů; překresleno podle Oxford, St. John's College, MS 17, 48v–49r

Symbolů pro číselné hodnoty bylo devět. Nula se na abaku nepoužívala – jelikož je nula ničím, jak již bylo zmíněno, potřeboval-li abacistický počtář

²⁸ Srov. Gerbertův *List* 6, kde hovoří o čísle D, tzn. o řádu desítek.

²⁹ Digitalizovaná verze rukopisu je dostupná na [OxA]. Popis a výklad viz [Ev1] či [Ev3].

Si pos	celen tis	teme nias	Ze nis	cal ctis	Qui nas	ar bas	ormis	Andras	Igin
1000	100	10	1	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000

Obr. 25 – Symboly čísel a tzv. sipos na nákrese abaku z pseudo-Boethiovy *Geometrie II*; překresleno podle Erlangen, UB, 379, f. 35r

vyjádřit číselnou hodnotu, kterou bychom dnes zapsali v decimální poziční soustavě se symbolem pro nulu (např. číslo 2007), pak dané sloupce prostě nechal prázdné. Přesto se při práci na abaku používal ještě jeden symbol (tzv. *sipos*), který však sloužil jako pomocná značka nebo ukazatel, aby počtář zvláště při složitějších výpočtech věděl, s kterými čísly a řády právě počítá. Tento pomocný ukazatel byl někdy zobrazen v horní části abaku spolu se symboly indoarabských číslic, jak dokládá nákrese abaku z pseudo-Boethiovy *Geometrie II* nebo abakus z vatikánského rukopisu Lat. 644³⁰ (viz např. obr. 25 a 26) a později ve středověku se jeho užívání i podoba transformovala do role dnešní nuly.

Abacistická deska byla dále horizontálně dělena do několika (zpravidla čtyř) částí (viz obr. 22 a 23), což bylo výhodné především pro provádění nejručnějších pomocných výpočtů při složitějších početních úkonech. Abacistické

AS	DEVNXX	DEXTANS	DODRANS	BISSE	SEPTYNXX	SEAMIS	QUINCYNXX	TRIENS	ODRANS	SEXTANS	SECCYNXX	VNGIA	SEVNGXX	DVELLA	SCILICVS	SEXTVLA	DRAGMA	INDIVITTE	SCRIPVVS	OROLVS	CERATES	CALCVS	SILIQVA
XII	XI	X	VIII	VIII	VII	VI	V	IIII	III	II		XXXIII	XII	VIII	VI	III	III	II	VIII	III	II	PVIII	
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	55	PII	PIII	PIII	PVI	PVIII	PXII	XVI	XXIII	XXIII	XXIII	XXIII
10000000000	1000000000	100000000	10000000	1000000	100000	10000	1000	100	10	1	10000000000	1000000000	100000000	10000000	1000000	100000	10000	1000	100	10	1	10000000000	1000000000
GERBERTVS LATI ONVM ER OS ABACIQVE FIGVRAS																							
LINEA																							

Obr. 26 – Symboly čísel a tzv. sipos na nákrese tzv. Vatikánském abaku; překresleno podle Vatikan, Lat. 644, f. 77v–78r

³⁰ Toto vyobrazení abaku je datováno do 11. století – viz [Fo1], s. 29–30; resp. s. 40 nebo [Fo3], s. 253.

aritmetické operace probíhají v zásadě velmi podobným způsobem, jaký užíváme dnes při písemném počítání. Abacisté však místo papíru a pera používali rozměrnou početní tabuli a žetony se symboly číslic. Složitěji by se nám dnes pracovalo patrně jen při početních operacích se zlomky, ale i v tomto ohledu se abacistická deska snažila ulehčit svému uživateli práci a nezřídka uváděla názvy, symboly i poměry mezi římskými zlomky.

Zdá se být velmi pravděpodobné, že práce na abaku se setkala s velmi pozitivním přijetím mezi soudobými počtáři, ovšem zdaleka ne každý učenec zvládal všechna pravidla, která byla nezbytná pro úspěch při vlastním počítání, jak naznačují Gerbertovy *Listy* 4 a 5. Jedním z problematických bodů provádění aritmetických operací na abaku bylo správné zanášení číselných hodnot do sloupců abacistické tabule. Abacisté k tomuto používali rozlišení čísel na složená (*compositus*) a nesložená, tj. jednoduchá (*simplex*); každé složené číslo pak v sobě zahrnovalo *digitus* a *articulus*.³¹

Přes někdy nesnadné osvojování si pravidel počítání na abaku znamenalo toto počtářství výrazný přelom v dějinách matematiky. Postupně začaly být užívány indo-arabské číslice, čímž v naší kulturní oblasti odstartoval proces přechodu k užívání desítkové poziční soustavy, a výrazně se usnadnilo provádění početních úkonů, zvláště s vysokými hodnotami. Jistě není náhodou, že abacistické postupy při sčítání, odčítání, mocnění či půlení (částečně i při dělení) jsou takřka shodné s tím, co se dodnes učíme na základních školách.

Abacistická matematika zažívala největší slávu právě v 11. a 12. století. Poté získalo větší popularitu tzv. alogritmické počtářství, na jehož rozšíření měla určující vliv recepce latinských překladů a komentářů al-Chwárizmího aritmetického pojednání, které se v latinském světě objevují v první polovině 12. století.³²

³¹ Blíže viz *Komentář k Listu 4*, příp. *Komentář k Listu 5*.

³² Podrobněji viz např. [Fo2], s. 7–10. Názorný přehled o tomto počtářství, byť až z doby pozdního středověku, nabízí edice, studie a český překlad v [Cri].