KAPITOLA IV.

Autonomní systémy (= systémy pro stacionární pohyb). Symetrické systémy.

§ 1. Dynamické systémy. Trajektorie. Stacionární pohyb.

Při fysikálních aplikacích se často vyskytuje tato interpretace systémů diferenciálních rovnic:

Nezávisle proměnnou interpretujeme jako čas - v tomto případě se nejčastěji označuje písmenem t (nebo nějakým příbuzným písmenem, třeba τ); neznámé funkce $x_1, \ldots, x_n$ pak udávají umístění (polohu) nějakého fysikálního útvaru v prostoru: třeba mohou $x_1, x_2, \ldots, x_{3m}$ býti souřadnice m hmotných bodů, nebo mohou být $x_1, x_2, \ldots, x_6$ parametry, udávající umístění tuhého tělesa v prostoru (poloha tuhého tělesa je dána umístěním 3 jeho bodů, přičemž mezi 9 jejich souřadnicemi jsou 3 vztahy, říkající, že vzdálenosti kterýchkoliv dvou z těchto tří bodů jsou dány a nemění se). Číslům $x_1, \ldots, x_n$ se říkává často "souřadnice", nemusí mít ovšem význam pravoúhlých souřadnic. Čísla $\frac{dx_1}{dt}, \ldots$ $\ldots, \frac{dx_n}{dt}$ jsou pak komponentami vektoru, udávajícího, jak rychle se v daném okamžiku mění $x_1, \ldots, x_n$ s časem. Soustava má tedy tvar

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

(často se psává X_j místo f_j).

Při této interpretaci se (1) často nazývá dynamickým systémem.

Je-li zde $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ charakteristický systém, dávají rovnice

$$x_j = \varphi_j(t; t_0, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

úplný průběh pohybu, a to onoho pohybu, který nastane, jestliže v okamžiku t_0 měly souřadnice hodnoty $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$.

Někdy nás nezajímá úplný průběh pohybu, nýbrž pouze to, kterými posicemi průběhem času systém prochází (a nezáleží na tom, kdy kterou polohu projde). T.j. zajímá nás množina všech "bodů"

$$[x_1, \dots, x_n]$$ 1/

kde $x_1, \dots, x_n$ jsou dány vzorci (2) (při konstantních t_0, $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$), přičemž t probíhá jistý interval (často to bývá interval $(-\infty, +\infty)$). Tato množina se pak nazývá trajektorií pohybu. Např. trajektorií Země je zhruba elipsa s ohniskem v slunci (nepřihlížím-li k postupnému pohybu Slunce).

Důležité jsou speciálně takové dynamické systémy, kde funkce f_j nezávisí na t : jinak řečeno: vektor rychlosti závisí jen na poloze (umístění) útvaru v prostoru, nikoliv na čase. Takovému pohybu se říkává stacionární pohyb; je tedy popsán systémem tvaru

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (j = 1, \dots, n). \tag{3}$$

Takovýmto systémům rovnic se také říká autonomní systémy.

Budeme se nyní zabývat systémy tvaru (3) a příslušnými trajektoriemi. Chtěl jsem jen předem poukázat na to, že systémy tvaru (3) a problém trajektorií se vyskytují zcela přirozeně, podíváme-li se na soustavu diferenciálních rovnic trochu fysikálně.

§ 2. Systémy rovnic pro stacionární pohyb.

Pro systémy tvaru

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(x_1, \dots, x_n) \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{4}$$

platí ovšem celá předešlá teorie; vedle toho však platí řada jednoduchých a velmi názorných dalších vět, souvisejících s okolností, že ve funkcích X_j se nevyskytuje t. Těmito větami se nyní budeme zabývat.

Je-li $\mathcal{J}$ jednorozměrný interval, t_0 číslo, definujme $\mathcal{J}_1$ vzorcem

$$(t \in \mathcal{J}) \iff (t + t_0 \in \mathcal{J}_1); \tag{5}$$

můžeme tak psát

1/ Posloupnost n čísel $x_1, \dots, x_n$ nazvu prostě "bodem".

$$(6) \qquad (t \in \mathcal{J}_1) \Longleftrightarrow (t - t_0 \in \mathcal{J}).$$

Říkáme, že $\mathcal{J}_1$ vzniká z $\mathcal{J}$ posunutím o (vektor) t_0 - je to velmi názorné.

Věta 33. Budiž

$$(7) \qquad x_1(t), \ldots, x_n(t)$$

řešení systému (4) v intervalu $\mathcal{J}$ a budiž t_0 číslo. Potom systém funkcí

$$(8) \qquad y_1(t), \ldots, y_n(t),$$

definovaných rovnicemi

$$y_j(t) = x_j(t - t_0) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

je řešením systému (4) v intervalu $\mathcal{J}_1$, jenž vzniká z $\mathcal{J}$ posunutím o t_0. Trajektorie obou řešení jsou totožné.

Důkaz. Je-li $t \in \mathcal{J}_1$, je $t - t_0 \in \mathcal{J}$. Položme $t - t_0 = v$. Potom

$$\frac{dy_j(t)}{dt} = \frac{dx_j(v)}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = X_j(x_1(v), \ldots, x_n(v)) \cdot 1 =$$
$$= X_j(y_1(t), \ldots, y_n(t)).$$

Za druhé je jasno, že bod o souřadnicích (7) probíhá pro $t \in \mathcal{J}$ touž množinu (trajektorii) jako bod o souřadnicích (8) pro $t - t_0 \in \mathcal{J}$, tj. pro $t \in \mathcal{J}_1$. Důkaz je hotov.

Učiňme nyní tento předpoklad:

($\mathcal{P}$). Funkce $X_j(x_1, \ldots, x_n)$ $(j = 1, \ldots, n)$ splňují v jisté otevřené množině $\mathcal{D} \subset E_n$ lokálně Lipschitzovu podmínku vzhledem ke všem proměnným $x_1, \ldots, x_n$.

Poznamenejme napřed, že odtud plyne spojitost funkcí X_j v $\mathcal{D}$. Neboť je-li $[x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}] \in \mathcal{D}$, potom existuje číslo N a okolí tohoto bodu tak, že v tomto okolí je

$$|X_j(x_1, \ldots, x_n) - X_j(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})| \le N \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_k^{(0)}|.$$

Budeme nyní vyšetřovat systém (4) v množině $\vartheta = E_1 \times \mathscr{D} \subset E_{n+1}$ (tj. pro t libovolné, $[x_1,\ldots,x_n] \in \mathscr{D}$). Zřejmě je ϑ otevřená.

Víme, že každé řešení, ležící v ϑ, je částí jisté charakteristiky (pro obor ϑ) a že každým bodem ϑ prochází právě jedna charakteristika, takže dvě charakteristiky, procházející týmž bodem, jsou totožné.

Tedy: trajektorie každého řešení, ležícího v ϑ 2/, je částí trajektorie některé charakteristiky. Trajektorie charakteristik (pro obor ϑ) budeme nazývat charakteristickými trajektoriemi pro obor $\mathscr{D}$ a asi postačí, když se budeme zabývat těmito charakteristickými (tj. "největšími") trajektoriemi (viz konec tohoto §).

Charakteristika, procházející bodem $[t_0, x_1^{(0)},\ldots, x_n^{(0)}]$, je dána soustavou funkcí (proměnné t)

$$(9) \qquad \varphi_j(t\,;\,t_0,\, x_1^{(0)},\ldots,\, x_n^{(0)}) \qquad (j = 1,\ldots,n)\ ,$$

kde $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ je charakteristický systém soustavy (4). Definiční obor charakteristického systému funkcí ($n+2$ proměnných) je podle věty 26 jistá otevřená množina $\vartheta_1 \subset E_{n+2}$, definovaná vztahy:

$$(10) \qquad t_0 \in E_1\ ,\quad [x_1^{(0)},\ldots,\, x_n^{(0)}] \in \mathscr{D}$$

$$(11) \qquad t \in \mathcal{J}_{t_0,\, x_1^{(0)},\ldots,\, x_n^{(0)}}\ ,$$

kde $\mathcal{J}_{t_0,\, x_1^{(0)},\ldots,\, x_n^{(0)}}$ je jistý otevřený interval, obsahující bod t_0 - je to definiční interval oné charakteristiky, jež prochází bodem $[t_0, x_1^{(0)},\ldots, x_n^{(0)}]$. Nyní budeme vyšetřovat, jaké speciální důsledky pro charakteristiky a charakteristické trajektorie plynou z toho, že pravé strany v (4) nezávisí na t.

Představa a smysl následujících vět se velmi oživí, interpretujeme-li je fysikálně. V $\mathscr{D}$ je rovnicemi (4) dáno "pole rychlostí" nezávisle na čase. Představme si, že obor $\mathscr{D}$ je vyplněn "spojitým prostředím" (např. kapalinou), přičemž každá částice se pohybuje podle rovnic (4). Pohyb každé částečky (tj. závislost jejích "souřadnic" $x_1,\ldots,x_n$ na čase) je tedy popsán příslušnou charakteristikou.

2/ Neboli: každá trajektorie, ležící v $\mathscr{D}$.

Věta 34. Předpoklady: Viz $(\mathcal{P})$.

Tvrzení: Je-li

(12) $\psi_j(t) = \varphi_j(t; t_0, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ [3] $(j = 1, \ldots, n)$

charakteristika s definičním intervalem $\mathcal{J}$ a je-li h libovolné číslo, má charakteristika

(13) $\chi_j(t) = \varphi_j(t; t_0 + h, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ $(j = 1, \ldots, n)$

definiční interval $\mathcal{J}_1$, vznikající z $\mathcal{J}$ posunutím o h, a pro všechna $t \in \mathcal{J}$ je

(14) $\varphi_j(t; t_0, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = \varphi_j(t + h, t_0 + h, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$

$(j = 1, \ldots, n)$

Fysikálně: Jestliže některá částice je v okamžiku t_0 v jistém bodě P a jestliže druhá částice je v bodě P v okamžiku $t_0 + h$, potom druhá částice je v každém okamžiku $t + h$ v témž bodě, v němž byla první částice v okamžiku t : druhá probíhá tytéž polohy jako první, ale s konstantním zpožděním h.

Důkaz: Označili jsme $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}_1$ definiční intervaly charakteristik (12), (13). Systém funkcí

$$\rho_j(t) = \psi_j(t - h) = \varphi_j(t - h; t_0, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

je podle věty 33 řešením soustavy (4) v intervalu $\mathcal{J}_2$, který vzniká z $\mathcal{J}$ posunutím o h. Pro $t = t_0 + h$ dostáváme

$$\rho_j(t_0 + h) = \varphi_j(t_0; t_0, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = x_j^{(0)},$$

takže řešení $\rho_j(t)$ je částí charakteristiky, procházející bodem $[t_0 + h, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}]$, tj. charakteristiky (13). Tedy je

(15)
$$\mathcal{J}_2 \subset \mathcal{J}_1$$

3/ $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ značí stále charakteristický systém soustavy (4).

a pro $t \in \mathcal{J}_2$ je $\varphi_j(t) = \chi_j(t)$, tj.

$$\varphi_j(t-h;\, t_0, x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = \varphi_j(t\, ;\, t_0+h,\, x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)});$$

neboli: pro $t \in \mathcal{J}$ ($(t \in \mathcal{J}_2) \Longleftrightarrow (t-h \in \mathcal{J})$) platí (14). Zbývá ještě dokázat, že $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$ ($\mathcal{J}_2$ vzniklo z $\mathcal{J}$ posunutím o h).

Funkce $\chi_j(t)$ dávají pro $t \in \mathcal{J}_1$ řešení soustavy (4); podle věty 33 dávají tedy funkce

$$\sigma_j(t) = \chi_j(t+h) = \varphi_j(t+h;\, t_0+h,\, x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

řešení pro $t+h \in \mathcal{J}_1$ (posunutí o $-h$) a to ono řešení, jež pro $t = t_0$ nabývá hodnot $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$. Tedy je $\sigma_j(t)$ částí charakteristiky $\psi_j(t)$, tedy $(t+h \in \mathcal{J}_1) \Leftrightarrow (t \in \mathcal{J})$ neboli $(t \in \mathcal{J}_1) \Rightarrow (t-h \in \mathcal{J})$) . To však znamená, že $\mathcal{J}_1$ je částí intervalu $\mathcal{J}_2$, jenž vzniká z $\mathcal{J}$ posunutím o h .

Odtud a z (15) plyne vskutku $\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_1$.

<u>Věta 35.</u> Předpoklad: $(\mathcal{P})$.

Tvrzení: 1) Každým bodem $[x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}] \in \mathcal{D}$ prochází nějaká charakteristická trajektorie.

2) Dvě charakteristické trajektorie, mající společný bod, jsou totožné.[4/]

Fysikální interpretace: obor $\mathcal{D}$ je úplně pokryt disjunktními drahami částic. Ovšem každou dráhu probíhá podle věty 34 nekonečně mnoho částic, jež jsou navzájem zpožděny o konstantní zpoždění.

4/ Dvě charakteristiky, mající společný bod, jsou totožné podle věty 26. Ale charakteristika je množina bodů $[t\, ,\, \psi_1(t), \dots, \psi_n(t)] \in E_n$, kdežto příslušná charakteristická trajektorie je množina bodů $[\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)] \in E_n$, tedy je to projekce charakteristiky do E_n (první souřadnice se vynechá). A dvě disjunktní množiny mohou mít nedisjunktní projekce.

Důkaz: 1) Bodem $[x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)}]$ prochází trajektorie charakteristiky, určené bodem $[t_0, x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)}]$ (t_0 jakékoliv).

2) Buďte $\psi_j(t)$ ($j = 1,\dots,n$; definiční interval $\mathcal{J}_1$) a $\chi_j(t)$ ($j = 1,\dots,n$; definiční interval $\mathcal{J}_2$) dvě charakteristiky, jejichž trajektorie mají společný bod $[x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)}]$
Pro jisté $t = t_1$ je tedy

$$\psi_j(t_1) = x_j^{(0)} \qquad (j = 1,\dots,n)$$

a pro jisté $t = t_2$ je

$$\chi_j(t_2) = x_j^{(0)} \qquad (j = 1,\dots,n).$$

Tedy

$$\psi_j(t) = \varphi_j(t\,; t_1, x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)}) \qquad (j = 1,\dots,n)$$

$$\chi_j(t) = \varphi_j(t\,; t_2, x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)}) \qquad (j = 1,\dots,n)$$

Podle věty 34 (píši t_1 místo t_0 , $t_2 - t_1$ místo h) vzniká $\mathcal{J}_2$ z $\mathcal{J}_1$ posunutím o $t_2 - t_1$, tj.

$$(t \in \mathcal{J}_1) \iff (t + t_2 - t_1 \in \mathcal{J}_2)$$

a pro $t \in \mathcal{J}_1$ je

$$\psi_j(t) = \chi_j(t + t_2 - t_1).$$

Tedy vskutku množina bodů

$$[\psi_1(t),\dots,\psi_n(t)] \qquad (t \in \mathcal{J}_1)$$

je totožná s množinou bodů

$$[\chi_1(t),\dots,\chi_n(t)] \qquad (t \in \mathcal{J}_2) .$$

Nyní se budeme zabývat tvarem jednotlivých charakteristických trajektorií a zároveň časovým průběhem pohybu částic na takové trajektorii - [illegible] charakteristikou. Celkem dostaneme tři podstatně odlišné p[illegible]

Věta 36. Předpoklad: $(\mathcal{P})$.

Budiž

$$(16) \qquad \psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$$

charakteristika systému (4), s definičním intervalem $\mathcal{J} = (a, b)$.

T v r z e n í 1 . Charakteristika (16) je konstantní (tím míním: všechny funkce $\psi_1, \dots, \psi_n$ jsou konstantní v $\mathcal{J}$) tehdy a jen tehdy, jestliže aspoň pro jednu hodnotu $t_0 \in \mathcal{J}$ je

$$(17) \quad X_j(\psi_1(t_0), \dots, \psi_n(t_0)) = 0 \qquad \text{pro } j = 1, \dots, n .$$

Potom je $\mathcal{J} = (-\infty, +\infty)$.

F y s i k á l n ě : Jednobodové charakteristické trajektorie jsou právě ony body $[x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]$, v nichž je

$$(18) \qquad X_1(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = \dots = X_n(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = 0 ;$$

jestliže částice v některém okamžiku je v takovém bodě, zůstává v tomto bodě stále (pro $-\infty < t < +\infty$) - je v klidu.

T v r z e n í 2 . Nechť charakteristika (16) není konstantní; potom jsou možny tyto dva případy:

a) Existují čísla $t_1 \neq t_2$ tak, že je

$$(19) \qquad \psi_j(t_1) = \psi_j(t_2) \qquad \text{pro } j = 1, \dots, n .$$

b) Taková čísla neexistují.

V případě 2a) je $\mathcal{J} = (-\infty, +\infty)$ a existuje číslo $p > 0$ tak, že systém rovnic

$$(20) \qquad \psi_j(t') = \psi_j(t'') \qquad (j = 1, \dots, n)$$

je splněn tehdy a jen tehdy, je-li $t' - t'' = kp$, k celé. Tedy speciálně p je nejmenší společná kladná perioda funkcí (16) a charakteristická trajektorie je jednoduchá uzavřená křivka.

V případě 2b) je charakteristická trajektorie zřejmě prostým spojitým obrazem intervalu $\mathcal{J} = (a, b)$. Je-li $b < +\infty$ a je-li $t_p < b$, $\lim_{p \to +\infty} t_p = b$, nemá posloupnost bodů

(21) $$[\psi_1(t_p), \dots, \psi_n(t_p)] \qquad (p = 1,2,3,\dots)$$

žádný hromadný bod v $\mathcal{D}$.

Je-li $b = +\infty$ a existuje-li limita

(22) $$\lim_{t \to +\infty} [\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)] = [x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}] \in \mathcal{D}$$

platí nutně (18).

Podobně pro počáteční bod a intervalu $\mathcal{J}$.

F y s i k á l n í   o b s a h   tvrzení 2 je jasný. V případě 2a) máme periodický pohyb o periodě p , přičemž částice může projít dvakrát touž polohou jen tehdy, je-li doba mezi oběma průchody celistvým násobkem periody p .

D ů k a z : 1. Budiž $[x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]$ bod takový, že platí (18). Potom konstanty $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ tvoří řešení systému (4) v intervalu $(-\infty, +\infty)$. Pro každé t_0 je tedy

$$\varphi_j(t; t_0, x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = x_j^{(0)} \qquad (j = 1,\dots,n)$$

v intervalu $(-\infty < t < +\infty)$. Odtud je vidět: jestliže pro některou hodnotu t_0 je $\psi_j(t_0) = x_j^{(0)}$ pro $j = 1,\dots,n$, splývá charakteristika (16) se systémem konstant $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ pro všechna t . Naopak, je-li charakteristika $\psi_j(t)$ $(j = 1,\dots,n)$ konstantní, musí být

$$0 = \frac{d\psi_j(t)}{dt} = X_j(\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)) \qquad (j = 1,\dots,n).$$

2b) (Složitější případ 2a) si necháme nakonec.) Budiž předně $b < +\infty$, $t_p < b$, $\lim_{p \to +\infty} t_p = b$ a nechť posloupnost bodů (21) má hromadný bod $[c_1, \dots, c_n] \in \mathcal{D}$; potom by posloupnost bodů na charakteristice

$$[t_p, \psi_1(t_p), \ldots, \psi_n(t_p)]$$

měla hromadný bod

$$[b, c_1, \ldots, c_n] \in E_1 \times \mathfrak{D} = \vartheta ,$$

což je ve sporu s větou 26. Budiž za druhé $b = +\infty$ a nechť platí (22). Potom pro $t \in \mathcal{J}$ je $(t < \tau_j < t + 1)$

$$\psi_j(t+1) - \psi_j(t) = \psi_j'(\tau_j) = X_j(\psi_1(\tau_j), \ldots, \psi_n(\tau_j))$$
$$(j = 1, \ldots, n)$$

Pro $t \to +\infty$ je též $\tau_j \to +\infty$ a podle (22) dostáváme (ježto $\psi_j(t) \to x_j^{(0)}$)

$$0 = X_j(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

2a) Zde existují čísla $t_1 < t_2$ tak, že

(24) $\qquad \psi_j(t_1) = \psi_j(t_2) \qquad$ pro $j = 1, \ldots, n$,

přitom však se systém (16) neskládá z n konstant. Pomocí charakteristické funkce je

(25) $\qquad \psi_j(t) = \varphi_j(t; t_1, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \qquad (j = 1, \ldots, n)$,

(26) $\qquad \psi_j(t) = \varphi_j(t; t_2, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \qquad (j = 1, \ldots, n)$,

přičemž funkce vpravo mají týž definiční interval $\mathcal{J} = (a, b)$; současně však podle věty 34 vzniká definiční interval funkcí (26) z definičního intervalu funkcí (25) posunutím o $t_2 - t_1$. Tímto (nenulovým) posunutím se tedy $\mathcal{J}$ nemění, tedy je nutně $\mathcal{J} = (-\infty, +\infty)$. Pro každé t je dále podle věty 34 pro $h = t_2 - t_1$

(27) $\varphi_j(t; t_1, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = \varphi_j(t + t_2 - t_1; t_2, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$;

ježto však funkce (25) jsou tytéž jako (26), plyne z (27), že

(28) $\varphi_j(t + t_2 - t_1; t_2, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = \varphi_j(t; t_2, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$,

tj.

(29) $$\psi_j(t+t_2-t_1) = \psi_j(t)$$

pro každé t a pro $j = 1,\dots,n$.

Říkáme, že systém funkcí (16) má periodu q , jestliže je

(30) $$\psi_j(t+q) = \psi_j(t)$$

pro každé t a pro $j = 1,\dots,n$.[5/]

Právě jsme ukázali: Je-li

(31) $$\psi_j(t_1) = \psi_j(t_2) \qquad \text{pro } j = 1,\dots,n ,$$

je číslo $t_2 - t_1$ periodou systému (16).

Je zřejmé: A) Je-li q periodou, je i $-q$ periodou (v (30) pište $t-q$ místo t).

B) Jsou-li q_1 , q_2 periody, je i $q_1 + q_2$ periodou.

C) A odtud: Je-li q perioda, k celé, je i kq periodou.

Odtud je možno zjistit, jak vypadá množina všech period. Víme už, že náš systém (16) má kladnou periodu $t_2 - t_1$.

α) Buďte $q_1, q_2, q_3, \dots,$ periody $\lim\limits_{k\to+\infty} q_k = q$. Potom i q je periodou.

Důkaz: pro každé t je $\psi_j(t+q_k) = \psi_j(t)$ a ježto ψ_j jsou spojité, je též $\psi_j(t+q) = \psi_j(t)$.

β) Budiž p infimum všech kladných period. Potom $p > 0$. Důkaz: Kdyby bylo $p = 0$, existovala by ke každému přirozenému k perioda p_k tak, že $0 < p_k < \frac{1}{k}$. Ke každému c by potom bylo možno nalézti celá čísla m_k tak, že $|m_k p_k - c| < \frac{1}{k}$ ($k = 1,2,\dots,$). Číslo c by tedy bylo limitou period $m_k p_k$ ($k \to +\infty$) a tedy podle α) by samo bylo periodou, takže např. $\psi_j(c) = \psi_j(0)$; to by platilo pro každé c , tedy by se systém (16) skládal z konstant - proti předpokladu.

γ) Číslo p z β) (infimum všech kladných period) je po-

5/ Triviální periodou je číslo 0.

dle α) samo periodou, a tedy nejmenší kladnou periodou. Tvrdím, že každá jiná perioda q je tvaru $k.p$ (k celé). Kdyby tomu tak nebylo, existovalo by celé k tak, že $kp < q < (k+1)p$, takže $q - kp$ by byla kladná perioda menší než p, což není možné. Tedy: Existuje nejmenší kladná perioda p a každá jiná perioda je tvaru $k.p$ (k celé). Jestliže tedy $t' - t'' = kp$ (k celé), je

$$(32) \qquad \psi_j(t') = \psi_j(t'') \qquad \text{pro } j = 1,\dots,n ;$$

naopak jsme už dokázali (viz(31)): platí-li (32), je $t' - t'' = kp$ (k celé). Tím je důkaz hotov.

Poznamenejme, že zde máme tuto výraznou vlastnost:

Je-li q tvaru kp (k celé), platí systém rovnic

$$(33) \qquad \psi_j(t+q) = \psi(t) \qquad (j = 1,\dots,n)$$

pro každé t ; nemá-li q tvar kp (k celé), neplatí systém rovnic (33) pro žádné t .

Srovnej např. s funkcí $\cos t$, která má nejmenší kladnou periodu 2π a přesto rovnice

$$\cos(t + \pi) = \cos(t)$$

někdy platí, např. pro $t = \frac{\pi}{2}$.

Poznámka. Budiž K trajektorie některého řešení systému (4), jenž splňuje podmínku ($\mathcal{P}$). Tj. K je množina všech bodů

$$[\psi_1(t),\dots,\psi_n(t)] \qquad (\alpha < t < \beta),$$

kde

$$\psi_1(t),\dots,\psi_n(t) \qquad (\alpha < t < \beta)$$

je nějaké řešení systému (4). Ale toto řešení je částí jisté charakteristiky systému (4); tuto charakteristiku lze tedy psát

$$\psi_1(t),\dots,\psi_n(t) \qquad (a < t < b),$$

kde $a \le \alpha < \beta \le b$ (funkce ψ_i se dají "rozšířit" na interval (a, b)). Odtud a z věty 36 je vidět: Není-li trajektorie sama charakteristickou trajektorií, je obloukem některé charakteristické trajektorie. Tím je ospravedlněna poznámka(mezi větou 33 a 34), že asi stačí, omezíme-li se na charakteristické trajektorie.

§ 3. Geometrická interpretace. Symetrické systémy rovnic.

V kap. I. § 1 jsme mluvili o geometrické interpretaci rovnice

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{34}$$

V každém bodě $[x, y]$ jisté množiny $\mathcal{D} \subset E_2$ sestrojíme "směr", daný přímkou o směrnici $f(x, y)$; tím je dáno "pole směrů": v každém bodě $[x, y] \in \mathcal{D}$ je dán směr, který není rovnoběžný s osou y. Řešením rovnice (34) pak nazýváme takovou křivku $y = \varphi(x)$, která v každém svém bodě $[x, y]$ má za tečnu přímku vytčeného směru, tj. přímku o směrnici $f(x, y)$. Máme tedy dáno pole směrů a hledáme takové křivky, které v každém svém bodě mají směr, udaný tím polem ("směr křivky" znamená směr její tečny).

Při této interpretaci je velmi nepřirozený (a vede k obtížím) předpoklad, že dané pole směrů neobsahuje směr, rovnoběžný s osou y. Ukažme to na příkladě.

Příklad 1. V každém bodě $[x, y] = P$, různém od počátku O, buďiž směr pole kolmý k průvodiči OP ; jeho směrnice je tedy $-\frac{x}{y}$, pokud $y \neq 0$; v bodech osy x (různých od počátku) je směr pole kolmý k ose x. Pokud hledané křivky lze vyjádřit ve tvaru $y = \varphi(x)$, musí být v bodech, ležících mimo osu x, splněna rovnice

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \tag{35}$$

tedy $x + y\frac{dy}{dx} = 0$, tedy $x^2 + y^2 = c^2$ ($C > 0$ konstanta - počátek O je vyloučen). Křivka $y = \varphi(x)$ je tedy nutně buďto částí polokružnice

$$y = \sqrt{C^2 - x^2} \qquad (-C < x < C)$$

nebo částí polokružnice

$$y = -\sqrt{C^2 - x^2} \qquad (-C < x < C) .$$

Ale jednak tím ztrácíme body $[\pm C , 0]$ (kde rovnice (35) nemá smyslu), jednak nemůžeme spojit obě polokružnice dohromady (má-li řešení mít tvar $y = \varphi(x)$, tj. každému x je přiřazeno nejvýše jedno y). A přece kružnice $x^2 + y^2 = C^2$ vyhovuje naší geometrické úloze: její tečna je v každém jejím bodě P kolmá k průvodiči OP .

U takových geometrických úloh bývá proto vhodnější, pokusit se o tzv. parametrické vyjádření křivky, tj. křivku pojímám jako množinu všech bodů $[x , y]$, kde $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$ (α , β jsou funkce, t probíhá jistý interval); derivace

$$\frac{dx}{dt} = \alpha'(t) , \qquad \frac{dy}{dt} = \beta'(t)$$

jsou potom úměrny směrovým kosinům tečny - nejsou-li obě rovny nule.

Je tedy výhodnější psát rovnici

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

v symetrickém tvaru

$$x\,dx + y\,dy = 0 ;$$

této rovnici vyhovíme např. je-li

$$\frac{dx}{dt} = -y , \quad \frac{dy}{dt} = x . \tag{36}$$

To je soustava lineárních rovnic s konstantními koeficienty a na to máme obecnou teorii; ale v tomto případě užijeme raději jednoduchého obratu:

Z rovnic (36) plyne

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dy}{dt} = -x$$

a známe všechna řešení rovnice

$$\frac{d^2x}{dt} + x = 0 ,$$

totiž

$$x = A \cos (t - \tau)$$

$(A, \tau$ konstanty), načež

$$y = - \frac{dx}{dt} = A \sin (t - \tau)$$

$(A \neq 0$, ježto bod $x = y = 0$ byl vyloučen) a ihned se přesvědčíme, že tyto funkce vyhovují systému (36). Probíhá-li t uzavřený interval délky aspoň 2π , probíhá bod $[A \cos (t - \tau), A \sin (t - \tau)]$ celou kružnici $x^2 + y^2 = A^2$. Tedy:

Místo rovnice (35) vezmu systém rovnic (36) a za řešení našeho problému prohlásím trajektorii řešení systému (36). Vidíte, že se zde setřel rozdíl mezi "nezávisle proměnnou" x a "závisle proměnnou" y ; proto je vhodnější, psát rovnici (35) v symetrickém tvaru

(37) $$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} ,$$

který ovšem má pouze smysl symbolu:

někde je $x = 0$, někde je $y = 0$ (ovšem vyloučili jsme případ $x = y = 0$).

My se prostě umluvíme, že řešením "symetrické rovnice"

(38) $$\frac{dx}{X(x,y)} = \frac{dy}{Y(x,y)}$$

budeme rozumět trajektorii řešení systému

$$\frac{dx}{dt} = X(x,y) , \frac{dy}{dt} = Y(x,y)$$

(vidíte, že je to systém pro stacionární pohyb). Zároveň jsme viděli, že je vhodno připouštět i body, ve kterých je buďto $X(x,y) = 0$ nebo $Y(x,y) = 0$, ale vyloučit body, kde je $X(x,y) = Y(x,y) = 0$.

Ovšem rovnici

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x}{y}$$

bychom mohli psát ve tvaru

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot U(x,y)}{y \cdot U(x,y)} ,$$

kde $U(x,y) \neq 0$, načež bychom místo rovnice (37) přirozeně psali rovnici

$$\frac{dx}{-y \cdot U(x,y)} = \frac{dy}{x \cdot U(x,y)}$$

Bude tedy asi užitečno dokázat, že rovnice (38) má - v našem smyslu - táž řešení jako rovnice

$$\frac{dx}{X(x,y) \cdot U(x,y)} = \frac{dy}{Y(x,y) \cdot U(x,y)}$$

($U(x,y) \neq 0$), což také pro spojité funkce U dokážeme.

Mluvili jsme o jedné rovnici (34) nebo o symetrické rovnici (38); vyslovíme nyní definici obecně pro systémy, ale už bez dalších výkladů.

Definice. V množině $\mathcal{D} \subset E_n$ budiž dáno n funkcí $X_j(x_1, \dots, x_n)$ takových, že všude v $\mathcal{D}$ je

(39) $$\sum_{j=1}^{n} |X_j(x_1, \dots, x_n)| > 0$$

(tj. aspoň jedno z čísel $X_j(x_1, \dots, x_n)$ je různé od nuly). Potom symbol

(40) $$\frac{dx_1}{X_1(x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \dots, x_n)}$$

nazýváme "symetrickým systémem diferenciálních rovnic" a řešením systému (40), ležícím v $\mathcal{D}$, nazýváme trajektorii kteréhokoliv řešení systému

(41) $$\frac{dx_1}{dt} = X_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{dx_n}{dt} = X_n(x_1, \dots, x_n),$$

které leží v $E_1 \times \mathcal{D}$.

A nyní větu, kterou jsem před chvílí slíbil:

Věta 37. Budiž (40) symetrická soustava, která v množině $\mathcal{D} \subset E_n$ splňuje podmínku (39); budiž $\mathcal{U}(x_1, \ldots, x_n)$ spojitá a stále různá od nuly v $\mathcal{D}$. Potom soustava (40) má táž řešení v $\mathcal{D}$ jako symetrická soustava

$$(42)\qquad \frac{dx_1}{X_1(x_1,\ldots,x_n).\mathcal{U}(x_1,\ldots,x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1,\ldots,x_n).\mathcal{U}(x_1,\ldots,x_n)} .$$

Důkaz. Budiž dáno nějaké řešení systému (40) (stále: ležící v $\mathcal{D}$). To je tedy trajektorie

$$(43)\qquad [\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)] \qquad (t \in \mathcal{J})$$

jistého řešení $\psi_1, \ldots, \psi_n$ soustavy (41) v intervalu $\mathcal{J}$. Zvolme bod $t_0 \in \mathcal{J}$ a zaveďme nový parametr v rovnicí

$$v = \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\mathcal{U}(\psi_1(\tau), \ldots, \psi_n(\tau))} = \rho(t) \qquad (t \in \mathcal{J}) .$$

Jmenovatel v integrandu je funkce spojitá a různá od nuly v $\mathcal{J}$, takže má stále totéž znamení; tedy ρ je ryze monotonní funkce v $\mathcal{J}$, která zobrazuje $\mathcal{J}$ na jistý interval $\mathcal{K}$; budiž σ funkce inversní k ρ, která tedy zobrazuje $\mathcal{K}$ na $\mathcal{J}$; tj.

$$(v = \rho(t),\ t \in \mathcal{J}) \iff (t = \sigma(v),\ v \in \mathcal{K}) .$$

Pro $v \in \mathcal{K}$ je

$$\frac{d\sigma(v)}{dv} = \frac{1}{\frac{d\rho(t)}{dt}} = \mathcal{U}(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)) ,$$

kde ovšem $t = \sigma(v)$. Položme nyní

$$\chi_j(v) = \psi_j(\sigma(v))$$

pro $v \in \mathcal{K}$. Potom pro $v \in \mathcal{K}$ máme (píšeme $\sigma(v) = t$, takže $t \in \mathcal{J}$):

$$\frac{d\chi_j(v)}{dv} = \frac{d\psi_j(t)}{dt} \cdot \frac{d\sigma(v)}{dv} = X_j(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)).\mathcal{U}(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$$

tj.

$$\frac{d\chi_j(v)}{dv} = X_j(\chi_1(v),\dots,\chi_n(v)).\mathcal{U}(\chi_1(v),\dots,\chi_n(v)) \; .$$

To však značí, že trajektorie

$$(44) \qquad [\chi_1(v),\dots,\; \chi_n(v)] \qquad\qquad (v \in \mathcal{X})$$

je řešením symetrické soustavy (42); zřejmě pak (44) je táž množina jako (43). Tedy: Každé řešení systému (40) je také řešením systému (42). Užijeme-li tohoto výsledku na funkci $\frac{1}{\mathcal{U}}$, dostáváme: Každé řešení systému (42) je řešením systému (40).

Předpokládejme nyní, že v symetrickém systému (40) je $X_j(x_1,\dots,x_n) = 1$ pro jisté j , takže máme systém

$$(45) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dx_1}{X_1(x_1,\dots,x_n)} = \dots = \frac{dx_{j-1}}{X_{j-1}(x_1,\dots,x_n)} = \frac{dx_j}{1} = \\ &= \frac{dx_{j+1}}{X_{j+1}(x_1,\dots,x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1,\dots,x_n)} \; . \end{aligned} \right.$$

Je v tomto případě přirozeno vzíti za nezávisle proměnnou x_j a převést (45) na systém (obyčejný, ne už symetrický)

$$(46) \qquad \frac{dx_k}{dx_j} = X_k(x_1,\dots,x_n) \qquad (k = 1,\dots, j-1, j+1,\dots,n)$$

$n - 1$ rovnic. Jest ovšem otázka, zda (45) a (46) jsou rovnocenné, zda mají stejná řešení (musíme si uvědomit, že řešení symetrické soustavy jsme definovali oklikou, přes soustavu pro stacionární pohyb. To vskutku dokážeme, ale musíme si uvědomit jednu drobnost, aby nedošlo k nedorozumění.

Budiž

$$(47) \quad \psi_1(x_j),\dots,\; \psi_{j-1}(x_j),\; \psi_{j+1}(x_j),\dots,\psi_n(x_j) \quad (x_j \in \mathcal{J})$$

řešení systému (46). Opětovně jsme toto řešení (tj. zobrazení intervalu $\mathcal{J}$ od E_{n-1}) interpretovali jako množinu bodů v E_n:

$$(48) \quad [\psi_1(x_1),\dots,\; \psi_{j-1}(x_j), x_j,\; \psi_{j+1}(x_j),\dots,\psi_n(x_j)] \quad (x_j \in \mathcal{J}) \; .$$

Tak to budeme činit i nyní: pozor jenom na to, že nezávisle proměnnou kladu nyní jako j-tou souřadnici (obyčejně jsme ji dávali na první místo. Tedy: Je-li (47) systém funkcí, který vyhovuje systému řešení (46) (jestliže do něho dosadím $x_k = \psi_k(x_j)$ pro $k \neq j$), potom toto řešení interpretuji jako množinu bodů (48). Píši-li nyní t místo x_j a $\psi_j(t) = t$, je jasno, že pro $t \in \mathcal{J}$ jest

$$(49) \qquad \frac{d\psi_k(t)}{dt} = X_k(\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)) \text{ pro } k \neq j,$$

a též

$$\frac{d\psi_j(t)}{dt} = 1,$$

tj. systém funkcí $\psi_1, \dots, \psi_n$ (kde $\psi_j(t) = t$) vyhovuje systému

$$(50) \qquad \frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, \dots, x_n) \text{ pro } k \neq j, \quad \frac{dx_j}{dt} = 1,$$

tj. trajektorie

$$(51) \quad [\psi_1(t), \dots, \psi_{j-1}(t), t, \psi_{j+1}(t), \dots, \psi_n(t)] \qquad (t \in \mathcal{J})$$

je řešením systému (45). Ale množiny (48), (51) jsou totožné - každé řešení systému (46) je řešením systému (45).

Budiž naopak dáno řešení systému (45), tj. je dáno řešení

$$(52) \qquad \chi_1(t), \dots, \chi_n(t) \qquad (t \in \mathcal{J})$$

systému (50) a dané řešení systému (45) je množina všech bodů

$$(53) \qquad [\chi_1(t), \dots, \chi_n(t)] \qquad (t \in \mathcal{J})$$

Ježto $\dfrac{dx_j(t)}{dt} = 1$, je $\chi_j = t + h$ (h konstantní). Položme

$$\psi_k(t) = \chi_k(t-h) \qquad (k = 1, \dots, n),$$

takže $\psi_j(t) = t$. Podle věty 33 je systém funkcí

$$(54) \qquad \psi_1(t), \dots, \psi_{j-1}(t), \psi_j(t), \psi_{j+1}(t), \dots, \psi_n(t)$$

také řešením systému (50), a to v intervalu $\mathcal{J}_1$, vzniklém z $\mathcal{J}$ posunutím o h a trajektorie obou řešení (52) (pro $t \in \mathcal{J}$) a (54) (pro $t \in \mathcal{J}_1$) jsou totožné. Ježto $\psi_j(t) = t$, jsou pro

$x_j \in \mathcal{J}_1$ splněny rovnice (píši rovnice (50) pro $k \neq j$ a písmeno x_j místo t)

$$\frac{d\psi_k(x_j)}{dx_j} = X_k(\psi_1(x_j), \ldots, \psi_{j-1}(x_j), x_j, \psi_{j+1}(x_j), \ldots, \psi_n(x_j))$$

($k = 1, \ldots, n$; $k \neq j$), což značí, že funkce $\psi_1, \ldots, \psi_{j-1}$, $\psi_{j+1}, \ldots, \psi_n$ vyhovují rovnicím (46), tj. (podle naší interpretace) množina bodů

(55) $[\psi_1(x_j), \ldots, \psi_{j-1}(x_j), x_j, \psi_{j+1}(x_j), \ldots, \psi_n(x_j)]$ $(x_j \in \mathcal{J}_1)$

je řešením systému (46). Ale (55) je totéž jako trajektorie systému (54) $(t \in \mathcal{J}_1)$, tj. jako trajektorie systému (52) $(t \in \mathcal{J})$, což bylo dané řešení systému (45). Tedy i naopak: každé řešení systému (45) je řešením systému (46).

Vyslovíme to jako větu, ale ještě trochu obecněji.

<u>Věta 38.</u> Budiž dán symetrický systém

$$(56) \qquad \frac{dx_1}{X_1(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \ldots, x_n)}$$

a nechť pro jistý index j je X_j spojitá v množině $\mathcal{D} \subset E_n$ a

$$X_j(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$$

ve všech bodech množiny $\mathcal{D}$. Potom má symetrický systém (56) táž řešení [6/] ležící v $\mathcal{D}$ jako systém n-1 rovnic

$$(57) \qquad \frac{dx_k}{dx_j} = \frac{X_k(x_1, \ldots, x_n)}{X_j(x_1, \ldots, x_n)} \qquad (k = 1, \ldots, n \ ; \ k \neq j) .$$

D ů k a z : Podle věty 37 má (56) táž řešení jako symetrický systém

$$(58) \qquad \frac{dx_1}{\frac{X_1}{X_j}} = \ldots = \frac{dx_{j-1}}{\frac{X_{j-1}}{X_j}} = \frac{dx_j}{1} = \ldots = \frac{dx_{j+1}}{\frac{X_{j+1}}{X_j}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{X_n}{X_j}} :$$

6/ Viz výklad u vzorce (48).

ale systém (58) má podle toho, co právě bylo vyloženo, táž řešení jako systém (57).

Nechť funkce $X_j(x_1,\ldots,x_n)$ ($j = 1,\ldots,n$), spojité v $\mathcal{D}$, vyhovují podmínce (39) ve všech bodech jisté množiny $\mathcal{D} \subset E_n$. Budiž $\mathcal{D}_j$ množina onech bodů $[x_1,\ldots,x_n] \in \mathcal{D}$, pro než je

$$X_j(x_1,\ldots,x_n) \neq 0 \text{ . Tedy}$$

$$(59) \qquad \mathcal{D} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{D}_k \ .$$

Podle věty 38 víme, že řešení symetrického systému (40), ležící v $\mathcal{D}_j$, splývají s řešeními systému (57), ležícími v $\mathcal{D}_j$. Je nyní otázka, do jaké míry je možno každé řešení symetrického systému (40), ležící v $\mathcal{D}$, složit z takových "kousků", ležících v jednotlivých $\mathcal{D}_j$. Tuto otázku zodpovíme ve větě 39, ale bude účelno napřed zavést jednu definici.

Definice. Budiž dán systém (40), kde funkce $X_1,\ldots,X_n$, spojité v $\mathcal{D}$, splňují v $\mathcal{D} \subset E_n$ podmínku (39). Budiž dána množina $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ s těmito vlastnostmi: Existuje celé číslo j ($1 \leq j \leq n$) a kompaktní interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ tak, že platí: 1) v každém bodě $[x_1,\ldots,x_n] \in \mathcal{K}$ je

$$(60) \qquad X_j(x_1,\ldots,x_n) \neq 0 \ .$$

2) $\mathcal{K}$ je množina všech bodů

$$(61) \qquad [\varphi_j(x_j),\ldots,\varphi_{j-1}(x_j), x_j, \varphi_{j+1}(x_j),\ldots,\varphi_n(x_j)] \quad (\alpha \leq x_j \leq \beta) \ ,$$

kde $\varphi_1,\ldots,\varphi_{j-1}, \varphi_{j+1},\ldots,\varphi_n$ je v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ řešením soustavy $n-1$ rovnic

$$(62) \qquad \frac{dx_k}{dx_j} = \frac{X_k(x_1,\ldots,x_n)}{X_j(x_1,\ldots,x_n)} \quad (k = 1,\ldots,n \ ; \ k \neq j) \ .$$

Potom množinu $\mathcal{K}$ budeme nazývat elementárním řešením (třídy j) symetrické soustavy (40) (pro obor $\mathcal{D}$)[7/]

7/ $\mathcal{K}$ je kompaktní, ježto je spojitým obrazem kompaktního intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Poznámka 1. Budiž $\mathcal{K}$ elementární řešení, které jsme právě popsali v definici. Podle věty 38 je $\mathcal{K}$ vskutku řešením symetrického systému (40), tj. $\mathcal{K}$ je trajektorií jistého řešení $\psi_1, \dots, \psi_n$ systému

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, \dots, x_n) \qquad (k = 1, \dots, n), \tag{63}$$

tj. $\mathcal{K}$ je množina všech bodů

$$[\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)] \qquad (t \in \mathcal{J}), \tag{64}$$

kde $\mathcal{J}$ je jistý interval. Ježto množiny (64), (61) jsou totožné, platí toto: v intervalu $\mathcal{J}$ je

$$\frac{d\psi_j(t)}{dt} = X_j(\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)) \neq 0 ;$$

tedy má derivace funkce ψ_j v $\mathcal{J}$ stále totéž znamení, $\psi_j(t)$ je ryze monotonní. Z totožnosti množin (64), (61) dále plyne, že ryze monotonní a spojitá funkce $\psi_j(t)$ zobrazuje $\mathcal{J}$ na kompaktní interval $\langle \alpha, \beta \rangle$. Proto interval $\mathcal{J}$ je rovněž kompaktní (to budeme za chvíli potřebovat).

Věta 39. Budiž $\mathcal{D} \subset E_n$ otevřená. Nechť funkce $X_j(x_1, \dots, x_n)$ $(j = 1, \dots, n)$ splňují v $\mathcal{D}$ lokálně Lipschitzovu podmínku vzhledem k $x_1, \dots, x_n$ a podmínku (39). Tvrdím: Množina $M \subset \mathcal{D}$ je řešením symetrické soustavy (40) tehdy a jen tehdy, lze-li psát

$$M = \bigcup_{p=1}^{\infty} M_p , \tag{65}$$

přičemž

1) M_p $(p = 1, 2, 3, \dots)$ je elementární řešení soustavy (40).

2) Pro každé přirození p je množina.

$$M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_p \tag{66}$$

souvislá.

Smysl věty je tento: Řešení symetrického systému byla definována oklikou přes systém $\frac{dx_k}{dt} = X_k$. Věta 39 říká, že je možno toto řešení definovat též přímo tím, že se složí z elementárních "kousků", jež jsou řešeními systému tvaru (62), kde se parametr t nevyskytuje.

D ů k a z v ě t y : Označme znakem $\mathcal{D}_j$ množinu těch bodů $[x_1, \ldots, x_n] \in \mathcal{D}$, pro které platí (60). Tedy $\mathcal{D}_j$ ($j = 1, \ldots, n$) jsou otevřené množiny a platí (59).

I. Nechť M má popsaný tvar; máme dokázat, že M je řešením symetrického systému (40), tj. že

(A) M je trajektorií jistého řešení systému (63). Podle poznámky 1 je každé M_k trajektorií jistého řešení

(67) $$\psi_1^{(k)}(t), \ldots, \psi_n^{(k)}(t)$$

systému (63) v jistém kompaktním intervalu $\mathcal{J}_k$, tj. M_k je množina všech bodů

(68) $$[\psi_1^{(k)}(t), \ldots, \psi_n^{(k)}(t)] \qquad (t \in \mathcal{J}_k) .$$

Definujme nyní funkce $\psi_1, \ldots, \psi_n$ v intervalu $\mathcal{J}_1$ rovnicemi $\psi_k(t) = \psi_k^{(1)}(t)$; budeme se snažit,

(B) rozšiřovat postupně definici řešení $\psi_1, \ldots, \psi_n$ systému (63) postupně na další kompaktní intervaly

$$\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_3 \subset \ldots . \qquad (\mathcal{L}_1 = \mathcal{J}_1)$$

tak, aby trajektorií tohoto řešení v intervalu $\mathcal{L}_p$ byla právě množina

$$N_p = M_1 \cup M_2 \cup \ldots . \cup M_p .$$

Tím bude důkaz tvrzení (A) hotov, ježto $\psi_1, \ldots, \psi_n$ je potom v intervalu $\bigcup_{p=1}^{\infty} \mathcal{L}_p$ řešením systému (63), jehož trajektorie je právě množina $\bigcup_{p=1}^{\infty} M_p = M$.

Úkol, vytčený v (B), je rozřešen v $\mathcal{L}_1 = \mathcal{I}_1$; budeme proto postupovat indukcí: Nechť pro jisté p je

$$\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$$

řešením systému (63) v kompaktním intervalu $\mathcal{L}_p$ a jeho trajektorií nechť je množina N_p. Ježto N_p, M_{p+1} jsou neprázdné kompaktní množiny a množina $N_{p+1} = N_p \cup M_{p+1}$ je souvislá, je $N_p . M_{p+1} \neq \emptyset$ (jinak by totiž množiny N_p, M_{p+1} měly kladnou vzdálenost a tedy by byly oddělené). Zvolme bod $[\rho_1, \ldots, \rho_n] \in N_p M_{p+1}$.

Máme především řešení systému (63) $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ definované v $\mathcal{L}_p$, jehož trajektorie N_p prochází bodem $[\rho_1, \ldots, \rho_n]$, tj.

$$\psi_1(t') = \rho_1, \ldots, \psi_n(t') = \rho_n \tag{69}$$

pro jisté $t' \in \mathcal{L}_p$. Za druhé máme řešení systému (63)

$$\psi_1^{(p+1)}(t), \ldots, \psi_n^{(p+1)}(t) \qquad (t \in \mathcal{I}_{p+1}), \tag{70}$$

jehož trajektorie M_{p+1} rovněž prochází bodem $[\rho_1, \ldots, \rho_n]$, tj.

$$\psi_1^{(p+1)}(t'') = \rho_1, \ldots, \psi_n^{(p+1)}(t'') = \rho_n \tag{71}$$

pro jisté $t'' \in \mathcal{I}_{p+1}$. Pišme

$$\chi_j(t) = \psi_j^{(p+1)}(t + t'' - t') \qquad (j = 1, \ldots, n);$$

potom funkce $\chi_1(t), \ldots, \chi_n(t)$ podle věty 33 tvoří řešení systému (63) v intervalu $\mathcal{K}_{p+1}$, vznikajícím z $\mathcal{I}_{p+1}$ posunutím o $t' - t''$ (tedy $t' = t'' + (t' - t'') \in \mathcal{K}_{p+1}$), jehož trajektorie je totožná s trajektorií řešení (70), tj. s množinou M_{p+1}. Ze (71) plyne

$$\chi_1(t') = \rho_1, \ldots, \chi_n(t') = \rho_n, \tag{72}$$

takže (viz též (69)) obě řešení $\psi_1, \dots, \psi_n$ a $\chi_1, \dots, \chi_n$ jsou částí charakteristiky, určené bodem $[t', \rho_1, \dots, \rho_n]$, takže v průniku $\mathcal{L}_p \mathcal{K}_{p+1}$ je

$$\psi_j(t) = \chi_j(t) \qquad (j = 1, \dots, n) .$$

Můžeme tedy rozšířit definici funkcí $\psi_1, \dots, \psi_n$ na kompaktní množinu

$$\mathcal{L}_{p+1} = \mathcal{L}_p \cup \mathcal{K}_{p+1}$$

rovnicemi

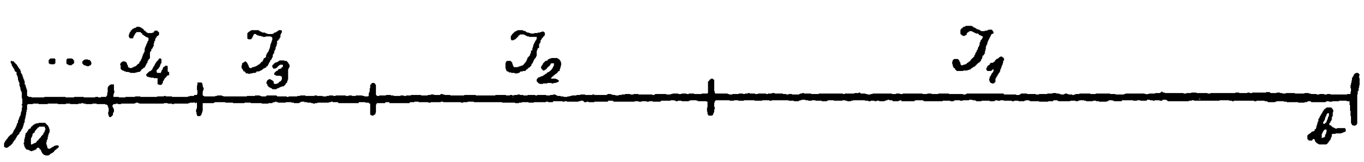
$$\psi_j(t) = \chi_j(t) \text{ pro } t \in \mathcal{K}_{p+1},\ j = 1, \dots, n .$$

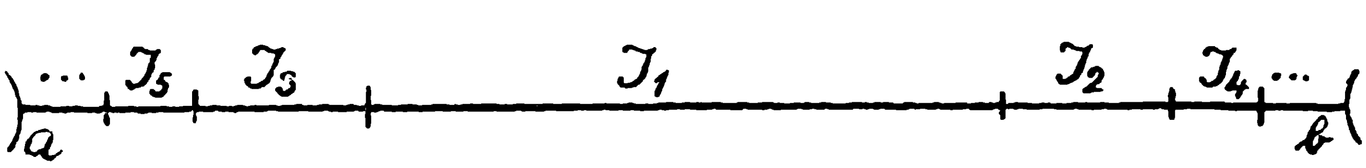
Přitom $\mathcal{L}_{p+1}$ je kompaktní interval, ježto průnik intervalů $\mathcal{L}_p$, $\mathcal{K}_{p+1}$ není prázdný (obsahuje bod t'). Zřejmě nyní funkce $\psi_1, \dots, \psi_n$ dávají řešení systému (63) v intervalu $\mathcal{L}_{p+1}$, jehož trajektorií je množina $N_p \cup M_{p+1} = N_{p+1}$. Tím je indukční krok s p na $p+1$ proveden.

II. Nechť naopak množina $M \subset \mathcal{D}$ je řešením symetrického systému. To znamená: Existuje řešení $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ systému (63), definované v jistém intervalu $\mathcal{J}$, jehož trajektorií je právě množina M; máme dokázat, že M má tvar, popsaný v tvrzení věty.

Především provedu toto: není-li $\mathcal{J}$ kompaktní, vyjádřím jej jako sjednocení posloupnosti kompaktních intervalů $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \dots$ takto:

Pro $\mathcal{J} = \langle a, b)$: 

Pro $\mathcal{J} = (a, b\rangle$: 

Pro $\mathcal{J} = (a, b)$: 

Rozklad je vytvořen tak, že $\bigcup_{p=1}^{q} \mathcal{J}_p$ je souvislá množina pro každé $q > 0$.

Nyní dokáži toto pomocné tvrzení:

Je-li $\mathcal{K}$ kompaktní interval, obsažený v našem intervalu $\mathcal{J}$, potom existuje $\delta > 0$ tak, že pro každý interval $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ délky menší než δ existuje index j ($1 \leq j \leq n$) tak, že

$$(73) \qquad X_j(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)) \neq 0$$

pro všechna $t \in \mathcal{L}$. Tedy mohu rozdělit $\mathcal{K}$ na konečný počet kompaktních intervalů (označme je $\mathcal{L}$) tak, že v každém z těchto částečných intervalů platí (73) pro jisté j.

D ů k a z : Kdyby toto tvrzení nebylo pravda, existovalo by ke každému přirozenému p v intervalu $\mathcal{K}$ n čísel

$$t_1^{(p)}, \ldots, t_n^{(p)},$$

vzdálených navzájem od sebe nejvýše o $\frac{1}{p}$ tak, že by bylo

$$(74) \quad X_j(\psi_1(t_j^{(p)}), \ldots, \psi_n(t_j^{(p)})) = 0 \quad \text{pro } j = 1, \ldots, n .$$

Existovala by dále posloupnost $p_1 < p_2 < \ldots$ tak, že by existovala $\lim_{k \to \infty} t_1^{(p_k)} = \tau \in \mathcal{K}$; potom by ovšem bylo též

$$\lim_{k \to \infty} t_j^{(p_k)} = \tau \qquad \text{pro } j = 2, \ldots, n$$

a z (74) a ze spojitosti funkcí X_j, ψ_k by plynulo

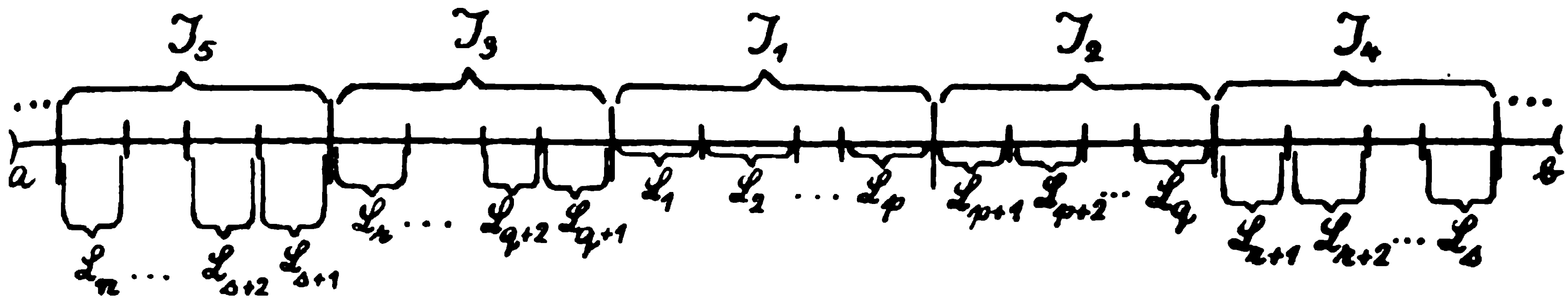
$$X_j(\psi_1(\tau), \ldots, \psi_n(\tau)) = 0 \qquad \text{pro } j = 1, \ldots, n ,$$

což není možno, ježto $[\psi_1(\tau), \ldots, \psi_n(\tau)] \in M \subset \mathcal{D}$ a v $\mathcal{D}$ platí (39). Tím je tvrzení dokázáno.

Vraťme se nyní k našim obrázkům. Každý z intervalů $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, ... rozdělím na konečný počet takových kompaktních intervalů $\mathcal{L}_m$, jaké jsou popsány v našem tvrzení; tj. ke každému m existuje j_m tak, že

$$(75) \qquad X_j(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)) \neq 0$$

pro všechna $t \in \mathcal{L}_m$. Přitom zřejmě mohu dosáhnout toho, že pro každé $m > 0$ je množina $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}_k$ souvislá, např. v případě otevřeného intervalu $\mathcal{J} = (a, b)$:



Tím dostaneme

$$\mathcal{J} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}_k \ ;$$

pouze v případě kompaktního $\mathcal{J}$ rozděluji přímo $\mathcal{J}$ a dostanu jen konečný počet sčítanců:

$$\mathcal{J} = \bigcup_{k=1}^{m} \mathcal{L}_k$$

- ale zde můžeme psát $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_{m+1} = \mathcal{L}_{m+2} = \dots$, takže máme vždy

(76) $\mathcal{J} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}_k$; množiny $\bigcup_{k=1}^{q} \mathcal{L}_k$ jsou souvislé.

Zřejmě je nyní

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \ ,$$

kde M_m je množina všech bodů

(77) $[\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)]$ $(t \in \mathcal{L}_m)$.

Vidíme, že M_k je spojitým obrazem $\mathcal{L}_k$, tedy $\bigcup_{k=1}^{q} M_k$ je souvislá, ježto je spojitým obrazem souvislí množiny $\bigcup_{k=1}^{q} \mathcal{L}_k$ 9/.

Tedy M má vlastnost 2) z tvrzení naší věty a máme ještě dokázat, že je splněna též vlastnost 1), tj. že M_m jsou elementární řešení.

Množina M_m leží podle (75) v $\mathcal{D}_{j_m}$ a je řešením symetrického systému (63), neboť je to množina všech bodů (77). Podle věty 38 (viz též výklad ke vzorci (48)) je M_m též množina všech bodů (píši stručněji j místo j_m)

9/ Číslu t přiřadím bod $[\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)]$.

(78) $[\varphi_1(x_j),\ldots,\varphi_{j-1}(x_j), x_j, \varphi_{j+1}(x_j),\ldots,\varphi_n(x_j)] \quad (x_j \in \mathcal{J})$,

kde $\mathcal{J}$ je jistý interval a funkce $\varphi_1,\ldots,\varphi_{j-1}, \varphi_{j+1},\ldots,\varphi_n$ dávají řešení systému (62). Abych dokázal, že M_m je elementární řešení, stačí dokázat, že $\mathcal{J}$ je kompaktní. Ježto množiny (77), (78) jsou obě totožné s M_m, je vidět: když t probíhá kompaktní interval $\mathcal{L}_m$, probíhá spojitá funkce $\psi_j(t)$ nutně právě interval $\mathcal{J}$, tedy je $\mathcal{J}$ vskutku kompaktní.

<u>Poznámka.</u> Z toho, co bylo dokázáno o symetrickém systému

$$(40) \qquad \frac{dx_1}{X_1(x_1,\ldots,x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1,\ldots,x_n)}$$

plynou nazpět některé důsledky pro systém

$$(41) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\ \frac{dx_n}{dt} = X_n(x_1,\ldots,x_n)\ .$$

Předpokládejme, že jsou splněny předpoklady věty 39. Každou funkci $G(x_1,\ldots,x_n)$ mající v $\mathcal{D}$ spojité parciální derivace 1. řádu která je konstantní podél každého řešení systému (40), nazveme analogicky jako dříve (kap. III. § 5.) prvním integrálem systému (40) v $\mathcal{D}$. Tvrdím, že tato funkce $G(x_1,\ldots,x_n)$ je také prvním integrálem systému (41) v $E_1 \times \mathcal{D}$. Neboť je-li

$$(79) \qquad \psi_1(t),\ldots,\psi_n(t) \qquad (t \in \mathcal{J})$$

nějaké řešení systému (41), je množina bodů

$$[\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t)] \qquad (t \in \mathcal{J})$$

řešením symetrického systému (40), tedy je $G(\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t))$ konstantní v $\mathcal{J}$, tj. $G(x_1,\ldots,x_n)$ je konstantní podél řešení (79). Tedy: každý první integrál symetrického systému (40) je současně prvním integrálem systému (41), nezávislým na t.

Vyšetřujme nyní řešení systému (40), ležící v některém $\mathcal{D}_j$, např. v $\mathcal{D}_1$ (tj. v každém bodě řešení je $X_1(x_1,\ldots,x_n) \neq 0$ a nechť X_1 je spojité v $\mathcal{D}$. To jsou trajektorie všech řešení systému (41), ležících v $E_1 \times \mathcal{D}_1$. Současně ovšem jsou to řešení systému

$$(80) \qquad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{X_2}{X_1},\ \ldots,\ \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{X_n}{X_1}$$

(věta 38). Každé řešení systému (40), ležící v $\mathfrak{D}_1$, je tedy jistým řešením

(81) $\quad x_2 = \varphi_2(x_1), \ldots, x_n = \varphi_n(x_1) \qquad (x_1 \in J)$

systému (80). Která řešení systému (41) mu odpovídají (tj. mají toto řešení za trajektorii)? Víme, že taková řešení existují; pro každé takové řešení musí být

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1(x_1, \ldots, x_n) = X_1(x_1, \varphi_2(x_1), \ldots, \varphi_n(x_1)) ;$$

vpravo je funkce spojitá různá od nuly. Tuto rovnici lze řešit (volím $x_1^{(0)} \in J$):

(82) $$t - \tau = \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \frac{d\xi_1}{X_1(\xi_1, \varphi_2(\xi_1), \ldots, \varphi_n(\xi_1))} \qquad (x_1 \in J),$$

Tím je t definováno jako funkce x_1 (pro $x_1 \in J$) a to ryze monotonní spojitá funkce [10/]; x_1 lze stanovit jako funkci inversní - závislou ovšem na τ. Z tvaru rovnice (82) je jasno, že

$$x_1 = \chi(t - \tau) \qquad (t - \tau \in J_0),$$

kde J_0 je interval z pozn. [10/] pod čarou, odpovídající hodnotě $\tau = 0$. Dosazením do (81) dostáváme i $x_2, \ldots, x_n$ jako funkce t.

Je tedy vidět: dovedeme-li řešit systém (40), redukuje se řešení systému (41) na kvadraturu a na sestrojení inversní funkce - ovšem pokud se omezují na řešení $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, pro něž bod $[x_1(t), \ldots, x_n(t)]$ leží stále v téže množině $\mathfrak{D}_j$. Jak to vypadá obecně, nebudu zde probírat.

<u>Příklad</u>(Stěpanov, 195. úloha, str. 347). Vyřešme do všech podrobností systém

(83) $$\frac{dx}{x(x+y)} = \frac{dy}{-y(x+y)} = \frac{dz}{(y-x)(2x+2y+z)}$$

10/ Když x_1 probíhá interval J, probíhá t v (82) jistý interval J_τ; různým hodnotám τ odpovídají intervaly J_τ, vznikající jeden z druhého posunutím.

a rovněž systém

$$(84) \quad \frac{dx}{dt} = x(x+y), \quad \frac{dy}{dt} = -y(x+y), \quad \frac{dz}{dt} = (y-x)(2x+2y+z).$$

Které jsou jednobodové trajektorie u systému (84)? Musí být $x + y = 0$ a buďto $y - x = 0$ nebo $z = 0$. Tedy buďto: A) $x = y = 0$, $z =$ jakákoliv konstanta, nebo B) $x = -y =$ jakákoliv konstanta, $z = 0$. Tyto body (jsou to dohromady dvě přímky v E_3) vyloučíme a řešíme dále. Z (84) plyne

$$y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt} = 0,$$

$$xy = C_1;$$

$$2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = (y-x)z,$$

ale $x^2 - y^2 = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$, takže $2(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt})\ (x+y) +$

$$+\frac{dz}{dt}(x+y) + (\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt})z = 0,$$

$$(x+y)^2 + (x+y)z = C_2.$$

Každé řešení systému (83) leží tedy na množině, definované rovnicemi (pro některé C_1, C_2)

$$xy = C_1, \quad (x+y)^2 + (x+y)z = C_2. \quad 11/$$

1) $C_1 = 0$, tedy $xy = 0$. Kdyby v některém bodě příslušné charakteristiky bylo $x(t) = 0$ a v jiném $x(t) \neq 0$ a tedy $y(t) = 0$, našli bychom snadno hodnotu t tak, že by bylo $x(t) = y(t) = 0$ 12/, což bylo již vyloučeno (viz A)). Budiž tedy např. stále $x = 0$, tedy $y \neq 0$, tedy

$$z = \frac{C_2}{y} - y, \quad y > 0 \qquad (\text{nebo } y < 0).$$

11/ Jinak řečeno: tyto rovnice platí podél každé charakteristiky $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ systému (84). Tedy jsme zde našli dva první integrály.

12/ To plyne ze spojitosti funkcí $x(t)$, $y(t)$ a z toho, že t probíhá interval, tedy souvislou množinu.

příslušná "největší" řešení (tj. charakteristické trajektorie) systému (83) musí tedy pro $C_1 = 0$ ležet na některé z těchto čar:

I. $x = 0 , \quad z = \dfrac{C_2}{y} - y , \quad y > 0 .$

II. $x = 0 , \quad z = \dfrac{C_2}{y} - y , \quad y < 0 .$

III. $y = 0 , \quad z = \dfrac{C_2}{x} - x , \quad x > 0 .$

IV. $y = 0 , \quad z = \dfrac{C_2}{x} - x , \quad x < 0 .$

Že pak tyto čáry jsou vskutku řešeními systému (83), přesvědčíme se např. u I, II. takto: na těchto čarách je $-y(x+y) = -y^2 \neq 0$; tedy systém (83) je pro tato řešení rovnocenný se systémem

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}$$
$$\frac{dz}{dy} = \frac{(y-x)(2x+2y+z)}{-y(x+y)}$$

načež dosazením z I., II. se ihned přesvědčím, že tyto rovnice jsou splněny. Podobně pro III., IV.

2) $C_1 \neq 0$. Zde je $y = \dfrac{C_1}{x}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. Jestliže pro některý bod trajektorie je $x + y = 0$, tj. $x + \dfrac{C_1}{x} = 0$, je $C_1 < 0$, $x = \pm\sqrt{-C_1}$ a dále je nutně $C_2 = 0$, tedy $(x+y)(x+y+z) = 0$ podél celé trajektorie. Opět nemůže být v některém bodě takové charakteristiky: $x(t) + y(t) = 0$ a v jiném: $x(t) + y(t) \neq 0$ a tedy $x(t) + y(t) + z(t) = 0$ ježto bychom dostali bod, kde je $x(t) + y(t) = 0$, $z(t) = 0$, což je vyloučeno podle B). Jestliže v jednom bodě je $x + y = 0$, musí být stále $x + y = 0$ a podle B) nesmí být nikdy $z = 0$, takže máme tyto čtyři čáry:

V. $$\left\{\begin{array}{ll} x = -y = \sqrt{-C_1} , & z > 0 \\ x = -y = \sqrt{-C_1} , & z < 0 \\ x = -y = -\sqrt{-C_1} , & z > 0 \\ x = -y = -\sqrt{-C_1} , & z < 0 \end{array}\right. \qquad (C_1 < 0)$$

(lze ovšem též jednodušeji psát $\pm\sqrt{-C_1} = D$, $D \neq 0$).
Podél těchto čar je $(x-y)(2x+2y+z) \neq 0$; dosazením do systému

$$\frac{dx}{dz} = \frac{x(x+y)}{(y-x)(2x+2y+z)}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{-y(x+y)}{(y-x)(2x+2y+z)}$$

zjistíme ihned, že obě tyto rovnice jsou splněny (obě strany jsou 0). Zbývají ty charakteristické trajektorie, u kterých je $C_1 \neq 0$ a stále $x+y \neq 0$. Potom

$$y = \frac{C_1}{x}, \quad z = \frac{C_2}{x+\frac{C_1}{x}} - \left(x+\frac{C_1}{x}\right)$$

kde jsou vyloučeny hodnoty $x = 0$, $x + \frac{C_1}{x} = 0$. Tedy máme tyto další možnosti:

VI. $y = \frac{C_1}{x}$, $z = \frac{C_2}{x+\frac{C_1}{x}} - x - \frac{C_1}{x}$, $x > 0$, $C_1 > 0$

VII. týž vzorec, ale $C_1 > 0$, $x < 0$.

VIII.,IX.,X.,XI. týž vzorec, ale $C_1 < 0$ a pro x máme jeden z intervalů

$$-\infty < x < -\sqrt{-C_1}$$

$$-\sqrt{-C_1} < x < 0$$

$$0 < x < \sqrt{-C_1}$$

$$\sqrt{-C_1} < x < +\infty \quad .$$

Ježto podél těchto řešení je $x(x+y) \neq 0$, přesvědčíme se dosazením do rovnic

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(y-x)(2x+2y+z)}{x(x+y)},$$

že tyto rovnice jsou splněny.

Tedy I. - XI., dávají vskutku všechna "největší" řešení symetrické soustavy. Nyní snadno najdeme všechny charakteristiky systému (84). Ježto každé řešení I. - XI. leží v jedné z množin $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ (tj. buďto je stále $(x+y).x \neq 0$ nebo $-y(x+y) \neq 0$ nebo $(y-x)(2x+2y+z) \neq 0$), je řešení velmi jednoduché: nepotřebujeme žádné "slepování": podle každé charakteristiky je buďto y, z funkcí x nebo z, x funkcí y nebo x, y funkcí z. Např. u I., II. máme

$$\frac{dy}{dt} = -y(x+y) = -y^2 \quad (y>0 \text{ resp. } y<0),$$

$$t-\tau = -\int\frac{dy}{y^2} = \frac{1}{y} \quad (\tau \text{ je libovolná konstanta}),$$

$y = \frac{1}{t-\tau}$ (interval $t>\tau$ u I., $t<\tau$ u II.) ; dosazením do $z = \frac{C_2}{y} - y$ bychom dostali i z jako funkci t ; $x = 0$.[13] Podobně pro III., IV.

U V. máme $x = -y = D \neq 0$ ($z>0$ resp. $z<0$),

$$\frac{dz}{dt} = (y-x)(2x+2y+z) = -2Dz,$$

$$t-\tau = -\frac{1}{2D}\int\frac{dz}{z} = -\frac{1}{2D}\lg|z|,$$

$$z = \pm e^{-(t-\tau)2D} \qquad (\text{interval } -\infty<t<+\infty).$$

U VI. - XI. máme

$$\frac{dx}{dt} = x(x+y) = x^2+C_1, \qquad C_1 \neq 0.$$

$$t-\tau = \int\frac{dx}{x^2+C_1}$$

V případě $C_1>0$ položme $C_1 = D^2$ $(D>0)$, takže v případech VI., VII. je

$$t-\tau = \frac{1}{D}\operatorname{arctg}\frac{x}{D} \qquad (x>0 \text{ resp. } x<0),$$

$$x = D\operatorname{tg} D(t-\tau) \quad (\text{interval } \tau<t<\tau+\frac{\pi}{2D} \text{ u VI.}, \quad \tau-\frac{\pi}{2D}<t<\tau \text{ u VII.})$$

13/ Toto (triviální) dosazování nebudeme provádět.

V případě $C_1 < 0$ položme $C_1 = -D^2 \,(D > 0)$,

$$t - \tau = \int \frac{dx}{x^2 - D^2} = \frac{1}{2D} \lg \left| \frac{x-D}{x+D} \right| ,$$

$$\left| \frac{x-D}{x+D} \right| = e^{2D(t-\tau)}$$

V případě VIII., XI. je $|x| > D$, tedy

$$\frac{x-D}{x+D} = e^{2D(t-\tau)} ,$$

$$x = D \frac{1 + e^{2D(t-\tau)}}{1 - e^{2D(t-\tau)}}$$ interval $t > \tau$ pro VIII. $(x < -D)$
$t < \tau$ pro XI. $(x > D)$).

V případě IX. a X. je $|x| < D$, tedy

$$\frac{x-D}{x+D} = -e^{2D(t-\tau)}$$

$$x = D \frac{1 - e^{2D(t-\tau)}}{1 + e^{2D(t-\tau)}}$$ interval $t > \tau$ pro IX. $(-D < x < 0)$
$t < \tau$ pro X. $(0 < x < D)$).

Mimoto máme ještě konstantní řešení (viz A),B))

$x = y = 0$, $z = C$ $\quad (C \neq 0)$

$x = C$, $y = -C$, $z = 0$ $\quad$ (C libovolné)

Tím jsme našli všechny charakteristiky systému (84).

<u>Příklad.</u> (Stěpanov, 194.úloha).

$$\text{(85)} \qquad \frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = \frac{dy}{-y(z^2 + x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}$$

a k tomu dynamický systém

$$\text{(86)} \qquad \frac{dx}{dt} = x(y^2 - z^2), \quad \frac{dy}{dt} = -y(z^2 + x^2), \quad \frac{dz}{dt} = z(x^2 + y^2) .$$

Konstantní charakteristiky: to jsou body na osách $x = y = 0$, $x = z = 0$, $y = z = 0$.

Teď ostatní. Podél každé charakteristiky je

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} = 0 ,$$

tedy $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$ $\qquad (C > 0)$,

a rovněž

$$- \frac{\frac{dx}{dt}}{x} + \frac{\frac{dy}{dt}}{y} + \frac{\frac{dz}{dt}}{z} = 0 ,$$

tedy

$$\frac{yz}{x} = D .$$

Ale to nesmí být žádné souřadnice $= 0$. Tedy pišme to raději takto:

$$- \frac{yz}{x^2} \frac{dx}{dt} + \frac{z}{x} \frac{dy}{dt} + \frac{y}{x} \frac{dz}{dt} = 0 ,$$

tedy $\frac{d}{dt} \left(\frac{yz}{x}\right) = 0$

a hořejší rovnice $\frac{yz}{x} = D$ vskutku platí na každé trajektorii, na které nikdy není $x = 0$.

Proto vyšetříme napřed, zda existují trajektorie, ležící celé v rovině $x = 0$. Jde o systém

$$x = 0 , \frac{dy}{dt} = -yz^2, \quad \frac{dz}{dt} = zy^2.$$

Tedy

$$y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} = 0 ,$$

$$y^2 + z^2 = C^2 \qquad (C > 0) .$$

To odpovídá kružnicím; ale je $x = 0$, tedy nesmí být $y = 0$ ani $z = 0$; největší možné trajektorie jsou nejvýše čtvrtkružnicemi (bez krajních bodů, tj. $x = 0$, $z = \pm\sqrt{C^2 - y^2}$ ($0 < y < C$ nebo $0 > y > -C$). Pro $x = 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ je však systém (85) ekvivalentní se systémem:

$$\frac{dx}{dy} = 0 , \qquad \frac{dz}{dy} = - \frac{y}{z} ,$$

který je pro naše čtvrtkružnice vskutku splněn (neboť na nich je $y^2 + z^2 = C$, $y + z \frac{dz}{dy} = 0$). Tedy tyto čtvrtkružnice jsou charakteristickými trajektoriemi systému (86) a spolu s konstantními trajektoriemi již vyplňují celou rovinu $x = 0$. Všechny ostatní charakteristické trajektorie leží tedy v množině $x \neq 0$ a podél nich platí

$x^2 + y^2 + z^2 = C^2$, $yz = Dx$ (a buďto stále $x > 0$ nebo stále $x < 0$).

1. Budiž $D = 0$, takže podél příslušné charakteristiky je stále $y(t)\, z(t) = 0$. Kdyby pro některé t_1 bylo $y(t_1) = 0$ a pro jiné t_2 bylo $y(t_2) \neq 0$, došli bychom jako v předešlém příkladu k bodu, kde $y(t) = z(t) = 0$, což není možno . Tedy je buďto podél celé trajektorie $y = 0$ (a tedy $x \neq 0$, $z \neq 0$) nebo $z = 0$. V prvním případě leží trajektorie celá v množině

$$x^2 + z^2 = C^2, \quad y = 0 , \quad x \neq 0 , \quad z \neq 0 .$$

To jsou opět čtyři čtvrtkružnice a ty opět splňují vskutku systém (85), který je zde možno psáti

$$\frac{dy}{dx} = 0 , \quad \frac{dz}{dx} = - \frac{x}{z} .$$

Podobně pro $z = 0$, $y \neq 0$.

2. $D \neq 0$. Teď už máme vyplněny trajektoriemi všechny souřadnicové roviny; Pro ostatní charakteristické trajektorie systému (86) je tedy $xyz \neq 0$. Na každé z těchto trajektorií mají tedy x , y , z stálé znamení.

Pišme

$$(87) \qquad x = \frac{zy}{D}, \quad \frac{z^2y^2}{D^2} + y^2 + z^2 = C^2 \qquad (C > 0) ,$$

tedy

$$z^2 = \frac{C^2 - y^2}{1 + \frac{y^2}{D^2}} , \quad x^2 = \frac{y^2}{D^2} \; \frac{C^2 - y^2}{1 + \frac{y^2}{D^2}} .$$

Systém (85) se nezmění, změním-li u x nebo y nebo z znamení; tedy se stačí omezit na oktant $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$; potom $D > 0$ a tedy

$$(88) \qquad z = D \sqrt{\frac{C^2 - y^2}{D^2 + y^2}} , \quad x = y \sqrt{\frac{C^2 - y^2}{D^2 + y^2}} \quad (0 < y < C)$$

Systém (85) mohu nyní psáti

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(y^2 - z^2)}{y(z^2 + x^2)}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{z(x^2 + y^2)}{y(z^2 + x^2)}$$

a mohu se přesvědčit, že funkce (88) mu vskutku vyhovuje. Ale dosazování je zde zdlouhavé, proto si můžeme pomoci též obecnou úvahou: Je-li dáno x, y, z v prvním oktantu, jsou tím podle (87) jednoznačně určena C, D. Ježto charakteristické trajektorie vyplňují celý oktant, existuje (při libovolně zvolených $C > 0$, $D > 0$) aspoň jedna charakteristická trajektorie, tvořící část křivky (88). Tato charakteristická trajektorie je trajektorií jisté charakteristiky.

(89) $x = \varphi(t), \; y = \psi(t), \; z = \chi(t) \qquad (a < t < b)$

systému (86); z druhé rovnice (86) je vidět, že $\frac{dy}{dt} < 0$; tj. roste-li t od a do b, probíhá y klesajíc jistý interval (β, α) $(0 \leq \beta < \alpha \leq C)$; z (88) je vidět, že bod $[x, y, z]$ má pro $y \to \beta+$ i pro $y \to \alpha-$ jistou limitu; a tato limita (viz větu 36,[14/] tvrzení 2b) musí být bodem, v němž všechny tři pravé strany rovnic (86) jsou rovny nule, tj. buďto $x = y = 0$ nebo $y = z = 0$ nebo $z = x = 0$. Ale to podle (88) je možno jen pro $\beta = 0$, $\alpha = C$. Tedy trajektorií charakteristiky (89) je vskutku celá křivka (88). Křivky (88) pro všechna $C > 0$, $D > 0$ dávají tedy vskutku všechny charakteristické trajektorie systému (86) v oktantu $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Oba příklady byly poměrně jednoduché: podlé každé charakteristické trajektorie byly dvě ze "souřadnic" x, y, z funkcemi třetí souřadnice, a to v celém rozsahu charakteristiky; tedy nebylo třeba žádného slepování charakteristik z elementárních řešení ve smyslu věty 39.

14/ Zde je možno klásti $\mathfrak{D} = E_3$.