ZAHRADNÍKOVY KRATŠÍ STUDIE O SPECIÁLNÍCH KŘIVKÁCH A JEJICH BODECH

V této kapitole naznačíme obsah kratších Zahradníkových studií, v nichž vyšetřoval speciální rovinné algebraické křivky vyšších stupňů, zejména jejich projektivní a metrické vlastnosti a konstrukce. Jedná se o 26 příspěvků, které publikoval od počátku sedmdesátých let do konce devadesátých let 19. století česky, německy a chorvatsky.

Svoji pozornost zaměřil zejména na Descartův list, kardioidu, kisoidu, lemniskátu a strofoidu.[1] Nejčastěji se věnoval konstrukcím křivek, jejich tečen, normál, oskulačních kružnic a jejich středů křivosti, hledání nejrůznějších involucí a transformací. Tyto jeho práce obvykle nepřinášely nové podnětné myšlenky a původní výsledky, ale postupně rozšiřovaly počet detailně prostudovaných křivek. Karel Zahradník, ovlivněný Emilem Weyrem, naším nejvýznamnějším představitelem projektivní geometrie druhé poloviny 19. století, nejprve užíval při studiu čistě syntetické přístupy, které vyžadovaly značnou matematickou invenci a intuici a na dnešní dobu velmi rozsáhlé znalosti geometrie. Postupně je však začal v souladu s trendy německých, italských a francouzských prací nahrazovat názornějšími přístupy analytickými a algebraickými.[2]

Zahradníkovy práce zapadaly do trendu české geometrie sedmdesátých až devadesátých let 19. století, kdy se řada našich geometrů soustředila právě na studium algebraických křivek a ploch a na výzkum jejich speciálních vlastností syntetickými, algebraickými a analytickými metodami.[3] Kdyby bylo možné dát na váhy důmyslnost syntetických a analytických metod v jejich pracích, první by vysoce převážily. Právě obtížnost ovládnutí syntetických metod je hlavní příčinou malého zájmu o výsledky našich geometrů, navíc se na konci 19. století syntetické přístupy vyčerpaly a geometrie se vydala jiným směrem.

Cissoida

První křivka, která upoutala Zahradníkovu pozornost již na počátku jeho odborné kariéry a k jejímuž studiu se opakovaně vracel, byla cissoida (tj. obecná cissoidála), resp. Dioklova cissoida.[4]

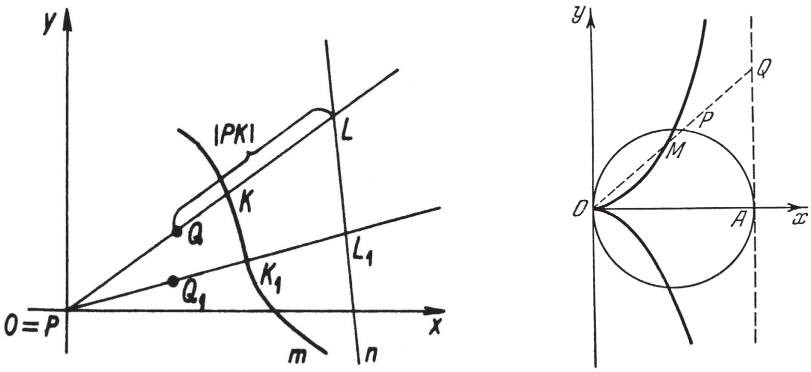
---

[1] Stručné hodnocení některých Zahradníkových prací lze nalézt v [Be3], [Be5], [Le] a [Vo1].

[2] O vlastnostech křivek a historii jejich studia viz [BL], [Lo], [SS], [Re] a [Te].

[3] Touto problematikou se ve druhé polovině 19. století a v první třetině 20. století zabývali Č. Jarolímek, F. Machovec, A. Pánek, M. Pelíšek, K. Pelz, B. Procházka, J. Sobotka, A. Strnad, A. Sucharda, J. S. Vaněček, M. N. Vaněček, Em. Weyr, Ed. Weyr aj. Viz [Be1] a [BBS].

[4] V souladu se Zahradníkovou terminologií budeme používat jeho označení *cissoida* místo dnešního termínu *kisoida*. Cissoidou dvojice křivek m a n pro pól P rozumíme množinu bodů X, pro něž platí $|PX| = |PL| - |PK|$, kde K, resp. L je průsečík libovolné polopřímky svazku bodu P s křivkou m, resp. n. Poznamenejme, že je-li jednou z křivek kružnice o rovnici $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, druhou přímka $x = a$ a pólem bod $P = [0, 0]$, potom



Obrázek 1. Obecná cissoida a Dioklova cissoida

Roku 1873 proslovil Karel Zahradník na zasedání matematicko-přírodovědné třídy Královské české společnosti nauk přednášku, která vyšla v témže roce tiskem v časopisu *Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften* pod názvem *Křivky cissoidalné* [Z4]; v následujícím roce byla v časopisu *Archiv der Mathematik und Physik* otištěna její německá verze pod názvem *Cissoidalcurven* [Z10]. Zahradníkovou inspirací ke studiu cissoidy byly dva články, v nichž Emil Weyr popsal a syntetickými metodami dokázal základní vlastnosti křivek třetího stupně s jedním dvojnásobným bodem.[5]

Místo obvyklé kružnice a její tečny, z nichž se odvozuje klasická Dioklova cissoida, Karel Zahradník uvažoval libovolnou kuželosečku a její sečnu a užitím analytické geometrie dokázal, že množina bodů, jejichž vzdálenosti d od pólu O (libovolný bod kuželosečky) se rovnají délkám úseček, jejichž krajní body získáme jako průsečíky polopřímek svazku bodu P s kuželosečkou a její sečnou, tvoří křivku třetího stupně čtvrté třídy. Protože její vznik je analogický vzniku Dioklovy cissoidy, nazval ji *cissoidálou* (resp. *Cissoidalcurve*). V německy psaném článku [Z10] ještě popsal asymptoty cissoidály pro případ, že kuželosečkou je hyperbola, parabola, resp. elipsa.[6]

množinu bodů, jejichž vzdálenosti d od bodu P se rovnají délkám úseček, jejichž krajní body jsou průsečíky polopřímek svazku bodu P s výše uvedenou kružnicí a přímkou, nazýváme *Dioklovou cissoidou*. Analytické vyjádření této křivky v kartézské soustavě souřadnic je dáno rovnicí $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$, kde $x \in \langle 0, a)$, resp. parametrickým vyjádřením $x = \frac{at^2}{1+t^2}$, $y = \frac{at^3}{1+t^2}$, kde $t \in \mathbb{R}$. Viz obrázek 1. Poznamenejme, že názorné obrázky křivek byly vytvořeny pomocí programu GeoGebra. Obrázky Zahradníkových konstrukcí byly převzaty z jeho prací.

[5] Viz Em. Weyr: *Zur Geometrie der Curven dritter Ordnung*, Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften 1870, 1. Abth., str. 43–48, *Geometrische Mittheilungen I., II.*, Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien 61(1870), 2. Abth., str. 651, 731–738, 768, 819–827. Připomeňme, že křivku třetího stupně s dvojnásobným bodem můžeme popsat rovnicí $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 = 0$, z čehož vyplývá, že ji můžeme zadat šesti body a bodem dvojnásobným.

[6] *... hat die Cissoidalcurve im ersten Falle drei reelle Asymptoten, im zweiten Falle zwei der reellen Asymptoten fallen zusammen, im dritten Falle besitzt sie eine reelle und zwei imaginäre Asymptoten.* Viz [Z10], str. 10.

Zahradníkův přístup ke konstrukci cissoidály zmínil v roce 1908 slavný portugalský matematik Francisco Gomes Teixeira (1851–1933) v prvním díle dvoudílné francouzsky psané monografie [Te], v němž pojednal o rovinných algebraických křivkách a jejich vlastnostech. V úvodu svoji studii charakterizoval takto:

Comme dans l'édition précédente, nous étudions la forme, la construction, la rectification et la quadrature, les propriétés et l'historie de chaque courbe; nous considérons les relations de chaque courbe avec les autres; nous indiquons les problèmes où les courbes étudiées apparaissent; etc. Les auteurs de chaque question considérée sont mentionnés, quand cela nous a été possible.

F. G. Teixeira pečlivě analyzoval práce více než dvou stovek matematiků, kteří významnějším způsobem přispěli ke studiu rovinných algebraických křivek; nalezneme mezi nimi i čtyři z českých zemí (K. Durège (1 práce), V. Jeřábek (1), Em. Weyr (2) a K. Zahradník (1)). Zahradníkově práci [Z10] pojednávající o konstrukci cissoidály věnoval dokonce samostatný paragraf (viz [Te], str. 18 až 20), v němž podrobně popsal jeho definici a konstrukci této křivky. Výklad zakončil slovy:

... la condition nécessaire et suffisante pour qu'une cubique ayant un point double à distance finie soit la cissoïdale d'une conique et d'une droite c'est qu'elle possède, à distance finie, une seule asymptote ou trois asymptotes distinctes ... ([Te], str. 20),

která jasně a stručně shrnují nejdůležitější výsledek Zahradníkovy práce [Z10].

Je zajímavé, že Zahradníkovu konstrukci cissoidály, jeho volbu soustavy souřadnic umožňující rychlou klasifikaci „cissoidály" podle typu řídící kuželosečky a snadný popis asymptot ocenili v roce 1961 ruští autoři A. S. Smogorževskij a E. S. Stolova, kteří v [SS][7] napsali:

Построение циссоиды ... можно обобщить следующим образом. Если на прямых l пучка $[O]$ отложить отрезки OM, *равные $OA \pm OB$ (с учетом направления отрезков), где A и B – точки пересечения прямой l с двумя данными кривыми m и n соответственно, то точки M образуют кривую Z, циссоидальную или циссоидаль для кривых m и n относительно точки O. Касательные к Z в точке O проходят через точки пересечения*

[7] [SS] je ruská monografie pojednávající o teorii křivek třetího řádu a popisující jejich vlastnosti. Poskytuje přehled nejdůležitějších výsledků z teorie rovinných křivek a přináší odkazy na původní práce, které zařazuje do historického kontextu. Nejedná se však o klasickou historickou studii, ale o přehledovou matematickou práci. Je v ní citováno 658 prací více než dvou stovek matematiků, mezi nimiž nalezneme 17 matematiků působících v našich zemích (K. Bobek (1 práce), O. Biermann (1), B. Bydžovský (8), E. Czuber (4), K. Durège (6), W. Fiedler (2), V. Jeřábek (3), S. Kantor (2), K. Küpper (2), K. Metelka (1), K. Petr (1), K. Pelz (1), F. Vyčichlo (1), J. Vyšín (1), Ed. Weyr (2), Em. Weyr (13) a K. Zahradník (13)), dále odkazuje na 343 prací, mezi nimiž je uvedeno 9 příspěvků našich autorů (K. Durège (1), V. Jeřábek (2), B. Hostinský (1), F. Sedlák a L. Kosmák (1), J. Sobotka (1), Em. Weyr (1) a K. Zahradník (2)). Zahradníkovy výsledky jsou citovány v paragrafech o transformacích křivek třetího řádu, o speciálních křivkách (cissoida, cissoidála, strofoida, Descartův list, fokála). Vesměs jsou připomínány jeho drobnější příspěvky vztahující se k důvtipné parametrizaci křivek nebo k vyšetřování speciálních trojic bodů.

линий m и n. Кривую Z называют иногда циссоидой Заградника. ([SS], str. 191)

Poznamenejme, že v [SS] je oceňován i Zahradníkův přístup k zavedení a studiu Dioklovy cissoidy otištěný v článku *Einheitliche Erzeugung der bekannten rationalen Kurven dritter Ordnung als Zissoidalen* [Z93].[8]

Základní definice obecné cissoidály, její parametrické vyjádření, charakteristiky jejích vlastností a možnosti její konstrukce jsou připomenuty i v přehledné monografii [BL][9] (viz str. 200–201), kde je jako doplňující studijní literatura uvedena práce Schulze von Strassnitzkého *Ueber die Cissoïde der Kurven* (1830), Peanova studie *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (1885) a Zahradníkova studie [Z10].

Vlastní Zahradníkovu konstrukci popisují autoři v samostatném paragrafu nazvaném *Cissoïde de Zahradnik* ([BL], str. 209–210), který začínají slovy:

Zahradnik a démontré que les cubiques unicursales, c'est-à-dire celles qui ont un point double, un point isolé ou un point rebroussement, peuvent être déduites des coniques, comme la cissoïde de Dioclès est déduite du cercle … ([BL], str. 209)

Podrobnou analýzu drobných nedostatků a pochybení Zahradníkova příspěvku [Z10][10] zakončují slovy:

Ceci nous conduit à dire, contrairement à un résultat de G. de Longchamps … que les cubiques unicursales qui admettent une asymptote au moins à distance finie, ne peuvent pas toujours être construites comme cissoïdes de Zahradnik; il faut de plus que leur point double soit à distance finie. De cette analyse, nous pouvons conclure que toute cubique circulaire unicursale peut être considérée comme cissoïde de Zahradnik par rapport à un cerle, un point de ce cercle et une droite. ([BL], str. 210)

Připomeňme na závěr hodnocení práce [Z4], resp. [Z10], že se roku 1899 Karel Zahradník k tématu konstrukce cissoidály vrátil ve francouzsky psaném příspěvku nazvaném *Contribution à la théorie des cubiques cuspidales* [Z84], který byl otištěn v časopise *Nouvelles annales de mathématiques.*[11] Francouzský text Zahradníkovy konstrukce a jeho parametrický popis cissoidály oce-

[8] Podrobné hodnocení [Z93] je uvedeno v předchozí kapitole. Více viz [SS], str. 192.

[9] Monografie [BL] z roku 1970 poskytuje solidní přehled teorie speciálních křivek a ploch. Její autoři připomínají jen práce obsahující původní výsledky, které zařazují do časového sledu; soustřeďují se zejména na studie z 19. století a počátku 20. století, které byly uveřejněny ve více než šedesáti světových časopisech. Citují přibližně čtyři stovky autorů (například A. Cayely, L. Cremona, M. Chasles, G. Longchamps, J. Plücker), mezi nimiž nalezneme sedm matematiků působících v českých zemích (K. Durège (2 práce), V. Jeřábek (1), S. Kantor (1), A. Salaba (1), Ed. Weyr (1), Em. Weyr (4) a K. Zahradník (4)).

[10] Jedná se o speciální případy, kdy Zahradníkovu konstrukci nelze elementárním způsobem použít. Autoři uvedli: *… il s'ensuit que la génération des cubiques unicursales due à Zahradnik ne peut conduire qu'à des cubiques unicursales ayant au moins une asymptote à distance finie … Ainsi les cubiques unicursales qui ont la droite de l'infini pour tangente d'inflexion ne peuvent pas être obtenues par la génération de Zahradnik.* (viz [BL], str. 209)

[11] Práce [Z84] je analyzována v předchozí kapitole.

nil v roce 1902 Gino Loria v monografii [Lo] (viz jeho druhá poznámka na straně 28).

Dne 4. července 1873 měl Karel Zahradník na zasedání matematicko-přírodovědecké sekce Královské české společnosti nauk přednášku *Theorie der Cissoide auf Grundlage eines rationalen Parameters*, která vyšla v časopisu *Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften* jako práce [Z5]. Inspirován rozsáhlejšími pracemi Emila Weyra o racionálních křivkách, jejich parametrizaci a vyšetřování vlastností[12] nejprve užitím racionální substituce $y = \frac{1}{u}x$ nahradil klasickou rovnici cissoidy $y = x\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, kde $x \in \langle 0, a)$, parametrickým vyjádřením $x = \frac{a}{1+u^2}$, $y = \frac{a}{u(1+u^2)}$, kde $u \in \mathbb{R}$. Pak typickými synteticko-analytickými metodami studoval její vlastnosti (vzájemná poloha přímky a cissoidy, odvození rovnice tečny z vnějšího bodu cissoidy, involuční vztahy dotykových bodů, vzájemná poloha cissoidy a kružnice, poloměr a střed oskulační kružnice, rovnice normály apod.).

Zahradníkův článek [Z5] byl jeho první rozsáhlejší studií, které se dostalo větší pozornosti, neboť její velmi podrobnou recenzi uveřejnil v referativním časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik A. Maynz, středoškolský profesor z Ludwigslustu, který více méně pravidelně recenzoval německy psané práce zařazované do oddílů *Analytische Geometrie der Ebene* a *Andere specielle Curven*. Ocitujme jeho slova v plném znění:

Der Verfasser ersetzt zunächst die Gleichung der Cissoide

$$y^2 = \frac{x^3}{a-x}$$

durch folgende beiden Gleichungen:

$$x = \frac{a}{1+u^2}, \qquad y = \frac{a}{u(1+u^2)}$$

unter den Veränderlichen x, y, u; wo u die Cotangente des Winkels ist, den der Radius vector aus dem Coordinatenanfang nach dem Punkte (xy) mit der Axe OX bildet. Eine beliebige Gerade

$$mx + ny = 1$$

trifft die Cissoide in 3 Punkten deren zugehöhrige u Wurzeln der Gleichung

$$u^3 + (am + 1)u + an = 0$$

[12] Em. Weyr: *Geometrische Mittheilungen I., II.*, Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien 61(1870), 2. Abth., str. 651, 731–738, 768, 819–827, *Über rationale Curven*, Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften 1872, 2. Abth., str. 9–43, 77, 81, *Über Durchschnittspunkte von Focalen mit Kreisen und mit Lemniscaten*, Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften 1873, str. 166–171.

sind. Aus dieser Gleichung folgt dass, wenn u_1, u_2, u_3, 3 Punkten der Cissoide, die in gerader Linie liegen, angehörigen, die Gleichung besteht: $u_1+u_2+u_3=0$. Setzt man $u_2=u_3=u$, so wird diese Gerade Tangente in u, und schneidet in u', wofern $2u+u'=0$. Sehr leicht ergiebt sich dann: Schneidet man die Cissoide mit zwei Geraden P und P', und verbindet je einen Schnittpunkt der einen Geraden mit je einem Schnittpunkte der andern Geraden, so schneiden diese Verbindungslinien die Cissoide in 3 Punkten, die wieder auf einer Geraden liegen. Dies wird dann zur Construction der Tangente an die Cissoide in einem Punkte $u(xy)$ angewandt in der Voraussetzung, dass die Curve fertig gezeichnet vorliegt. Darauf folgt eine Tangentenconstruction, die aus der Gleichung $u'=-2n$ gefolgert wird, und nur die bestimmten Elemente der Cissoide als gegeben annimmt. Weiterhin folgt das Bekannte von den successiven Tangentialpunkten. Es wird nun die Gleichung einer Sehne durch zwei Punkte der Cissoide u_1 und u_2 gegeben:

$$y(u_1+u_2)u_1u_2 - x(1+u_1u_2+u_1^2+u_2^2)+a=0,$$

woran sich die Betrachtung von Involutionen auf der Cissoide und von Tangenten durch einen beliebigen Punkt, deren drei sind knüpft. Ein beliebiger Kreis trifft die Cissoide ausser in den unendlich fernen Kreispunkten noch in vier anderen, für welche

$$u_1+u_2+u_3+u_4=0,$$

woraus Mehreres gefolgert wird. Für den Krümmungskreis in u hat man

$$u_1=u_2=u_3=u;$$

und setzt man u_1 statt u_4, so ist

$$3u+u_1=0.$$

Dies führt leicht zur Gleichung der Evolute. Es wird nun die Gleichung 6^{ten} Grades für n hergeleitet, deren Wurzeln den Fusspunkten der 6 Normalen entsprechen, die von einem beliebigen Punkt (xy) auf die Cissoide gefällt werden können, und gezeigt, wie man durch Annahme zweier Fusspunkte, denen u_1 und u_2 entsprechen mögen, und die dann (xy) bestimmen, durch eine Gleichung 4^{ten} Grades auf die übrigen Fusspunkte geführt wird. Die Resultate ergeben sich überall äussert leicht, und auch hierher gehörige Fragen der Integralrechnung lassen sich nach der Methode des Parameters u unschwer behandeln.[13]

Zahradníkovu práci [Z5] připomínají v soupisu základní literatury vztahující se ke konstrukci a vlastnostem tzv. „cissoide oblique“ i autoři [BL] (viz bibliografie na straně 223), kteří napsali

Cissoïde oblique. – Définition. – Cubique circulaire ayant un point de rebroussement. Cette courbe de troisiéme classe. Toute cubique circulaire de

[13] Recenze A. Maynze uveřejněná v referativním časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 6(1874), str. 441.

troisiéme classe est un cissoïde. Construction. – La construction de la cissoïde oblique se déduit immédiatement du théoréme de Zahradnik sur les cubiques unicursales … ([BL], str. 210)

Dodejme pro úplnost, že německy psanou studii [Z5] Karel Zahradník roku 1895 značně rozšířil, výrazně přepracoval a uveřejnil chorvatsky pod názvem *Dalnji prilog teoriji cisoide* [Z70].

V roce 1876 uveřejnil v časopisu *Archiv der Mathematik und Physik* v rubrice *Miscellen* první část článku *Beitrag zur Theorie der Cissoide* [Z22], kterou o dva roky později doplnil pokračováním nazvaným *Weiterer Beitrag zur Theorie der Cissoide.*

V první části dvoustránkového příspěvku hledal obálku tzv. *tětiv křivosti* cissoidy (die Umhüllungscurve der Krümmungssehnen). Vyšel ze známého parametrického vyjádření cissoidy

$$x = \frac{a}{1+u^2},$$

$$y = \frac{a}{u(1+u^2)},$$

kde $u \in \mathbb{R}$ (u je kotangenta velikosti úhlu, který svírá průvodič bodu cissoidy s kladným směrem osy x) a ukázal, že spojnice dvou bodů u_1 a u_2 cissoidy má analytické vyjádření

$$u_1u_2(u_1+u_2)y - (1+u_1^2+u_1u_2+u_2^2)x + a = 0.$$

Pak uvedl podmínku, kdy čtyři body u_1, u_2, u_3, u_4 cissoidy leží na jedné kružnici (tj. pro kotangenty velikostí úhlů platí $u_1+u_2+u_3+u_4 = 0$). Uvažoval jednoduchý případ, kdy vzniklá kružnice je oskulační kružnicí cissoidy v bodě u_2 a položil $u_2 = u_3 = u_4 = u$. Potom výše uvedená rovnice přejde v rovnici $3u + u_1 = 0$ a spojnice bodů u_1 a u_2, tj. *tětiva křivosti*, je popsána rovnicí $6u^3y-(1+7u^2)x+a = 0$. Jejím derivováním podle u a užitím substituce $u = \frac{7x}{9y}$ obdržel rovnici křivky, která je obálkou tětiv křivosti

$$y = \sqrt{\frac{343}{243}} \cdot \sqrt{\frac{x^3}{a-x}}.$$

Je zřejmé, že je to opět cissoida, a sice afinní s původní cissoidou.

V druhé části práce [Z22], kterou sepsal již v době svého působení v Záhřebu, studoval tzv. *tečnový trojúhelník* cissoidy (des Berührungsdreieck) s konstatním obsahem, tj. trojúhelník, jehož strany leží na tečnách cissoidy vedených z libovolného bodu její roviny a jeho vrcholy jsou průsečíky těchto tečen a cissoidy.[14] S využitím analytické geometrie a determinantů dokázal dvě věty:

[14] Přesná definice *tečnového trojúhelníku* v práci [Z22] není uvedena, objevila se až v chorvatsky psané práci [Z51], resp. její české či německé verzi [Z54] a [Z60]. V české verzi je nově použit termín *trojúhelník styku.* Doplňme pro úplnost, že v duchu tehdejší geometrie Karel Zahradník při svých úvahách obvykle nečinil rozdíl mezi reálnou a imaginární tečnou.

Der Ort der Punkte constanter Berührungsdreiecke bei der Cissoide ist demnach eine Curve fünfter Ordnung mit einem Doppelpunkte in der Spitze der Cissoide.[15]

Beschreibt nämlich der Schwerpunkt des Berührungsdreiecks einer Cissoide eine Curve nter Ordnung, so durchläuft der entsprechende Pol P eine Curve 2nter Ordnung, welcher die imaginären Kreispunkte als nfache Punkte zukommen.[16]

Poznamenejme, že tyto Zahradníkovy výsledky jsou citovány v [SS] na straně 189, kde jsou shrnuty jeho studie speciálních vlastností cissoidy. Autoři monografie uvedli dva jeho výsledky:

Общие хорды циссоиды и ее кругов кривизны огибают циссоиду

$$y^2 = \frac{7^3}{3^5} \cdot \frac{x^3}{2a - x}.$$

...

Подерой циссоиды с полюсом на касательной в точке O является оркужность. ([SS], str. 189)

Na straně 127 ještě připomněli jeho přístup k vyšetřování metrických vlastností křivek třetího řádu.

Zahradníkovu práci [Z22] uvedli roku 1970 i autoři [BL] na straně 223, a to v soupisu doporučené základní literatury pojednávající o vlastnostech speciálních bodů cissoidy.

Stejnou tematiku jako v práci [Z22] zpracoval K. Zahradník také v článku *Geometrischer Ort der Punkte constanter Berührungsdreiecke in Bezug auf die Cissoide* [Z27], který byl otištěn v časopisu *Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe* roku 1877. Recenzent A. Maynz jej v referativním časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik zhodnotil takto:

Es ist die Aufgabe behandelt, den Ort des Punktes P zu finden, so dass die drei von P an die Cissoide gehenden Tangenten Berührungspunkte haben, die Ecken eines Dreiecks von constantem Inhalt sind. Die Methode der Lösung ist richtig, und es kommt auch als Ort des Punktes P eine Curve fünften Grades; doch muss gegen Schluss ein Versehen gemacht sein, da die letzte Gleichung sowie Einiges von dem Voraufgehenden nicht stimmt.[17]

---

[15] Geometrické místo bodů „tečnového trojúhelníku cissoidy“ s konstantním obsahem je křivka pátého stupně s jedním dvojnásobným bodem ve vrcholu cissoidy. ([Z22], str. 446) Na vysvětlenou uvedené věty poznamenejme, že hledaným bodem se rozuměl tzv. *pol*, tj. bod, z něhož byly k cissoidě vedeny tečny a kterému odpovídal právě jediný *tečnový trojúhelník.*

[16] Opisuje totiž těžiště „tečnového trojúhelníku cissoidy“ křivku n-tého stupně procházející odpovídajícím pólem P křivky $2n$-tého stupně, který dostáváme jako n-násobný imaginární kruhový bod. ([Z22], str. 447)

[17] Recenze A. Maynze uveřejněná v referativním časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 10(1878), str. 485. Poznamenejme, že úplně stejnou poslední rovnici Karel Zahradník uvedl také ve druhé části práce [Z22]. Jednalo se však o chybně zapsanou a provedenou substituci.

Dne 31. března 1880 měl Karel Zahradník na zasedání matematicko-přírodovědné třídy Jihoslovanské akademie věd přednášku o vlastnostech speciálních *trojin bodů* cissoidy,[18] která v roce 1882 vyšla v časopisu *Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu* pod názvem *Vlastitosti nekih trojina točaka na cisoidi* [Z51]. V následujícím roce ji přeložil do češtiny a uveřejnil v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* pod názvem *Vlastnosti jistých trojin bodových na cissoidě* [Z54] a konečně v roce 1888 její německou verzi otiskl v časopisu *Archiv der Mathematik und Physik* pod názvem *Eigenschaften gewisser Punkttripel auf der Cissoide* [Z60].[19]

Neobvykle podrobně studoval dvě speciální *trojiny bodů Dioklovy cissoidy* vytvořené tečnami, resp. normálami (viz obrázek 2). V první kapitole nazvané *Vlastnosti trojin styku* nejprve uvedl klasické parametrické vyjádření cissoidy, pak ukázal, že z libovolného bodu P roviny cissoidy lze k ní vést tři tečny a označil body jejich dotyku u_1, u_2 a u_3. Tuto trojici použil jako vrcholy tzv. *trojúhelníku styku* a dokázal, že je jednoznačně určena bodem $P = [x, y]$, který nazval *polem trojúhelníku styku.* Na dalších deseti stránkách vyšetřoval tento trojúhelník.

Nejprve stanovil souřadnice těžiště T trojúhelníku styku

$$\xi = a\frac{y^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)x}{y^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2},$$

$$\eta = -a\frac{\frac{a}{2}y}{y^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2}. \tag{9}$$

a pak odvodil následující tvrzení:

Rovnice (9) podávají nám hledaný vztah mezi polem P i těžištěm T trojúhelníku styku. Vztah tento je kvadratický a to kruhový jednoznačný, t. j. každému bodu (x, y) přísluší jediný bod $(\xi\eta)$ a naopak každému bodu $(\xi\eta)$ přísluší pouze jediný bod (xy).[20]

Pak vyšetřoval tvar křivky, kterou opíše bod T, pohybuje-li se bod P podle předem stanovených podmínek:

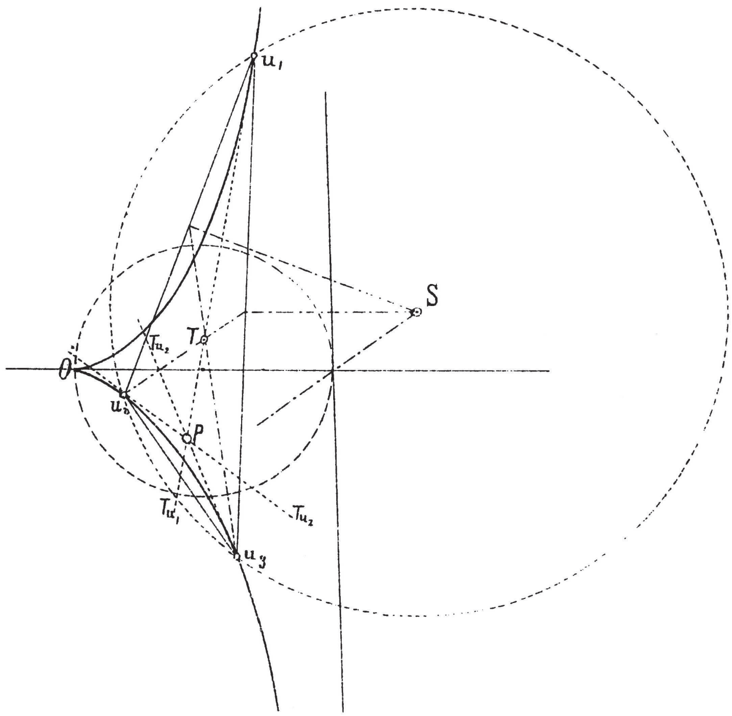
… Opíše-li bod P přímku, jež neprochází hlavním bodem O_p, opisuje sdružený bod T kruh probíhající hlavním bodem O_t. Opíše-li pol P křivku n-tého stupně a m-té třídy, opíše sdružený bod T křivku $2n$-tého stupně a $(2n - m)$té třídy, mající hlavní body soustavy T za n-násobné body. Jde-li křivka polu P

[18] Zahradníkův přístup k vyšetřování speciálních trojic bodů na křivkách třetího řádu (zejména na cissoidě) je zmiňován na několika místech v [SS] (viz např. str. 103 – práce [Z84], str. 101, 106, 149, 187–189 – práce [Z13], str. 231 – práce [Z14]). Archaické názvy dvojina, trojina, čtveřina atd. odpovídají dnešním ustáleným termínům dvojice, trojice, čtveřice atd. Totéž platí v algebraické geometrii pro dvojný – dvojnásobný bod, trojný – trojnásobný bod atd.

[19] Doplňme pro zajímavost, že chorvatská verze byla doplněna osmi velkými a názornými obrázky, zatímco česká a německá verze byla zcela bez obrázků.

[20] [Z54], str. 108.

hlavními body soustavy bodů P, mění se poněkud výsledek, jejž, poněvadž známý, v krátkosti zde vytknu, neb v našem případě musíme míti na zřeteli, že hlavní body obou soustav nesplývají, jak se obyčejně předpokládá. Opíše-li pol P křivku n-tého stupně, jdoucí k-krát hlavním bodem O_p a l-kráte imaginárnými body kruhovými, rozpadá se příslušná křivka těžiště T, kteráž je $2n$-tého stupně ve úběžnou přímku co k-násobnou a ve spojnice hlavního bodu O_t s imaginarnými body kruhovými co l-násobné a ve pravou křivku příslušnou zákonem inverse (12), kteráž je tudíž stupně $2n-k-2l$ a třídy $2n-m-2k-4l$, je-li m třída křivky pola; bod O_t je $n-2l$-násobným bodem a imaginárné body kruhové jsou $(n-k-l)$-násobné křivky těžiště.[21]



Obrázek 2. Zahradníkova konstrukce

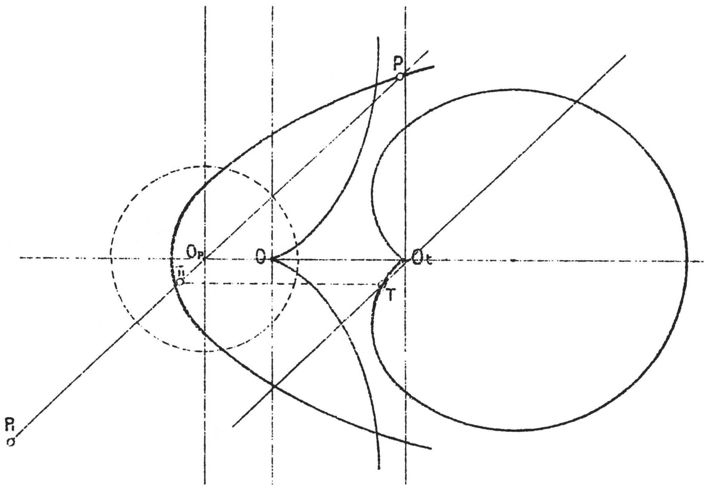
[21] [Z54], str. 112–113. Poznamenejme, že hlavní body soustavy bodu $P=[x,y]$ jsou bod $O_p=[-\frac{a}{2},0]$ a imaginární body kruhové. Hlavní body soustavy bodu $T=[\xi,\eta]$ jsou bod $O_t=[a,0]$ a imaginární body kruhové. *Zákonem inverze* Karel Zahradník mínil vztah mezi souřadnicemi pólu P a těžiště T popsaný rovnicemi

$$x+\frac{a}{2}=-\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\xi-a}{(\xi-a)^2}+\eta^2,$$

$$y=-\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\eta}{(\xi-a)^2}+\eta^2,$$

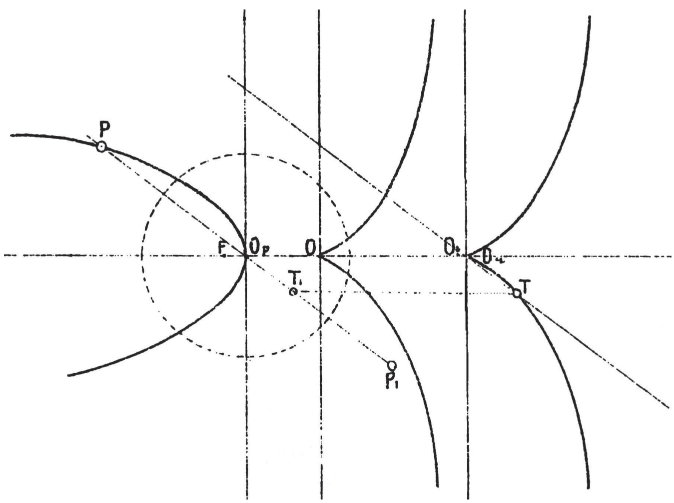
z nichž plyne, že zmíněné body jsou ve vztahu kvadratické racionální příbuznosti. Název *inverze* patrně vyjadřuje fakt, že se jedná o *biracionální* transformaci.

Popsal také dva speciální případy. Nejprve bod $P = [x, y]$ opisoval parabolu, jejíž parametr p byl roven poloměru základní kružnice cissoidy (tj. $p = \frac{a}{2}$) a jejíž ohnisko bylo v bodě O_p.[22] Bod T pak opisoval kardioidu, která měla bod O_t jako bod vratu a délka a byla průměrem pevné kružnice (viz obrázek 3).[23]



Obrázek 3. Zahradníkova konstrukce – vznik kardioidy

V druhém případě bod P opisoval parabolu, jejíž parametr p byl roven $\frac{a}{4}$ a bod O_p byl vrcholem. Potom bod T opisoval cissoidu, která byla shodná s původní cissoidou, ale byla posunuta o a v kladném směru osy x (viz obrázek 4).



Obrázek 4. Zahradníkova konstrukce – vznik cissoidy

[22] Rovnice paraboly je $y^2 = ax + \frac{3}{4}a^2$.
[23] Rovnice kardioidy je $[(\xi - a)^2 + \eta^2]^2 - 2a(\xi - a)[(\xi - a)^2 + \eta^2] = a^2\eta^2$.

V druhé části práce [Z54] podobným způsobem vyšetřoval polohu středu kružnice opsané trojúhelníku styku a dospěl k závěru, že jeho souřadnice jsou

$$\xi_1 = -\frac{a}{2} \cdot \frac{4y^2 + 9x^2}{3x(x-a)},$$

$$\eta_1 = -\frac{a}{2} \cdot \frac{2y}{3x}. \tag{15}$$

Odvozený výsledek komentoval slovy:

Z rovnic (15) plyne, že je pol P ve příbuznosti kvadratické se středem S kruhu opsaného trojúhelníku styku. ... příbuznost tato kvadratická je racionální, t. j. že každému bodu P roviny cissoidy přísluší touto transformací jediný bod S a naopak, že každému bodu S roviny cissoidy, uváženému co středu kruhu opsaného trojině bodů co styku, odpovídá jediný pol P.[24]

V třetí části práce hledal příbuznost mezi těžištěm T trojúhelníku styku a středem S kružnice tomuto trojúhelníku opsané. Z výsledků odvozených v předchozích dvou částech (danému bodu P odpovídá jediný bod T a jediný bod S) ukázal, že pohybuje-li se bod T po přímce, pohybuje se bod P po křivce druhého stupně (tj. po kuželosečce), které přísluší racionální křivka čtvrtého stupně, již opíše bod S, neboli

... že je příbuznost mezi S a T bikvadratická a racionálná, jak jsme byli dříve úvahou jednoduchou dokázali. Příbuznost tato je tutíž Cremonova příbuznost, a můžeme každou takovou racionální bikvadratickou transformaci nahraditi dvěma kvadratickými transformacemi. Jest totiž patrno, že místo bychom od soustavy bodů S přímo na soustavu bodu T přešli, můžeme nejprve přejíti od soustavy bodů S na soustavu bodu P pomocí jedné kvadratické transformace a potom od soustavy bodů P na soustavu bodů T opětně pomocí kvadratické transformace ...[25]

Ve čtvrté části uvedl další tradiční charakteristiky trojúhelníku styku, a to souřadnice průsečíku výšek a středu Feuerbachovy kružnice (kružnice procházející středy stran trojúhelníku) a analytické vyjádření Eulerovy přímky (spojnice bodů S a T).

V páté části popisoval obálku kružnic opsaných trojúhelníku styku při pohybu bodu P. Nejprve vyšetřoval pohyb po obecné racionální křivce stupně n a uvedl, že *obálka soustavy kruhů je v případě tomto křivka stupně* $4(2n-1)^{\text{ho}}$.[26] Pak se zaměřil na nejjednodušší možný případ, totiž pohyb bodu P po přímce $y = bx + c$, kde obálkou je křivka čtvrtého stupně. Zatímco první případ pouze naznačil, druhému se věnoval velmi podrobně a s využitím analytické geometrie a determinantů dokázal, že obálku kružnic lze popsat rovnicí

[24] [Z54], str. 115. Jedná se opět o transformaci biracionální, která však není bijektivní transformací roviny.

[25] [Z54], str. 118.

[26] [Z54], str. 122.

$$9a(\xi^2+\eta^2)^2+12(ab+c)(-4c\xi+a\eta)(\xi^2+\eta^2)+$$
$$+48ac(ab+2c)\xi^2+72a^2c\xi\eta+(4ac^2+8a^2bc+4a^3b^2)\eta^2+144a^2c^2\xi=0.$$

Odvození doplnil následujícím komentářem:[27]

Z této rovnice ihned seznáme, že je obálka křivky čtvrtého stupně, jež má imaginárné úběžné kruhové body za body úvratné a jež se dotýká osy pořadnic v počátku souřadnic. Je tudíž tato enveloppa ovalem Descartes-ovým. Opíše-li pol P přímku jdoucí bodem úvratným cissoidy, je $c=0$, a enveloppa soustavy příslušných kruhů skládá se ze dvou identických kruhů, jejichž rovnice je

$$\xi^2+\eta^2+\frac{2}{3}ab\eta=0.$$

V šesté části práce Karel Zahradník analyzoval situaci, kdy se bod P pohyboval po dané cissoidě, tj. kdy dva vrcholy trojúhelníku styku splynuly s pólem P. I pro tento speciální případ nalezl souřadnice těžiště

$$\xi=2a\frac{t^2+2}{(t^2+1)(t^2+4)},$$
$$\eta=-2a\frac{t^2}{(t^2+1)(t^2+4)},$$

kde t je parametr bodu P. Geometrický význam těchto dvou parametrických rovnic popsal takto:

Jest tudíž místo těžišť, opisuje-li pol danou cissoidu, racionální křivka čtvrtého stupně. Křivka leží celá v konečnosti, a má v počátku souřadnic bod úvratný příslušný k parametru $t=\infty$. Úběžné body této křivky mají parametry

$$t_1=\sqrt{-1},\qquad t_2=-\sqrt{-1},$$
$$t_3=2\sqrt{-1},\qquad t_4=-2\sqrt{-1}.$$

Však dva a dva parametry a sice t_1 a t_4, pak t_2 a t_3 určují vždy jeden a týž bod a sice imaginárný kruhový bod v nekonečnu t. j. imaginárné úběžné kruhové body jsou dvojnými body křivky. Křivka má tudíž bod úvratný a dva body dvojné, jest tudíž páté třídy.[28]

Eliminací parametru t po řadě úprav dospěl k rovnici popisující polohu bodu T $(\xi^2+\eta^2)^2-a\xi(\xi^2+\eta^2)+2a^2\eta^2=0$. V dalších odstavcích studoval kružnici opsanou trojúhelníku styku, pohybuje-li se bod P po cissoidě. Ukázal, že rovnice této kružnice má tvar

$$3t^4(\xi^2+\eta^2)-a(4+9t^2)\xi-2at^3\eta+4a^2=0$$

a její střed je v bodě $\left[\frac{a}{2}\cdot\frac{4+9t^2}{3t^4},\frac{a}{3t}\right]$. Odvozené výsledky komentoval následujícími slovy:

Opíše-li tudíž pól P danou cissoidu, opíše střed S racionálnou křivku čtvrtého stupně a páté třídy (mající trojnásobný bod v nekonečné vzdálenosti vzniklý sjednocením se dvou dvojných bodů a jednoho bodu úvratného).[29]

[27] [Z54], str. 123.
[28] [Z54], str. 126.
[29] [Z54], str. 130.

V druhé kapitole nazvané *Vlastnosti trojin pat normál bodů na cissoidě* Karel Zahradník nejprve ze znalosti rovnice tečny cissoidy stanovil rovnici její normály procházející bodem u

$$y - \frac{a}{u(1+u^2)} = -\frac{2u^3}{1+3u^2}\left(x - \frac{a}{1+u^2}\right)$$

a po jednoduchých algebraických úpravách dospěl ke známé rovnici normály

$$u(1+3u^2)y + 2u^4x - a(1+2u^2) = 0,$$

což je vzhledem k parametru u paty normály rovnice čtvrtého stupně, tudíž z libovolného bodu roviny cissoidy lze vést na cissoidu čtyři normály. Protože normály cissoidy jsou tečnami její evoluty a počet normál stanovuje třídu evoluty, je tedy evoluta cissoidy čtvrté třídy. Karel Zahradník dále dokázal, že evoluta cissoidy je racionální křivka čtvrtého stupně.

V další části vyšetřoval případ, kdy bod $P = [x, y]$, z něhož jsou vedeny normály, je bodem cissoidy a sám tedy představuje jednu patu normály. Potom lze z něho vést pouze tři normály, které definují *trojúhelník pat normál.* Ze znalosti souřadnic pat vypočetl jeho obsah a ukázal, že je pro libovolný bod cissoidy vždy komplexní. Tak dokázal, že jedna normála je reálná a zbylé dvě jsou imaginární. Z toho jednoduše vyplynulo, že trojúhelník pat normál má pouze jediný vrchol reálný a zbylé dva imaginární. Jeho těžiště je však vždy bodem reálným a má souřadnice

$$\xi = \frac{a}{3} \cdot \frac{3+4u^2}{1+u^2},$$

$$\eta = -\frac{a}{3} \cdot \frac{u^3}{(1+u^2)(4+u^2)}.$$

Využitím posunutí počátku soustavy souřadnic do bodu $O = [a, 0]$ ukázal, že je možno souřadnice těžiště napsat v jednodušším tvaru

$$\xi_1 = \frac{a}{3} \cdot \frac{u^2}{1+u^2},$$

$$\eta_1 = -\frac{a}{3} \cdot \frac{u^3}{(1+u^2)(4+u^2)}.$$

Vyloučením parametru u obdržel rovnici

$$9\xi_1^2(\xi_1^2 + \eta_1^2) - 3a\xi_1(\xi_1^2 + 24\eta_1^2) + 16a^2\eta_1^2 = 0$$

popisující křivku páté třídy, která je geometrickým místem těžišť trojúhelníků pat normál.

V závěrečné části ještě studoval geometrické místo bodů, které vytvoří středy kružnic opsaných trojúhelníkům pat normál, pohybuje-li se bod P po cissoidě.

Nejprve uvedl rovnici kružnice opsané obecnému trojúhelníku, jehož vrcholy leží na cissoidě, pak použil podmínku, že analyzovaný trojúhelník je trojúhelníkem pat normál a dokázal, že kružnice jemu opsaná je popsána rovnicí

$$(1+u^2)(3+2u^2)(\xi^2+\eta^2)+a[9+14u^2+4u^4]\xi+au\eta-4a^2u^2=0$$

a tudíž souřadnice jejího středu jsou

$$\xi_2=-\frac{a}{2}\cdot\frac{9+14u^2+4u^4}{(1+u^2)(3+2u^2)},$$

$$\eta_2=-\frac{a}{2}\cdot\frac{u}{(1+u^2)(3+2u^2)}.$$

Z jeho závěrů vyplynulo, že geometrické místo středů kružnic opsaných trojúhelníkům pat normál je racionální křivka čtvrtého stupně a páté třídy, která má dva dvojnásobné imaginární body a reálný bod vratu v bodě $[-a,0]$.

Karel Zahradník v práci [Z54] (resp. v jejích cizojazyčných verzích [Z51] a [Z60]) věnované speciálním trojicím bodů na Dioklově cissoidě navázal na své dřívější studie o teorii racionálních křivek [Z5] (resp. [Z13]), [Z19] (resp. [Z30]) a [Z50].[30] Současně se však opíral o oblíbené a uznávané monografie pojednávající o analytické geometrii, geometrii křivek a ploch, transformacích apod., které sepsali autoři G. Salmon – W. Fiedler, T. Reye, A. Clebsch, L. Cremona – Em. Weyr a G. Bellavitis.[31] Odkazy uváděl, jak bylo jeho zvykem; v případech, kdy užíval méně známé parametrické rovnice studovaných křivek, připomínal důmyslné konstrukce bez důkazů jejich správnosti, spokojoval se s neúplnými odvozeními vlastností studovaných křivek, připojoval velmi stručné či skokovité důkazy, důkazy vynechával nebo se odvolával na znalosti hlubších souvislostí

[30] Poznamenejme, že Zahradníkova studie [Z13] (popsaná v předchozí kapitole) je nejčastěji citovanou českou prací v ruské monografii [SS]. Autoři její dílčí části přibližují na stranách 101, 106, 109, 127, 142, 149 a 187 až 189. Připomínají zejména Zahradníkovo parametrické vyjádření cissoidy a cissoidál umožňující elegantní odvození rovnic tečen, asymptot, oskulačních kružnic, normál, tečnových a normálových trojic bodů, harmonických a ekvianharmonických čtveřic bodů. Výše zmíněné čtveřice jsou i dílčím tématem Zahradníkovy práce [Z14], jejíž výsledek autoři ocitovali v [SS] na straně 231: *Точки P, касательные из которых касаются кривой K_3^4 в точках T, проектирующихся из двойной точки O кривой гармоническими четверками лучей, принадлежат кривой Γ_3, проходящей через три точки перегиба кривой K_3^4. Для декартова листа $x^3+y^3=3axy$ кривая Γ_3 определяется уравнением $x^3+y^3=3axy+a^3$. Если лучи, проетирующие точку T, образуют эквиангармоническую четверку, то в этом случае точки P лежат на коническом сечении, распавшемся на две совпадающие прямые.*

[31] G. Salmon – W. Fiedler: *Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven von George Salmon*, Deutsch bearbeitet von Dr. W. Fiedler, Teubner, Leipzig, 1873, 16 + 472 stran, T. Reye: *Die Geometrie der Lage. Vorträge*, první díl, Hannover, 1866, XII + 268 stran, A. Clebsch: *Vorlesungen über Geometrie*, B. G. Teubner, Leipzig, 1876, XII + 1050 stran, Em. Weyr: *Cremonovy geometrické transformace útvarů rovinných*, Živa, Sborník vědecký Musea království Českého, Odbor přírodovědecký a mathematický č. X, Praha, 1872, 47 stran, G. Bellavitis: *Methoda equipollencí čili rovnic geometrických*, přeložil K. Zahradník, vydala Jednota českých mathematiků, Praha, 1874, 104 stran.

syntetické a analytické geometrie.[32] Mnohé Zahradníkovy úvahy, odvození a důkazy jsou bez studia doporučené literatury téměř nesrozumitelné. Zájemce o hlubší pochopení uváděných souvislostí odkazoval na starší práce italských matematiků G. Bellativise, L. Cremony a G. V. Schiaparelliho a německých matematiků A. Clebsche, G. Magnuse, T. Reye a novější práce českých autorů A. Strnada, J. S. Vaněčka, Ed. Weyra a Em. Weyra. Z jeho odkazů je zřejmé, že během pražského univerzitního studia získal dobrý přehled o knižní i časopisecké literatuře svého oboru, který však již během záhřebského pobytu příliš nerozšiřoval vzhledem k nedostatku prostředků na pořizování nové odborné literatury.

Na zasedání matematicko-přírodovědné třídy Jihoslovanské akademie věd proslovil dne 18. června 1891 krátkou přednášku o vlastnostech normál, tečen a asymptot Dioklovy cissoidy, která vyšla v témže roce tiskem v časopisu *Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu* pod názvem *Prilog k teoriji cisoide* [Z65]. V první části přednášky s využitím klasického parametrického vyjádření cissoidy a normální rovnice normály dokázal známou větu:

... realna asimptota cisoide je mjesto točaka srednjih udaljenosti nožištnih skupina normala svijuh točaka ravnine cisoide.[33]

V druhé části se věnoval speciálním trojicím bodů cissoidy a bez důkazu uvedl větu

... trojkut, koji stvaraju stikovi tangenata istosmjernih kod cisoide imaju zajedničku točku srednjih udaljenosti, neovisno o smjeru tih tangenata i to onu, u kojoj realna asimptota cisoide presjeca tangentu njezinog povratišta.[34]

Poznamenejme, že tento drobný příspěvek nebyl Zahradníkovou původní prací, ale pouze doplňoval a podrobněji vysvětloval jeden jeho výsledek uvedený v jeho více než třicetistránkové studii nazvané *Vlastitosti nekih trojina točaka na cisoidi* [Z51].

Dne 28. února 1895 proslovil Karel Zahradník na zasedání matematicko-přírodovědné třídy Jihoslovanské akademie věd přednášku o vlastnostech cissoidy, která byla otištěna v časopisu *Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu* pod názvem *Dalnji prilog teoriji cisoide* [Z70]. Jednalo se o rozsáhlou, třicetistránkovou studii o kvadratických, kubických a bikvadratických involucích bodů cissoidy.

[32] Uveďme typický příklad Zahradníkova odkazu vztahujícího se k rozšiřujícímu studiu kruhové inverze, kterou užil při výkladu příbuznosti pólu a těžiště trojúhelníku styku cissoidy: *O této transformaci viz: Salmon-Fiedler: Höhere ebene Curven pg. 363, Kegelschnitte 2. Aufl. pg. 536. Bellavitis: Teoria delle figure inverse e loro usu nella geometria elementare. Ann. del scienze del regno Lombardo-Veneto 1836 t. VI. Liouville ve svém Journal de mathem. t. XII. Theorie i vlastnosti této transformace jsou hezky sestaveny ve pojednání A. Strnada „O inversi kruhové", Archiv math. a fysiky II. díl pg. 124. Praha.* ([Z54], str. 112)

[33] [Z65], str. 131.

[34] [Z65], str. 132.

V první části nazvané *Kvadratička involucija na cisoidi* vyšel z klasického parametrického vyjádření cissoidy

$$x = \frac{a}{1+u^2},$$

$$y = \frac{a}{u(1+u^2)},$$

kde $u \in \mathbb{R}$ (u je kotangenta velikosti úhlu, který svírá průvodič bodu cissoidy s kladným směrem osy x), stanovil spojnici dvou libovolných bodů cissoidy u_1 a u_2 a řešil úlohu, kdy je tyto dva body vidět z bodu úvratu (*povratište*) pod úhlem velikosti 90°. Dokázal, že množinou bodů je hyperbola o rovnici

$$y^2 = 4x(2x-a),$$

jejíž hlavní osa má délku $\frac{a}{4}$ a vedlejší osa $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Současně uvedl, že body u_1 a u_2 jsou v tzv. kvadratické involuci (tj. vyhovují podmínce $u_1u_2 = -1$) a involuční kuželosečkou je výše uvedená hyperbola. Pak vyšetřoval zobecněnou kvadratickou involuci, kterou definoval podmínkami

$$\mu = u_1u_2,$$

$$\lambda = u_1 + u_2,$$

$$p\lambda + q\mu + r = 0.$$

Čistě analytickými prostředky dokázal, že

… raspolovište svijuh dvojina u_1, u_2 navedene kvadratičke involucije leže na pravcu, koji stoji okomito na tangenti povratišta u središtu osnovnog kruga cisoide.[35]

Dále bral dvojice bodů u_1 a u_2, které jsou z počátku soustavy souřadnic (*ishodište surednica*) vidět pod úhlem velikosti 90° a dokazoval, že průsečík normál jdoucích těmito body má souřadnice

$$P = \left[\frac{3a}{2}, -\frac{a\lambda(\lambda^2+3)}{2(\lambda^2+4)}\right].$$

Dokázal tedy následující větu:

Dakle mjesto presjecišta normala u točkah cisoide, koje vidimo iz ishodišta surednica pod pravim kutem, je pravac okomit na os X u udaljenosti $\frac{3a}{2}$ od ishodišta surednica.[36]

Na konec ještě studoval spojnice bodů S a P, kde S je střed tětivy u_1u_2. V posledních dvou paragrafech první části hledal tzv. přidruženou přímku (*pravac pridruženi*) a ukazoval involuční vztahy pro tečny bodů u_1 a u_2.[37]

[35] [Z70], str. 97.

[36] [Z70], str. 97.

[37] Karel Zahradník dokázal: … *tangencijalne točke presjecišta pravca P sa cisoidom leže opet na jednom te istom pravcu, koji zoveme pravcem pridruženim R (retta satellite) pravcu P.* Viz [Z70], str. 99.

Druhou část věnoval popisu vzájemné polohy kružnice a cissoidy. V úvodu napsal:

Iz ove jednadžbe nalazimo dakle parametre presjecišta kruga $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+m^2=0$ *sa cisoidom, osim imaginarnih kružnih točaka, koje su zajednička presjecišta svake cisoide sa svakim krugom; ta presjecišta smo izlučili prikrativši se faktorom* $(1+u^2)$*, koji se na nje odnosi. Upoznajemo namah, da parametri presjecišta zadovoljavaju relaciji*

$$\sum_1^4 u_h = u_1+u_2+u_3+u_4=0,$$

neovisnoj o α*,* β*,* m^2*, koja nam time izrazuje uvjet, kada četiri točke cisoide leže na kruhu.*[38]

V dalších paragrafech ukázal řadu zajímavých a velmi speciálních vlastností cissoidy (vztah tětivového čtyřúhelníku a cissoidy, konstrukce tečen v průsečících cissoidy a kružnice, nalezení středu a poloměru oskulační kružnice, vlastnosti tětiv oskulačních kružnic cissoidy, evoluta tětiv apod.).

Třetí část příspěvku pojednávala o vztahu paraboly a cissoidy. Karel Zahradník nejprve popsal vzájemné průsečíky cissoidy a paraboly zadané rovnicí $y=\alpha+\beta x+\gamma x^2$. Pak v libovolném bodu cissoidy stanovil oskulační paraboly a vyšetřil množinu vrcholů všech oskulačních parabol.[39] Současně ukázal, že každá oskulační parabola protíná cissoidu ještě ve dvou dalších bodech, tudíž vzniká tzv. *trojúhelník oskulační paraboly* (trokut parabole oskulacije). Pozornost soustředil především na popis jeho vlastností (geometrické místo těžišť trojúhelníků oskulačních parabol, geometrické místo středů jejich vepsaných a opsaných kružnic apod.).

V třetí části nejprve definoval kubickou involuci bodů cissoidy:

Vrsi promjenljivog trokuta $u_1u_2u_3$ *upisanog cisoidi takve vlastitosti, da jednim vrhom trokuta oba ostala vrha već su opredjeljena, stavaraju kubičku involuciju na cisoidi. Jednadžba ovake involucije biti će*

$$\alpha_0u^5+\alpha_1u^3+\alpha_2u+\alpha_3-\lambda(\beta_0u^3+\beta_1u^2+\beta_2u+\beta_3)=0, \tag{24}$$

gdje je λ *parametar involucije. Svakome realnome* λ *od* $-\infty$ *do* $+\infty$ *pripada jedan trokut; parametri vrha tog trokuta dobivamo kao korijene jednadžbe (24); obratno znademo li jedan vrh trokuta na pr.* u_1*, je već tim parametar* λ *opredjeljen naime*

$$\lambda=\frac{\alpha_0u_1^3+\alpha_1u_1^2+\alpha_2u_1+\alpha_3}{\beta_0u_1^3+\beta_1u_1^2+\beta_2u_1+\beta_3},$$

tim su i ostali vrsi u_2*,* u_3 *trokuta poznati.*[40]

[38] [Z70], str. 103.

[39] Víme, že každým bodem cissoidy procházejí tři oskulační paraboly, jejichž osa je rovnoběžná s osou y.

[40] [Z70], str. 113.

Pak vyšetřoval její dvojnásobné body, hledal množinu bodů, kterou opíše vrchol u_1 „involučního" trojúhelníku vepsaného do cissoidy, pokud se mění parametr kubické involuce, počítal souřadnice jeho těžiště a střed kružnice opsané, obálku Eulerovy přímky tohoto trojúhelníka (tj. obálku spojnice těžiště a středu kružnice opsané).

V poslední, čtvrté části vyšetřoval ještě bikvadratickou involuci a charakterizoval její základní vlastnosti. Poznamenejme, že ji zavedl takto:

Skupine točaka, kojih parametre dobivamo kao koriene jednadžbe

$$\alpha_0 u^4 + \alpha_1 u^3 + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u + \alpha_4 - \lambda(\beta_0 u^4 + \beta_1 u^3 + \beta_2 u^2 + \beta_3 u + \beta_4) = 0 \quad (31)$$

za pojedine vriednosti za λ, stvaraju bikvadratičku involuciju, jer znademo li jednu točku skupine na pr. u_1 je tim dan parametar involucije λ, ka kojemu ta skupina spada, naime

$$\alpha_0 u_1^4 + \alpha_1 u_1^3 + \alpha_2 u_1^2 + \alpha_3 u_1 + \alpha_4 - \lambda(\beta_0 u_1^4 + \beta_1 u_1^3 + \beta_2 u_1^2 + \beta_3 u_1 + \beta_4) = 0.$$

Stavimo li iz ove jednadžbe dobivenu vriednost za λ u gornju jednadžbu, te prikratimo li sa faktorom zajedničkim $(u-u_1)$ dobit ćemo kubičku jednadžbu, iz koje vriednosti parametra ostalih točaka skupine sliede. Jedna točaka skupine opredjeljuje tim ostale točke postoji dakle involutornost izmedju točkami pojedinih skupina.

Dvotočke bikvadratičke involucje našli bi na način čl. 22. Diskriminant jednadžbe (31) glede u stavljen jednak ništici, je jednadžbom šestog stupnja obzirom na u; bikvadratička jednadžba ima dakle šest dvotočaka.

Leže li sad točke u na cisoidi, imademo bikvadratičku involuciju na cisoidi.[41]

V této rozsáhlé studii Karel Zahradník shrnul a nepatrně doplnil výsledky, které již uveřejnil v pracích věnovaných teorii racionálních křivek [Z13] a [Z30], speciálním křivkám [Z5], [Z53], [Z59] a [Z65] a trojicím bodů na speciálních křivkách [Z51]. Opíral se také o slavnou monografii L. Cremony pojednávající o rovinných křivkách a o práci o kubické involuci sepsanou Em. Weyrem.[42] Patrně proto řadu tvrzení jen vyslovil nebo naznačil a čtenáře, který by se hlouběji zajímal o vlastnosti involucí, racionálních křivek a speciálních křivek, odkázal na studium rozšiřující literatury.

O dvou Zahradníkových výsledcích souvisejících s vlastnostmi a konstrukcemi cissoidy a cissoidály pojednal G. Loria v monografii [Lo], v níž této problematice věnoval strany 39 až 49. Zahrnul je tak mezi cca tři desítky nejlepších prací. Na straně 46 ocenil názornou Zahradníkovu konstrukci cissoidály uvedenou v práci *Cissoidalkurven* [Z10] takto: *Mit noch grösserer Allgemeinheit kann man auf folgende Weise die Konstruktion der Diokleischen Kurve erweitern: „Gegeben seien ein Kegelschnitt Γ, auf ihm ein Punkte C und eine*

[41] [Z70], str. 120.

[42] L. Cremona: *Úvod do geometrické theorie křivek rovinných*, přeložil Em. Weyr, JČM, Praha, 1873, 176 stran, a Em. Weyr: *Grundzüge einer Theorie der cubischen Involutionen*, Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe 1874, VI. Folge, 7. Band, 56 stran.

Gerade d in seiner Ebene; man ziehe durch C eine beliebige Gerade r, die Γ zum zweitenmal in E und die Gerade d in F schneidet; man trage auf r die Strecke CM gleich und im gleichen Sinne wie EF ab": der Ort der Punkte M ist eine Cissoidalkurve. Na straně 41 vyzdvihl závěr Zahradníkova krátkého příspěvku *Beiträge zur Theorie der Cissoide* [Z22]: *Die Hüllkurve des Sehnen, die eine Cissoide mit ihren Krümmungskreisen gemeinsam hat, ist eine der gegeben affine Cissoide.*

Dioklova cissoida a také „obecná" cissoida (resp. cissoidála) patřily od sedmdesátých let 19. století až do počátku 20. století k poměrně oblíbeným tématům evropských geometrů, jak dokládají recenze německy, francouzsky, dánsky, španělsky, italsky, anglicky a česky psaných prací uveřejněné v referativním časopisu *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.*[43] Odborné studie popisující nejrůznější metrické a projektivní vlastnosti cissoidál a cissoidy, její bodové, projektivní i kinematické konstrukce, metody nalezení jejích tečen, normál, evolut, evolvent a středů oskulačních kružnic, „tečnové trojúhelníky", kvadraturu a rektifikaci, involuce a transformace byly uveřejňovány v časopisech *Archiv der Mathematik und Physik*, *Nouvelles annales de mathématiques*, *Mathesis*, *Annaes scientificos da Academia polytecnica do Porto* apod.[44]

Bez zajímavosti není ani to, že Dioklova cissoida byla tématem několika článků uveřejněných ve výročních zprávách středních škol[45] a italské knížky *Sulla cissoide di Diocle. Parte I. Principali proprietà metriche e descrittive*, jejímž autorem byl P. Venturino.[46] Výše zmíněné „brožury" byly napsány pro začátečníky, středoškolské učitele a talentované studenty. Přístupnou formou objasňovaly podstatu elementárních analytických metod užívaných při vyšetřování rovinných křivek vyšších stupňů, na rozdíl od Zahradníkových prací využívaly podstatně méně syntetických a projektivních postupů.

Descartův list

Dne 14. února 1891 na zasedání matematicko-přírodovědné třídy Jihoslovanské akademie věd proslovil Karel Zahradník přednášku, která v témže roce vyšla tiskem v časopisu *Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu* pod názvem *Vlastitost skupina sticišta na Descartesovu listu* [Z63]. O čtyři roky později byla publikována v *Časopisu pro pěstování mathematiky*

---

[43] V letech 1873 až 1937 bylo v tomto časopisu podrobněji referováno o 25 pracích, v jejichž názvu či podnázvu se objevilo slovo cissoida; autorem šesti z nich byl Karel Zahradník. Další dvě desítky prací pojednávajících o křivkách se také, byť okrajově, zabývaly cissoidou. Viz http://jfm.sub.uni-goettingen.de.

[44] Mezi jejich autory nalezneme například F. Balitranda, E.-N. Barisiena, R. Goormaghtigha, M. Greinera, Cl. Servaise, A. Schrödera, F. G. Teixeiru, F. J. Vaese, W. A. Versluyse, K. Zahradníka.

[45] W. Böhmer: *Untersuchungen über di Cissoide des Diocles*, Programm, Oberschule in Brilon, 1874, C. Blasel: *Die Cissoide und eine ihr verwandte Curve*, Programm, Oberschule in Neisse, 1881, R. Schröder: *Die Cissoide des Diokles nebst Lehrsätzen, Formeln und Aufgaben*, Programm Nr. 146, Oberrealschule Grosse Lichterfelde, 1905, 45 stran.

[46] Napoli, 1889, 32 stran.

a fysiky její nezměněná česká verze nazvaná *O skupinách bodů dotyčných na listu Descartesově* [Z69]. S odvoláním na Liouvilleův výsledek[47] v ní Karel Zahradník studoval Descartův list[48] a dokazoval, že

... u této křivky bod středních vzdáleností dotyčných bodů styku tečen sestrojených z kteréhokoliv bodu jest na poloze tohoto bodu zcela nezávislý.[49]

Vyšel z klasického parametrického vyjádření Descartova listu

$$x = \frac{3au}{1+u^3},$$

$$y = \frac{3au^2}{1+u^3},$$

kde $u \in \mathbb{R}$. Uvedl rovnici tečny Descartova listu v jeho bodě u:

$$u(u^3 - 2)x + (1 - 2u^3)y + 3au^2 = 0.$$

Ukázal, že jestliže bod $P[x, y]$ je pevně zvolený bod v rovině Descartova listu, získáme souřadnice bodů dotyku tečen listu vedených z tohoto bodu P jako kořeny rovnice čtvrtého stupně

$$xu^4 - 2yu^3 + 3au^2 - 2xy + y = 0.$$

Tudíž z bodu P lze vést k Descartovu listu čtyři tečny. Následně zavedl souřadnice bodu $M[\alpha, \beta]$, který je bodem středních vzdáleností bodů dotyku:

$$\alpha = \frac{3a}{4} \sum_{h=1}^{4} \frac{u_h}{1+u_h^3} = 0,$$

$$\beta = \frac{3a}{4} \sum_{h=1}^{4} \frac{u_h^2}{1+u_h^3} = 0,$$

neboli uvedl větu ... *dvojný bod Descartes-ova listu jest společný bod středních vzdáleností bodů dotyčných pro libovolnou polohu bodu P.*[50]

V druhé a třetí části příspěvku ukázal využití dvojnásobného bodu při konstrukci čtvrtého bodu dotyku, známe-li tři různé body dotyku, resp. uvedl souřadnice „společného tangenciálního bodu" dvou bodů dotyku. Karel Zahradník napsal:

---

[47] *Body dotyčné rovnoběžných tečen algebraické křivky mají bod středních vzdáleností nezávislý na směru tečen.* Viz [Z69], str. 282. V originále viz J. Liouville: *Mémoire sur quelques propositions générales de Géométrie et sur la théorie de l'élimination dans les équations algébriques*, Journal de Mathématiques 6(1841), str. 345.

[48] Descartův list (latinsky Folium Cartesii) je rovinná křivka, jejíž vyjádření v kartézských souřadnicích je dáno rovnicí $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, její vrchol je v bodě $\left[\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right]$, počátek soustavy souřadnic je dvojnásobným bodem a asymptotou je přímka $x + y + a = 0$. Poprvé o této křivce psal René Descartes (1596–1650) v dopise Marinu Mersennovi (1588–1648).

[49] [Z69], str. 282.

[50] [Z69], str. 283.

Označíme střed tetivy $\overline{u_h u_k}$ *s* u_{hk}*, je dvojný bod* O *průsekem spojnice* $\overline{u_{12}u_{34}}$ *se spojnicí* $\overline{u_{14}u_{23}}$*. Této vlastnosti můžeme upotřebiti ku sestrojení bodu dotyčného* u_4*, známe-li body styku* u_1*,* u_2*,* u_3*; učiňmež*

$$\overline{u_{12}O} = Om$$

$$\overline{u_{23}O} = On,$$

průsek $\overline{u_3 m} \cdot \overline{u_1 n}$ *je hledaný bod* u_4*.*

Je-li $u_3 \equiv u_{34} \equiv t$*, je i* $P \equiv t$*. Dle čl. 2. je dvojný bod* O *střed tetivy* $\overline{u_{12}u_{34}}$*; nyní máme* $u_{34} = t(x, y)$*, tím jsou souřadnice bodu* u_{12}

$$-x, -y,$$

t. j. bod t *je společným tangencialným bodem bodů* u_1*,*u_2*.*[51]

Poznamenejme, že svá tvrzení dokazoval především analyticky.

V poslední části článku vyšetřoval vztah tangenciálních bodů t, bodů dotyku a bodu $P[x, y]$. Vyšel opět z rovnice tečny Descartova listu

$$xu^4 - 2yu^3 + 3au^2 - 2xy + y = 0,$$

která prochází bodem $P[x, y]$, dotýká se listu v bodě $\left[\frac{3au}{1+u^3}, \frac{3au^2}{1+u^3}\right]$ a pro tangenciální bod platí $u^2 = -\frac{1}{t}$. Dosazením $-\frac{1}{t}$ za u^2 do rovnice tečny a jednoduchými algebraickými úpravami dospěl k rovnici

$$(4t^3 + 1)x^2 - 6t^2 xy + (t^2 + 4t)y^2 - 6atx - 6at^3 y + 9a^2 t^2 = 0, \tag{6}$$

jejíž rozbor provedl následovně:

Je-li bod $P(xy)$ *dán, obdržíme z této rovnice řešením dle* t *parametry tangencialných bodů k dotyčným bodům tečen vycházejících z bodu* P*; naopak, vytkneme-li si bod* t *jako bod tangencialní, leží všechny body* P*, jejichž spojnice s* t*, tudíž* $\overline{Pt}$ *se listu dotýká v určitém bodě* u*, na kuželosečce (6). Tato kuželosečka rozpadá se ve dvě přímky, neb diskriminant rovnice kuželosečky identicky se rovná nulle, i to za každou hodnotu* t*.*

Ty dvě přímky jsou tečny tu_1*,* tu_2*, z bodu* t *na list vedené.*[52]

V závěru krátkého článku inspirován Liouvilleovým výsledkem[53] a jeho důkazem odvodil větu:

… bodem středních vzdáleností bodů na kterékoli evolutě Descartesova listu, příslušných dotyčným bodům rovnoběžných tečen daného listu, je dvojný bod tohoto listu.[54]

---

[51] [Z69], str. 283.

[52] [Z69], str. 284.

[53] *… je pro každý úběžný bod* P *součet úseček dotyčných bodů tečen, jež bychom z bodu* P_∞ *na algebraickou křivku vedli, nezávislý na směru tečen.* Viz [Z69], str. 284. Viz též J. A. Serret: *Handbuch der höheren Algebra*, Deutsche Übersetzung von G. Wertheim, 1. díl, Teubner, Leipzig, 1868, str. 498.

[54] [Z69], str. 284–285.

Poznamenejme, že ke snadnému vyšetřování tečen Descartova listu se nabízí jeho rovnice v homogenních souřadnicích

$$x^3 + y^3 - 3axyz = (x + y + az) \cdot (\varepsilon x + y + \varepsilon^2 az) \cdot (\varepsilon^2 x + y + \varepsilon az) - a^3 z^3,$$

$$\varepsilon = \sqrt[3]{1},$$

z níž ihned vycházejí tři asymptoty jako inflexní tečny (jen jedna je reálná).[55] Karel Zahradník však homogenní souřadnice užíval jen ojediněle, přednost dával parametrickému vyjádření křivek.

Dne 4. března 1897 Karel Zahradník přednesl chorvatsky na zasedání matematicko-přírodovědné třídy Jihoslovanské akademie věd a umění příspěvek, který v témže roce vyšel tiskem v časopisu *Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu* pod názvem *Nov prilog teoriji Descartesova lista* [Z76]. Jednalo se o přehlednou, dvacetistránkovou studii pojednávající o vlastnostech Descartova listu, jež byla napsána v duchu analyticko-syntetické geometrie druhé poloviny 19. století, kdy se ještě stále studovaly vlastnosti speciálních křivek, prováděly jejich klasifikace podle různých hledisek, vyšetřovaly vlastnosti zvláštních skupin bodů a hledaly různé transformace a jejich souvislosti.

Vyšel z výsledků svých starších prací o algebraických křivkách [Z7], [Z13], [Z63], [Z69], [Z71] a [Z74], dále ze studie Em. Weyra: *O involucích na křivkách třetího stupně*[56] a V. Varićaka: *Prilog teoriji Descartesova lista*[57] a z rozsáhlých monografií H. K. J. Durège: *Die ebenen Curven dritter Ordnung. Eine Zusammenstellung ihrer bekannteren Eigenschaften*[58] a G. Salmona – W. Fiedlera: *Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven von George Salmon*[59] a sestavil takřka vyčerpávající studii o Descartově listu, v níž přehledně shrnul veškeré jeho známé i méně známé vlastnosti.

Za zmínku bezesporu stojí, že Zahradníkovu názornou konstrukci Descartova listu, jeho parametrizaci a výpočet obsahu plochy ohraničené jednou větví listu a jeho asymptotou (práce [Z13]) zmínili autoři rozsáhlé monografie [SS] (viz str. 216–217) a zařadili ji do kontextu zajímavých a přínosných prací o této křivce.

V roce 1904 výše zmíněnou studii přeložil do češtiny, nepatrně upravil a přepracoval, doplnil o odkazy na oblíbené německé vydání monografie G. Lorii: *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte*[60] a uveřejnil v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* pod názvem *Příspěvek ku theorii Descartes-ova listu* [Z86].

---

[55] Viz [We], str. 85, a zejména str. 89 až 90.

[56] ČPMF 9(1880), str. 145–152.

[57] Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu 104(1891), str. 106–119.

[58] Teubner, Leipzig, 1871, 12 + 343 stran.

[59] Deutsch bearbeitet von Dr. W. Fiedler, Teubner, Leipzig, 1873, 16 + 472 stran.

[60] Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fritz Schütte, Teubner, Leipzig, 1902, 21 + 744 stran.

Tato dvacetistránková studie se skládala z 10 částí rozdělených na 29 krátkých, číslovaných paragrafů. Abychom přiblížili Zahradníkovu typickou analyticko-syntetickou metodu, kterou více méně obvykle využíval při studiu algebraických křivek, provedeme nyní podrobnější popis jeho práce [Z86].

V jejím úvodu v prvním paragrafu nejprve uvedl klasické analytické a parametrické vyjádření Descartova listu

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

resp.

$$x = \frac{3au}{1+u^3},$$
$$y = \frac{3au^2}{1+u^3},$$

kde $u \in \mathbb{R}$. Pak popsal podmínku, kdy tři body listu leží na jedné přímce, tj. jejich parametry splňují jednoduchou rovnici $u_1 u_2 u_3 = -1$. Dále ukázal vztah mezi bodem dotyku u přímky s listem a jemu příslušným tangenciálním bodem u_1. Tedy splynou-li body u_2 a u_3, přejde předchozí rovnice v rovnici $u^2 u_1 = -1$. Označíme-li její kořeny u' a u'', pak splňují podmínky $u' + u'' = 0$ a $u'u'' = -\frac{1}{u_1}$. Karel Zahradník vztah vysvětlil takto:

Prvá z rovnic praví, že body dotyku tečen vedených z bodu listu jsou ve vztahu výměnlivém – involutorním.

Píšeme-li $\overline{Ou'} = U'$, $\overline{Ou''} = U''$, *můžeme tuto rovnici psáti*

$$(XYU'U'') = -1,$$

t. j. body sdružené k témuž tangenciálnímu bodu promítají se z dvojného bodu v paprscích, jež harmonicky dělí tečny dvojného bodu.

Dále vysvítá z téže rovnice, že, leží-li jeden bod dotyku u' *na smyčce, leží druhý bod dotyku* u'' *na ostatní části křivky, a z rovnice* $u^2 u_1 = -1$ *jde, že body dotyku* u', u'' *a tečen bodu* u_1 *jsou reálné, je-li* $u_1 < 0$, *t. j. neleží-li bod na smyčce listu.*[61]

V druhém paragrafu analyzoval speciální případ, kdy všechny tři průsečíky přímky s listem splynou, neboli $u_1 = u_2 = u_3 = u$. Potom je přímka tečnou v inflexním bodě, pro nějž platí $u^3 = -1$. Což můžeme vyjádřit tak, že Descartův list má jeden reálný inflexní bod a dva imaginární inflexní body, které leží na jedné přímce, neboť součin jejich parametrů je roven méně jedné.

V třetím paragrafu objasnil, že úběžné body Descartova listu jsou vlastně jeho inflexními body a tudíž inflexní tečny jsou jeho asymptotami.

Druhá část studie nazvaná *O kvadratické involuci bodů sdružených* u', u'' je tvořena šesti delšími paragrafy (č. 4 až 9). V prvním Karel Zahradník zapsal spojnici bodů u', u'' Descartova listu

$$[u'^2 u''^2 - (u' + u'')]x + [1 - u'u''(u' + u'')]y + 3au'u'' = 0,$$

[61] [Z86], str. 482.

která pro případ, že u' a u'' mají společný tangenciální bod u_1 (tj. jedná se o spojnici bodů sdružených bodu u_1), přechází v rovnici

$$S_{u_1} \equiv x + u_1^2 y + 3au_1 = 0.$$

Dále vysvětlil vlastnosti této přímky:

Opíše-li bod u_1 Descartes-ův list, obaluje sdružená mu přímka S_{u_1} kuželosečku, jež se jmenuje Weyr-Cayley-ova kuželosečka kvadratické involuce bodové na listu dané rovnicí $u^2 u_1 = -1$.[62]

Z vyjádření kuželosečky v tzv. „tangenciálních souřadnicích“ dospěl k jejímu analytickému vyjádření v kartézské soustavě souřadnic:

$$xy - \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = 0.$$

Jedná se tedy o rovnoosou hyperbolu, jejíž asymptoty jsou tečnami dvojnásobného bodu Descartova listu, osa symetrie listu ($x = y$) je reálnou osou hyperboly.

V další části paragrafu hledal průsečíky Weyr-Cayleyovy hyperboly s Descartovým listem. Do rovnice hyperboly dosadil za x a y z parametrického vyjádření bodů Descartova listu a po jednoduchých úpravách obdržel rovnici

$$(u^3 - 1)^2 = 0.$$

Její význam a řešení popsal takto:[63]

Je-li α imaginární třetí kořen z jedničky, jsou

$$u = 1, \quad \alpha, \quad \alpha^2$$

hledané parametry průseků, a to každý dvakráte, t. j. hyperbola kvadratické involuce $u^2 u_1 = -1$ na Descartes-ově listu dotýká se ho třikráte.

Je-li $u_1 = u_2 = u_3 = u$, obdržíme z relace $u_1 u_2 u_3 = -1$, kteráž zde přechází v $u^3 = -1$, parametry bodů obratu listu

$$u = -1, -\alpha, -\alpha^2.$$

Stručně řečeno, Karel Zahradník dospěl k závěru, že body dotyku Weyr-Cayleyovy kuželosečky kvadratické involuce s Descartovým listem jsou sdružené s inflexními body Descartova listu. Souřadnice bodu dotyku tečny S_{u_1} jsou

$$\left[-\frac{3a}{2}u_1, \frac{-3a}{2u_1}\right].$$

V dalších dvou krátkých paragrafech studoval vzájemnou polohu spojnic bodů sdružených a jejich průsečíků s Descartovým listem a dospěl ke známému závěru:

[62] [Z86], str. 483.
[63] [Z86], str. 483–484.

Bod u_1 i průsek v přímky $\overline{u'u''}$ s listem tvoří dvojinu bodů téže kvadratické involuce, ku které dvojina bodů u', u'' spadá; dle toho je spojnice u_1v tečnou kuželosečky involuce.[64]

Na závěr paragrafu popsal vztah společného tangenciálního bodu t bodů u_1 a v a vztah tohoto bodu a průsečíku w spojnice u_1v s Descartovým listem. Dospěl k závěru, že body t a w jsou opět dvojicí kvadratické involuce.

V následujícím paragrafu pro bod $v_1 \in S_1$ (bod na spojnici bodů u' a u''), který je harmonicky sdružený s bodem v vzhledem k bodům u' a u'', dokázal, že

... bod v_1 jest bodem dotyku tečny $S_{u_1} \equiv \overline{u'u''}$ kuželosečky involuční, t. j. bod dotyku tečny $\overline{u'u''}$ involuční kuželosečky je harmonicky sdružený bod s bodem v vzhledem k bodům u', u''.
... bod v_1 leží na paprsku harmonicky sdruženém s paprskem Ot vzhledem na tečny dvojného bodu.[65]

V dalších dvou paragrafech ukázal konstrukci vedoucí k nalezení bodu v_1 a popsal vzájemnou polohu spojnice bodů dotyku tečen $\overline{u'u''}$ a $\overline{u_1v}$ involuční kuželosečky se spojnicí bodu u_1 s dvojnásobným bodem Descartova listu.

Třetí část studie tvořenou čtveřicí paragrafů Karel Zahradník nazval *Další relace mezi bodem u_1 a S_{u_1}*. V jejím prvním paragrafu popsal vzdálenost tangenciálního bodu u_1 od přímky S_{u_1} (tj. od spojnice bodů u' a u'' sdružených s bodem u_1), vzdálenost dvojnásobného bodu od této přímky a stanovil souřadnice středu úsečky $u'u''$ pro libovolnou polohu bodu u_1. Dospěl k závěru, že

... spojnice $\overline{u_1O}$ půlí vzdálenost bodů sdružených. Místo středů vzdáleností bodů sdružených k bodům listu Descartes-ova jest opět týž list Descartes-ův, pouze pootočený okolo dvojného bodu o 180°.[66]

V druhém a třetím paragrafu této části vyšetřoval geometrické místo středů délek $\overline{u_1u_2}$ (jedná se o body Descartova listu, které vzniknou jako průsečíky přímky vedené z libovolného bodu u listu a tohoto listu). Odvodil následující tvrzení:

Jest tedy místo středů délek $\overline{u_1u_2}$ pro všechny přímky jdoucí bodem u opět racionální křivka stupně třetího, kteráž přechází v Descartesův list, stejně položený s daným listem, přičemž místo a třeba vzíti $\frac{a}{2}$, je-li $\alpha = 0$, t. j. $u = \infty$, což jest samozřejmé.[67]

V posledním paragrafu třetí části věnoval pozornost trojúhelníku, jehož vrcholy jsou body u_1, u' a u''. Na základě dříve odvozených vlastností Descartova listu stanovil souřadnice jeho těžiště. Dospěl k výsledku

$$\left[\frac{-au_1}{1+u_1^3}, \frac{-a{u_1}^2}{1+u_1^3}\right],$$

[64] [Z86], str. 484.
[65] [Z86], str. 486.
[66] [Z86], str. 488.
[67] [Z86], str. 489.

neboli: *Místo těžišť trojúhelníků* $u_1u'u''$ *jest opět list Descartes-ův, a to zmenšený v poměru* $1:3$ *a otočený o* 180° *okolo dvojného bodu.*[68]

Ve čtvrté části nazvané *Přímka a list* v jediném paragrafu zavedl bod středních vzdáleností průsečíků u_1, u_2 a u_3 přímky $\xi \mid \eta$ s Descartovým listem. Jeho souřadnice s využitím dříve odvozených vztahů vypočetl takto:

$$\left[\frac{\xi(a\eta^2-\xi)}{\xi^3-\eta^3}, \frac{\eta(\eta-a\xi^2)}{\xi^3-\eta^3}\right].$$

Další pozornost věnoval speciálním polohám přímky $\xi \mid \eta$; všímal si především reálné asymptoty listu a „speciálních“ tečen.

V páté části nazvané *Rovnice tečny* v jednom paragrafu z rovnice „obecné“ spojnice dvou bodů listu odvodil rovnici jeho tečny v bodě dotyku u

$$u(u^3-2)x+(1-3u^3)y+3au^2=0$$

a ukázal, že daným bodem k Descartovu listu lze vést čtyři tečny, neboť list je křivkou čtvrté třídy. Dosazením parametrů úběžných bodů listu získal z rovnice tečny rovnice asymptot listu, totiž přímky

$$x+y+a=0,$$

$$(1-i\sqrt{3})x+(1+i\sqrt{3})y-2a=0,$$
$$(1+i\sqrt{3})x+(1-i\sqrt{3})y-2a=0.$$

V šesté části *O průsecích kruhu s Descartes-ovým listem* ve třech paragrafech podrobně analyzoval vzájemnou polohu Descartova listu a kružnice. V prvním paragrafu vyšel z rovnice kružnice

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+m^2=0$$

a hledal její průsečíky s Descartovým listem. Po dosazení souřadnic bodu listu

$$\left[\frac{3au}{1+u^3}, \frac{3au^2}{1+u^3}\right]$$

do rovnice kružnice a po jednoduchých algebraických úpravách dospěl k rovnici šestého stupně vzhledem k u, která odpovídá existenci šesti průsečíků kružnice s Descartovým listem

$$m^2u^6-6a\beta u^5+3a(3a-2\alpha)u^4-2m^2u^3+3a(3a-2\beta)u^2-6a\alpha u+m^2=0.$$

Protože je kružnice jednoznačně určena třemi nekolineárními body, uvedl (bez důkazu) tři relace umožňující vypočítat tři zbývající průsečíky, a pak

[68] [Z86], str. 490.

nalezl podmínku, kdy čtyři body u_1, u_2, u_3 a u_4 Descartova listu leží na jedné kružnici. Důkaz tvrzení provedl jen pro případ kružnice procházející dvojnásobným bodem Descartova listu (tj. počátkem soustavy souřadnic), $m^2 = 0$, $u_5 = 0$ a $u_6 = \infty$. Tedy stanovil vlastně podmínku, kdy tři body Descartova listu leží na jedné kružnici procházející dvojnásobným bodem tohoto listu.

V dalším paragrafu šesté části se věnoval „dvojinám" bodů kvadratické involuce dané rovnicí $u_1 u^2 = -1$ a jí sdruženým bodům a dokazoval, že tyto body leží na kružnici procházející počátkem soustavy souřadnic (tj. dvojnásobným bodem listu), jejíž střed má souřadnice $\left[\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ a poloměr je $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

V závěrečném paragrafu šesté části hledal rovnici kružnice, která prochází involutorní „dvojinou" u' a u'' a dvojnásobným bodem Descartova listu. Dokázal, že střed této kružnice má souřadnice

$$\left[\frac{-3a(u-1)}{2(u^3+1)}, \frac{3au^2(u-1)}{2(u^3+1)}\right]$$

a poloměr $r = \frac{3a}{2} \cdot \frac{u-1}{u^3+1} \cdot \sqrt{u^4+1}$. Dokázal vlastně tvrzení:[69]

Geometrické místo středů (α, β) kruhů opsaných trojúhelníkům z dvojin kvadratické involuce $u_1 u^2 = -1$ na Descartes-ově listu a jeho dvojného bodu je tedy racionální křivka třetího stupně. Pro souřadnice bodu u listu a souřadnice středu kruhu příslušné involutorní dvojiny je v platnosti relace

$$\frac{x}{4\alpha} + \frac{y}{4\beta} + 1 = 0.$$

V jediném paragrafu sedmé části nazvané *O křivce harmonicky sdružené* objasnil „konstrukci" tzv. harmonicky sdružené křivky k Descartovu listu. Uvažoval přímku, která prochází bodem O, tj. dvojnásobným bodem listu, a protíná jej v dalším bodě A, a reálnou asymptotu $x + y + a = 0$ Descartova listu protíná v bodě B. Na uvažované přímce stanovil bod C tak, aby $(ABOC) = -1$, tj. aby bod C byl harmonicky sdružený s dvojnásobným bodem O vzhledem ke dvojici bodů A a B. Dospěl k závěru, že souřadnice bodu C jsou

$$\left[\frac{6au}{(1+u)(u^2-4u+1)}, \frac{6au^2}{(1+u)(u^2-4u+1)}\right],$$

kde u je parametr bodu A Descartova listu. Z výše uvedeného vyplývá, že harmonicky sdružená křivka k Descartovu listu je racionální křivka třetího stupně a čtvrté třídy, která má všechny asymptoty reálné.

V prvním paragrafu osmé části nazvané *O harmonických bodech a tečnách Descartes-ova listu* odvodil podmínku, kdy kružnice procházející dvojnásobným bodem listu jej protíná ve čtyřech harmonických bodech (nepřihlížeje k samotnému dvojnásobnému bodu). Ve druhém paragrafu stanovil podmínku, aby

[69] [Z86], str. 494.

čtyři tečny vedené z bodu $P[x,y]$ k Descartovu listu tvořily skupinu čtyř harmonických paprsků. Ve třetím uvedl obdobnou podmínku pro křivku harmonicky sdruženou s Descartovým listem.

V deváté části *Ekvianharmonické body a tečny Descartes-ova listu* zavedl podobné podmínky pro tzv. ekvianharmonické body.[70] S odvoláním na dříve odvozené vztahy dospěl k následujícím výsledkům:

… geometrické místo středů kruhů, jež procházejí dvojným bodem Descartes-ova listu a list v ekvianharmonických bodech protínají, jest hyperbola stejnostranná, jejíž asymptoty jsou rovnoběžny s tečnami dvojného bodu.

… geometrické místo bodů, z nichž tangenty vedené ku listu tvoří ekvianharmonický svazek, jest přímka úběžná dvakráte vzatá.

… geometrické místo bodů, z nichž tangenty vedené ku křivce harmonicky sdružené tvoří ekvianharmonický svazek paprsků, jest přímka $P = 0$ dvakráte vzatá.[71]

V poslední, desáté části *O kruhu jdoucím involutorní dvojinou a dvojným bodem listu* se pokusil v pěti paragrafech zobecnit dříve uvedené a odvozené výsledky. Stanovil například geometrické místo středů kružnic opsaných trojúhelníku, který tvoří involuční dvojice bodů a dvojnásobný bod Descartova listu při různých typech involuce.

V roce 1905 se Karel Zahradník vrátil ke studiu Descartova listu a uveřejnil v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* krátký článek pod názvem *Descartesův list jako cissoidala* [Z88], v němž přímo navázal na svoji práci *Křivky cissoidalné* [Z4],[72] ve které dokázal, že „každá racionální křivka třetího stupně je cissoidalou“. V novém článku se věnoval konstrukci Descartova listu. Nejprve uvedl jeho klasické analytické vyjádření

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

a po jednoduchých algebraických úpravách dospěl k rovnici

$$(x^2 - xy + y^2)(x + y + a) - a(x + y)^2 = 0.$$

Na základě výsledků[73] odvozených v práci [Z4] vyplynulo, že rovnice „základní“ kuželosečky Descartova listu je

$$C_2 \equiv x^2 - xy + y^2 + a(x + y) = 0$$

[70] Kružnice procházející dvojnásobným bodem Descartova listu jej protíná ještě ve čtyřech bodech (z části imaginárních) promítajících se z dvojnásobného bodu čtveřicí přímek, jejichž dvojpoměr má hodnotu α. Je-li α kořenem kvadratické rovnice $d^2 - d + 1 = 0$, čtveřice bodů přímky (resp. přímek svazku), jejichž dvojpoměr je roven číslu α, se nazývá ekvianharmonická.

[71] [Z86], str. 497.

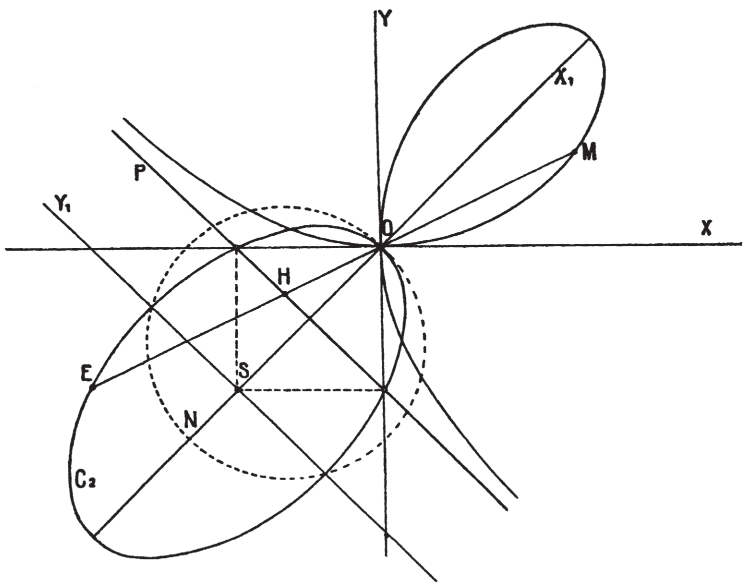
[72] ČPMF 2(1873), str. 183–185.

[73] Descartův list můžeme definovat také jako cissoidálu elipsy $x^2 - xy + y^2 + a(x + y) = 0$ pro $a > 0$ a přímky $x + y + a = 0$.

a rovnice „základní“ přímky (neboli reálné asymptoty Descartova listu) je

$$P \equiv x + y + a = 0.$$

K sestrojení bodů Descartova listu využil výše uvedenou kuželosečku – elipsu, jejíž střed je v bodě $S[-a, -a]$, a která protíná přímku P v jejích průsečících se souřadnicovými osami. Popis postupu doplnil následujícím názorným obrázkem.



Obrázek 5. Zahradníkova konstrukce – Descartův list

Konstrukci a zdůvodnění její správnosti popsal takto:

… Volíme-li bod S za počátek souřadnic pravoúhlých, spojnici $\overline{SO}$ za osu X_1, bude rovnice kuželosečky

$$\frac{x_1^2}{2a^2} + \frac{y_1^2}{\frac{2}{3}a^2} = 1.$$

Hlavní poloosa je $\overline{SO} = a\sqrt{2}$, a vedlejší osu obdržíme, učiníme-li $SN = \frac{1}{3}OS$ jako střední geometrickou úměrnou $a\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{NS \cdot SO}$. Tím je i sestrojení ellipsy dáno. Paprsek jdoucí bodem O protíná ellipsu v bodě E a přímku P v bodě H. Naneseme-li tetivu EO na tom paprsku od průseku H směrem k O, obdržíme bod M Descartes-ova listu.

Třeba tudíž jen kuželosečku C_2 sestrojiti a přímku P, načež je konstrukce listu velmi jednoduchá.[74]

[74] [Z88], str. 20–21.

Poznamenejme, že Zahradníkovu konstrukci Descartova listu jako cissoidální křivky ocenili autoři monografie [SS] (viz str. 191).

Descartův list je jednou z nejstarších „slavných“ křivek, která po několik století inspirovala matematiky. V české literatuře jí větší pozornost věnoval teprve roku 1878 August Kolařík, který uveřejnil v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* rozsáhlejší článek nazvaný *List Descartův* popisující základní analytické a geometrické vlastnosti této křivky a její konstrukce.[75]

Problematiku sečen a tečen na konci 19. století přehledně a srozumitelně shrnul A. Himstedt v článku *Die Secanten und Tangenten des Folium Cartesii.*[76] O Descartově listu a oválu[77] kromě speciálních monografií věnovaných algebraickým křivkám[78] pojednali v první polovině 20. století z různých hledisek i matematici F. G. Teixeira, K. Menger, R. Goormaghtigh a W. Hurewicz.[79]

Připomeňme, že velkou pozornost speciálním rovinným a prostorovým křivkám věnoval F. G. Teixeira v díle [Te], které se stalo jednou z nejlepších prací pojednávajících o algebraických křivkách na počátku 20. století. Například o Descartově listu přehledně pojednal na stranách 85 až 91. Za zmínku stojí, že na straně 89 k popisu listu použil identické parametrické rovnice jako užil K. Zahradník v práci [Z69]. Také novější monografie [BL], kterou roku 1970 uveřejnili H. Brocard a T. Lemoyne, užívá k elegantnímu a dobře srozumitelnému popisu listu a jeho vlastností parametrické vyjádření totožné se Zahradníkovým.[80]

Na konci devadesátých let 20. století se o Descartovu listu, jeho vlastnostech a historii zmínil Luciano Cresci v přehledné knize [Cr] věnované slavným křivkám.

---

[75] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 7(1878), str. 113–121, 146–157.

[76] Archiv der Mathematik und Physik (2) 15(1897), str. 129–145.

[77] Descartův ovál (Cartesian ovals, resp. Descartovy křivky) je rovinná algebraická křivka skládající se ze dvou oválů; poprvé ji zavedl R. Descartes roku 1637, při klasifikaci křivek ji studoval také Isaac Newton (1642–1727). Jedná se o množinu bodů P, pro jejichž vzdálenosti s a t od dvou pevně zvolených bodů S a T platí $s + mt = 0$, kde $m \in \mathbb{R}$. Je-li c vzdálenost bodů S a T, potom lze Descartův ovál v kartézské soustavě souřadnic popsat rovnicí

$$\Big[(1 - m^2)(x^2 + y^2) + 2m^2cx + a^2 - m^2c^2\Big]^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

Je-li $m = \pm 1$, je jeden ovál středovou kuželosečkou, je-li $m = \frac{a}{c}$, jedná se o tzv. Pascalovu závitnici (tj. limaçon de Pascal).

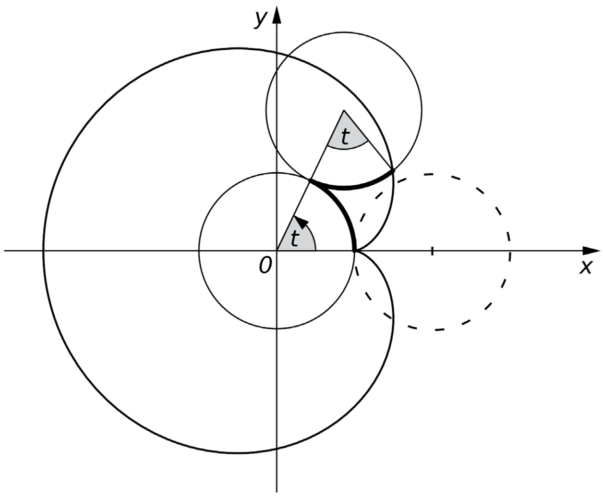
[78] Viz například [Lo].

[79] Viz F. G. Teixeira: *Sobre o folium de Descartes e a construcção de uma classe de cubicas unicursaes*, Annaes scientificos da Academia polytecnica do Porto 7(1912), str. 186–189, K. Menger: *Allgemeine Räume und Cartesische Räume*, Proceedings of the Section of Sciences, Koninklijke akademie van wetenschappen te Amsterdam 29(1926), str. 476–482, 1125–1128, 32(1929), str. 330–340, R. Goormaghtigh: *Sur le folium de Descartes*, Mathesis 48(1934), str. 11–16, W. Hurewicz: *Dimensionstheorie und Cartesische Räume*, Proceedings of the Section of Sciences, Koninklijke akademie van wetenschappen te Amsterdam 34(1931), str. 399–400.

[80] Viz [BL], str. 275. O Descartově listu viz str. 270 až 278.

Kardioida

Dne 23. října 1874 měl Karel Zahradník na zasedání mathematicko-přírodovědné třídy Královské české společnosti nauk přednášku, která vyšla ve stejném roce v časopisu *Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften (mathematisch-naturwissenschaftliche Classe)* pod názvem *Theorie der Cardioide* [Z9]. O rok později ji přeložil do češtiny, upřesnil výklad a odvození, doplnil ji četnými odkazy na českou a německou literaturu a uveřejnil v nově vzniklém časopisu *Archiv mathematiky a fysiky* pod názvem *Theorie kardioidy* [Z15]. V následujícím roce českou práci mírně zestručnil, vynechal aplikace diferenciálního a integrálního počtu, opětovně přeložil do němčiny a publikoval v časopise *Archiv der Mathematik und Physik* pod názvem *Theorie der Cardioide* [Z23].



Obrázek 6. Kardioida

Česká šestnáctistránková práce rozdělená na čtrnáct kratších paragrafů[81] podrobně pojednala o základních vlastnostech kardioidy.[82]

V první části nazvané *Rovnice bodu kardioidy* Karel Zahradník nejprve uvedl definici křivky, její vyjádření v kartézské soustavě souřadnic a jeho nezvykle podrobný geometrický rozbor:

---

[81] Práce [Z9] neobsahovala paragrafy 11 až 14; práce [Z23] neměla paragrafy 13 a 14.

[82] Kardioidou nazýváme speciální případ prosté epicykloidy. Tu opisuje bod kružnice, která se bez skluzu kotálí po nehybné kružnici v její vnější oblasti. Parametrické vyjádření prosté epicykloidy je $x = (a+b)\cos\left(\frac{b}{a}t\right) - b\cos\left(\frac{a+b}{a}t\right)$, $y = (a+b)\sin\left(\frac{b}{a}t\right) - b\sin\left(\frac{a+b}{a}t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, kde a je poloměr nehybné kružnice, b je poloměr hybné kružnice a t je velikost úhlu odvalení. Je-li $a = b$, prostá epicykloida se nazývá kardioida neboli srdcovka. Její parametrické vyjádření je $x = a[2\cos t - \cos(2t)]$, $y = a[2\sin t - \sin(2t)]$, kde $t \in \mathbb{R}$; analytické vyjádření v kartézské soustavě souřadnic je $(x^2 + y^2 - a^2)^2 = 4a^2[(x-a)^2 + y^2]$. Přitom počátek soustavy souřadnic volíme ve středu nehybné kružnice a osou x je prodloužení úsečky spojující počátek s bodem vratu.

Kardioida jest epicykloida, při níž poloměr kruhu valícího se rovný jest poloměru kruhu pevného. Rovnice její v souřadnicích pravoúhelných známá jest, zníť:

$$(x^2 + y^2)^2 - 4ax(x^2 + y^2) = 4a^2y^2.$$

Z rovnice této vysvítá, že počátečný bod souřadnic, jakož i imaginárné body kruhové v nekonečnu body dvojnými (a sice špičky) kardioidy jsou; má tudíž kardioida maximálný počet bodů dvojných, jež při křivce stupně čtvrtého vyskytnouti se mohou, aniž by se tato rozpadla ve dvě křivky stupňů nižších, a jest tudíž rodu nultého, t. j. souřadnice libovolného bodu křivky dají se vyjádřiti co algebraické racionálné lomené funkce určitého parametru o stejném jmenovateli. Co taký parameter upotřebiti můžeme poloměr kruhu, jenž se dotýká úvratné tečny kardioidy v reelném jejím bodě úvratném. Neb každý kruh protíná kardioidu v osmi bodech, má však imaginárné body kruhové s touto společně, což činí čtyři body průsečné, dále prochází třetím bodem úvratným dotýkaje se tečny úvratné, což nám další tři body dává, zbývá tudíž pouze jeden bod průsečný a ten závisí na velikosti poloměru dotčeného kruhu a sice jednoznačně.

Rovnice zmíněného kruhu zní

$$x^2 + y^2 = 2vy,$$

značí-li v poloměr jeho.[83]

Užitím výše zmíněné substituce a provedením jednoduchých algebraických úprav dospěl k parametrickému vyjádření kardioidy, totiž

$$\Big[\frac{4a(1-u^2)}{(1+u^2)^2}, \frac{8au}{(1+u^2)^2}\Big], \quad u \in \mathbb{R}.$$

Poznamenejme, že parametrické vyjádření kardioidy, které běžně Karel Zahradník užíval při vyšetřování vlastností této křivky, od něho převzal G. Loria, jak vyplývá z jeho první poznámky uvedené v monografii [Lo] na straně 142: *Diese Darstellung, in weitem Masse angewendet, findet sich in folgenden Schriften von K. Zahradník: Theorie der Cardioide (Prager Ber., 1875), Über die Cardioide (Cas., 1877), Beitrag zur Theorie der Cardioide (Archiv LXIII, 1879).*[84] G. Loria ocenil tři Zahradníkovy studie [Z9] (správě mělo být uvedeno 1874), [Z15] (správně mělo být uvedeno Archiv mathematiky a fysiky) a [Z46], které zařadil do kontextu dalších asi 35 významných prací.

V druhém paragrafu *Průseky kardioidy s přímkou* K. Zahradník analyzoval vzájemnou polohu přímky $mx+ny+1 = 0$ a kardioidy popsané výše uvedeným parametrickým vyjádřením. Společné průsečíky křivek popsal rovnicí

$$u^4 + (2 - 4am)u^2 + 8anu + 1 + 4am = 0.$$

[83] [Z15], str. 25–26.
[84] Viz též [Lo], 1. díl, 2. vydání, Leipzig, 1910, pátá poznámka na straně 153.

Připomněl, že splynou-li dva průsečné body, přejde sečna v tečnu, jejíž body dotyku lze najít z rovnice

$$t^2 + 2ut + 3 = 0, \tag{10}$$

jejíž geometrický význam objasnil takto:

Rovnice [10] *nám praví, že tečna v libovolném bodě kardioidy tuto v dalších dvou buď reelných neb imaginárných bodech protíná, dle toho-li*

$$u \gtrless \sqrt{3}$$

aneb vzhledem k rovnici [6], *dle toho-li*

$$v \gtrless \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Body příslušné parametrům $u = \pm\sqrt{3}$ *jsou mezné body, leží totiž na rozhraní bodů, z nichž buď reelné nebo imaginárné tečny vésti můžeme; body tyto přísluší kruhu o poloměru* $v = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ *a jsou body styku dvojné tečny, což doleji dotvrdíme.*[85]

Na závěr paragrafu hledal z parametrického vyjádření parametr úběžných bodů kardioidy a dospěl k rovnici

$$(1 + u^2)^2 = 0,$$

jejíž řešení je $u = \pm\mathrm{i}$, neboli dokázal, že

... úběžníky kardioidy jsou imaginárné body v nekonečnu, o kterýchž snadně lze se přesvědčiti, že jsou body kruhovými t. j. průseky nekonečně vzdálené přímky s kruhem (libovolným).

Z rovnice [7] *plyne totiž:*

$$\frac{y}{x} = \frac{2u}{1 - u^2},$$

což pro $u = \pm\mathrm{i}$ *přejde ve:*

$$\frac{y}{x} = \pm\mathrm{i}$$

kterýžto vzorec v skutku hořejší stvrzuje.[86]

Povšimněme si Zahradníkovy typické práce s nekonečnem a imaginárními útvary a jeho způsobů argumentace a dokazování, které byly typické pro geometrii druhé poloviny 19. století.

Ve třetím paragrafu *Sečna a tečna* nejprve odvodil s využitím determinantů rovnici sečny procházející body kardioidy, kterým přísluší parametry u_1 a u_2.

[85] [Z15], str. 27. Rovnice [6] zněla $v = \frac{a}{u}$.

[86] [Z15], str. 28. Rovnicí [7] Karel Zahradník myslel parametrické vyjádření kardioidy.

Po řadě algebraických úprav dospěl k nepříliš pěknému tvaru analytického vyjádření rovnice sečny:

$$\begin{vmatrix} x & y & 4a \\ 1-u_1^2 & 2u_1 & (1+u_1^2)^2 \\ -(u_1+u_2) & 2 & u_1^3+u_1^2u_2+u_1u_2^2+u_2^3+2(u_1+u_2^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Z něj pak odvodil vyjádření tečny a dostal známou rovnici

$$(1-3u^2)x + u(3-u^2)y = 4a, \tag{12}$$

kterou z geometrického hlediska vyložil takto:

Rovnice tato jest vzhledem k veličině u stupně třetího, t. j. z libovolného bodu (x, y) vésti lze ku kardioidě tři tečny, a parametry bodů styku jsou kořeny rovnice [12] *vzhledem k u. Počet tečen z daného bodu ku křivce udává třídu dané křivky, tudíž jest kardioida křivka třídy třetí a stupně čtvrtého.*[87]

V závěru paragrafu ještě nalezl parametry bodů kardioidy, v nichž mají tečny speciální polohu (jsou rovnoběžné s osou x, resp. kolmé k ose x).

V paragrafu *Asymptoty* Karel Zahradník nejprve definoval asymptotu:

Asymptota jest tečnou křivky v jejím nekonečně vzdáleném bodě; obdržíme tudíž rovnice asymptot kardioidy, vložíme-li do rovnice tečny parametry bodů nekonečně vzdálených.[88]

Snadno a rychle pak dospěl k jejímu analytickému vyjádření $x \pm iy = a$, z něhož je zřejmé, že kardioida má imaginární asymptoty, které se protínají v reálném bodě na ose x ve vzdálenosti a od počátku soustavy souřadnic.

S využitím základních znalostí analytické geometrie a z rovnice tečny dospěl v šestém paragrafu nazvaném *Normála* k analytickému vyjádření normály, totiž odvodil rovnici

$$(1-3u^2)y - u(3-u^2)x + 4au = 0, \tag{13}$$

kterou komentoval následujícími slovy:

Rovnice tato jest vzhledem k u stupně třetího, z čehož vysvítá, že z libovolného bodu (x, y) v rovině kardioidy se na tuto tři normály spustiti dají, jichž paty určují kořeny rovnice [13] *vzhledem k u.*[89]

V šestém, náročnějším paragrafu *Involuční kuželosečka* nejprve zavedl *sdružené tečny* T_1 a T_2, které vzniknou tak, že v libovolném bodu u kardioidy sestrojíme reálnou tečnu T protínající kardioidu v dalších dvou bodech u_1 a u_2, v nich pak najdeme nové tečny T_1 a T_2. Bez důkazu vyslovil dvě následující věty, neboť je považoval za naprosto zřejmé a jasné:

Sdružené tečny tvoří na kardioidě involuci quadratickou.

[87] [Z15], str. 29.
[88] [Z15], str. 29.
[89] [Z15], str. 30.

Každý pár sdružených tečen určuje na dvojné tečně dva body, jež harmonicky rozdělují body styku tečny dvojné.[90]

Zájemce o důkaz odkázal na svoji práci [Z7] a na slavnou monografii Emila Weyra *Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Curven und Flächen als deren Erzeugnisse.*[91] Hlavní pozornost věnoval odvození rovnice involuční kuželosečky, která vznikne tak, že bod u probíhá kardioidu, tj. „tečna T se otáčí po kardioidě“. S využitím výsledků uvedených ve třetím paragrafu této své studie dospěl ke známé „Weyrově kuželosečce involuční“, která je v případě kardioidy dána rovnicí

$$\left(\frac{x}{\frac{9}{5}a}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{\frac{3}{5}}a}\right)^2 = 1.$$

Jedná se tedy o hyperbolu procházející „body dotyku dvojné tečny a kardioidy“.[92]

V sedmém paragrafu vyšetřoval zajímavou *kubickou involuci* svých oblíbených *trojin bodů*, kterou zavedl takto:

Pod každým směrem můžeme tři tečny rovnoběžné ku kardioidě vésti. Tečny tyto protínají dvojnou tečnu kardioidy v bodech, jež jsou v stavu výměnném, involutorním, neboť každým jedním z také trojiny bodů určeny jsou oba ostatní. Souhrn těchto trojin bodů tvoří na tečně dvojné kubickou involuci bodovou.[93]

Pak jen s využitím základů analytické a rovinné geometrie dokázal následující tvrzení:

Každá taká trojina bodů B_1, B_2, B_3 má tu vlastnost, že vnitřní její bod B_2 odděluje vzdálenost krajných B_1, B_3 tím spůsobem, že promítají se délky $\overline{B_1B_2}$, $\overline{B_2B_3}$ ze středu C kruhu základního pod úhlem šedesáti stupňů.[94]

Poznamenejme, že Karel Zahradník reprodukoval postupy a výsledky uvedené ve dvou pracích Emila Weyra – *Grundzüge einer Theorie der cubischen Involutionen*[95] a *Über die involutorischen Winkelrelationen der Cardioide.*[96]

V osmém paragrafu nazvaném *Evoluta*[97] studoval obálku normál kardioidy, tj. evolutu této křivky. Naznačíme nyní podrobněji jeho řešení a povšimneme si jeho „neujasněné“ práce s nekonečně blízkými body, tj. s nekonečně malými veličinami, a imaginárními objekty. Poznamenejme, že jeho přístup byl zcela

---

[90] [Z15], str. 31.

[91] B. G. Teubner, Leipzig, 1869, 156 stran.

[92] Poznamenejme, že tento Zahradníkův příspěvek k teorii kardioidy uvedený v práci [Z23] připomínají i autoři [BL] na stranách 96 až 97.

[93] [Z15], str. 31.

[94] [Z15], str. 32.

[95] Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, 1874, VI. Folge, 7. Band, 56 stran.

[96] Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, 1871, 2. Abth., str. 69–70.

[97] Evolutou křivky nazýváme množinu všech jejích středů křivosti.

běžný pro geometry 19. století. Karel Zahradník nejprve připomněl, že normála N protíná „sousední“ normálu N' v bodě, který leží na evolutě. Protože rovnice normály má tvar

$$(1-3u^2)y - u(3-u^2)x + 4au = 0,$$

bude rovnice přímky procházející jejím průsekem s „nekonečně blízkou normálou“

$$6uy + (3-3u^2)x - 4a = 0,$$

a proto souřadnice průsečíků normál N a N' jsou

$$\Big[\frac{4a(1+3u^2)}{3(1+u^2)^2}, \frac{8au^2}{3(1+u^2)^2}\Big].$$

Aby našel rovnici evoluty ve tvaru $f(x,y) = 0$, vyšel z rovnice normály bodu u kardioidy a přímky procházející průsečíkem „nekonečně blízké“ normály a pomocí komplikovanějších úprav determinantů a s využitím transformace souřadnic (počátek kartézské soustavy souřadnic posunul do dvojnásobného bodu evoluty, tj. $4a - 3x = 3\xi$) obdržel analytické vyjádření evoluty

$$\Big(\xi^2 + y^2\Big)^2 - \frac{4a}{3}\xi\Big(\xi^2 + y^2\Big) = \frac{4a^2y^2}{9},$$

z něhož je patrné, že

… evoluta kardioidy je opět kardioida příslušná kruhu základnímu, jehož poloměr rovná se $\frac{a}{3}$.[98]

Devátý paragraf *Průseky kruhu s kardioidou* věnoval Karel Zahradník popisu vzájemné polohy kružnice a kardioidy. Vyšel z rovnice kružnice $x^2 + y^2 - 2px - 2qy + m^2 = 0$, kde $m^2 = p^2 + q^2 - r^2$. Jednoduchými algebraickými úpravami dospěl k rovnici

$$m^2u^4 + (2m^2 + 8ap)u^2 - 16aqu + 16a^2 - 8ap + m^2 = 0 \qquad (20)$$

popisující průsečíky kardioidy ($\Big[\frac{4a(1-u^2)}{(1+u^2)^2}, \frac{8au}{(1+u^2)^2}\Big]$, $u \in \mathbb{R}$) a výše uvedené kružnice. Tuto rovnici geometricky interpretoval takto:

Každý kruh protíná kardioidu mimo imaginárné body kruhové v dalších čtyřech bodech, jejichž parametry jsou kořeny rovnice [20].[99]

V závěru paragrafu vyslovil následující větu:

Protneme-li kardioidu libovolným kruhem v bodech u_1, u_2, u_3, u_4 a proložíme-li body u_1, u_2 a u_3, u_4 dva jiné kruhy, jež kardioidu v dalších bodech v_3, v_4 resp. v_1, v_2 protínají, tu leží ony nové čtyři průsečíky v_1, v_2, v_3, v_4 opět na jednom kruhu.[100]

[98] [Z15], str. 35.
[99] [Z15], str. 35–36.
[100] [Z15], str. 36.

Poznamenejme, že ji řádně dokázal v práci [Z5], resp. [Z13].

V desátém paragrafu *Kruh křivosti* pojednal o kružnici křivosti, jejím poloměru a středu. Dospěl k závěru, že

... je geometrické místo středů kruhů křivosti totéž co enveloppa normál dané křivky.[101]

Vysvětlil jednoduchou konstrukci kružnice křivosti v libovolném bodu kardioidy, kterému přísluší parametr u. Je však s podivem, že výklad nedoplnil žádným názorným obrázkem, náčrtem či rytinou konstrukce. Ocitujme pro zajímavost celý jeho popis postupu konstrukce.

Spojme bod u *s počátkem souřadnic* O*, a vztyčme ve středu* B *kolmici, kteráž protíná osu* Y *ve středu* S *kruhu bodu* u *příslušného, tudíž* $\overline{OS} = v$*. Opišme nyní poloměrem rovným* $\frac{1}{3}\overline{OS}$ *kruh, jenž se tečny úvratné v bodě úvratném kardioidy dotýká a sice z té strany, na které se bod* u *nenalézá, tím obdržíme bod* u_1 *co průsek kruhu křivosti v bodu* u *s kardioidou. Sestrojme v středu* $\overline{uu_1}$ *kolmou, tu protíná nám tato normálu bodu* u *v středu* C *hledaného kruhu křivosti a* $\overline{Cu}$ *jest hledaný poloměr křivosti. Nazveme-li bod* u_1 *sdružený bodu* u*, můžeme následující větu pronésti:*
„Body sdružené průsekům kruhu s kardioidou leží opět na kruhu.“[102]

V jedenáctém paragrafu *Rektifikace kardioidy*, resp. ve dvanáctém paragrafu *Kvadratura kardioidy* s využitím vzorců známých z diferenciálního a integrálního počtu vypočítal délku kardioidy, resp. obsah plochy, kterou kardioida omezuje.

V třináctém paragrafu *Kubatura tělesa povstalého rotací kardioidy kolem tečny úvratné*, resp. ve čtrnáctém paragrafu *Komplanace téhož rotačního tělesa* vypočítal objem, resp. povrch rotačního tělesa, které vzniklo rotací kardioidy kolem osy x.

Tato Zahradníkova studie obsahovala podstatně podrobnější vysvětlení a odvození jednotlivých tvrzení než jeho pozdější práce věnované speciálním křivkám, tj. Descartovu listu, lemniskátě, cissoidě či strofoidě. Na rozdíl od nich však nebyla doplněna žádným obrázkem studované křivky či popsaných konstrukcí. Z hlediska vývoje geometrie křivek neobsahovala žádné nové poznatky, jen drobná zjednodušení nebo vylepšení důkazů již známých vlastností. Na druhé straně poskytovala informace o dostupné, především německy psané literatuře.[103] Byla studií, která mohla začínajícím českým geometrům nabídnout přehledný, česky psaný souhrn základních poznatků o vlastnostech kardioidy a metodách všeobecně užívaných při studiu racionálních křivek.

Roku 1877 dokončil Karel Zahradník v Záhřebu čtyřstránkový příspěvek *Beitrag zur Theorie der Kardioide* [Z46], který vyšel o dva roky později v časopisu

[101] [Z15], str. 37.
[102] [Z15], str. 36–37.
[103] Karel Zahradník se odvolával na starší i novější práce Em. Weyra, L. Cremony, G. Salmona, W. Fiedlera, H. Weissenborna a na své prvotiny.

Archiv der Mathematik und Physik v rubrice *Miscellen*, v níž byly otiskovány zajímavé příklady, inspirativní drobnosti, vylepšení důkazů a různá zajímavá, nepříliš obtížná matematická tvrzení, která mohla zaujmout učitele matematiky nebo talentovanější středoškolské studenty.

Karel Zahradník řešil tuto úlohu: stanovte množinu bodů v rovině kardioidy, z nichž vedená trojice tečen se dotýká kardioidy ve třech různých bodech tak, že vzniklý trojúhelník má konstantní obsah.[104] Obsah článku dobře vystihuje recenze A. Maynze z Ludwigslustu uveřejněná v časopise *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. Ocitujme její celé znění:[105]

Nachdem die Cardioide, deren Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 - 4ax(x^2 + y^2) - 4a^2y^2 = 0,$$

mittels eines variablen Parameters durch die Gleichungen:

$$x = \frac{4a(1-u^2)}{(1+u^2)^2}; \qquad y = \frac{8au}{(1+u^2)^2}$$

definirt ist, und die drei von einem Punkte (xy) *an die Cardioide gehenden Tangenten durch die für* u *cubische Gleichung:*

$$u^3 + \frac{3x}{y}u^2 - 3u - \frac{x-4a}{y} = 0$$

gefunden sind, ferner (xy) *Pol der drei Berührungspunkte mit den Parametern* u_1, u_2, u_3 *genannt ist, geht der Herr Verfasser zur Lösung der Aufgabe über, den Ort der Pole constanter Berührungsdreiecke bei der Cardioide zu finden. Die Rechnung geschieht sehr einfach mit Hülfe der bekannten Determinante, die den Inhalt eines Dreiecks durch die Coordinaten der Eckpunkte ausdrückt; in dieser Determinante werden für die Coordinaten ihre Ausdrücke in* u_1, u_2, u_3 *substituirt. Durch Quadriren wird diese Determinante dann eine symmetrische Function von* u_1, u_2, u_3, *die leicht mit Berücksichtigung der oben angegebenen cubischen Gleichung für* u *rational durch* x *und* y *ausgedrückt werden kann.*

Stejný problém řešil také v krátkém příspěvku *Pole constanter Berührungsdreiecke bei der Cardioide* [Z28], který přednesl na zasedání matematicko-přírodovědné třídy Královské české společnosti nauk dne 23. března 1877. Na něj přirozeně navázalo krátké pokračování nazvané *Zusammenhang zwischen dem Pole und dem Schwerpunkte des Berührungsdreieckes bei der Cardioide* [Z29] přednesené ve stejný den, v němž stanovil množinu bodů těžiště trojúhelníku styku (der Berührungsdreiecke neboli tečnový trojúhelník). Karel Zahradník dospěl k závěru:

[104] *Wir können nun uns die Aufgabe stellen, welches ist der Ort der Pole constanter Berührungsdreiecke bei der Kardioide?* Viz [Z46], str. 94.

[105] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 11(1879), str. 516.

Führen wir nun diese Werte in Gl. (1) ein, so erhalten wir

$$\xi = \frac{a}{32}\frac{8x^4 + 96x^2y^2 + 5y^4 + 8ax^3 + 96axy^2 - 88a^2x^2 - 64a^2y^2 - 64a^3x}{\Big(y^2 + (x-a)^2\Big)^2}$$

$$\eta = \frac{a}{16}\frac{7x^3y - 8ay(x^2 + 8y^2) + 80a^2xy + 32a^3y}{\Big(y^2 + (x-a)^2\Big)^2} \tag{4}$$

Aus den Gleichungen (4) ersehen wir, dass der Pol eine Curve $4\cdot n$ *Ordnung beschreibt, wenn der entsprechende Schwerpunkt des Berührungsdreieckes eine Curve* n*ter Ordnung beschreibt. Insbesondere entspricht jeder Geraden, welche durch den reelen Rückkehrpunkt der Cardioide hindurchgeht, eine Curve vierter Ordnung, welche jene Gerade zur Tangente hat.*[106]

Kardioida byla ve druhé polovině 19. století inspirativní neelementární křivkou. Na konci šedesátých let se její vyšetřování prostředky „čisté“ analytické geometrie stalo tématem několika článků uveřejněných ve výročních zprávách středních škol.[107] V sedmdesátých letech její geometrické a metrické vlastnosti studoval Em. Weyr,[108] involuční vztahy jejích „speciálních“ bodů popsal H. Brocard,[109] základní vlastnosti a konstrukce uvedl E. Laguerre.[110] V osmdesátých letech se kardioidou inspirovali M. Weill, J. Pleyl a G. de Longchamps a mnozí další, kteří popisovali geometrické vlastnosti a konstrukce křivek třetího a čtvrtého stupně.[111] Na konci 19. století a v prvních dvou desetiletích 20. století speciální body kardioidy a jejich involuční vztahy, konstrukci křivky, oskulačních kružnic a tečen a zejména společné vlastnosti křivek

---

[106] [Z29], str. 190. Poznamenejme, že zmíněná rovnice (1) vyjadřovala souřadnice těžiště a zněla $\xi = \frac{4a}{3}\sum\frac{1-u_k^2}{(1+u_k^2)^2}$, $\eta = \frac{8a}{3}\sum\frac{u_k}{(1+u_k^2)^2}$, kde u_k byly parametry bodů dotyku (resp. kotangenty velikostí úhlů, které svíraly průvodiče bodů dotyku tečny a kardioidy s kladným směrem osy x).

[107] Například v referativním časopisu *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* byli čtenáři upozorněni na dvě zajímavé práce nepříliš známých německých středoškolských profesorů – C. Plagge: *Untersuchungen über die Cardioide*, Programm der Gymnasium Recklinghausen, 1868, a A. Hössrich: *Discussion der Cardioide*, Programm der Realschule und des Progymnasium, sowie der Vereinigten Städtischen Schulen zu Saalfeld, 1870, 8 stran.

[108] Viz již výše uvedené jeho práce a italský článek *Sopra una proprieta metrica della cardioïde*, Rendiconti del Real Istituto Lombardo di scienza e lettere 5(1872), Serie II., fasc. IV., str. 204–206.

[109] H. Brocard: *Sur la cardioide*, N. C. M. 3(1877), str. 231–233, 408–410.

[110] E. Laguerre: *Sur la cardioïde*, Nouvelles annales de mathématiques (2) 17(1878), str. 55–69.

[111] Viz například M. Weill: *Note sur la cardioïde et le limaçon de Pascal*, Nouvelles annales de mathématiques (2) 20(1881), str. 160–171, J. Pleyl: *Zur Cardioide*, Archiv der Mathematik und Physik 68(1883), str. 166–180, G. de Longchamps: *Rapprochement entre la trisectrice de Mac-Laurin et la cardioïde*, Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, 1887, str. 601–608.

čtvrtého stupně popsali a syntézu předchozích výsledků provedli například L. Loucheur, L. Sire, C. E. Youngman, F. Balitrand a R. Goormaghtigh.[112]

V devadesátých letech 20. století se kardioidou, jejími vlastnostmi a historií zabýval Luciano Cresci v knize [Cr] věnované slavným křivkám.

Lemniskáta

Roku 1898 Karel Zahradník publikoval v časopisu *Archiv der Mathematik und Physik* německy psaný článek *Zur Theorie der Lemniskate* [Z78], který o rok později vyšel v nezměněné podobě v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* pod názvem *Příspěvek k theorii lemniskaty* [Z79]. Věnoval jej speciální trojici bodů na lemniskátě,[113] tzv. *trojině oskulačních bodů*. Nejprve uvedl analytické vyjádření lemniskáty v kartézské soustavě souřadnic

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Pak přešel k parametrickému vyjádření této křivky

$$x = at\sqrt{2}\frac{1 + t^2}{1 + t^4},$$

$$y = at\sqrt{2}\frac{1 - t^2}{1 + t^4},$$

kde $t \in \mathbb{R}$. Ze znalosti její neelementární vlastnosti[114] dospěl k rovnici

$$t^I t^{II} t^{III} t^{IV} = 1,$$

---

[112] Viz L. Loucheur: *Sur le lieu des sommets des angles constants circonscrits ou normaux á une épicycloïde. Application á la démonstration purement géométrique de propriétés de la cycloïde, de la cardioïde et des hypocycloïdes á trois et quatre rebroussements*, Nouvelles annales de mathématiques (3) 11(1892), str. 374–384, L. Sire: *Sur le rayon de courbure de la cardioïde*, Revue de mathématiques spécialles 18(1908), str. 484, C. E. Youngman: *Some geometry of the cardioide*, Education Times (2) 16(1909), str. 89–98, F. Balitrand: *Note sur la cardioïde*, Nouvelles annales de mathématiques (4) 15(1915), str. 214–222, R. Goormaghtigh: *Sur un rapprochement remarquable entre l'hypocycloïde á trois rebroussements, le folium de Descartes et la cardioïde*, Nouvelles annales de mathématiques (4) 16(1916), str. 241–252.

[113] Roku 1694 lemniskátu poprvé analyticky popsal Jacob Bernoulli (1654–1705). Dnes ji definujeme jako speciální případ Cassiniho křivky, která je množinou všech bodů roviny majících konstantní součin vzdáleností od dvou pevně zvolených bodů F_1 a F_2, tj. ohnisek. Označíme-li polovinu jejich vzdálenosti e, pak lze Cassiniho křivku v kartézské soustavě souřadnic popsat rovnicí $(x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) = a^4 - e^4$, kde a je parametr křivky. Je-li $a^2 = e^2$ dostáváme tzv. Bernoulliovu lemniskátu. Konvexními případy křivky se pokoušel astronom Giovanni Cassini (1625–1712) nahradit dráhy planet (viz [Lo], str. 208). Poznamenejme, že lemniskáta má i praktický význam. Tečny v jejím dvojnásobném bodě jsou inflexní, a protože její polární rovnice je jednoduchá, lze ji bez obtíží vytyčit. Užívá se v okolí jejího dvojnásobného bodu jako přechodnice při stavbě dálnic či jejich uzlů.

[114] *Každý kruh, jenž se dotýká lemniskaty v reálném dvojném bodě, protíná ji v 7 pevných bodech, osmý průsek jeho je závislý na poloměru u toho kruhu jednoznačně, t. j. můžeme souřadnice toho bodu vyjádřiti pomocí poloměru u jako racionálního parametru.* Viz [Z79], str. 27.

která vyjadřuje podmínku, kdy čtyři body lemniskáty t^I, t^{II}, t^{III} a t^{IV} leží na jedné kružnici. Pro speciální případ $t^{II} = t^{III} = t^{IV} = t$ přejde předchozí rovnice v rovnici

$$t^3 t^I = 1,$$

jež vyjadřuje vztah mezi bodem t kružnice křivosti a jejím reálným průsečíkem t' s lemniskátou. Z této rovnice vyplývá, že každým bodem t' lemniskáty prochází tři kružnice křivosti, a to jedna reálná a dvě imaginární. Přepíšeme-li rovnici na tvar

$$t^3 = \frac{1}{t'}$$

a označíme-li její kořeny t_1, t_2 a t_3, po jednoduchých geometrických úvahách a algebraických úpravách vyplyne, že body t_1, t_2 a t_3 kružnic křivosti procházejících bodem lemniskáty t' leží opět na jedné kružnici.

Karel Zahradník tuto trojici označil jako *trojinu bodů oskulačních* a definoval ji takto: *Tři body oskulační t_1, t_2, t_3, jež sdruženy jsou bodu t', t. j. jejichž kruhy křivosti společně probíhají bodem t' lemniskaty, jmenujeme trojinou bodů oskulačních.*[115]

V další části článku vyšetřoval těžiště této trojice a pak stanovil rovnici kružnice jí opsané. Dospěl k závěrům:

Leží tudíž těžiště trojiny oskulační na lemniskatě i jest oným bodem, jemuž je ta trojina sdružená.[116]

Kruh opsaný trojině oskulační skládá se z přímky úběžné a z přímky P, která bodem t, jemuž je trojina oskulační sdružená, probíhá.

Přímka P je společná tětiva reálného kruhu křivosti a lemniskaty. Opíše-li bod t lemniskatu, obaluje přímka P rovnoosou hyperbolu

$$H \equiv x^2 - y^2 - c^2 = 0,$$

jejíž reálná poloosa $OA = c$.[117]

Hlavní pozornost však věnoval popisu konstrukce středu křivosti reálné oskulační kružnice křivosti, která prochází bodem t studované lemniskáty. Vyšel přitom ze známého faktu, že lemniskátu lze chápat jako průmět rovnoosé hyperboly H, pokládáme-li její střed za pól. Konstrukci popsal takto:

… Na $\overline{Ot}$ sestrojme v bodě t kolmici. Její průsek s lemniskatou je hledaný bod t^*. Naopak můžeme k bodu t^* lemniskaty jako bodu oskulačnímu nalézti sdružený bod t jakožto průsek kruhu s lemniskatou, je-li průměr kruhu Ot^*.

Jelikož sestrojení normály v bodu lemniskaty nečiní žádných obtíží, je tím i jednoduchá konstrukce poloměru křivosti i středu křivosti v bodě lemniskaty dána.[118]

---

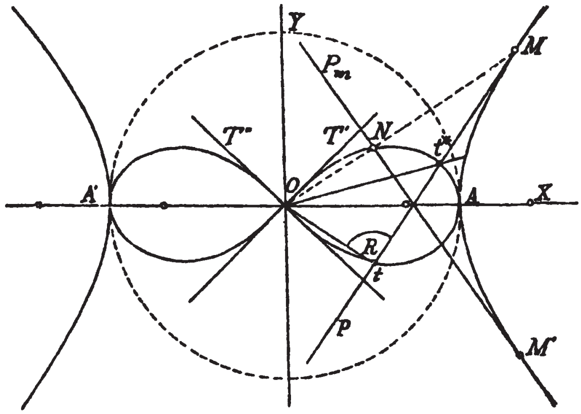
[115] [Z79], str. 29.

[116] [Z79], str. 29.

[117] Poznamenejme, že $c = a\sqrt{2}$ a rovnice přímky P je $(1+t^2)x + (1-t^2)y - 2a\sqrt{2}t = 0$. Viz [Z79], str. 30.

[118] [Z79], str. 30.

Popis doplnil následujícím názorným obrázkem.



Obrázek 7. Zahradníkova konstrukce – lemniskáta

V závěru článku odvodil a dokázal větu: *Hyperbola H je sama sobě polarореciproká vzhledem ke kruhu* Γ.[119] Ocitujme pro zajímavost delší část z jeho postupu:

Přímka P je tudíž tečnou hyperboly H; její bod dotyčnosti budiž M a t pata kolmice s bodu O na P spuštěné. Můžeme však lemniskatu považovati za inversní křivku rovnoosé hyperboly H se středem inverse v bodě O a poloměrem kruhu inverse $OA = c$. Platí tudíž

$$ON \cdot OM = c^2.$$

Uvažujeme-li lemniskatu jakožto průmětnici hyperboly H s polem v O, tu odpovídá bodu $M(x, y)$ hyperboly bod $t(\xi, \eta)$ lemniskaty. Uvažujeme-li však lemniskatu jako křivku inversní hyperboly H vzhledem k Γ jakožto kruhu inverse, odpovídá bodu $M(x, y)$ hyperboly H bod $N(\xi', \eta')$ lemniskaty. Body t, N leží symetricky vzhledem k ose X. Jest totiž

$$t\begin{cases} \xi = \frac{c^2 x}{x^2+y^2} \\ \\ \eta = -\frac{c^2 y}{x^2+y^2} \end{cases} \qquad N\begin{cases} \xi' = \frac{c^2 x}{x^2+y^2} \\ \\ \eta' = \frac{c^2 y}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

Patrně je polára P_m bodu M vzhledem ke kruhu inverze Γ tangentou hyperboly H, jejíž bod dotyčnosti M' s bodem M symetricky leží k ose X.[120]

Připomeňme ještě, že Karel Zahradník věnoval speciálním trojicím bodů na lemniskátě článek nazvaný *Neke vlastitosti trojina točaka oskulacije kod lemniskate* [Z48]. Byl tištěnou verzí jeho přednášky, kterou proslovil dne 28. května

[119] [Z79], str. 31.
[120] [Z79], str. 30–31.

1879 jako dopisující člen matematicko-přírodovědné třídy Jihoslovanské akademie věd. Tato chorvatská práce byla svojí strukturou a uvedenými výsledky totožná s česky psanou prací [Z79]; obsahovala však podrobnější odvození jednotlivých výsledků, pečlivější vysvětlení použitých postupů (např. dílčí úpravy a mezivýsledky, výklad výpočtu determinantů)[121] a názornější geometrický popis získaných množin bodů apod.

Poznamenejme, že lemniskátou se nezabýval pouze Karel Zahradník. Naopak, tato křivka patřila mezi oblíbené a často analyzované. Přitahovala pozornost začínajících geometrů i středoškolských učitelů, postupně se objevila takřka ve všech větších učebnicích geometrie a v monografiích věnovaných křivkám.[122]

Na Karla Zahradníka měly pravděpodobně větší vliv práce Emila Weyra, jeho spolužáka, přítele a kolegy. Například v roce 1873 Emil Weyr uveřejnil čtyřicetistránkovou studii nazvanou *Die Lemniscate in rationaler Behandlung*,[123] v níž podrobně vyložil vlastnosti lemniskáty a analyticko-projektivní metody používané k jejímu popisu. O dva roky později publikoval drobný příspěvek nazvaný *Quelques théorémes nouveaux sur la lemniscate*[124] pojednávající o vlastnostech tečen a dotykových bodů.

Několik kratších i rozsáhlejších příspěvků věnovaných lemniskátě, jejím tečnám, normálám, involucím a konstrukcím bylo otištěno v osmdesátých a devadesátých letech 19. století v časopisu *Archiv der Mathematik und Physik*. Obvykle však nepřinášely zásadní nové výsledky, ale přehledně shrnovaly již dříve odvozené a dokázané vlastnosti, předkládaly elegantnější důkazy a vylepšené konstrukce nebo ukazovaly další neelementární rozšíření výsledků na „příbuzné" křivky.[125] I ony mohly být Zahradníkovou inspirací, neboť výše uvedený časopis pravidelně sledoval a dokonce do něj přispíval.

Na konci 19. a na počátku 20. století se problematika lemniskáty objevila v několika výročních zprávách středních škol nebo malých populárně naučných knížkách, neboť byla srozumitelná i pro středoškolské profesory a talentované studenty.[126]

---

[121] Úplní začátečníci byli odkazováni na Zahradníkovu učebnici teorie determinantů [Z42] a také na slavnou a velmi oblíbenou učebnici S. Günthera: *Lehrbuch der Determinantentheorie für Studierende*, Bezold, Erlangen, 1875, VIII + 236 stran.

[122] Viz například [Lo].

[123] Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, 1873, VI. Folge, 6. Band, 40 stran.

[124] Bulletin de la Société Mathématique de France 1(1875), str. 18–19.

[125] Viz například práce W. Schjerning: *Ueber die Scharen von Flächen vierter Ordnung mit sechzehn singulären Punkten, welche durch eine Lemniskate gehen*, AMP (2) 6(1888), str. 113–142; E. Oekinghaus: *Die Lemniskate*, AMP (2) 6(1888), str. 337–371, (2) 8(1890), str. 24–82; E. Schultz: *Ueber eine neue Construction der Lemniskate*, AMP (2) 12(1893), str. 318–326.

[126] Připomeňme dvě německé práce, které byly pozitivně recenzovány v referativním časopisu *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* – G. Stiner: *Die Bernoulli'sche Lemniskate dargestellt als Orthogonalprojection von Raumcurven*, Programm Thurgauische Kantonschule, 1897, 24 stran + 4 obrazové přílohy, P. Meyer: *Ueber die Siebenteilung der Lemniskate*, Strassburg, 1900, 23 stran.

Roku 1911 předložil W. X. Gyr na univerzitě v Bernu disertační práci nazvanou *Die Polaren der Lemniskate*, která na devětapadesáti stránkách uvedla veškeré dříve popsané vlastnosti lemniskáty včetně nejrůznějších involucí a konstrukcí této křivky. Touto prací zájem o studium lemniskáty vyvrcholil. V následujících letech byly publikovány více méně drobné, nepůvodní příspěvky, jež rekapitulovaly starší výsledky, případně byly sepsány pro středoškolské profesory, studenty a další zájemce o studium speciálních křivek a jejich vlastností.[127]

Gino Loria v rozsáhlé monografii [Lo] pojednávající o algebraických a speciálních křivkách na stranách 204 až 211 připomněl nejvýznamnější práce o lemniskátě. V 95. paragrafu, který věnoval rozboru různých parametrických vyjádření této křivky, ocenil také jednu Weyrovu studii a Zahradníkův příspěvek [Z79]. G. Loria napsal: *Weitere Folgerungen ausser den im Texte gegebenen, siehe in der schönen Abhandlung von Em. Weyr, Die Lemniskate in rationaler Behandlung (Prager Abh. VI, 1874), und in einer neueren (böhmisch geschriebenen) Arbeit von K. Zahradnik, Beiträge zur Theorie der Lemniskate (Časopis, 28, 1899).*

Na konci devadesátých let 20. století o lemniskátě stručně pojednal Luciano Cresci v přehledné knize [Cr] věnované slavným křivkám, jejich historii a základním vlastnostem.

Strofoida

Dne 28. května 1879 měl Karel Zahradník na zasedání matematicko-přírodovědné třídy Jihoslovanské akademie věd přednášku věnovanou speciálním trojicím bodů na strofoidě,[128] která o rok později vyšla tiskem v časopisu *Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu* pod názvem *Vlastitosti trojina oskulacije kod strophoide* [Z49]. V roce 1881 ji přeložil do češtiny a uveřejnil v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* pod názvem *Vlastnosti trojin oskulačních na strophoidě* [Z50].

V následujících odstavcích jen stručně naznačíme obsah této jedenáctistránkové studie, neboť se svojí strukturou, užitými postupy a metodami neliší od Zahradníkových prací, v nichž pojednal o speciálních křivkách. V úvodním paragrafu uvedl názornou geometrickou definici strofoidy, její analytické a parametrické vyjádření.

Bodem A *na ose* (X) *vedená přímka nechť protíná osu* (Y) *v bodě* B*. Přímku tuto* $\overline{AB}$ *seče kružnice opsaná ze středu* B *poloměrem* $\overline{BO}$ *v bodech* M, M'

[127] Připomeňme v této souvislosti dvě české práce: V. Hübner: *Lemniskata*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 43(1914), str. 111–116, V. Jeřábek: *O lemniskátě Boothově*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 57(1927), str. 1–3.

[128] Strofoidou rozumíme množinu všech průsečíků každé ze svazku kružnic, které mají osu x jako společnou tečnu s bodem dotyku $T = [0, 0]$, s jejím průměrem ležícím na polopřímce svazku s vrcholem $V = [-a, 0]$, kde $a > 0$. Poznamenejme, že strofoidu lze v kartézské soustavě souřadnic zapsat rovnicí $(a - x)y^2 = (a + x)x^2$, kde $x \in \langle -a, a)$, popřípadě parametrickým vyjádřením $\left[\frac{-a(1-t^2)}{1+t^2}, \frac{-at(1-t^2)}{1+t^2}\right]$, kde $t \in \mathbb{R}$.

a místo takových bodů M je křivka racionální stupně třetího a jmenuje se strophoida.

Rovnice strophoidy je, píšeme-li $\overline{OA} = a$,

$$x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0.$$

Otočíme-li osy souřadnic o -45°, berouce tečny bodu dvojnásobného za nové osy souřadnicové, nabude rovnice křivky tvaru:

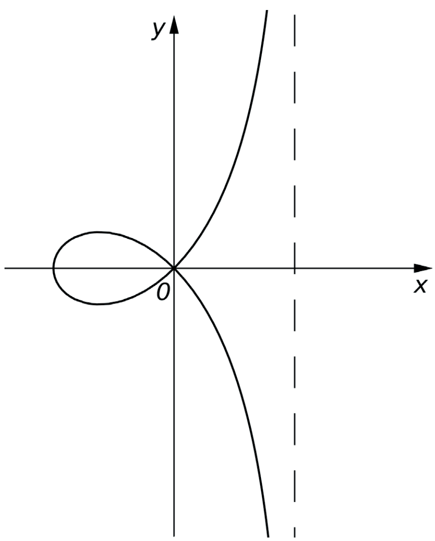
$$(x + y)(x^2 + y^2) - 2\sqrt{2}a \cdot x \cdot y = 0,$$

jíž můžeme i nahraditi rovnicemi

$$x = \frac{cu}{(1 + u)(1 + u^2)}$$

$$y = \frac{cu^2}{(1 + u)(1 + u^2)},$$

kdež je $c = 2\sqrt{2} \cdot a$, u parametrem bodu u, totiž trigonometrická tangenta úhlu, jejž radius vector bodu u s positivnou osou X uzavírá …[129]



Obrázek 8. Strofoida

V druhém a třetím paragrafu této práce popsal vzájemnou polohu kružnice a strofoidy, uvedl podmínku, kdy čtyři body strofoidy leží na jedné kružnici a popsal konstrukci oskulační kružnice. Dokázal, že

[129] [Z50], str. 261.

... každým bodem strophoidy proložiti můžeme tři kruhy oskulační; body oskulační těchto kruhů leží opět s bodem u_1*, k němuž jsou přidruženy opět na jednom a témž kruhu.*[130]

Poznamenejme, že nerozlišoval objekty reálné a imaginární. Dále si všímal vztahu bodu strofoidy a oskulační trojice (tj. dotykových bodů výše zmíněných oskulačních kružnic) a dokázal, že každému bodu strofoidy přísluší právě jediná oskulační trojice a obráceně. Navíc naznačil, že oskulační trojice stanovují na strofoidě kubickou involuci. Následně definoval *oskulační trojúhelník* a uvedl jeho základní charakteristiku:

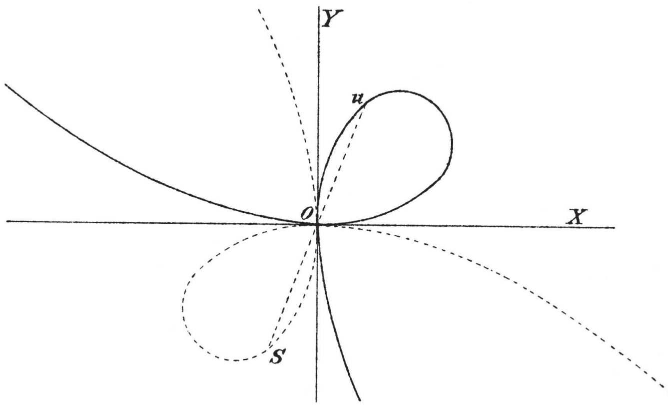
Trojúhelník, jejž tvoří trojina oskulační, pojmenujeme trojúhelníkem oskulačním a týž určen je buď jedným vrcholem aneb bodem, k němuž je přidružen. Dva vrchole trojúhelníku tohoto jsou imaginárné, jeden je pouze realný t. j. libovolným bodem u_1 *strophoidy můžeme pouze jediný reálný kruh oskulační proložiti ...*[131]

Ve čtvrtém paragrafu studoval oskulační trojúhelník. Nejprve stanovil souřadnice těžiště $S = [\alpha, \beta]$ oskulační trojice u_1, u_2, u_3 sdružené s bodem u a dospěl ke vztahům

$$\alpha = \frac{-cu}{(1+u)(1+u^2)},$$

$$\beta = \frac{-cu^2}{(1+u)(1+u^2)}.$$

Ukázal tedy, že množinou průsečíků těžnic všech oskulačních trojic je strofoida shodná s původní strofoidou otočenou kolem počátku soustavy souřadnic (tj. kolem dvojnásobného bodu strofoidy) o úhel o velikosti 180° (viz obrázek 9).



Obrázek 9. Zahradníkova konstrukce geometrického místa průsečíků těžnic oskulačních trojic

[130] [Z50], str. 263.
[131] [Z50], str. 264.

V pátém paragrafu ze znalosti souřadnic bodů oskulační trojice odvodil analytické vyjádření kružnice opsané oskulačnímu trojúhelníku

$$x^2 + y^2 - c\frac{1+2u}{(1+u)^2}x - c\frac{(2+u)u}{(1+u)^2}y + \frac{c^2u}{(1+u)^2} = 0.$$

V šestém paragrafu se věnoval hlubší analýze kružnice opsané oskulační trojici bodů. Nejprve nalezl souřadnice jejího středu

$$\xi = \frac{c}{2}\frac{1+2u}{(1+u)^2}, \qquad \eta = \frac{c}{2}\frac{(2+u)u}{(1+u)^2}, \tag{13}$$

a pak získané vztahy komentoval slovy:

Ze tvaru rovnic (13) ihned shledáváme, že jest řečené místo kuželosečka i to parabola, poněvadž parametry úběžných bodů v jednu hodnotu splývají t. j. přímka úběžná jest tečnou kuželosečky.[132]

Vyloučením parametru u z výše uvedených rovnic obdržel analytické vyjádření paraboly

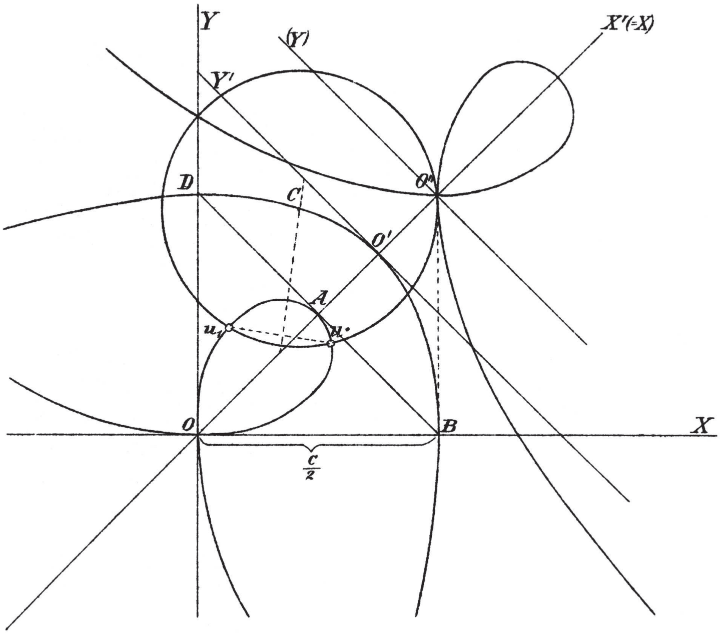
$$(\xi - \eta)^2 + c(\xi + \eta) - \frac{3c^2}{4} = 0. \tag{16}$$

V závěru paragrafu vyložil pěknou konstrukci kružnice opsané oskulační trojici (viz obrázek 10).

… Nyní můžeme i sestrojiti kruh opsaný trojině oskulační sdružené k danému bodu u. Sestrojme nejdříve bod oskulační u_1 realného kruhu oskulačního, jdoucího bodem u. Body oskulační u_2, u_3 obou ostatních kruhů oskulačních jdoucích bodem u jsou imaginárné. Jelikož kruh jdoucí trojinou oskulační u_1, u_2, u_3 též bodem sdruženým u probíhá, je $\overline{uu_1}$ tětiva kruhu opsaného trojině oskulační. Kolmice ve středu tětivy $\overline{uu_1}$ vztýčená jde středem C kruhu opsaného, jenž leží na parabole. Jest tudíž C průsek kolmice sestrojené ve středu tětivy $\overline{uu_1}$ s parabolou (16).

Kolmice zmíněná protíná sice parabolu ve dvou bodech, a který z průseků je příslušný střed C, patrno ihned z rovnic (13); dokud je u positivno t. j. bodům kličky [ξ, η je positivno] přísluší tudíž onen díl paraboly, jenž současně s kličkou v témž úhlu tangent dvojného bodu leží, tedy mezi $+X$ i $+Y$, atd.[133]

[132] [Z50], str. 267.
[133] [Z50], str. 268–269.



Obrázek 10. Zahradníkova konstrukce kružnice opsané oskulační trojici bodů

V sedmém paragrafu studoval obálku kružnic opsaných oskulační trojině a dospěl k závěru, že je to strofoida kongruentní s původní strofoidou posunutá v kladném směru osy souměrnosti o $2a$.

V osmém paragrafu popsal Eulerovu přímku (tj. spojnice těžiště $S = [\alpha, \beta]$ oskulační trojice a středu $C = [\xi, \eta]$ kružnice opsané této trojině). Nejprve stanovil průsečík výšek $H = [\alpha', \beta']$ oskulačního trojúhelníku a střed Feuerbachovy kružnice $C' = [\xi', \eta']$ (kružnice procházející středy stran oskulačního trojúhelníku, patami jeho výšek a body, které půlí vzdálenosti mezi vrcholy trojúhelníku a průsečíkem jeho výšek – jeho ortocentrem –, tj. jedná se o kružnici devíti bodů). Snadno dokázal, že

$$H = [3\alpha - 2\xi, 3\beta - 2\eta],$$

$$C' = \left[\frac{3\alpha - \xi}{2}, \frac{3\beta - \eta}{2}\right].$$

Pak si položil obecnější otázku:[134]

… jakou křivku opisuje bod M, jenž dělí vzdálenost těžiště od středu kruhu opsaného trojině oskulační v daném pevném poměru, to jest, by stále bylo

$$\frac{CM}{SM} = \lambda.$$

[134] [Z50], str. 270.

Ukázal, že souřadnice bodu M musí vyhovovat podmínkám

$$x = \frac{\xi - \lambda\alpha}{1-\lambda}, \qquad y = \frac{\eta - \lambda\beta}{1-\lambda},$$

neboli po dosazení za ξ, η, α, β a algebraických úpravách vyplyne

$$x = \frac{c}{2(1-\lambda)} \cdot \frac{(1+2u)(1+u^2) + 2\lambda u(1+u)}{(1+u)^2(1+u^2)},$$

$$y = \frac{cu}{2(1-\lambda)} \cdot \frac{(2+u)(1+u^2) + 2\lambda u(1+u)}{(1+u)^2(1+u^2)}.$$

Z uvedených výsledků je zřejmé, že každý takový bod M opisuje racionální křivku čtvrtého stupně, která prochází „imaginárními body kružnými" a dotýká se úběžné přímky. Dále dokázal, že spojnice SC, tj. Eulerova přímka, je body H a C' dělena harmonicky, přitom pro bod H platí, že $\lambda = \frac{3}{2}$ a pro bod C' je $\lambda = 3$. Rovnici Eulerovy přímky vyjádřil elegantně s užitím determinantu

$$\begin{vmatrix} x & y & c \\ 1+2u & u(u+2) & 2(1+u)^2 \\ u & u^2 & -(1+u)(1+u^2) \end{vmatrix} = 0$$

a napsal:

Každému bodu u strophoidy, přísluší určitá přímka E_u jakožto Eulerova přímka trojúhelníku oskulačního. Jelikož se parametr u v rovnici přímky v pátém stupni vyskytuje, plyne, že každým bodem roviny strophoidy pět takových přímek E probíhá, t. j. obálka Eulerových přímek trojin oskulačních na strophoidě jest racionalna křivka páté třídy i stupně osmého.[135]

Poznamenejme, že vzhledem k četnému využití obecnějších výsledků z teorie racionálních křivek třetího stupně, odkazoval Karel Zahradník čtenáře na svůj článek [Z13]. Zájemcům o hlubší studium elementární geometrie doporučoval učebnici R. Baltzera nazvanou *Elemente der Mathematik*[136] a slavnou studii K. W. Feuerbacha *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks* z roku 1822, která náležela k základním pracím o geometrii trojúhelníku.

Dne 4. dubna 1891 proslovil Karel Zahradník na zasedání matematicko-přírodovědné třídy Jihoslovanské akademie věd přednášku, která v témže roce vyšla tiskem v časopisu *Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu* pod názvem *Prilog k teoriji strophoide* [Z64]. Analyticko-syntetickými metodami na třiadvaceti stranách popsal a odvodil známé i méně známé vlastnosti strofoidy.

[135] [Z50], str. 271.

[136] R. Baltzer: *Elemente der Mathematik. Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie*, 2. Band, 4. Auflage, Leipzig, 1874, VII + 386 stran.

Struktura a uspořádání textu, metoda popisu i odvození vlastností křivky a důkazy jednotlivých tvrzení jsou podobné těm, které používal i ve výše analyzovaných pracích. Proto pouze naznačíme obsah této chorvatsky psané práce.

Karel Zahradník nejprve dokázal, že libovolný bod P ležící v rovině strofoidy a bod středních vzdáleností bodů dotyku tečen strofoidy vedených z bodu P jsou ve vztahu kruhové racionální involuce (*kružna racionalna srodnot*). S jejím využitím popsal „konstrukci“ strofoidy. Značnou pozornost věnoval především speciálním polohám bodu P (např. P probíhá rovnoosou hyperbolu $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, parabolu $y^2 + 4ax = 0$, vlastní strofoidu nebo je bodem nevlastním). Následně stanovil množinu takových bodů P, že tečny jím procházející se dotýkají strofoidy v harmonických, resp. ekvianharmonických bodech. Neopominul popsat ani obvyklou trojici bodů. Podobně postupoval i pro případ normál. V závěru se věnoval popisu vzájemné polohy obecné kružnice a strofoidy, vyložil konstrukci a vlastnosti oskulační kružnice a evoluty strofoidy.

Zájemce o hlubší porozumění odvozeným vztahům a vlastnostem odkazoval na své německy nebo chorvatsky psané práce [Z8], [Z13], [Z49] a [Z63], dále na rozsáhlé monografie J. A. Serreta[137] a H. K. J. Durège.[138]

Poznamenejme, že autoři [SS] ocenili Zahradníkovu volbu soustavy souřadnic vedoucí k elegantnímu parametrickému vyjádření strofoidy, když napsali ([SS], str. 194):

Если за оси координат принять касательные к строфоиде в ее узловой точке O, то уравнение строфоиды примет вид

$$(x^2 + y^2)\Big(x \cos\frac{\alpha}{2} + y \cos\sin\frac{\alpha}{2}\Big) = 2axy.$$

Отсюда легко получим параметрические уравнения строфоиды

$$x = \frac{2at}{(1+t^2)(\cos\frac{\alpha}{2} + t\sin\frac{\alpha}{2})},$$

$$y = \frac{2at^2}{(1+t^2)(\cos\frac{\alpha}{2} + t\sin\frac{\alpha}{2})}.$$

Připomněli také jeho dílčí výsledky vztahující se ke speciálním trojicím bodů strofoidy a zařadili je do kontextu ostatních světových prací o strofoidě (viz str. 202–203).

Poznamenejme, že od poloviny sedmdesátých let 19. století do dvacátých let 20. století bylo studium vlastností a konstrukce strofoidy oblíbeným tématem evropských geometrů, středoškolských i vysokoškolských učitelů. Jejich nejrůznější, kratší či delší původní i přehledové příspěvky byly otiskovány

[137] J. A. Serret: *Handbuch der höheren Algebra*, Deutsche Übersetzung von G. Wertheim, 1. díl, Teubner, Leipzig, 528 stran.

[138] H. K. J. Durège: *Die ebenen Curven dritter Ordnung. Eine Zusammenstellung ihrer bekannteren Eigenschaften*, Teubner, Leipzig, 1871, 12 + 343 stran.

především ve francouzských časopisech *Nouvelles annales de mathématiques*, *Mathesis*, *Revue de mathématiques spécialles*, *Journal de mathématiques spécialles* a *Journal de mathématiques élémentaires* a německých časopisech *Archiv der Mathematik und Physik* a *Monatshefte für Mathematik und Physik*. Zájem o tuto problematiku dokládá i referativní časopis *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, v němž bylo v letech 1874 až 1923 referováno o 28 pracích tematicky věnovaných pouze strofoidě.[139]

LITERATURA:

[Be1] Bečvářová M., *Česká matematická komunita v letech 1848–1918*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, Ústav aplikované matematiky FD ČVUT, Matfyzpress, Praha, 2008.

[Be3] Bečvářová M., *Život i djelo Karela Zahradníka*, str. 9–36, in Mardešić S. (ed.): *Karel Zahradník (1848–1916)*, Hrvatska akademija znanosti i umjetnosti. Spomenica preminulim akademicima, svezak 134, Zagreb, 2007.

[Be5] Bečvářová M., *Life and Work of Karel Zahradník (1848–1916)*, str. 276–283, in T. Motlíček, M. Rechcígl (eds.): Proceedings of „Moravia from the World Perspective", 22nd World Congress of the Czechoslovak Society of Arts and Sciences, 2. díl, Ostrava, Repronis, 2006.

[BBS] Bečvář J., Bečvářová M., Škoda J., *Emil Weyr a jeho pobyt v Itálii v roce 1870/71*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 28, Nakladatelství ČVUT, Praha, 2006.

[BL] Brocard H., Lemoyne T., *Courbes géométriques remarquables planes & gauches*, 3. díl, Paris, 1970.

[Cr] Cresci L., *Le curve celebri. Invito alla storia della matematica attraverso le curve piane più affascinanti*, Franco Muziio Editore, Padova, 1998.

[Le] Lerch M., *Karel Zahradník*, Almanach České akademie věd a umění **27** (1917), 132–142.

[Lo] Loria G., *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte*, Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fritz Schütte. Mit 174 Figuren auf 17 lithographierten Tafeln, B. G. Teubner, Leipzig, 1902.

[Re] Reye T., *Die Geometrie der Lage. Vorträge*, 1. a 2. díl, Hannover, 1866 [3. vydání ve třech svazcích 1886 až 1892, 4. vydání 1899 až 1910, 5. vydání prvního dílu 1909, francouzský překlad 1881 až 1882, italský překlad 1884, anglický překlad 1898].

[SS] Смогоржевский А. С., Столова Е. С.: *Справочник по теории плоских кривых третьего порядка*, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва [Smogorževskij A. S., Stolova E. S.: Příručka teorie rovinných křivek třetího řádu, Státní nakladatelství fyzikálně-matematické literatury, Moskva], 1961.

[Te] Teixeira F. G., *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, 1. díl, Coimbra, 1908.

[Vo1] Vojtěch J., *Karel Zahradník*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **46** (1917), 289–304.

[We] Wieleitner H., *Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung*, Leipzig, 1905.

[139] Jejich autory byli známí i neznámí matematici: F. Balitrand, O. Biermann, R. Bouvaist, A. Cazamian, R. Deaux, W. Gaedecke, S. Günther, O. Gutsche, V. Jeřábek, E. Lebon, G. Loria, L. Maleyx, P. Mansion, J. Neuberg, G. Pélissier, A. Peschke, V. Retali, C. Servals, L. Sire, F. G. Teixeira, M. J. van Uven, E. Valdés, E. Wickersheimer a K. Zahradník. Viz http://jfm.sub.uni-goettingen.de.