Kapitola X

DOPLŇKY KE KAP. III. VĚTY O STŘEDNÍ HODNOTĚ

§ 1. **Primitivní funkce k funkci komplexní.** Řekli jsme již v kap. IX, § 4 (viz též obšírnější výklad v **DI** kap. XV, § 4, str. 381 – 383, v 4. vyd. str. 438 – 441), že derivaci (vlastní) komplexní funkce $F(x) = G(x) + i\,H(x)$ (G, H reálné funkce) definujeme rovnicí

$$F'(x) = G'(x) + i\,H'(x)\,, \tag{1}$$

existují-li ovšem vlastní derivace $G'(x)$, $H'(x)$ (obdobně definujeme též derivaci zprava a zleva).

Poznámka 1. Má-li komplexní funkce $F = G + iH$ v nějakém bodě derivaci, je F v tom bodě spojitá (neboť podle věty 122 v **DI**, str. 213, v 4. vyd. str. 242 jsou funkce G, H v onom bodě spojité).

Poznámka 2. Komplexní funkce $F = G + iH$ je konstantní v (a, b) tehdy a jen tehdy, je-li $F'(x) = 0$ pro každé $x \in (a, b)$. Důkaz: F je konstantní tehdy a jen tehdy, jsou-li G, H konstantní v (a, b), a to nastane tehdy a jen tehdy, je-li $G'(x) = H'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$ (viz např. větu 7).

Poznámka 3. Také věty o derivaci součtu, součinu a podílu platí i pro komplexní funkce. Propočtěme to rychle. Budiž $u(x) = u_1(x) + i\,u_2(x)$, $v(x) = v_1(x) + i\,v_2(x)$, kde reálné funkce u_1, u_2, v_1, v_2 mají vlastní derivace v jistém bodě x_0. Potom máme:[1])

$$u + v = (u_1 + v_1) + i(u_2 + v_2)\,; \qquad (u_1 + v_1)' = u_1' + v_1'\,,$$
$$(u_2 + v_2)' = u_2' + v_2'\,,$$

tedy podle definice (1)

$$(u + v)' = (u_1' + v_1') + i(u_2' + v_2') = (u_1' + iu_2') + (v_1' + iv_2') = u' + v'\,.$$

Dále

$$uv = (u_1v_1 - u_2v_2) + i(u_2v_1 + u_1v_2)\,,$$
$$(u_1v_1 - u_2v_2)' = u_1'v_1 + u_1v_1' - u_2'v_2 - u_2v_2' = A\,,$$
$$(u_2v_1 + u_1v_2)' = u_2'v_1 + u_2v_1' + u_1'v_2 + u_1v_2' = B\,,$$

[1]) Derivace se počítají v bodě x_0.

načež $(uv)' = A + iB$ a po snadném výpočtu obdržíte $(uv)' = u'v + uv'$. Konečně: Je-li $v \neq 0$, je

$$\frac{1}{v} = \frac{v_1 - iv_2}{v_1^2 + v_2^2}$$

a dále

$$\left(\frac{v_1}{v_1^2 + v_2^2}\right)' = \frac{-v_1'v_1^2 - 2v_2'v_1v_2 + v_1'v_2^2}{(v_1^2 + v_2^2)^2} = C\,,$$

$$\left(\frac{-v_2}{v_1^2 + v_2^2}\right)' = \frac{v_2'v_2^2 - v_2'v_1^2 + 2v_1'v_1v_2}{(v_1^2 + v_2^2)^2} = D\,,$$

načež

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = C + iD = \frac{-(v_1' + iv_2')(v_1^2 - v_2^2 - 2iv_1v_2)}{(v_1 + iv_2)^2(v_1 - iv_2)^2} = -\frac{v'}{v^2}\,.$$

Odtud a z pravidla pro derivaci součinu plyne pak

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u\,.\frac{1}{v}\right)' = u'\,.\frac{1}{v} - u\,.\frac{v'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}\,.$$

Poznamenejme ještě: je-li c komplexní konstanta, je $(cu)' = c'\,.\,u + cu' = cu'$, ježto $c' = 0$ podle poznámky 2.[2])

Poznámka 4. Zjistili jsme právě, že některé věty o derivaci reálných funkcí platí i pro funkce komplexní (důkazy byly docela mechanické: komplexní funkce se rozloží na reálnou a imaginární část a na ty se užije příslušných vět pro reálné funkce). Existují však i důležité věty o reálných funkcích, jež pro komplexní funkce neplatí, např. věta o přírůstku funkce. Příklad: Budiž $F(x) = \cos x + i \sin x$; potom rovnice $F(2\pi) - F(0) = 2\pi\, F'(\xi)$ neplatí vůbec pro žádné reálné ξ, neboť levá strana je 0, kdežto pravá je $2\pi(-\sin\xi + i\cos\xi)$ a má tedy prostou hodnotu $2\pi\sqrt{\sin^2\xi + \cos^2\xi} = 2\pi$.

Buďte nyní dány dvě komplexní funkce

(2) $$F(x) = G(x) + i\,H(x),\quad f(x) = g(x) + i\,h(x)\quad (G, H, g, h \text{ reálné})\,.$$

Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ jest

(3) $$F'(x) = f(x),\quad \text{tj.}\quad G'(x) + i\,H'(x) = g(x) + i\,h(x)\,,$$

budeme jako v kap. III říkat, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f v (a, b) nebo že je neurčitým integrálem funkce f v (a, b) a budeme funkci F značit opět znakem $\int f(x)\,dx$. Ježto G', H' jsou reálné, je rovnice (3) splněna tehdy a jen tehdy, je-li $G'(x) = g(x)$, $H'(x) = h(x)$. Rovnice $F(x) = \int f(x)\,dx$ platí tedy tehdy a jen

[2]) Jiný důkaz uvedených vzorců byste dostali, kdybyste si znovu prohlédli důkaz věty 124 v DI, str. 214, v 4. vyd. str. 243 a přesvědčili se, že tento důkaz je správný i tehdy, jde-li v něm o funkce komplexní.

tehdy, je-li $G(x) = \int g(x)\,dx$, $H(x) = \int h(x)\,dx$ ve smyslu kap. III, a tedy **můžeme** $\int f(x)\,dx = \int (g(x) + i\,h(x))\,dx$ definovat prostě rovnicí

$$\int (g(x) + i\,h(x))\,dx = \int g(x)\,dx + i \int h(x)\,dx\,, \tag{4}$$

existují-li (v uvažovaném intervalu) integrály vpravo (brané ve smyslu kap. III), čímž je neurčitý integrál funkce komplexní převeden na integrály funkcí reálných.

Z poznámky 2 je patrno: je-li $F_0(x)$ jedna primitivní funkce k $f(x)$ v (a, b), jsou *všechny* primitivní funkce k $f(x)$ v (a, b) dány výrazem $F_0(x) + c$, kde c je libovolná komplexní konstanta. Zde je nutno dát trochu pozor: Je-li funkce $f = g + ih$ speciálně reálná, tj. $f = g$, $h = 0$ a existuje-li k ní v (a, b) primitivní funkce $F_0 = G_0 + iH_0$, jest $H_0' = 0$, tedy $F_0' = G_0' = f$, takže reálná funkce G_0 je primitivní funkcí k f v (a, b). Nejobecnější primitivní funkce k f v (a, b) ve smyslu kap. III je pak funkce $G_0(x) + c$, kde c je libovolná *reálná* konstanta, kdežto v našem novém smyslu je nejobecnější primitivní funkcí k f v (a, b) funkce $G_0(x) + c$, kde c je libovolná *komplexní* konstanta.[3]) V případě reálné funkce f je tedy naše definice trochu odchylná od definice v kap. III, takže bych primitivní funkce v našem novém smyslu měl vlastně nazývat jinak, třeba „komplexně primitivní funkce“ nebo podobně. Neučiním to však; neboť odchylka obou definic se týká jen „integrační konstanty“, která nás téměř nikdy nezajímá (leda že je její hodnota *určena* nějakými podmínkami, a potom je stejně určeno, je-li reálná nebo ne); mimoto je téměř vyloučeno, že by mohlo nastat nedorozumění.

Nyní je beze všeho patrno, že věty 48, 49, 50 platí i pro komplexní funkce (přičemž konstanty $c_1, \ldots, c_n$, C značí nyní ovšem komplexní konstanty). Také věta 51 o integraci per partes platí pro komplexní funkce; dokažme ji však hned ve znění trochu obecnějším:

Věta 69. *Nechť (komplexní) funkce $u(x)$, $v(x)$ mají v (a, b) vlastní derivaci; nechť v (a, b) existuje*

$$\int u'(x)\,v(x)\,dx\,. \tag{5}$$

Potom v (a, b) existuje též $\int u(x)\,v'(x)\,dx$ a je (v intervalu (a, b))

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx\,. \tag{6}$$

Důkaz. Podle poznámky 3 jest $(uv)' = u'v + uv'$, tedy $uv = \int (u'v + uv')\,dx$ v (a, b). Ježto existuje (5), existuje podle věty 50 též $\int ((u'v + uv') - u'v)\,dx = \int uv'\,dx$ a rovná se rozdílu

$$\int (u'v + uv')\,dx - \int u'v\,dx = uv - \int u'v\,dx\,.$$

Poznámka 5. Z existence derivací u', v' plyne spojitost funkcí u, v (poznámka 1). Je-li tedy u' spojitá, existuje (5) podle věty 49. Věta 51 (a to i pro komplexní

[3]) Např. v intervalu $(-\infty, +\infty)$ je funkce $\sin x + i$ primitivní funkcí k funkci $\cos x$ podle naší nové definice, nikoli však podle definice z kap. III.

u, v) plyne tedy přímo z věty 69 (a to dokonce v tvaru trochu zobecněném: u derivace v' stačí místo spojitosti předpokládat pouze existenci).

Věty 52, 53 (o substituční metodě) platí ovšem též pro komplexní funkci f, jak je vidět, rozložím-li $f(x) = g(x) + i\,h(x), f(\varphi(t))\,\varphi'(t) = g(\varphi(t))\,\varphi'(t) + i\,h(\varphi(t))\,.$ $.\,\varphi'(t)$. *Funkce φ ovšem musí být reálná.* (Neboť do komplexní funkce f reálné proměnné dosazuji za tu reálnou proměnnou x číslo $\varphi(t)$.)

Zavedení *komplexních* funkcí *reálné* proměnné do neurčitého integrálu neznamená, jak vidíte, opět nic zásadně nového, je však často výhodné pro početní praxi. Abychom aspoň na příkladě tuto užitečnost poznali, provedeme jeden příklad. Než k němu přistoupíme, připomenu některé drobnosti z **DI**, kap. XV, § 3. Tam jsme definovali e^z pro každé komplexní z, a to tak, že pro reálná x, y bylo

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)\,. \tag{7}$$

Speciálně tedy pro $x = 0$ a pro libovolné reálné y

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y\,, \tag{8}$$

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i\sin(-y) = \cos y - i\sin y\,,$$

a odtud sečtením a odečtením

$$\cos y = \tfrac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})\,, \qquad \sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy})\,. \tag{9}$$

Připomeňme, že i pro komplexní z, z_1, z_2 jsme tehdy dokázali

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, \text{ tedy } e^z\,.\,e^{-z} = 1\,, \text{ tedy } e^z \neq 0,\ e^{-z} = \frac{1}{e^z}\,.$$

Je-li $\lambda = a + bi$ (a, b reálná) libovolná konstanta, je pro reálná x

$$e^{\lambda x} = e^{ax+ibx} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)\,;$$

to je tedy funkce reálné proměnné x, která má podle poznámky 3 derivaci

$$a\,.\,e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) + be^{ax}(-\sin bx + i\cos bx) =$$
$$= (a + ib)\,e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)\,,$$

takže i pro libovolné *komplexní* λ je $(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$; je-li tedy $\lambda \neq 0$, jest

$$\left(\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right)' = e^{\lambda x}, \text{ tj. } \int e^{\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} \text{ v } (-\infty, +\infty)\,.$$

Poznámka 6. Vzorec (4) ukazuje: vypočtu-li integrál komplexní funkce $g + ih$, jsou tím vypočteny dva integrály reálných funkcí: reálná část integrálu jest $\int g\,dx$, imaginární je $\int h\,dx$.

Příklad 1. Buďte a, b reálná; funkce $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$ jsou reálná a imaginární část funkce $e^{(a+ib)x}$. Není-li $a = b = 0$, je

$$\int e^{(a+ib)x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} = \frac{(a-ib)\,e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)}{a^2+b^2}.$$

Odtud rozvedením na reálnou a imaginární část plyne (v intervalu $(-\infty, +\infty)$)

$$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx),$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(-b\cos bx + a\sin bx).$$

To je způsob o něco kratší než v příkl. 7, kap. III, § 3; mimoto běží tento výpočet zcela mechanicky, kdežto postup, jehož bylo užito v uvedeném příkladě, vyžadoval jistý – byť jednoduchý – nápad. Další příklady viz ve cvičeních; jiné příklady pro užitečnost zavedení komplexních funkcí se vyskytnou na různých místech této knihy.

Cvičení

Předešlý příklad ukazuje, že může být vhodno nahradit goniometrické funkce $\cos z$, $\sin z$ pro reálná z výrazy, složenými z e^{iz}, e^{-iz} (užije se rovnic (8) nebo (9)). Připojme ještě několik příkladů.[4]

1. Integrály $\int x^2 e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$, $\int x^2 e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$ stanovte tak, že vypočtete $\int x^2 e^{(a+ib)x}\,\mathrm{d}x$ (dvakráte opakovanou integrací per partes).

2. Pro integrály $P_n = \int x^n e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x$ (n celé, $n \geqq 0$) odvoďte rekurentní vzorec.

3. Z rekurentního vzorce cvičení 2 odvoďte rekurentní vzorce pro integrály (a, b reálné) $\int x^n e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$, $\int x^n e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$ (viz kap. III, cvičení 7).

4. Integrály z kap. III, cvičení 19 lze počítat též takto: piši $\cos(\beta_1 x + \lambda_1) = \frac{1}{2}(e^{i(\beta_1 x + \lambda_1)} + e^{-i(\beta_1 x + \lambda_1)})$ atd., čímž je integrál převeden na několik integrálů podobných jako ve cvičení 2; ty se pak (pokud jest $n > 0$) počítají postupnou integrací per partes. Vypočtěte takto integrál uvedený v citovaném cvičení 19.

§ 2. Integrace per partes pro určité integrály.

Ve větě 54 jsme přenesli metodu integrace per partes z neurčitých integrálů na určité integrály, ale za předpokladů příliš omezujících (předpokládali jsme existenci a spojitost derivací u', v'). Čtenáři, který četl § 1 v kap. VIII, je to pochopitelno: Vyšli jsme (viz důkaz věty 54) z rovnice $(uv)' = uv' + u'v$, tj. $uv = \int(uv' + u'v)\,\mathrm{d}x$, a užili jsme věty 39. Ale věta 39 (viz § 1 v kap. VIII) vyjadřuje vlastně (až na nepodstatné odchylky) vztah mezi Newtonovým a Riemannovým integrálem. Tedy: ač nám ve větě 54 šlo o určitý Riemannův integrál, dokazovali jsme ji vlastně oklikou přes Newtonův integrál, tj. zavedli jsme do důkazu cizorodý živel. Je poučné provést důkaz vzorce pro integrování per partes

[4]) Jde vesměs o interval $(-\infty, +\infty)$.

pro určité integrály přímo, tj. pouze s užitím Riemannova integrálu. To nyní učiníme, čímž dostaneme větu obecnější než je věta 54. Podotýkám: Slovem „integrál" rozumím ve zbytku této kapitoly stále *vlastní* integrál.

Věta 70. *Buďte f, g komplexní funkce mající integrál od a do b. Buďte A, B dvě komplexní čísla a položme*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + A\,, \quad G(x) = \int_a^x g(t)\,dt + B\,. \tag{10}$$

Potom je

$$\int_a^b F(x)\,g(x)\,dx = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) - \int_a^b f(x)\,G(x)\,dx\,.$$

Důkaz. Případ $a = b$ je jasný; budiž tedy $a \neq b$. Pro každé $y \in \langle a, b\rangle$[5]) položme

$$\Phi(y) = F(y)\,G(y) - F(a)\,G(a) - \int_a^y F(x)\,g(x)\,dx - \int_a^y f(x)\,G(x)\,dx\,. \tag{11}$$

Jest $\Phi(a) = 0$ a máme dokázat, že též $\Phi(b) = 0$; k tomu cíli stačí dokázat, že Φ je konstantní v $\langle a, b\rangle$. Ježto Φ je spojitá v $\langle a, b\rangle$ (integrály (10) a též $\int_a^y F(x)\,g(x)\,dx$, $\int_a^y f(x)\,G(x)\,dx$ — poslední dva existují podle věty 68 — jsou spojité funkce své horní meze podle věty 44), stačí dokázat, že $\Phi'(y) = 0$ v každém vnitřním bodě intervalu (a, b) (viz větu 7[6])). Budiž tedy $y \in (a, b)$ a budiž $k \neq 0$ takové, že též $y + k \in (a, b)$. Potom jest podle (11)

$$\begin{aligned} \Phi(y + k) - \Phi(y) = {} & F(y + k)\,G(y + k) - F(y)\,G(y) - \\ & - \int_y^{y+k} F(x)\,g(x)\,dx - \int_y^{y+k} f(x)\,G(x)\,dx\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Jako obvykle rozepišme

$$\begin{aligned} & F(y + k)\,G(y + k) - F(y)\,G(y) = \\ & = F(y + k)\,(G(y + k) - G(y)) + G(y)\,(F(y + k) - F(y)) = \\ & = F(y + k) \int_y^{y+k} g(x)\,dx + G(y) \int_y^{y+k} f(x)\,dx\,, \end{aligned}$$

takže (12) dává

$$\begin{aligned} \Phi(y + k) - \Phi(y) = {} & \int_y^{y+k} (F(y + k) - F(x))\,g(x)\,dx + \int_y^{y+k} (G(y) - \\ & - G(x))\,f(x)\,dx\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Existuje vlastní[6a]) $K > 0$ tak, že pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ jest $|f(x)| < K$, $|g(x)| < K$. Tedy: jestliže x leží mezi y, $y + k$, platí podle třetí části věty 16:[6])

$$\begin{aligned} |F(y + k) - F(x)| &= \left|\int_x^{y+k} f(t)\,dt\right| \leq |y + k - x|\,.\,K \leq |k|\,.\,K\,, \\ |G(y) - G(x)| &= \left|\int_x^y g(t)\,dt\right| \leq |y - x|\,.\,K \leq |k|\,.\,K\,, \end{aligned}$$

[5]) Omezme se na případ $a < b$; případ $a > b$ potom plyne okamžitě změnou znamení.

[6]) Jež platí i pro komplexní funkce, viz kap. IX, § 4, text před větou 68.

[6a]) Pojem vlastního a nevlastního čísla viz na str. 173.

takže podle (13) jest

$$\left|\frac{1}{k}(\Phi(y+k)-\Phi(y))\right| \leqq \frac{2}{|k|}\left|\int_y^{y+k}|k| \,.\, K \,.\, K \,\mathrm{d}x\right| = 2\,.\,|k|\,.\,K^2\,,$$

načež limitní přechod $k \to 0$ dává $\Phi'(y) = 0$.

Poznámka 1. Věta 54 – a to i pro komplexní funkce – plyne ovšem z věty 70; neboť, jsou-li funkce $u'(x)$, $v'(x)$ z věty 54 spojité v $\langle a, b\rangle$, je podle věty 40[6])

$$u(x) = \int_a^x u'(t)\,\mathrm{d}t + u(a)\,, \qquad v(x) = \int_a^x v'(t)\,\mathrm{d}t + v(a)$$

a věta 70 dává ihned rovnici (27) z věty 54.

Opakovaným užitím věty 54 obdržíme tuto větu:

Věta 71. *Buď $-\infty < a < b < +\infty$; buď n přirozené číslo. Nechť funkce $f(x)$, $g(x)$ (komplexní funkce reálné proměnné) mají v $\langle a, b\rangle$ spojité derivace $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$. Potom jest*

$$(14) \qquad \int_a^b f(x)\,g^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\,g^{(n-1)}(x) - f'(x)\,g^{(n-2)}(x) + \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-1} f^{(n-1)}(x)\,g(x)]_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Poznámka 2. Vzorec (14) platí ovšem též, je-li $b < a$ a existují-li spojité derivace $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ v $\langle b, a\rangle$ (stačí vyměnit meze).

Důkaz. Věta 54 (pro komplexní funkce) dává okamžitě

$$\int_a^b fg^{(n)}\,\mathrm{d}x = [fg^{(n-1)}]_a^b - \int_a^b f'g^{(n-1)}\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\int_a^b f'g^{(n-1)}\,\mathrm{d}x = [f'g^{(n-2)}]_a^b - \int_a^b f''g^{(n-2)}\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_a^b f^{(n-1)}g'\,\mathrm{d}x = [f^{(n-1)}g]_a^b - \int_a^b f^{(n)}g\,\mathrm{d}x\,,$$

odkudž ihned plyne (14).

Příklad 1. Nechť je buďto $a < b$ nebo $a > b$. Nechť $f(x)$ má v $\langle a, b\rangle$ (popř. v $\langle b, a\rangle$, jestliže $a > b$) spojitou derivaci $f^{(n)}(x)$ $(n > 0)$; položme v (14) $g(x) = \frac{1}{n!}(x-b)^n$, tedy $g^{(n-k)}(x) = \frac{1}{k!}(x-b)^k$ pro $0 \leqq k \leqq n$, takže $g^{(n-k)}(b) = 0$ pro $0 < k \leqq n$, $(-1)^{k-1}\,g^{(n-k)}(a) = -\frac{1}{k!}(b-a)^k$. Z (14) tedy plyne

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\,\frac{b-a}{1!} + f'(a)\,\frac{(b-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n-1)}(a)\,\frac{(b-a)^n}{n!} +$$
$$(15) \qquad + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(x)\,\frac{(x-b)^n}{n!}\,\mathrm{d}x\,.$$

Odtud plyne tato věta:

Věta 72. *Buďte $a \neq b$ dvě vlastní reálná čísla; budiž $n \geqq 0$, n celé. Nechť komplexní funkce F jedné reálné proměnné má v $\langle a, b\rangle$ (popř. v $\langle b, a\rangle$, když $b < a$) spojitou derivaci $F^{(n+1)}(x)$. Potom jest*

$$F(b) = F(a) + \frac{b-a}{1!} F'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} F^{(n)}(a) + R_{n+1}, \tag{16}$$

kde

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!} \int_a^b F^{(n+1)}(x)\,(b-x)^n \,\mathrm{d}x\,. \tag{17}$$

Důkaz. Pro $n = 0$ je to triviální. Je-li $n > 0$, jest $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x$ načež užijeme vzorce (15) pro $f = F'$.

Věta 72 nám dává nový tvar zbytku v Taylorově formuli. Zdůrazňuji ještě jednou výslovně, že na rozdíl od známých nám tvarů zbytku z **DI**, kap. XII, platí rovnice (17) i pro *komplexní* F. Na druhé straně je věta 72 pro *reálné* funkce trochu speciálnější než věta 153 v **DI**, str. 290, v 4. vyd. str. 333, v níž se předpokládala pouze existence $(n+1)$-ní derivace, kdežto zde se předpokládá i spojitost; tento předpoklad se ostatně dá oslabit, viz cvičení 3.

Cvičení

1. Větu 70 lze dokázat také tímto způsobem: Budiž předně $a < b$ a všechno reálné. Volme libovolné rozdělení D (dělicí body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$); potom

$$F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) = \sum_{j=1}^{n} \left(F(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} g(x)\,\mathrm{d}x + G(x_{j-1}) \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

a z (11) plyne

$$\Phi(b) = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} (F(x_j) - F(x))\,g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_{j-1}}^{x_j} (G(x_{j-1}) - G(x))\,f(x)\,\mathrm{d}x\right). \tag{18}$$

Odtud (je-li $|f(x)| < K$, $|g(x)| < K$) snadno dostanete

$$|\Phi(b)| \leqq K\,\mathfrak{S}(F; D) + K\,\mathfrak{S}(G; D)\,, \tag{19}$$

načež podle věty 64 je patrno, že pravou stranu v (19) lze učinit vhodnou volbou D menší než libovolné číslo $\varepsilon > 0$; tedy $\Phi(b) = 0$. Proveďte ještě přechod (snadný) k případu $a > b$ a ke komplexním funkcím. Také v následujících cvičeních 2, 3, 4 proveďte přechod k případu $a > b$.

2. Vzorec (14) platí i tehdy, když předpokládám jen toto (k důkazu užiji nyní věty 70 místo 54): Existují $f^{(n-1)}$, $g^{(n-1)}$ v $\langle a, b\rangle$ a existují funkce φ, ψ mající vlastní integrál od a do b tak, že pro $a \leqq x \leqq b$ jest

$$f^{(n-1)}(x) = \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t + A_1\,; \quad g^{(n-1)}(x) = \int_a^x \psi(t)\,\mathrm{d}t + A_2\,,$$

kde A_1, A_2 jsou konstanty. Místo $f^{(n)}$, $g^{(n)}$ musíme ovšem v (14) potom psát φ, ψ.

3. Věta 72 platí i tehdy, předpokládám-li jen toto: Existuje $F^{(n)}$ v $\langle a, b\rangle$ a dále existuje funkce φ mající vlastní integrál od a do b tak, že pro $a \leqq x \leqq b$ jest $F^{(n)}(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt + A$, kde A je konstanta. Místo $F^{(n+1)}$ musíme ovšem potom v (17) psát φ.

4. Je-li $F^{(n+1)}$ reálná a spojitá v $\langle a, b\rangle$, dává první věta o střední hodnotě z (17)[7]) pro každé $p \in \langle 0, n\rangle$ (p nemusí být celé)

$$R_{n+1} = F^{(n+1)}(\xi)\,\frac{(b-\xi)^{n-p}}{n!}\,\frac{(b-a)^{p+1}}{p+1}$$

pro jisté $\xi \in \langle a, b\rangle$. Srovnejte se vzorci z **DI**, kap. XII, str. 290 a 292, v 4. vyd. str. 333 a 336.

§ **3. Věty o střední hodnotě.** Měli jsme již některé věty poskytující odhady pro velikost integrálu. Budiž např. $a < b$, nechť existuje $\int_a^b g(x)\,dx$ a nechť jest $m \leqq g(x) \leqq M$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Potom věta 16 praví, že jest

$$m(b-a) \leqq \int_a^b g(x)\,dx \leqq M(b-a)\,.$$

V tomto paragrafu odvodíme další dvě důležité věty podobného rázu.

Věta 73. (Tzv. první věta o střední hodnotě integrálního počtu.) *Buďte m, M vlastní reálná čísla, $a < b$. Nechť funkce f, g mají integrál od a do b. Nechť je $f(x) \geqq 0$, $m \leqq g(x) \leqq M$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$*[8]). *Potom je*

$$m \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqq M \int_a^b f(x)\,dx\,. \tag{20}$$

Jinak řečeno: existuje číslo μ tak, že

$$m \leqq \mu \leqq M\,, \qquad \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b f(x)\,dx\,. \tag{21}$$

Důkaz. Násobíme-li nerovnost $m \leqq g(x) \leqq M$ nezáporným číslem $f(x)$, vidíme, že $m f(x) \leqq f(x)\,g(x) \leqq M f(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Odtud plyne (20) podle věty 28 (neboť funkce $f(x)\,g(x)$ má integrál od a do b podle věty 65). Vzorec (21) pak plyne takto: Je buďto $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ nebo $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. V prvním případě je podle (20) též $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$, takže rovnice v (21) platí pro každé μ, např. pro $\mu = M$. V druhém případě položme $\mu = \left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right) : \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)$, načež platí (21) (nerovnosti $m \leqq \mu \leqq M$ plynou z (20)).[9])

Poznámka 1. Nahradím-li podmínku $f(x) \geqq 0$ podmínkou $f(x) \leqq 0$, platí opět (21), ale místo (20) platí naopak

$$m \int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \geqq M \int_a^b f(x)\,dx\,. \tag{22}$$

Důkaz: Užiji věty 73 na funkce $-f$, g, načež násobím číslem -1.

---

[7]) Tuto větu i s důkazem (velmi jednoduchým) najdete na začátku § 3.

[8]) Za číslo m mohu tedy vzít číslo $\inf\limits_{a \leqq x \leqq b} g(x)$ nebo kterékoliv číslo menší, za M pak číslo $\sup\limits_{a \leqq x \leqq b} g(x)$ nebo kterékoliv číslo větší. Z předpokladů je patrno, že funkce f, g jsou reálné.

[9]) Pro *spojité* g se dá (21) psát ve zvláště výrazném tvaru; viz cvičení 1.

Poznámka 2. Mění-li však $f(x)$ v $\langle a, b\rangle$ své znamení, nemusí rovnice z (21) platit pro žádné μ. Příklad: $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = g(x) = x$; potom je $\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx = \frac{2}{3}$, ale $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Rovněž neplatí v tomto případě nerovnosti (20) ani (22) pro žádnou volbu čísel m, M. Nezapomeňte proto při 1. větě o střední hodnotě nikdy na důležitou podmínku $f(x) \geqq 0$ (popř. $f(x) \leqq 0$, viz poznámku 1).

Poznámka 3. Případ $a > b$ se z případu $a < b$ dostane výměnou mezí. Nezapomeňte, že se přitom obrátí smysl nerovností (20), popř. (22).

Ještě důležitější než první věta o střední hodnotě je tzv. druhá věta o střední hodnotě, kterou nyní odvodíme. Napřed však dokážeme jednu větu pomocnou.

Pomocná věta.[10]) *Buďte $A, B, a_1, a_2, \ldots, a_n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ vlastní reálná čísla; budiž $\varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \ldots \geqq \varepsilon_n \geqq 0$. Potom platí:*

1. *Je-li $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \leqq A$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$, jest $\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots \ldots + \varepsilon_n a_n \leqq A\varepsilon_1$.*

2. *Je-li $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geqq B$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$, jest $\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n \geqq B\varepsilon_1$.*

Důkaz. Případ $n = 1$ je jasný. Budiž tedy $n > 1$ a položme $s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Potom jest

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n &= \varepsilon_1 s_1 + \varepsilon_2(s_2 - s_1) + \ldots + \\ + \varepsilon_n(s_n - s_{n-1}) &= s_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + s_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \ldots + \\ &+ s_{n-1}(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + s_n\varepsilon_n . \end{aligned} \tag{23}$$

Zde jest $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \geqq 0, \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \geqq 0, \ldots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n \geqq 0, \varepsilon_n \geqq 0$. Je-li tedy $s_k \leqq A$ pro $k = 1, \ldots, n$, je poslední výraz v (23) nejvýše roven $A(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + A(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \ldots + A(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + A\varepsilon_n = A\varepsilon_1$; je-li však $s_k \geqq B$ pro $k = 1, \ldots, n$, je poslední výraz v (23) nejméně roven $B(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + B(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \ldots + B(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + B\varepsilon_n = B\varepsilon_1$.

Věta 74. (Tzv. druhá věta o střední hodnotě integrálního počtu.) *Budiž $a < b$; nechť je f reálná funkce, jež má integrál od a do b, nechť g je monotónní (a tedy ovšem reálná) v $\langle a, b\rangle$. Potom existuje číslo ξ tak, že jest*

$$a \leqq \xi \leqq b\,, \quad \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx\,. \tag{24}$$

Důkaz. Funkce $f(x)\,g(x)$ má integrál od a do b podle věty 65 a podle příkl. 1 v kap. IX, § 2.

I. Budiž předně g nerostoucí v $\langle a, b\rangle$, $g(b) = 0$, tedy $g(x) \geqq 0$ pro $x \in \langle a, b\rangle$. Je-li též $g(a) = 0$, je $g(x) = 0$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$, načež rovnice v (24) platí, ať si ξ zvolím jakkoliv v $\langle a, b\rangle$ (obě strany rovnice jsou rovny nule). Budiž tedy $g(a) > 0$.

[10]) Tato důležitá pomocná věta pochází od Abela.

Integrál $\int_a^x f(u)\,du = F(x)$ je spojitou funkcí proměnné x v intervalu $\langle a, b\rangle$; nabývá tedy v intervalu $\langle a, b\rangle$ jisté největší hodnoty $A = \operatorname*{Max}_{a \leq x \leq b} F(x)$ a jisté nejmenší hodnoty $B = \operatorname*{Min}_{a \leq x \leq b} F(x)$. Pro každé rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ (dané dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$) sestrojme výraz

$$(25) \qquad \Gamma(D) = \sum_{j=1}^{n} g(x_{j-1}) \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx\,;$$

tvrdím, že

$$(26) \qquad g(a)\,B \leqq \Gamma(D) \leqq g(a)\,A\,.$$

Položme totiž v pomocné větě $\varepsilon_j = g(x_{j-1})$, $a_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx$; potom jest $\varepsilon_1 \geqq \geqq \varepsilon_2 \geqq \ldots \geqq \varepsilon_n \geqq 0$, a dále $a_1 + \ldots + a_k = \int_a^{x_k} f(x)\,dx = F(x_k)$, takže $B \leqq a_1 + \ldots + a_k \leqq A$ pro $k = 1, \ldots, n$; pomocná věta dává pak pro $\Gamma(D) = \varepsilon_1 a_1 + \ldots \ldots + \varepsilon_n a_n$ nerovnosti (26). Vyšetřím nyní rozdíl mezi číslem $\Gamma(D)$ a integrálem $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$; jest

$$(27) \qquad \left|\Gamma(D) - \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (g(x_{j-1}) - g(x)) f(x)\,dx\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{n} \left|\int_{x_{j-1}}^{x_j} (g(x_{j-1}) - g(x)) f(x)\,dx\right| \leqq \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} |g(x_{j-1}) - g(x)| \,.\, |f(x)|\,dx$$

(viz větu 66). Existuje předně vlastní číslo K tak, že pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ jest $|f(x)| < K$. Za druhé: pro každé $x \in \langle x_{j-1}, x_j\rangle$ jest (ježto g je nerostoucí)

$$|g(x_{j-1}) - g(x)| = g(x_{j-1}) - g(x) \leqq g(x_{j-1}) - g(x_j)\,,$$

takže

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} |g(x_{j-1}) - g(x)| \,.\, |f(x)|\,dx \leqq K(g(x_{j-1}) - g(x_j))\,\Delta x_j$$

(klademe $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$), a tedy podle (27)

$$(28) \qquad \left|\Gamma(D) - \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqq K\Big(\sum_{j=1}^{n} g(x_{j-1})\,\Delta x_j - \sum_{j=1}^{n} g(x_j)\,\Delta x_j\Big) =$$

$$= K(S(g; D) - s(g; D))$$

(neboť čísla $g(x_{j-1})$, $g(x_j)$ jsou právě supremum a infimum funkce g v $\langle x_{j-1}, x_j\rangle$). Budiž nyní D_m ono rozdělení, jež rozděluje interval $\langle a, b\rangle$ na m stejných dílů; potom jest $\lim_{m\to\infty} S(g; D_m) = \lim_{m\to\infty} s(g; D_m) = \int_a^b g(x)\,dx$, takže z (28) plyne

$$(29) \qquad \lim_{m\to\infty} \Gamma(D_m) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\,.$$

Ježto pro každé m podle (26) jest $B \leqq \frac{1}{g(a)} \Gamma(D_m) \leqq A$, je podle (29) též

$$B \leqq \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leqq A .$$

Ježto spojitá funkce $F(x)$ nabývá v $\langle a, b \rangle$ hodnoty A i hodnoty B, existuje podle věty 129 v **DI**, str. 237, v 4. vyd. str. 270 hodnota $\xi \in \langle a, b \rangle$ tak, že jest

$$F(\xi) = \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx, \text{ tj. } \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(a) \int_a^\xi f(x)\, dx ,$$

což je právě vzorec (24), neboť v našem případě je $g(b) = 0$.

II. Budiž g nerostoucí v $\langle a, b \rangle$, ale jinak libovolná. Potom funkce $g(x) - g(b)$ je rovněž nerostoucí v $\langle a, b \rangle$ a má v bodě b hodnotu 0; podle bodu I existuje $\xi \in \langle a, b \rangle$ tak, že jest

$$\int_a^b f(x)\,(g(x) - g(b))\, dx = (g(a) - g(b)) \int_a^\xi f(x)\, dx ,$$

tj.

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(a) \int_a^\xi f(x)\, dx + g(b) \int_a^b f(x)\, dx - g(b) \int_a^\xi f(x)\, dx ,$$

odkudž ihned plyne (24).

III. Budiž konečně g neklesající v $\langle a, b \rangle$; podle bodu II existuje $\xi \in \langle a, b \rangle$ tak, že

$$\int_a^b (-f(x)) \,.\, (-g(x))\, dx =$$
$$= (-g(a)) \,.\, \int_a^\xi (-f(x))\, dx + (-g(b)) \,.\, \int_\xi^b (-f(x))\, dx ,$$

což je rovnice (24).

Poznámka 4. Je-li např. funkce g nerostoucí, jest (viz kap. I, § 4)

$$g(a) \geqq \lim_{x \to a+} g(x) = \sup_{a < x \leqq b} g(x) , \qquad g(b) \leqq \lim_{x \to b-} g(x) = \inf_{a \leqq x < b} g(x) .$$

Pozměním-li funkci $g(x)$ tak, že hodnotu $g(a)$ nahradím jakýmkoliv číslem $A \geqq \lim_{x \to a+} g(x)$ a hodnotu $g(b)$ jakýmkoliv číslem $B \leqq \lim_{x \to b-} g(x)$,[11]) bude takto pozměněná funkce g opět nerostoucí v $\langle a, b \rangle$ a mohu tedy na ni opět užít věty 74. Vpravo bude místo $g(a)$ číslo A, místo $g(b)$ číslo B; levá strana bude opět $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$, neboť tento integrál se nezmění tím, že jsme změnili hodnotu funkce $g(x)$ ve dvou bodech.[12]) Máme tedy toto zobecnění věty 74: Nechť f je reálná a má integrál od a do b; nechť g je nerostoucí v $\langle a, b \rangle$. Budiž $A \geqq \lim_{x \to a+} g(x)$, $B \leqq \lim_{x \to b-} g(x)$ (A, B vlastní čísla). Potom existuje číslo $\xi \in \langle a, b \rangle$ tak, že jest

(30) $$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = A \int_a^\xi f(x)\, dx + B \int_\xi^b f(x)\, dx .$$

[11]) Ostatní hodnoty funkce $g(x)$ nechám beze změny.

[12]) Číslo ξ může nyní ovšem být jiné než při původní funkci g.

Obdobná věta platí, je-li g neklesající v $\langle a, b\rangle$; podmínky pro A, B jsou potom ovšem $A \leqq \lim\limits_{x\to a+} g(x)$, $B \geqq \lim\limits_{x\to b-} g(x)$.

Na příklad: *Je-li g nerostoucí a nezáporná v $\langle a, b\rangle$*, mohu klást $A = g(a)$, $B = 0$ a vzorec (30) má tvar

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = g(a) \int_a^\xi f(x)\, \mathrm{d}x\,. \tag{31}$$

Tohoto vzorce se často užívá. Nemusím zajisté vypisovat ostatní případy, kdy jedno z čísel A, B lze položit rovno nule.

Poznámka 5. Také pro $a > b$ platí věta obdobná větě 74; stačí vyměnit meze.

Poznámka 6. Při použití věty 74 nezapomeňte nikdy na důležitou podmínku, že g má být monotónní. Není-li totiž g monotónní, nemusí (24) platit pro žádné ξ. Příklad: $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = 1$, $g(x) = x^2 - 1$. Zde jest $\int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = -\frac{4}{3}$, kdežto pravá strana v (24) je rovna nule, neboť $g(-1) = g(1) = 0$.

Význam obou vět o střední hodnotě spočívá v tom, že vyjadřují integrál součinu $f(x)\, g(x)$ integrálem funkce $f(x)$. Ale i když dovedeme integrál funkce f vypočíst, nedovolují nám vztahy (21), (24) přesně vypočíst integrál funkce $f(x)\, g(x)$ od a do b – až na některé výjimečné případy – ježto vpravo vystupují čísla μ, popř. ξ, jež nejsou přesně známa,[13]) pouze víme, že $m \leqq \mu \leqq M$, $a \leqq \xi \leqq b$. Vzorce (21), (24), jsou tedy vhodné pouze pro *odhadnutí* velikosti integrálu $\int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$ (ne pro jeho přesný výpočet), jestliže ovšem dovedeme vypočíst nebo aspoň nějak odhadnout integrál funkce f.

Příklad 1. První věta o střední hodnotě nedává obyčejně žádné zvláště překvapující výsledky. Budiž např. $0 < a < b$ a snažme se nalézt odhad pro velikost integrálu

$$I(a, b) = \int_a^b \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x\,.$$

Tj. snažíme se nalézt číslo $K(a, b)$ tak, aby bylo $|I(a, b)| \leqq K(a, b)$; čím menší takové $K(a, b)$ najdeme, tím větší bude náš úspěch. Přitom se hlavně budeme zajímat o ten (nejobtížnější) případ, že a je velké a b je ještě mnohokráte větší než a. Ježto $-1 \leqq \sin x \leqq 1$, dává rovnice (21)

$$I(a, b) = \mu \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mu \lg \frac{b}{a}, \quad \text{kde} \quad |\mu| \leqq 1, \quad \text{tj.} \quad |I(a, b)| \leqq \lg \frac{b}{a}\,.$$

Ale k dosažení tohoto odhadu jsme místo věty 73 mohli též užít věty 28, jež dává

$$-\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqq I(a, b) \leqq \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad \text{tj.} \quad |I(a, b)| \leqq \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lg \frac{b}{a}\,. \tag{32}$$

[13]) μ je ovšem přesně známo, je-li $m = M$, tj. je-li g konstantní v $\langle a, b\rangle$.

Zato druhá věta o střední hodnotě dává tento výsledek: Ježto x^{-1} je v $\langle a, b\rangle$ klesající a kladná, můžeme užít např. vzorce (31) a máme

$$|I(a, b)| = \left|\frac{1}{a}\int_a^{\xi} \sin x \, dx\right| = \frac{1}{a}\,|\cos a - \cos \xi| \leqq \frac{2}{a}. \tag{33}$$

Pro naše případy (a velké, b mnohokráte větší než a) jest odhad (33) zřejmě mnohem výhodnější než (32). Např. je-li $b > a^2$, je $\lg \frac{b}{a} > \lg a$, a to je číslo velmi veliké, je-li a velmi veliké, kdežto zlomek $2 : a$ konverguje dokonce k nule pro $a \to +\infty$. Druhá věta o střední hodnotě je tedy v tomto případě mnohem výhodnější než první.

Podívejme se na to trochu obecněji. Je-li $g(x)$ třeba nerostoucí a nezáporná v $\langle a, b\rangle$[14]) a má-li f (reálná) integrál od a do b, je $0 \leqq g(x) \leqq g(a)$ pro $x \in \langle a, b\rangle$ a věta 66 s 1. větou o střední hodnotě dávají

$$\left|\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right| \leqq \int_a^b g(x)\,|f(x)|\, dx \leqq g(a) \int_a^b |f(x)|\, dx. \tag{34}$$

Druhá věta o střední hodnotě však dává

$$\left|\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right| = g(a) \,.\, \left|\int_a^{\xi} f(x)\, dx\right|. \tag{35}$$

Pravá strana v (35) je vždy nejvýše rovna pravé straně v (34), to je zřejmé. Mnohdy však je $\left|\int_a^{\xi} f(x)\, dx\right|$ pro všechna $\xi \in \langle a, b\rangle$ mnohem menší než $\int_a^b |f(x)|\, dx$, a potom 2. věta o střední hodnotě dává mnohem lepší odhad než první věta. Tak je tomu např. u funkcí $\sin x$, $\cos x$ pro velké hodnoty $b - a$; neboť např. $\left|\int_a^{\xi} \sin x\, dx\right| = |\cos a - \cos \xi| \leqq 2$, kdežto $\int_a^b |\sin x|\, dx$ je asi tak velký jako $\frac{2}{\pi}(b - a)$, tedy daleko větší než 2, je-li rozdíl $b - a$ velký.[15])

[14]) Podobná úvaha by se dala provést pro každou monotónní funkci g; volím tento speciální případ, aby vzorce byly jednodušší.

[15]) Proveďme to přesně. Dokažme napřed, že pro každé α je $\int_\alpha^{\alpha+\pi} |\sin x|\, dx = \int_0^\pi |\sin x|\, dx = \int_0^\pi \sin x\, dx = 2$. K důkazu připomeňme, že funkce $|\sin x|$ má periodu π. Zvolme tedy celé číslo k tak, že $(k - 1)\pi < \alpha \leqq k\pi$. Tedy $\int_\alpha^{\alpha+\pi} |\sin x|\, dx = \int_\alpha^{k\pi} + \int_{k\pi}^{\alpha+\pi}$. V prvním integrálu vpravo proveďme substituci $x = t + (k - 1)\pi$, v druhém $x = t + k\pi$, takže v důsledku periodicity je $\int_\alpha^{k\pi} |\sin x|\, dx = \int_{\alpha-(k-1)\pi}^{\pi} |\sin (t + (k - 1)\pi)|\, dt = \int_{\alpha-(k-1)\pi}^{\pi} |\sin t|\, dt$, $\int_{k\pi}^{\alpha+\pi} |\sin x|\, dx = \int_0^{\alpha-(k-1)\pi} |\sin (t + k\pi)|\, dt = \int_0^{\alpha-(k-1)\pi} |\sin t|\, dt$; sečtením plyne vskutku $\int_\alpha^{\alpha+\pi} |\sin x|\, dx = \int_0^\pi |\sin t|\, dt = 2$. Položme nyní $n = \left[\frac{b - a}{\pi}\right]$, tedy n celé, $a + n\pi \leqq b < a + (n + 1)\pi$ (hranaté závorky užívám zde ve smyslu věty 46 v DI, str. 65, v 4. vyd. str. 66); tedy $\int_a^b |\sin x|\, dx \geqq \int_a^{a+n\pi} |\sin x|\, dx = 2n > 2\left(\frac{b - a}{\pi} - 1\right)$; $\int_a^b |\sin x| \,.\, dx < \int_a^{a+(n+1)\pi} |\sin x|\, dx = 2n + 2 \leqq 2\left(\frac{b - a}{\pi} + 1\right)$

Podobný odhad jako pro integrál funkcí $\sin x$, $\cos x$ platí pro integrál funkcí tvaru $\sin \varphi(x) \,.\, \varphi'(x)$, $\cos \varphi(x) \,.\, \varphi'(x)$, neboť např.

$$|\int_a^\xi \cos \varphi(x) \,.\, \varphi'(x)\,\mathrm{d}x| = |\sin \varphi(\xi) - \sin \varphi(a)| \leqq 2\,,$$

pokud např. funkce $\varphi'(x)$ je spojitá a $\varphi(x)$ reálná v $\langle a, \xi\rangle$. To nás vede k následujícímu důležitému příkladu:

Příklad 2. *Budiž $a < b$, $r > 0$. Reálná funkce $\varphi(x)$ nechť má v intervalu $\langle a, b\rangle$ vlastní druhou derivaci $\varphi''(x)$ a nechť pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ jest $\varphi''(x) \geqq r$. Potom jest*

$$\left|\int_a^b \cos \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq \frac{6}{\sqrt{r}}\,, \quad \left|\int_a^b \sin \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq \frac{6}{\sqrt{r}}\,. \tag{36}$$

Poznamenejme, že na první pohled jsou zřejmé pouze odhady $|\int_a^b \cos \varphi(x)\,\mathrm{d}x| \leqq$ $\leqq b - a$, $|\int_a^b \sin \varphi(x)\,\mathrm{d}x| \leqq b - a$, což je pro $b - a > \dfrac{6}{\sqrt{r}}$ horší odhad než (36). Věta právě uvedená (pocházející od van der Corputa a Landaua) je užitečná v mnoha otázkách tzv. analytické teorie čísel.

Důkaz. Zabývejme se napřed prvním integrálem v (36). V intervalu $\langle a, b\rangle$ jest $0 < \varphi''(x) < +\infty$, tedy $\varphi'(x)$ spojitá a rostoucí. Tedy je v intervalu $\langle a, b\rangle$ I. buďto stále $\varphi'(x) \geqq 0$, II. nebo stále $\varphi'(x) \leqq 0$, III. nebo existuje číslo $c \in (a, b)$ tak, že pro $a \leqq x \leqq c$ je $\varphi'(x) \leqq 0$, pro $c \leqq x \leqq b$ pak $\varphi'(x) \geqq 0$.

Zabývejme se napřed případem I, takže $\varphi'(x) \geqq 0$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Je-li $b - a \leqq \dfrac{3}{\sqrt{r}}$, je $|\int_a^b \cos \varphi(x)\,\mathrm{d}x| \leqq b - a \leqq \dfrac{3}{\sqrt{r}}$. Je-li však $b - a > \dfrac{3}{\sqrt{r}}$, položme $\alpha = a + \dfrac{1}{\sqrt{r}}$, takže $\int_a^b = \int_a^\alpha + \int_\alpha^b$. Zřejmě $|\int_a^\alpha \cos \varphi(x)\,\mathrm{d}x| \leqq \alpha - a =$ $= \dfrac{1}{\sqrt{r}}$. Podle věty o přírůstku funkce jest (pro jistou hodnotu $\eta \in (a, \alpha)$)

$$\varphi'(\alpha) = \varphi'(a) + (\alpha - a)\,\varphi''(\eta) \geqq 0 + (\alpha - a)\,r = \sqrt{r}\,.$$

Ve vzorci (31) položme $f(x) = \cos \varphi(x) \,.\, \varphi'(x)$, $g(x) = \dfrac{1}{\varphi'(x)}$, takže g je kladná a klesající v $\langle \alpha, b\rangle$; vychází

$$\left|\int_\alpha^b \cos \varphi(x) \,.\, \varphi'(x) \,.\, \frac{\mathrm{d}x}{\varphi'(x)}\right| = \frac{1}{\varphi'(\alpha)}\left|\int_\alpha^\xi \cos \varphi(x) \,.\, \varphi'(x)\,\mathrm{d}x\right| =$$

$$= \frac{1}{\varphi'(\alpha)}\,|\sin \varphi(\xi) - \sin \varphi(\alpha)| \leqq \frac{2}{\sqrt{r}}\,;$$

tedy

$$\left|\int_a^b \cos\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq \left|\int_a^\alpha\right| + \left|\int_\alpha^b\right| \leqq \frac{3}{\sqrt{r}}\,.$$

II. V druhém případě položme $\psi(x) = \varphi(-x)$. Pro $a \leqq -x \leqq b$, tj. pro $-b \leqq x \leqq -a$ jest $\psi'(x) = -\varphi'(-x) \geqq 0$, $\psi''(x) = \varphi''(-x)$. Podle případu I jest (substituce $u = -x$)

$$\left|\int_a^b \cos\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|-\int_{-a}^{-b} \cos\varphi(-x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{-b}^{-a} \cos\psi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq \frac{3}{\sqrt{r}}\,.$$

III. V případě III užijeme výsledků z případů I, II na intervaly $\langle a, c\rangle$, $\langle c, b\rangle$. Tedy

$$\left|\int_a^b \cos\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq \left|\int_a^c\right| + \left|\int_c^b\right| \leqq \frac{6}{\sqrt{r}}\,.$$

Tím je dokázána první nerovnost (36). Druhá pak plyne takto: Funkce $\varphi(x) - \frac{1}{2}\pi$ má druhou derivaci $\varphi''(x) \geqq r$ pro $a \leqq x \leqq b$ a tedy jest

$$\left|\int_a^b \sin\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b \cos\left(\varphi(x) - \tfrac{1}{2}\pi\right)\mathrm{d}x\right| \leqq \frac{6}{\sqrt{r}}\,.$$

Druhá věta o střední hodnotě je jednou z nejdůležitějších vět integrálního počtu; probrané dva příklady dávají snad o tom čtenáři jakousi představu.

Poznámka 7. Druhá věta o střední hodnotě neplatí pro komplexní funkci f (viz cvičení 3). Často jí však přece užíváme i pro komplexní f, a to tak, že ji aplikujeme na reálnou a imaginární část zvlášť. Příklad: Pro $0 < a < b$ jest

$$\int_a^b \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x + i\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Zde jest

$$\left|\int_a^b \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{a}\left|\int_a^\xi \cos x\,\mathrm{d}x\right| \leqq \frac{2}{a}$$

a obdobně

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leqq \frac{2}{a}\,,$$

takže

$$\left|\int_a^b \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leqq \frac{2}{a} + \frac{2}{a} = \frac{4}{a}\,,$$

nebo přesněji

$$\left|\int_a^b \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leqq \sqrt{\frac{4}{a^2} + \frac{4}{a^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{a}\,.$$

Cvičení

1. Nechť f má integrál od a do b $(a < b)$; nechť $f(x) \geqq 0$ pro $a \leqq x \leqq b$; nechť g je reálná a spojitá v $\langle a, b\rangle$. Potom existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = g(\xi) \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x\,. \tag{37}$$

(Důkaz: vezmu-li za m, M nejmenší a největší hodnotu funkce g v $\langle a, b\rangle$, vidím, že g nabývá někde v $\langle a, b\rangle$ hodnoty μ ze vzorce (21).) Obdobně pro $f(x) \leqq 0$ a pro $a > b$.

2. Rovnice (37) má – na rozdíl od vzorců (20), (21), (22) – smysl i pro komplexní g; ale věta z cvičení 1 *není* správná, vynechám-li v ní předpoklad, že g je reálné. Příklad: $a = 0$, $b = 2\pi$, $f(x) = 1$, $g(x) = e^{ix}$. Potom levá strana v (37) je $\int_0^{2\pi} e^{ix}\, \mathrm{d}x = 0$, kdežto pravá strana je $2\pi e^{i\xi} \neq 0$.

3. Také druhá věta o střední hodnotě neplatí pro nereálné f. Příklad: Položme $f(x) = e^{ix}$, $g(x) = x$. Kdyby pro nějaké $\xi \in \langle 0, \pi\rangle$ (nebo vůbec pro nějaké reálné ξ) bylo $\int_0^\pi x e^{ix}\, \mathrm{d}x = 0 . \int_0^\xi e^{ix}\, \mathrm{d}x + \pi \int_\xi^\pi e^{ix}\, \mathrm{d}x$, bylo by (spočtěte!) $-2 = i\pi e^{i\xi}$; ale prostá hodnota pravé strany je $\pi \neq 2$.

4. *Neměni-li f znamení v $\langle a, b\rangle$*, např. je-li $f(x) \geqq 0$ v $\langle a, b\rangle$ a je-li např. g nerostoucí a nezáporná v $\langle a, b\rangle$, je $0 \leqq \int_a^b g(x) f(x)\, \mathrm{d}x \leqq g(a) \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$; ze spojitosti funkce $\int_a^\xi f(x)$ plyne, že existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že $\int_a^b g(x) f(x)\, \mathrm{d}x = g(a) \int_a^\xi f(x)\, \mathrm{d}x$, což je vzorec (31). Odtud by snadno plynul i obecný vzorec (24). V tomto případě je tedy druhá věta o střední hodnotě bezprostředním důsledkem dřívějších vět: tato věta má tedy samostatnou cenu jen tehdy, mění-li f v $\langle a, b\rangle$ znamení (skutečně jsme také této věty v příkl. 1, 2 užili pro takové funkce, jež v $\langle a, b\rangle$ – je-li tento interval dlouhý – mění mnohokráte své znamení; pro takovéto funkce bývá 2. věta o střední hodnotě nejúčinnější).

5. V příkl. 1 položte $a = 2k\pi$, $b \geqq 2a$ (k celé kladné). Najděte celé m tak, že $2(k + m)\pi \leqq \leqq b < 2(k + m + 1)\pi$; potom

$$I(a, b) = \sum_{n=k}^{k+m-1} I(2n\pi, 2(n + 1)\pi) + I(2(k + m)\pi, b)\,.$$

Jest

$$I(2n\pi, 2(n + 1)\pi) = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin x \,.\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x + \pi}\right) \mathrm{d}x > \frac{2}{4(n + 1)^2 \pi}\,,$$

dále zjistíte, že $I(2(k + m)\pi, b) \geqq 0$, načež snadno

$$I(a, b) > \frac{1}{8k\pi} = \frac{1}{4a}\,.$$

Je vidět, že odhad $|I(a, b)| \leqq \dfrac{2}{a}$ nelze podstatně zlepšit: Není možno psát v této nerovnosti místo $\dfrac{1}{a}$ nějakou funkci φ, která konverguje pro $a \to +\infty$ „rychleji" k nule než $\dfrac{1}{a}$, tj. pro kterou by bylo $\lim\limits_{a \to +\infty} a\,\varphi(a) = 0$.

6. Obdobně jako v příkl. 1 a v cvičení 5, ale trochu obecněji: Je-li $\alpha > 0$, $0 < a < b$, jest

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x\right| \leqq \frac{2}{a^\alpha}\,, \qquad \left|\int_a^b \frac{\cos x}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x\right| \leqq \frac{2}{a^\alpha}\,;$$

ukažte, že tyto odhady nelze podstatně zlepšit.

7. V příkl. 2 položme $\varphi(x) = \frac{1}{2}rx^2$ $(r > 0)$, takže je právě $\varphi''(x) = r$; dále $a = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}$, $b = \sqrt{\frac{\pi}{r}}$; substituce $x = \sqrt{\frac{2u}{r}}$ dává

$$\int_a^b \cos \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos u \,.\, \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2ru}} > \frac{1}{\sqrt{r\pi}} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos u\, \mathrm{d}u = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) . \frac{1}{\sqrt{r\pi}} .$$

Je vidět, že také odhad z příkl. 2 nelze podstatně zlepšit. Užití 2. věty o střední hodnotě v příkl. 1, 2 a v cvičení 6 bylo tedy velmi úspěšné: vedlo nás k odhadům, jež jsou nejlepší svého druhu (až na to, že by se konstanta 2 v příkl. 1 a v cvičení 6 a konstanta 6 v příkl. 2 snad dala trochu zlepšit).

8. Užijete-li v příkl. 1 místo vzorce (31) vzorce (24), obdržíte přesněji

$$-\left(\frac{1 - \cos a}{a} - \frac{1 - \cos b}{b}\right) \leqq I(a, b) \leqq \frac{1 + \cos a}{a} - \frac{1 + \cos b}{b} ;$$

např. pro $\cos a = \cos b = 1$ dostanete $0 \leqq I(a, b) \leqq \frac{2}{a} - \frac{2}{b}$; pro $\cos a = \cos b = 0$ dostanete $|I(a, b)| \leqq \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$; prostě pro každé a, b $(0 < a < b)$ obdržíte interval délky $\frac{2}{a} - \frac{2}{b}$ (a ne interval délky $\frac{4}{a}$, jako v příkl. 1), v němž je číslo $I(a, b)$ obsaženo. Proveďte obdobnou úvahu pro integrály z cvičení 6.

9. Výsledek cvičení 8 lze odvodit též integrací per partes; např.

$$I(a, b) = \frac{\cos a}{a} - \frac{\cos b}{b} - \int_a^b \frac{\cos x}{x^2}\, \mathrm{d}x ,$$

a prostá hodnota posledního integrálu je nejvýše $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

10. Cvičení 9 nás vede k otázce, není-li možno vůbec 2. větu o střední hodnotě odvodit integrací per partes. To je vskutku možno, učiníme-li o funkci g předpoklady o něco více omezující: Nechť reálná funkce f má integrál od a do b $(a < b)$; nechť g je monotónní a má spojitou derivaci v $\langle a, b\rangle$. Položme $F(x) = \int_a^x f(u)\, \mathrm{d}u$; integrací per partes (věta 70; pro integrál funkce g' užijme věty 39) obdržíme

$$\begin{aligned} \textstyle\int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x &= F(b)\, g(b) - F(a)\, g(a) - \textstyle\int_a^b F(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x = \\ &= F(b)\, g(b) - F(a)\, g(a) - F(\xi)\, (g(b) - g(a)) \end{aligned}$$

(zde jsme užili 1. věty o střední hodnotě ve tvaru cvičení 1; všimněte si, že F je spojitá a že g' nemění znamení). Dosazením za F plyne ihned (24). Předpoklad o existenci a spojitosti derivace g' bychom mohli nahradit též tímto obecnějším předpokladem: Existuje číslo A a nezáporná, popř. nekladná funkce h tak, že pro $a \leqq x \leqq b$ jest $g(x) = \int_a^x h(u)\, \mathrm{d}u + A$. Ale i v tomto tvaru předpokládáme u funkce g více než ve větě 74 (např. spojitost v $\langle a, b\rangle$).