DODATKY

Kapitola IX

DALŠÍ VLASTNOSTI RIEMANNOVA INTEGRÁLU

(Doplňky ke kap. II)

V těchto Dodatcích jde o vlastní integrály. Slovo integrál značí proto – v kap. IX až XI – vlastní Riemannův integrál[1]), pokud není výslovně podotčeno jinak.

§ 1. Oscilace. Budiž $f(x)$ funkce, jež jest omezená v nějaké neprázdné číselné množině A, takže existují čísla

$$M = \sup_{x \in A} f(x)\,, \qquad m = \inf_{x \in A} f(x)\,. \tag{1}$$

Číslo $M - m$ budeme nazývat *oscilací funkce* $f(x)$ *v množině* A a budeme je značit $\Omega(f(x); A)$.

Poznámka 1. Označme znakem $\mathfrak{M}$ množinu všech čísel tvaru $f(x') - f(x'')$, kde x' a x'' probíhají celou množinu A; označme $\mathfrak{N}$ množinu všech čísel $|f(x') - f(x'')|$, kde opět x', x'' probíhají množinu A. Tvrdím, že platí: *je-li f omezená* v A, *je* $\sup \mathfrak{M} = \sup \mathfrak{N} = \Omega(f(x); A)$.

Důkaz. Musíme zjistit, že číslo $G = \Omega(f(x); A)$ má vzhledem k množině $\mathfrak{M}$ i vzhledem k množině $\mathfrak{N}$ vlastnosti I, II z věty o supremu (kap. I, § 1). Užijme označení (1). Je-li $x' \in A$, $x'' \in A$, je $m \leqq f(x') \leqq M$, $m \leqq f(x'') \leqq M$, a tedy

$$f(x') - f(x'') \leqq M - m = \Omega(f(x); A)\,; \qquad |f(x') - f(x'')| \leqq \Omega(f(x); A)\,.$$

Je-li za druhé ε libovolné číslo kladné, existují $x' \in A$, $x'' \in A$ tak, že $f(x') > M - \frac{1}{2}\varepsilon$, $f(x'') < m + \frac{1}{2}\varepsilon$, a tedy $f(x') - f(x'') > \Omega(f(x); A) - \varepsilon$, a tím spíše $|f(x') - f(x'')| > \Omega(f(x); A) - \varepsilon$.

Poznámka 2. *Je-li* $B \subset A$ (B neprázdná, f omezená v A), *je* $\Omega(f(x); B) \leqq \Omega(f(x); A)$, neboť (viz poznámku 6 v kap. I, § 2)

$$\sup_{x \in A} f(x) \geqq \sup_{x \in B} f(x)\,, \qquad \inf_{x \in A} f(x) \leqq \inf_{x \in B} f(x)\,.$$

[1]) Tj. integrál ve smyslu kap. II.

Poznámka 3.[2]) Pro všechna $x \in A$ budiž $|f(x)| \leqq K$, $|g(x)| \leqq K$. Potom

$$\Omega(f(x)\,g(x); A) \leqq K(\Omega(f(x); A) + \Omega(g(x); A)).$$

Důkaz. Je-li $x' \in A$, $x'' \in A$, je

$$\begin{aligned} &f(x')\,g(x') - f(x'')\,g(x'') = \\ &= f(x')\,(g(x') - g(x'')) + g(x'')\,(f(x') - f(x'')) \leqq \\ &\leqq K(\Omega(g(x); A) + \Omega(f(x); A)), \end{aligned}$$

a nyní stačí si všimnout poznámky 1 a věty 48 v **DI**, str. 70, v 4. vyd. str. 72.

Poznámka 4.[2]) Je-li $f(x)$ omezená v A, je

$$\Omega(|f(x)|; A) \leqq \Omega(f(x); A).$$

Důkaz. Je-li $x' \in A$, $x'' \in A$, je

$$|f(x')| - |f(x'')| \leqq |f(x') - f(x'')| \leqq \Omega(f(x); A).$$

Poznámka 5.[2]) Jsou-li $f(x)$, $g(x)$ omezené v A, je

$$\Omega(\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}; A) \leqq \Omega(f(x); A) + \Omega(g(x); A).$$

Důkaz. Položme $F(x) = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$. Pro $x' \in A$, $x'' \in A$ je

$$F(x') - F(x'') \leqq \sqrt{(f(x') - f(x''))^2 + (g(x') - g(x''))^2}$$

(viz **DI**, str. 373, v 4. vyd. str. 429, vzorec (3), kam dosadím $a_1 = f(x'')$, $a_2 = f(x') - f(x'')$, $b_1 = g(x'')$, $b_2 = g(x') - g(x'')$). Tedy $F(x') - F(x'') \leqq \sqrt{K^2 + L^2}$, kde $K = \Omega(f(x); A)$, $L = \Omega(g(x); A)$. Ale $\sqrt{K^2 + L^2} \leqq K + L$ (ježto $K \geqq 0$, $L \geqq 0$), tedy vskutku $\Omega(F(x); A) \leqq K + L$.

§ 2. Podmínky pro existenci integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$. Zachováme (a trochu doplníme) označení z kap. II, § 2 a § 3. Budiž $f(x)$ funkce omezená v $\langle a, b \rangle$. Budiž $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ jisté rozdělení D. Potom klademe $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$, $\nu(D) = \operatorname{Max}(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$. Položíme-li na chvíli pro krátkost

$$M_j = \sup_{x \in \langle x_{j-1}, x_j \rangle} f(x), \quad m_j = \inf_{x \in \langle x_{j-1}, x_j \rangle} f(x),$$

$$\Omega_j = M_j - m_j = \Omega(f(x); \langle x_{j-1}, x_j \rangle)$$

(viz začátek § 1), definujeme:[3])

$$S(f; D) = \sum_{j=1}^{n} M_j\,\Delta x_j, \qquad s(f; D) = \sum_{j=1}^{n} m_j\,\Delta x_j, \tag{2}$$

$$\mathfrak{S}(f; D) = \sum_{j=1}^{n} \Omega_j\,\Delta x_j = S(f; D) - s(f; D) \geqq 0. \tag{3}$$

[2]) Předpokládám, že A je neprázdná.

[3]) Píšeme též $S(f(x); D)$ místo $S(f; D)$ apod.

(Rozdíl proti kap. II je jen ten, že jsme v součtech S, s výslovně vytkli, o kterou funkci f jde, a že jsme zavedli ještě nový znak $\mathfrak{S}$.) Velmi užitečné jsou tyto dvě podmínky, udávající, kdy $f(x)$ má integrál (vlastní) od a do b[4]):

Věta 63. *Budiž f omezená v $\langle a, b\rangle$. Jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že je $\mathfrak{S}(f; D) < \varepsilon$, má f integrál od a do b.*

Důkaz. Nechť ke každému $\varepsilon > 0$ takové D existuje. Podle definice v kap. II, § 2 je

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq S(f; D), \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geqq s(f; D),$$

tedy

$$0 \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \mathfrak{S}(f; D) < \varepsilon.$$

Ježto to platí pro každé kladné ε, je horní integrál roven dolnímu.

Věta 64. *Nechť f má integrál od a do b $(a < b)$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ s touto vlastností: Je-li D jakékoliv rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ splňující podmínku $\nu(D) < \delta$, je $\mathfrak{S}(f; D) < \varepsilon$.*

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$; podle vět 17, 19 existují čísla $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tak, že platí:

je-li $\nu(D) < \delta_1$, je $S(f; D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\varepsilon$;

je-li $\nu(D) < \delta_2$, je $s(f; D) > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\varepsilon$

(místo horního a dolního integrálu píši prostě integrál). Položme $\delta = \operatorname{Min}(\delta_1, \delta_2)$; potom pro $\nu(D) < \delta$ plyne vskutku $\mathfrak{S}(f; D) = S(f; D) - s(f; D) < \varepsilon$.

Příklad 1. *Je-li f monotónní v $\langle a, b\rangle$, má f integrál od a do b.*

Důkaz: Nechť je předně f neklesající; potom zřejmě jest

$$\Omega_j = f(x_j) - f(x_{j-1}) \geqq 0,$$

takže

$$\mathfrak{S}(f; D) = \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1}))\,\Delta x_j \leqq \nu(D) \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1})) =$$
$$= \nu(D) \,.\, (f(b) - f(a)).$$

Je-li ε libovolné kladné číslo, lze zřejmě zvolit D tak, že $\nu(D)\,(f(b) - f(a)) < \varepsilon$, tedy $\mathfrak{S}(f; D) < \varepsilon$. Tedy má $f(x)$ integrál od a do b podle věty 63. Je-li konečně f nerostoucí, užiji výsledku právě dokázaného na funkci $-f$.

Poznámka 1. Tato věta nám umožňuje snadno sestrojit např. funkci, jejíž body nespojitosti tvoří množinu hustou v intervalu $\langle a, b\rangle$[6]) a která přesto má integrál od a do b (viz cvičení 5, 6, 7).

[4]) Ježto mluvíme o „intervalu $\langle a, b\rangle$", je v tom mlčky obsažen předpoklad $a < b$.

[6]) Říkáme, že množina A (obsažená v intervalu J) je hustá v J, jestliže každý interval obsažený v J obsahuje aspoň jeden bod množiny A.

Věta 65. *Nechť funkce $f(x)$, $g(x)$ mají integrál od a do b. Potom funkce $|f(x)|$, $f(x) \,.\, g(x)$, $\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$ mají integrál od a do b.*[7])

Důkaz. Existuje K tak, že pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ jest $|f(x)| < K$, $|g(x)| < K$. Pro libovolné rozdělení D plyne tedy z (3) a z poznámek 3, 4, 5 z § 1:

$$\mathfrak{S}(f(x)\, g(x);\, D) \leqq K(\mathfrak{S}(f(x);\, D) + \mathfrak{S}(g(x);\, D))\,, \tag{4}$$

$$\mathfrak{S}(|f(x)|;\, D) \leqq \mathfrak{S}(f(x);\, D)\,, \tag{5}$$

$$\mathfrak{S}(\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}\,;\, D) \leqq \mathfrak{S}(f(x);\, D) + \mathfrak{S}(g(x);\, D)\,. \tag{6}$$

Je-li ε libovolné číslo kladné, lze podle věty 64 sestrojit rozdělení D takové, že pravé strany v (4), (5), (6) jsou menší než ε (stačí vzít $\nu(D)$ dostatečně malé). Tedy jsou i levé strany menší než ε, a tedy (podle věty 63) mají funkce fg, $|f|$, $\sqrt{f^2 + g^2}$ integrál od a do b.

Věta 66. *Buď $a < b$. Nechť $f(x)$ má integrál od a do b. Potom je*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,. \tag{7}$$

Důkaz. Integrál vpravo existuje podle věty 65. Ale jest $|X| = \mathrm{Max}\,(X, -X)$, tedy $f(x) \leqq |f(x)|$, $-f(x) \leqq |f(x)|$; píši-li tedy $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = J$, jest podle věty 28

$$J \leqq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,, \qquad -J \leqq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,,$$

takže

$$|J| = \mathrm{Max}\,(J, -J) \leqq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,,$$

což je nerovnost (7).

Cvičení

1. Mají-li funkce $f(x)$, $g(x)$ integrál od a do b, mají i funkce $\mathrm{Max}\,(f(x), g(x))$, $\mathrm{Min}\,(f(x), g(x))$ integrál od a do b. (První z těchto funkcí je ovšem definována takto: pro každé x má hodnotu rovnou maximu čísel $f(x)$, $g(x)$. Např. $\mathrm{Max}\,(x, x^2) = x$ pro $0 \leqq x \leqq 1$, $\mathrm{Max}\,(x, x^2) = x^2$ pro $x > 1$ a pro $x < 0$). Návod:

$$\mathrm{Max}\,(A, B) = \tfrac{1}{2}(A + B) + \tfrac{1}{2}|A - B|\,,$$
$$\mathrm{Min}\,(A, B) = \tfrac{1}{2}(A + B) - \tfrac{1}{2}|A - B|\,.$$

2. Nechť f má integrál od a do b ($a < b$). Položme $f^+(x) = \mathrm{Max}\,(f(x), 0)$, $f^-(x) = \mathrm{Max}\,(-f(x), 0)$. Potom je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Odtud

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,,$$

což jsme již odvodili jinak ve větě 66.

---

[7]) Obdobný výsledek pro *součet* funkcí jest obsažen ve větě 26. Důkaz věty 65 stačí provést pro $a < b$.

3. Jestliže prvky nějaké množiny M je možno vzájemně jednoznačně přiřadit[8]) všem přirozeným číslům. tj. jestliže je možno prvky z M srovnat v nekonečnou posloupnost

$$(*) \qquad a_1, a_2, a_3, \dots (a_i \neq a_k \text{ pro } i \neq k),$$

říkáme, že M je nekonečná spočetná množina. Množiny konečné a množiny nekonečné spočetné mají společný název „množiny spočetné". Dokažte: Každá část spočetné množiny je spočetná. (Návod: jde vlastně o posloupnosti vybrané z (*).)

Poznamenejme, že někteří autoři užívají názvu „spočetná množina" jen pro nekonečné spočetné množiny. Konečným množinám a nekonečným spočetným množinám dohromady říkají pak „nejvýše spočetné množiny".

4. Množina všech racionálních čísel je spočetná. Návod: „Zkrácené" zlomky $\frac{p}{q}$ $(q > 0)$ srovnejte podle rostoucí hodnoty $|p| + q$, ty pak, které mají stejné $|p| + q$, podle rostoucího p:

$$\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{-3}{1}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{-4}{1}, \frac{-3}{2}, \dots$$

5. Existuje množina spočetná, hustá[9]) v $(-\infty, +\infty)$. Obecněji: Ke každému intervalu J existuje spočetná množina, hustá v J (užijte cvičení 4).

6. Body nespojitosti funkce monotónní v (a, b) mohou tvořit *jakoukoliv* spočetnou část intervalu (a, b). Důkaz: Budiž

$$(8) \qquad x_1, x_2, x_3, \dots$$

jakákoliv posloupnost navzájem různých bodů z (a, b); budiž $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ jakákoliv konvergentní řada s kladnými členy. Definujme (pro všechna reálná x) $f(x) = \sum_{x_n \leq x} a_n$ (tj. v řadě $a_1 + a_2 + \dots$ nahradíme nulami všechny členy a_n, pro něž je $x_n > x$). Funkce f je zřejmě neklesající v $(-\infty, +\infty)$, tedy též v (a, b). Ukažte: f je spojitá v každém bodě x různém od bodů x_n; dále je spojitá zprava v každém bodě x_n; a konečně není spojitá zleva v žádném bodě x_n, neboť $f(x_n) = \lim_{x \to x_n -} f(x) + a_n$. Je-li posloupnost (8) hustá v (a, b), je f dokonce rostoucí v (a, b). Funkce $g(x) = \frac{1}{2} \sum_{x_n < x} a_n + \frac{1}{2} \sum_{x_n \leq x} a_n$ má podobné vlastnosti jako $f(x)$, ale není v žádném bodě x_n spojitá zprava ani zleva.

7. Z cvičení 5, 6 je patrno: Existuje funkce, jejíž body nespojitosti tvoří množinu hustou v $\langle a, b\rangle$, a která přesto má integrál od a do b.

8. Kombinací vět 63, 64 odvoďte: Budiž f omezená v $\langle a, b\rangle$. Potom f má integrál od a do b tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ tak, že $\mathfrak{S}(f; D) < < \varepsilon$.

9. Obdobně odvoďte: Budiž f omezená v $\langle a, b\rangle$. Potom f má integrál od a do b tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že nerovnost $\mathfrak{S}(f; D) < \varepsilon$ je splněna pro každé rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, jež vyhovuje podmínce $\nu(D) < \delta$.

[8]) Viz výklad v DI, str. 42, v 4. vyd. str. 36, pod čarou.

[9]) Viz poznámku [6]).

10. Nechť $f(x)$, $g(x)$ mají integrál od a do b. Nechť existuje číslo $K > 0$ tak, že pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ je $|g(x)| \geqq K$. Potom funkce $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ má integrál od a do b. Návod: Dokažte napřed (podobně jako v § 1, v poznámkách 3—5), že pro každý interval $\langle\alpha, \beta\rangle$, obsažený v $\langle a, b\rangle$, je

$$\Omega\left(\frac{1}{g(x)}\,;\ \langle\alpha, \beta\rangle\right) \leqq \frac{1}{K^2}\,\Omega(g(x)\,;\ \langle\alpha, \beta\rangle)\,,$$

načež z vět 63, 64 plyne, že $\dfrac{1}{g(x)}$ má integrál od a do b. A konečně pište $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\,.\,\dfrac{1}{g(x)}$.

§ 3. Ještě jiná podmínka pro existenci integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$.

Ke dvěma „nutným a postačujícím" podmínkám pro existenci integrálu (viz cvičení 8, 9 v § 2) připojíme ještě další podmínku zcela jiného druhu, která se připíná k větě 22. Tato podmínka je dána větou:

Věta 67. *Budiž f funkce definovaná v $\langle a, b\rangle$.*[10]) *Potom má f integrál od a do b tehdy a jen tehdy, je-li splněna tato podmínka:*

Podmínka A. *Je-li $D_1, D_2, \ldots$ libovolná posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že $\lim_{r\to\infty} \nu(D_r) = 0$ (přičemž dělicí body rozdělení D_r značme $a = x_{0,r} < x_{1,r} < x_{2,r} < \ldots < x_{n_r,r} = b$; $\Delta x_{j,r} = x_{j,r} - x_{j-1,r}$), a je-li dále pro každou hodnotu r dáno n_r čísel $\xi_{1,r}, \xi_{2,r}, \ldots, \xi_{n_r,r}$ takových, že $x_{j-1,r} \leqq \xi_{j,r} \leqq x_{j,r}$ pro $j = 1, 2, \ldots, n_r$, potom existuje vlastní limita*

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{j=1}^{n_r} f(\xi_{j,r})\,\Delta x_{j,r}\,. \tag{9}$$

Důkaz. Má-li f integrál od a do b, je podmínka A podle věty 22 splněna. Stačí tedy ještě dokázat toto: Nemá-li f integrál od a do b, není podmínka A splněna. Nechť tedy f nemá integrál od a do b; to znamená, že nastává jeden z těchto dvou případů:

Případ I. Funkce f není omezená v $\langle a, b\rangle$.

Případ II. Funkce f jest omezená v $\langle a, b\rangle$, platí však nerovnost

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,.$$

V obou případech volme za D_r ono rozdělení, jež dělí interval $\langle a, b\rangle$ na r stejných dílů, tedy $n_r = r$, $x_{j,r} = a + j\,.\,\dfrac{b-a}{r}$, $\Delta x_{j,r} = \dfrac{b-a}{r}$, $\nu(D_r) = \dfrac{b-a}{r}$, $\lim_{r\to\infty} \nu(D_r) = 0$. Nechť nastává především případ I. Je-li r přirozené číslo, existuje jistě číslo k $(1 \leqq k \leqq r)$ takové, že funkce f není omezená v intervalu $\langle x_{k-1,r}, x_{k,r}\rangle$.

[10]) Omezenost funkce f nemusíme předpokládat.

Položme $H_r = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{r} f(x_{j,r})\, \Delta x_{j,r}$; zvolme dále $\xi_{k,r}$ v intervalu $\langle x_{k-1,r}, x_{k,r}\rangle$ tak, aby bylo $\left| f(\xi_{k,r}) \cdot \dfrac{b-a}{r} + H_r \right| > r$ (což je možno, neboť f není omezená v $\langle x_{k-1,r}, x_{k,r}\rangle$). Pro $j \neq k$ $(1 \leqq j \leqq r)$ volme pak $\xi_{j,r} = x_{j,r}$. Potom je tedy

$$\left|\sum_{j=1}^{r} f(\xi_{j,r})\, \Delta x_{j,r}\right| = \left| f(\xi_{k,r}) \cdot \frac{b-a}{r} + H_r \right| > r\,,$$

takže posloupnost čísel

$$\sum_{j=1}^{r} f(\xi_{j,r})\, \Delta x_{j,r} \quad (r = 1, 2, \ldots)$$

nemá vlastní limitu (neboť není omezená). Nechť za druhé nastává případ II. Znakem $m_{j,r}$, $M_{j,r}$ označme infimum a supremum funkce f v intervalu $\langle x_{j-1,r}, x_{j,r}\rangle$. Je-li r sudé, $r = 2k$, volme čísla $\xi_{j,2k}$ tak, aby bylo $x_{j-1,2k} \leqq \xi_{j,2k} \leqq x_{j,2k}$, $m_{j,2k} \leqq f(\xi_{j,2k}) < m_{j,2k} + \dfrac{1}{2k}$; je-li však r liché, $r = 2k - 1$, volme čísla $\xi_{j,2k-1}$ tak, aby bylo $x_{j-1,2k-1} \leqq \xi_{j,2k-1} \leqq x_{j,2k-1}$, $M_{j,2k-1} - \dfrac{1}{2k-1} < f(\xi_{j,2k-1}) \leqq M_{j,2k-1}$. Odtud je patrno, že

$$(10) \qquad \left|\sum_{j=1}^{2k} f(\xi_{j,2k})\, \Delta x_{j,2k} - \sum_{j=1}^{2k} m_{j,2k}\, \Delta x_{j,2k}\right| < \sum_{j=1}^{2k} \frac{1}{2k}\, \Delta x_{j,2k} = \frac{b-a}{2k}\,,$$

$$\left|\sum_{j=1}^{2k-1} f(\xi_{j,2k-1})\, \Delta x_{j,2k-1} - \sum_{j=1}^{2k-1} M_{j,2k-1}\, \Delta x_{j,2k-1}\right| < \sum_{j=1}^{2k-1} \frac{1}{2k-1}\, \Delta x_{j,2k-1} =$$

$$(11) \qquad = \frac{b-a}{2k-1}\,.$$

Tedy má první součet v (10), (11) pro $k \to \infty$ touž limitu jako druhý součet[11]); klademe-li tedy

$$A_r = \sum_{j=1}^{r} f(\xi_{j,r})\, \Delta x_{j,r}\,,$$

je

$$\lim_{k\to\infty} A_{2k} = \underline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x\,, \qquad \lim_{k\to\infty} A_{2k-1} = \overline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Posloupnost $A_1, A_2, \ldots$ nemá tedy limitu, neboť obsahuje dvě vybrané posloupnosti, jež mají *různé* limity.

---

[11]) Limita toho druhého součtu existuje podle vět 20, 18.

Cvičení

1. Věty 22, 67 ukazují, že definici určitého integrálu (z kap. II, § 2) lze nahradit také touto ekvivalentní definicí: Budiž f definována v $\langle a, b\rangle$. Potom říkáme, že f má integrál od a do b, splňuje-li f podmínku A. V tomto případě je limita (9) táž pro všechny přípustné volby rozdělení D_r a bodů $\xi_{j,r}$; její hodnotu označíme pak $\int_a^b f(x)\,dx$. Mnozí autoři vskutku užívají této definice (která umožňuje vyhnout se hornímu a dolnímu integrálu).

2. Budiž f definována v $\langle a, b\rangle$; budiž $D_1, D_2, \ldots$ posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že $\lim\limits_{r\to\infty} \nu(D_r) = 0$ (dělicí body značme jako v podmínce A). Potom f má integrál od a do b tehdy a jen tehdy, jestliže pro každou volbu čísel $\xi_{j,r}$, splňujících podmínku $x_{j-1,r} \leqq \xi_{j,r} \leqq x_{j,r}$, existuje vlastní limita (9). (Jinak řečeno: v podmínce A nemusíme připouštět všechny možné posloupnosti $D_1, D_2, \ldots$ (s podmínkou $\lim \nu(D_r) = 0$), nýbrž stačí se omezit na jednu — jakoukoliv — takovou posloupnost a věta 67 zůstane v platnosti.)

§ 4. Určitý integrál komplexní funkce. Dosud jsme definovali určitý integrál pouze pro *reálné* funkce jedné reálné proměnné. Z důvodů praktických bývá někdy vhodno zavést pojem určitého intgerálu též pro *komplexní* funkce jedné *reálné* proměnné. Je-li f taková funkce, tedy $f(x) = g(x) + i\,h(x)$, kde g, h jsou reálné funkce, říkáme, že f je omezená v množině M, jsou-li obě funkce g, h omezené v M; říkáme, že f je spojitá (v intervalu J nebo v bodě c), jsou-li g, h spojité (v J, popř. v c). Derivaci $f'(x)$ (vlastní) definujeme rovnicí $f'(x) = g'(x) + i\,h'(x)$, existují-li vlastní derivace vpravo. Konečně říkáme, že f má integrál od a do b, mají-li funkce g i h integrál od a do b a definujeme pak $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + i\int_a^b h(x)\,dx$.[12] Podívejme se nyní, které věty z kapitol II, III platí též pro komplexní funkce. Téměř jediným pohledem zjistíme, že platí tyto věty:[13] 7 (z kap. I), 21, 22, 24, 25, 26. Při větě 25 musíme trochu počítat: Nechť $f(x) = g(x) + i\,h(x)$ má integrál od a do b; budiž $c = \gamma + i\delta$ (g, h, γ, δ reálné). Potom $c\,f(x) = (\gamma\,g(x) - \delta\,h(x)) + i\,(\gamma\,h(x) + \delta\,g(x))$. Podle věty 26 (pro reálné funkce) existují integrály

$$\int_a^b (\gamma\,g(x) - \delta\,h(x))\,dx = \gamma\int_a^b g(x)\,dx - \delta\int_a^b h(x)\,dx\,,$$
$$\int_a^b (\gamma\,h(x) + \delta\,g(x))\,dx = \gamma\int_a^b h(x)\,dx + \delta\int_a^b g(x)\,dx\,,$$

takže existuje též

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = \int_a^b (\gamma\,g(x) - \delta\,h(x))\,dx + i\int_a^b (\gamma\,h(x) + \delta\,g(x))\,dx =$$
$$= \gamma\int_a^b g(x)\,dx + i\gamma\int_a^b h(x)\,dx - \delta\int_a^b h(x)\,dx + i\delta\int_a^b g(x)\,dx =$$
$$= (\gamma + i\delta)\left(\int_a^b g(x)\,dx + i\int_a^b h(x)\,dx\right) = c\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

[12]) Přitom připouštíme všechny možné případy: $a < b$, $a = b$, $a > b$. Naproti tomu pojem horního a dolního integrálu (který závisí na uspořádání *reálných* čísel podle velikosti) pro nereálné funkce nezavádíme.

[13]) Důkaz se vede zpravidla tím, že se příslušná věta pro reálné funkce aplikuje zvlášť na reálnou a na imaginární část.

Takové triviální, ale někdy trochu nudné výpočty v dalším vynechávám. Podobně se zjistí, že pro komplexní funkce platí též věty 30, 31, 33, 36 (s příslušnou poznámkou[38])), 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44 (s příslušnou poznámkou[46])), 45 (s příslušnou poznámkou[47])), 46, 47.

K větě 39 je snad záhodno poznamenat toto: Nechť $f(x) = g(x) + i\,h(x)$ (g, h reálné) má integrál od a do b ($a < b$); nechť $F(x) = G(x) + i\,H(x)$ (G, H reálné) je spojitá v $\langle a, b\rangle$ a má derivaci $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Pro $x \in (a, b)$ je tedy $G'(x) + i\,H'(x) = g(x) + i\,h(x)$ a tedy (ježto G', H' jsou reálné funkce) $G'(x) = g(x)$, $H'(x) = h(x)$. Podle věty 39 je tedy $\int_a^b g(x)\,dx = G(b) - G(a)$, $\int_a^b h(x)\,dx = H(b) - H(a)$, takže $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + i \int_a^b h(x)\,dx = F(b) - F(a)$, čímž je věta 39 dokázána i pro komplexní f, F. Rozdělením intervalu $\langle a, b\rangle$ na několik dílů plyne odtud věta 40, výměnou mezí pak věta 47 i pro komplexní funkce.

Konečně poznamenejme, že z věty 16 platí pro komplexní funkce aspoň její třetí část: Je-li $a < b$, má-li komplexní funkce $f(x)$ integrál od a do b a je-li $|f(x)| \leqq K$ pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$, je

$$|\int_a^b f(x)\,dx| \leqq K(b - a)\,. \tag{12}$$

D ů k a z. Při libovolném rozdělení D s dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ je podle věty o prosté hodnotě součtu a součinu (jež podle věty 180 E), C) v **DI**, str. 373, v 4. vyd. str. 429 platí i pro komplexní čísla)

$$|\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\,\Delta x_j| \leqq \sum_{j=1}^{n} |f(x_j)|\,\Delta x_j \leqq K \sum_{j=1}^{n} \Delta x_j = K(b - a)\,. \tag{13}$$

Jestliže nyní nechám rozdělení D probíhat nějakou posloupnost $D_1, D_2, \ldots$ takovou, že $\lim_{m\to\infty} \nu(D_m) = 0$, má levá strana v (13) podle věty 22 (jež platí i pro komplexní funkce) za limitu levou stranu v (12); tím je (12) dokázáno.

Všimněme si nyní vět této kapitoly IX. Věty 63, 64, v nichž se mluví o výrazu (3), obsahujícím horní a dolní součty, nemají ovšem pro komplexní funkce f, g smyslu. Zato platí (obdobně k větě 65):

Věta 68. *Nechť komplexní funkce f, g mají integrál od a do b. Potom funkce $|f(x)|, f(x) . g(x)$ mají též integrál od a do b.*

D ů k a z. Rozložme $f = f_1 + i f_2$, $g = g_1 + i g_2$ (f_1, f_2, g_1, g_2 reálné funkce). Funkce f_1 až g_2 mají podle předpokladu integrál od a do b. Podle vět 65, 26 mají tedy integrál od a do b též funkce

$$|f| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2},\; fg = (f_1 g_1 - f_2 g_2) + i\,(f_1 g_2 + f_2 g_1)\,.$$

Také věta 66 platí i pro komplexní f; ale je nutno podat jiný důkaz (jehož jsme ostatně mohli užít i v reálném případě). Při označení stejném jako ve větě 22 je

$$\left|\sum_{j=1}^{n_m} f(\xi_{j,m})\,\Delta x_{j,m}\right| \leqq \sum_{j=1}^{n_m} |f(\xi_{j,m})|\,\Delta x_{j,m}$$

(neboť $\Delta x_{j,m} > 0$). Odtud pro $m \to \infty$ plyne podle věty 22 (platné i pro komplexní funkce) nerovnost $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$ (existence integrálu vpravo je zaručena větou 68).

Také věta 67 platí i pro komplexní $f = f_1 + if_2$. Neboť splňuje-li f podmínku A, splňují ji i reálné funkce f_1, f_2, tedy mají f_1, f_2 integrál (podle věty 67), tedy má též f integrál od a do b. Naopak, má-li f integrál od a do b, mají jej též f_1, f_2, tedy splňují f_1, f_2 podmínku A (podle věty 67), tedy zřejmě splňuje též f podmínku A.

Jak vidíte, neposkytuje zavedení integrálu *komplexní* funkce *reálné* proměnné nic v podstatě nového; v početní praxi bývá však často výhodno užívat komplexních funkcí; příklady najde čtenář již v kap. X, § 1 a potom i dále v mnohých kapitolách integrálního počtu.[14])

[14]) Mluvili jsme zde jen o vlastních integrálech. Ale také *zobecněný* integrál komplexní funkce $f(x) = g(x) + i\,h(x)$ (g, h reálné funkce) se definuje rovnicí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + i\int_a^b h(x)\,dx\,,$$

existují-li oba zobecněné integrály vpravo.