Kapitola VIII

ÚVOD DO TEORIE NEVLASTNÍCH INTEGRÁLŮ

§ 1. **Poznámky k definici integrálu.** V této knize jsme vzali v kap. II za základ tzv. Riemannovu součtovou definici integrálu: Je-li $f(x)$ omezená v $\langle a, b\rangle$, sestrojíme dolní integrál $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx$ (supremum dolních součtů) a horní integrál $\overline{\int}_a^b f(x)\,dx$ (infimum horních součtů). Je-li horní integrál roven dolnímu, nazýváme jejich společnou hodnotu Riemannovým (určitým) integrálem funkce $f(x)$ od a do b, znak $\int_a^b f(x)\,dx$; pro větší zřetelnost pišme – ale jen v tomto paragrafu –

(1) $$(\mathfrak{R})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$ [1])

Jsou však i jiné definice integrálu; z nich uvedu prozatím jen jednu, kterou bychom mohli nazvat Newtonovou definicí. Budiž v intervalu $\langle a, b\rangle$ dána funkce $f(x)$. Jestliže existuje funkce $F(x)$ taková, že v každém bodě intervalu $\langle a, b\rangle$ je $F'(x) = f(x)$ (v bodě a míním derivaci zprava, v bodě b zleva), nazveme rozdíl $F(b) - F(a)$ Newtonovým (určitým) integrálem funkce $f(x)$ od a do b, znak

(2) $$(\mathfrak{N})\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$ [2])

Zde je $a < b$; pro $a \geqq b$ definujeme Newtonův integrál opět jako v poznámce[1]).

Definice (2) vypadá jako něco podstatně jiného než definice Riemannova. Mezi oběma definicemi je však úzký vztah daný větou 39, z níž plyne toto: Existují-li oba integrály (1), (2) (Riemannův i Newtonův), jsou si rovny.[3])

Přece však nejsou tyto dvě definice (Riemannova a Newtonova) ekvivalentní – liší se rozsahem svých existenčních oborů: Existují totiž funkce $f(x)$, pro které Riemannův integrál (1) existuje a Newtonův integrál (2) neexistuje, a existují také funkce, u kterých je tomu naopak. Např. funkce definovaná rovnicemi $f(x) = 0$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 1$ nemá, jak plyne z diskuse po větě 48, Newtonův integrál od

[1]) Zde bylo $a < b$; dále definujeme ovšem: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$, je-li $f(a)$ definováno, a pro $a > b$ definujeme $\int_a^b = -\int_b^a$, má-li integrál vpravo smysl.

[2]) Funkce F, mající v $\langle a, b\rangle$ derivaci $f(x)$ (v bodě a zprava, v bodě b zleva), je spojitá v $\langle a, b\rangle$. Každá jiná funkce G mající také v $\langle a, b\rangle$ derivaci $f(x)$, se tedy podle věty 8 liší od F jen o konstantu: $G(x) = F(x) + C$, takže $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$. Pravá strana v (2) tedy nezávisí na tom, kterou z těchto funkcí (F či G) vezmeme.

[3]) Oba tyto integrály existují např. tehdy, jestliže $f(x)$ je spojitá v $\langle a, b\rangle$. Neboť podle věty 38 existuje potom integrál (1) a funkce $F(x) = (\mathfrak{R})\int_a^x f(t)\,dt$ má podle věty 36 a podle poznámky [38]) v kap. II, § 7 v $\langle a, b\rangle$ derivaci $f(x)$ (v bodě a zprava, v bodě b zleva), takže integrál (2) také existuje.

-1 do $+1$, ale má Riemannův integrál od -1 do $+1$ (mající jen jeden bod nespojitosti – viz větu 37). Naproti tomu má funkce $F(x)$, definovaná rovnicemi $F(x) = x^3 \sin \frac{\pi}{x^3}$ pro $x \neq 0$, $F(0) = 0$, derivaci $f(x) = 3x^2 \sin \frac{\pi}{x^3} - \frac{3\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x^3}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Tedy funkce $f(x)$ má Newtonův integrál $(\mathfrak{N})\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(-1) = 0$, ale nemá Riemannův integrál od -1 do $+1$, neboť není v tomto intervalu omezená (pro $x = \pm 1 : \sqrt[3]{n}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ je $|f(x)| = 3\pi\sqrt[3]{n}$).

Podáme ještě v této kapitole další definici integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$ („zobecněný Riemannův integrál"); v druhém svazku Integrálního počtu se pak setkáme s dalšími definicemi (Lebesgueovou a Perronovou). U všech těchto pojmů se setkáme s analogickým jevem: Existuje-li $\int_a^b f(x)\,dx$ podle dvou z těchto definic, dávají obě definice touž hodnotu integrálu. Ale jednotlivé definice se liší svým existenčním oborem – podobně jako Riemannův a Newtonův integrál. Tento rozdíl se pak velmi podstatně jeví i v teorii těchto různých druhů integrálu. Vezměme tento příklad: Budiž $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots$ posloupnost funkcí, která pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ má limitu $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Nechť dále existuje číslo K tak, že pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ a pro všechna přirozená n je $|f_n(x)| \leqq K$. Potom platí (jak dokážeme v II. svazku této knihy): Existují-li integrály

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

podle definice *Lebesgueovy*, existuje i $\int_a^b f(x)\,dx$ podle definice Lebesgueovy a má hodnotu

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\,.$$

Ale existují-li integrály (3) podle definice *Riemannovy*, *nemusí* ještě existovat integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ podle definice Riemannovy (příklad viz v cvičení 1). Na tomto příkladě (jednom z mnohých) je snad vidět přednost definice Lebesgueovy před Riemannovou. Přes větší obecnost a jednoduchost Lebesgueovy teorie jsem se v této knize rozhodl pro starší definici Riemannovu, která je pro začátečníka přístupnější a která také historicky sehrála důležitou úlohu. Teorie Lebesgueova bude vyložena v II. svazku.

Připojím ještě poznámku k terminologii. Řekli jsme již v kap. III, § 1, poznámka 2, že naše označení „určitý integrál" pro $(\mathfrak{R})\int_a^b f(x)\,dx$ a „neurčitý integrál" pro primitivní funkci je sice obvyklé v elementárních učebnicích (proto jsme se ho také přidrželi), ne však dosti důsledné. Připojím proto – jen tak náznakově – ještě několik poznámek o tom, jak by bylo možno zavést důslednější názvosloví.

Budiž napřed $f(x)$ funkce, která má integrál $(\mathfrak{R})\int_a^b f(x)\,dx$. Potom (věta 31) existuje také

$$\psi(x, y) = (\mathfrak{R}) \int_y^x f(t)\,dt \tag{4}$$

pro každé $x \in \langle a, b\rangle$, $y \in \langle a, b\rangle$. A nyní lze zavést toto názvosloví: Jsou-li x, y pevně dána, třeba $x = \beta$, $y = \alpha$, je integrál $(\mathfrak{R})\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ jisté *číslo*, kterému říkáme určitý Riemannův integrál funkce f od α do β. Zvolím-li $y = \alpha$ pevně, ale nechám x proměnné, je $\psi(x, \alpha)$ jistou *funkcí* x v intervalu $\langle a, b\rangle$; označme ji $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = (\mathfrak{R})\int_a^x f(t)\, dt\,. \tag{5}$$

Funkci $\varphi(x)$ se říká „neurčitý Riemannův integrál funkce $f(x)$".[4])

Podobně můžeme postupovat při Newtonově integrálu. Existuje-li $(\mathfrak{N})\int_a^b f(x)\, dx$, znamená to, že existuje funkce $F(x)$ mající v $\langle a, b\rangle$ derivaci $f(x)$,[5]) načež platí (2). Potom ovšem také pro každé $x \in \langle a, b\rangle$, $y \in \langle a, b\rangle$ existuje integrál

$$(\mathfrak{N})\int_y^x f(t)\, dt = F(x) - F(y) = \psi_1(x, y)\,. \tag{6}$$

Při pevných x, y (např. $x = \beta$, $y = \alpha$) je $(\mathfrak{N})\int_\alpha^\beta f(t)\, dt$ tzv. určitý Newtonův integrál; při pevném $y = \alpha$ a proměnném x dostáváme v (6) funkci

$$\varphi_1(x) = (\mathfrak{N})\int_a^x f(t)\, dt = F(x) - F(\alpha)\,, \tag{7}$$

kterou nazveme neurčitým Newtonovým integrálem funkce f (někdy se tak nazývá také funkce ψ_1 z (6), viz poznámku[4])). Podle (7) je patrno, že v $\langle a, b\rangle$ je $\varphi_1'(x) = F'(x) = f(x)$,[5]) tj. $\varphi_1(x)$ je v podstatě primitivní funkcí k funkci $f(x)$.[6]) Nedůslednost naší dřívější terminologie byla v tom, že jsme určitým integrálem v kap. II nazvali určitý *Riemannův* integrál, kdežto neurčitým integrálem jsme v kap. III nazvali — až na nepodstatnou odchylku, viz[6]) — neurčitý *Newtonův* integrál. Proto jsem se v kap. III dosti vyhýbal názvu „neurčitý integrál" a užíval raději názvu „primitivní funkce". Je ovšem těžko číst obvyklý znak $\int f(x)\, dx$ jinak než „integrál funkce f", a proto jsem se tohoto poněkud nedůsledného, ale tradičního názvosloví přidržel.

V dalším nebudu prozatím vyvozovat důsledků z těchto poznámek a budu i nadále označovat znakem $\int_a^b f(x)\, dx$ určitý Riemannův integrál[7]) a znakem $\int f(x)\, dx$ primitivní funkci.

Cvičení

1. Budiž n přirozené číslo. Funkci $f_n(x)$ definujme takto: lze-li x psát ve tvaru $x = \dfrac{k}{n!}$ (k celé), položme $f_n(x) = 1$; pro ostatní x položme $f_n(x) = 0$. Funkci $f(x)$ definujme takto: Pro racionální x budiž $f(x) = 1$, pro iracionální x budiž $f(x) = 0$. Dokažte: Pro každé x je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$; pro každé přirozené n existuje integrál (Riemannův) $\int_0^1 f_n(x)\, dx = 0$, ale $\int_0^1 f(x)\, dx$ neexistuje.

---

[4]) Někdy se tento název dává také funkci $\psi(x, y)$ (dvou proměnných) ze vzorce (4); mezi oběma funkcemi je však úzký vztah, neboť jednak lze φ vyjádřit pomocí ψ rovnicí $\varphi(x) = \psi(x, \alpha)$, jednak lze naopak vyjádřit ψ pomocí φ rovnicí

$$\psi(x, y) = \int_\alpha^x - \int_\alpha^y = \varphi(x) - \varphi(y)\,.$$

[5]) V bodě a míním stále derivaci zprava, v bodě b zleva.

[6]) Malá odchylka proti kap. III je v tom, že tam jsme mluvili o otevřeném intervalu (a, b), zde mluvíme o uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Tato odchylka by se dala ostatně snadno odstranit.

[7]) Hned v následujícím paragrafu však tento pojem poněkud zobecníme.

§ 2. Definice zobecněného Riemannova integrálu v nejjednodušších případech. Dosud jsme se zabývali Riemannovým integrálem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

(jeho definici pro $a < b$ viz na str. 31, pro $a = b$ na str. 46, pro $a > b$ na str. 53). Je vhodno tento pojem zobecnit; jedno takové jednoduché zobecnění provedeme v této kapitole.

Poznámka 1. Je-li $a < b$ a existuje-li Riemannův integrál (8), je integrál $F(y) = \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$ spojitou funkcí proměnné y v intervalu $\langle a, b\rangle$ (věta 36); speciálně je tedy $F(b) = \lim_{y\to b-} F(y)$, tj.

$$\lim_{y\to b-} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{9}$$

Může se však též stát, že vlastní limita vlevo existuje, i když Riemannův integrál vpravo neexistuje. V takovém případě *rozšíříme* definici integrálu (8) tím, že integrál (8) definujeme právě rovnicí (9). Vyslovme to obšírně:

Definice A. *Budiž $a < b$ a budiž dána funkce $f(x)$ mající pro každé y intervalu $\langle a, b)$ Riemannův integrál $\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$.*[8]) *Existuje-li vlastní limita*

$$\lim_{y\to b-} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{10}$$

nazýváme tuto limitu zobecněným Riemannovým integrálem funkce f od a do b (označení viz v poznámce 2).

Poznámka 2. Z toho, co jsme řekli na počátku poznámky 1, plyne: Jestliže existuje Riemannův integrál (8), potom platí rovnice (9), tj. potom existuje i zobecněný Riemannův integrál a rovná se Riemannovu integrálu (8). Proto budeme bez rozpaků též zobecněný Riemannův integrál funkce f od a do b značit znakem (8). Nedorozumění nemůže nastat: neboť existuje-li Riemannův integrál i zobecněný Riemannův integrál, jsou si oba rovny a proto nevadí, že jsou označeny týmž znakem. Pouze jde-li o *existenci* integrálu (8), musíme rozlišovat, jde-li o Riemannův či o zobecněný Riemannův integrál (neboť druhý z nich může existovat, i když první neexistuje). Vezměme několik jednoduchých příkladů.

Příklad 1. Funkce $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ nemá Riemannův integrál od 0 do 1. Předně není vůbec definována pro $x = 1$; ale i kdybychom definici této funkce v bodě $x = 1$ jakkoliv doplnili, nebyla by funkce $f(x)$ v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ omezená, neboť jest $\lim_{x\to 1-} \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = +\infty$. Zkoumejme, zda $f(x)$ má aspoň *zobecněný* Riemannův

[8]) $f(x)$ je tedy definováno pro $a \leqq x < b$, kdežto hodnota $f(b)$ nemusí být definována. Integrál právě uvedený je funkcí y, definovanou pro $a \leqq y < b$.

integrál od 0 do 1. Funkce f je spojitá v polouzavřeném intervalu $\langle 0, 1)$, takže pro každé y tohoto intervalu (tj. pro $0 \leqq y < 1$) existuje Riemannův integrál $\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Tento integrál dovedeme dokonce vypočíst; jest $\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-y} + 2$.

Ježto $\lim\limits_{y \to 1-} \sqrt{1-y} = 0$, existuje $\lim\limits_{y \to 1-} \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$; tedy existuje zobecněný Riemannův integrál $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$; *není* to ovšem Riemannův integrál, kdežto např. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2 - 2\sqrt{\frac{1}{2}}$ *jest* Riemannův integrál (a tedy podle poznámky 2 také zobecněný Riemannův integrál). Probral jsem tento prajednoduchý případ jen proto tak obšírně, abych měl zaručeno, že čtenář dokonale porozuměl definici A.

Příklad 2. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ neexistuje (ani jako zobecněný Riemannův integrál). Neboť pro $0 \leqq y < 1$ jest $\int_0^y \frac{dx}{1-x} = -\lg(1-y)$, a limita $\lim\limits_{y \to 1-}(-\lg(1-y)) = +\infty$ sice existuje, ale je nevlastní.

Příklad 3. $\int_{-1/\pi}^0 \cos\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}$ neexistuje (ani jakožto zobecněný Riemannův integrál). Primitivní funkce pro $x < 0$ je totiž $-\sin\frac{1}{x}$, takže pro $-\frac{1}{\pi} \leqq y < 0$ jest

$$\int_{-1/\pi}^y \cos\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} = -\sin\frac{1}{y} + \sin(-\pi) = \sin\left(-\frac{1}{y}\right),$$

a limita $\lim\limits_{y \to 0-} \sin\left(-\frac{1}{y}\right)$ neexistuje (vlastní ani nevlastní), neboť např. pro $y = -\frac{1}{(\frac{1}{2} + 2n)\pi}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ jest $\sin\left(-\frac{1}{y}\right) = \sin(\frac{1}{2} + 2n)\pi = 1$, kdežto pro $y = -\frac{1}{n\pi}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ jest $\sin\left(-\frac{1}{y}\right) = \sin n\pi = 0$.

Příklad 4. Pro $0 \leqq y < 1$ jest $\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin y$. Tedy existuje zobecněný Riemannův integrál $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{y \to 1-} \arcsin y = \frac{1}{2}\pi$.

Poznámka 3 (obdobná k poznámce 1). Je-li $a < b$ a existuje-li Riemannův integrál (8), je integrál $G(y) = \int_y^b f(x)\,dx$ spojitou funkcí proměnné y v $\langle a, b\rangle$ (věta 45); speciálně je tedy $G(a) = \lim_{y \to a+} G(y)$, tj.

$$\lim_{y \to a+} \int_y^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,. \tag{11}$$

Může se však opět stát, že vlastní limita vlevo existuje, i když Riemannův integrál vpravo neexistuje. V takovém případě *rozšíříme* definici integrálu (8) tím, že tento integrál definujeme právě rovnicí (11). Vyslovme to obšírně:

Definice B. *Buďiž $a < b$. Buďiž $f(x)$ funkce mající pro každé y intervalu $(a, b\rangle$ Riemannův integrál $\int_y^b f(x)\,dx$. Existuje-li vlastní limita*

$$\lim_{y \to a+} \int_y^b f(x)\,dx\,, \tag{12}$$

nazýváme tuto limitu zobecněným Riemannovým integrálem funkce $f(x)$ od a do b (označení viz v poznámce 4).

Poznámka 4. Existuje-li Riemannův integrál (8), platí (11) a tedy existuje též zobecněný Riemannův integrál funkce f od a do b ve smyslu definice B a rovná se Riemannovu integrálu (8). Konečně: existuje-li zobecněný Riemannův integrál funkce f od a do b ve smyslu definice A i ve smyslu definice B, existují *obě* limity (10), (12) (kde integrály jsou Riemannovy); vezmu-li tedy libovolné y intervalu (a, b), existují Riemannovy integrály $\int_a^y f(x)\,dx$, $\int_y^b f(x)\,dx$ a tedy i Riemannův integrál (8) (věta 30). Podle toho, co jsme dosud řekli v poznámkách 2, 4, je tedy v tomto případě zobecněný Riemannův integrál ve smyslu definice A roven zobecněnému integrálu ve smyslu definice B (oba se totiž rovnají Riemannovu integrálu (8)). Nevadí tedy, že jsme pro zobecněný Riemannův integrál v definici B zavedli týž název jako v definici A a nebude tedy též vadit, zavedeme-li pro něj týž znak, totiž znak (8), což také učiníme.

Příklad 5. Pro $0 < y \leqq 1$ jest $\displaystyle\int_y^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 - 2\sqrt{y}$, tedy existuje zobecněný Riemannův integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{y \to 0+} (2 - 2\sqrt{y}) = 2$.

Příklad 6. Pro $0 < y < 1$ obdržíme integrací per partes

$$\int_y^1 \lg x\,dx = [x \lg x]_y^1 - \int_y^1 dx = -1 + y - y \lg y\,.$$

Jest $\lim_{y \to 0+} y \lg y = 0$ (viz **DI**, příkl. 1 na str. 279, v 4. vyd. na str. 321) a tedy existuje $\int_0^1 \lg x\,dx = -1$.

Příklad 7. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ neexistuje (ani zobecněný); neboť pro $0 < y < 1$ jest $\int_y^1 \frac{dx}{x^2} = -1 + \frac{1}{y}$ a limita $\lim_{y \to 0+} \left(\frac{1}{y} - 1\right) = +\infty$ sice existuje, ale nevlastní.

Probereme ještě dvě další jednoduchá zobecnění Riemannova integrálu; budeme totiž definovat ještě symboly $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$, a to jako limity

$$\lim_{y \to +\infty} \int_a^y f(x)\,dx\,, \tag{13}$$

$$\lim_{y \to -\infty} \int_y^b f(x)\,dx\,. \tag{14}$$

Obšírně řečeno:

Definice C. *Budiž dáno číslo a a funkce $f(x)$ mající pro každé $y \geqq a$ Riemannův integrál $\int_a^y f(x)\,dx$. Existuje-li vlastní limita* (13), *nazýváme ji zobecněným Riemannovým integrálem funkce $f(x)$ od a do $+\infty$ a značíme ji* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (psává se též ∞ místo $+\infty$, ale my to nebudeme dělat).

Definice D. *Budiž dáno číslo b a funkce $f(x)$ mající pro každé $y \leqq b$ Riemannův integrál $\int_y^b f(x)\,dx$. Existuje-li vlastní limita* (14), *nazýváme ji zobecněným Riemannovým integrálem funkce $f(x)$ od $-\infty$ do b a značíme ji* $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$.

Symboly zde zavedené nemohou se nikterak zmást se symboly dříve zavedenými; neboť v dřívějších případech se symboly $+\infty$, $-\infty$ vůbec nevyskytly v „mezích" integrálu.

Příklad 8. Pro $y \geqq 1$ jest $\int_1^y \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{y} + 1$, takže $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{y \to +\infty} \left(-\frac{1}{y} + 1\right) = 1$.

Příklad 9. Jest $\lim_{y \to +\infty} \int_1^y \frac{dx}{x} = \lim_{y \to +\infty} \lg y = +\infty$; ježto tato limita není vlastní, neexistuje $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Příklad 10. $\int_0^y \cos x\,dx = \sin y$, ale limita $\lim_{y \to +\infty} \sin y$ neexistuje (vlastní ani nevlastní). Tedy $\int_0^{+\infty} \cos x\,dx$ neexistuje.

Příklad 11. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x-1}$ ani $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$ neexistují; ale existuje $\int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \lg 3$; neboť pro $y > 2$ jest $\int_2^y \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \lg \frac{y-1}{y+1} + \lg 3$ a první člen vpravo má pro $y \to +\infty$ limitu $\lg 1 = 0$.

Příklad 12. Jest $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{y \to -\infty} \int_y^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{y \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right) = 1$, ale $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x}$ neexistuje, neboť limita $\lim_{y \to -\infty} \int_y^{-1} \frac{dx}{x} = \lim_{y \to -\infty} (-\lg |y|) = -\infty$ je nevlastní.

Poznámka 5. Zobecněný Riemannův[9]) integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ (přičemž b může znamenat též symbol $+\infty$, a symbol $-\infty$) může být dvojího druhu: buďto tento integrál *není* Riemannovým integrálem (tj. funkce $f(x)$ nemá Riemannův integrál od a do b), a potom mu budeme říkat „*nevlastní* Riemannův[9]) integrál"; nebo *jest* tento integrál Riemannovým integrálem, a potom jej někdy nazýváme „*vlastním* Riemannovým[9]) integrálem". „Vlastní (Riemannův) integrál" značí tedy totéž jako „Riemannův integrál"; nevlastní (Riemannovy) integrály jsou pak ony zobecněné (Riemannovy) integrály, jež nejsou vlastní. Např. integrály

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_0^1 \lg x\,dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2},$$

$$\int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx, \quad \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$$

jsou nevlastní (každý integrál s mezí $+\infty$ nebo $-\infty$ jest ovšem nevlastní); naproti tomu integrály $\int_0^5 \sqrt{x}\,dx$, $\int_{-1}^1 \operatorname{arctg} x\,dx$, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$ jsou vlastní.

§ 3. Definice zobecněného Riemannova integrálu v obecném případě. Při integrálu $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ nám překážela jen horní mez (integrál $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ ($\varepsilon > 0$) je vlastní); podobně při integrálu $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$ vadila jen dolní mez (integrál $\int_{-A}^{-1} \frac{dx}{x^2}$ ($A > 1$) je vlastní). Jsou však možny i složitější případy a těmi se nyní budeme zabývat. Jaký smysl bychom asi měli dát symbolům

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}?$$

Při symbolu I leží „nepříjemný" bod 0 *uvnitř*, ne na kraji. Je tedy nasnadě tato myšlenka: Rozdělím interval $\langle -1, 1 \rangle$ bodem 0 na intervaly $\langle -1, 0 \rangle$, $\langle 0, 1 \rangle$ a zkusím, zda existuje integrál od -1 do 0 (ve smyslu definice A)[10]) a integrál od 0 do 1 (ve

[9]) Slovo „Riemannův" budeme často vynechávat, ježto zde jiné než Riemannovy a zobecněné Riemannovy integrály nepřicházejí.

[10]) Tedy zobecněný integrál. Vůbec slovem „integrál" budu mínit v tomto paragrafu zobecněný integrál, pokud ovšem neřeknu výslovně „vlastní integrál".

smyslu definice B). Existují-li oba tyto integrály, je přirozeno definovat symbol I rovnicí

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1}$$

(vynechávám, jako často v dalším, integrovanou funkci). Ale pro $0 < \varepsilon < 1$ jest

$$\int_{\varepsilon}^{1} = 3(1 - \sqrt[3]{\varepsilon}), \quad \int_{-1}^{-\varepsilon} = 3(\sqrt[3]{-\varepsilon} - \sqrt[3]{-1}), \text{ tedy } \int_{0}^{1} = 3, \quad \int_{-1}^{0} = 3,$$

takže bychom definovali $I = 6$.

U symbolu J nám překážejí body 0, 1, 2, a ovšem obě meze $-\infty$, $+\infty$. Je tedy nasnadě tato myšlenka: Zvolíme libovolně body a_1, a_2, a_3, a_4 tak, aby bylo $a_1 < 0 < a_2 < 1 < a_3 < 2 < a_4$ a zjistíme, zda existují (zobecněné) integrály (ve smyslu definicí A až D)

$$(15) \qquad \int_{-\infty}^{a_1}, \quad \int_{a_1}^{0}, \quad \int_{0}^{a_2}, \quad \int_{a_2}^{1}, \quad \int_{1}^{a_3}, \quad \int_{a_3}^{2}, \quad \int_{2}^{a_4}, \quad \int_{a_4}^{+\infty}.$$

Existují-li *všechny* tyto integrály, budeme symbol J definovat jako součet integrálů (15); neexistuje-li některý z integrálů (15), budeme říkat, že integrál J neexistuje. Ale zde se naskytuje tato obtíž: Nemůže snad existence integrálů (15) a hodnota jejich součtu záviset na volbě čísel a_1, a_2, a_3, a_4? Tuto otázku musíme napřed zodpovědět a teprve potom můžeme přistoupit k pořádné definici.

Abychom nemusili rozlišovat případ konečných a nekonečných mezí, zavedeme tuto úmluvu: k množině všech reálných čísel přidáme ještě dva prvky, jimž budeme říkat „nevlastní reálná čísla", totiž symboly $-\infty$, $+\infty$. Ježto jsme dosud nedefinovali význam symbolu $a < b$, je-li a nebo b nevlastní, můžeme jej definovat jak chceme;[10a]) učiníme to ovšem účelně, a to takto: je-li a libovolné („vlastní") reálné číslo, budeme psát $-\infty < a$, $a < +\infty$, $-\infty < +\infty$. (Jinak řečeno, symbol $a < b$ značí: Buďto jsou a, b vlastní a jest $a < b$ v obvyklém smyslu (DI, kap. I), nebo je $a = -\infty$, $b \neq -\infty$, nebo je $b = +\infty$, $a \neq +\infty$.)

Budiž dán nějaký interval (a, b)[11]) a funkce $f(x)$. Budeme říkat, že interval (a, b) je „vhodný" (pro funkci f), jestliže platí jeden z těchto dvou výroků:

I. Buďto pro každé $b' \in (a, b)$ (tj. pro $a < b' < b$) existuje *vlastní* integrál $\int_a^{b'} f(x)\,dx$.

II. Nebo pro každé $a' \in (a, b)$ (tj. pro $a < a' < b$) existuje *vlastní* integrál $\int_{a'}^{b} f(x)\,dx$.[12])

[10a]) Chápejte slova „jak chceme" ve smyslu poznámky [11]) na str. 144.

[11]) Smí být též $a = -\infty$ nebo $b = +\infty$.

[12]) Názvy „vhodný interval" a později „vhodné rozdělení" nejsou obvyklé; zavádím je jen pro pohodlí a jen na chvíli. Všimněte si, že v případě I je číslo a nutně vlastní, v případě II je b vlastní.

Je-li interval (a, b) „vhodný", víme podle def. A až D v § 2, co znamená symbol $\int_a^b f(x)\,dx$. Tento zobecněný integrál existuje v případě I (resp. v případě II) tehdy a jen tehdy, existuje-li limita[13])

$$\lim_{b' \to b-} \int_a^{b'} f(x)\,dx = A^{14)} \text{ (resp. } \lim_{a' \to a+} \int_{a'}^b f(x)\,dx = A^{15)}\text{)},$$

načež klademe $\int_a^b f(x)\,dx = A$.

1. pomocná věta. *Budiž dán interval (a, b) a jeho „rozdělení"*

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b \quad (n \geqq 1).$$

Je-li (a, b) „vhodný" (pro funkci f), je též každý z intervalů (a_{j-1}, a_j) $(j = 1, 2, \ldots, n)$ „vhodný";[16]) *integrál*[17])

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{16}$$

existuje pak tehdy a jen tehdy, existují-li integrály[17])

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} f(x)\,dx \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{17}$$

načež integrál (16) je roven součtu integrálů (17).

Důkaz. Nechť platí např. výrok I (pro II je důkaz obdobný). Je-li $a_{n-1} < b' < a_n$, platí tato rovnost mezi *vlastními* integrály:

$$\int_a^{b'} = \int_{a_1}^{a_2} + \ldots + \int_{a_{n-2}}^{a_{n-1}} + \int_{a_{n-1}}^{b'}.$$

Odtud je patrno, že všechny intervaly (a_{j-1}, a_j) $(j = 1, 2, \ldots, n)$ jsou vhodné; dále je patrno, že limita levé strany pro $b' \to b -$ (tj. integrál (16)) existuje tehdy a jen tehdy, existuje-li limita posledního členu vpravo (neboť ostatní členové nezávisí na b'), načež je zřejmo, že limita pravé (a tedy i levé) strany je rovna součtu integrálů (17).

Budiž opět dán interval (a, b) a funkce $f(x)$. Budiž

$$D: \qquad a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b \quad (n \geqq 1)$$

nějaké „rozdělení" intervalu (a, b). Říkejme, že toto rozdělení je „vhodné" (pro funkci f), je-li každý interval (a_{j-1}, a_j) $(j = 1, 2, \ldots, n)$ „vhodný". Říkáme (jako v kap. II), že rozdělení

$$D_1: \qquad a = b_0 < b_1 < \ldots < b_m = b$$

[13]) Slovem limita rozumíme v tomto paragrafu *vlastní* limitu.

[14]) Viz definice A, C. V případě $b = +\infty$ čti $b' \to +\infty$ místo $b' \to b-$.

[15]) Viz definice B, D. V případě $a = -\infty$ čti $a' \to -\infty$ místo $a' \to a+$. Existují-li obě napsané limity, jsou si rovny (viz poznámku 4 v § 2 a text mezi definicí D a příkl. 8 v § 2).

[16]) Tedy: každý částečný interval vhodného intervalu je rovněž vhodný.

[17]) Míním stále zobecněný integrál ve smyslu definicí A až D.

je *zjemněním* rozdělení D, jestliže se každý bod a_j vyskytuje mezi body $b_0, b_1, \ldots, b_m$. Z poznámky[16]) je patrno, že každé zjemnění „vhodného" rozdělení je rovněž „vhodné".

2. pomocná věta. *Budiž dán interval* (a, b), *funkce* $f(x)$ *a dvě „vhodná" rozdělení*

$$D_1: \qquad a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b\,,$$

$$D_2: \qquad a = b_0 < b_1 < \ldots < b_m = b\,.$$

Tvrdím: Integrály[17])

$$(18) \qquad \int_{a_{j-1}}^{a_j} f(x)\,\mathrm{d}x \quad (j = 1, \ldots, n)$$

existují tehdy a jen tehdy, existují-li integrály[17])

$$(19) \qquad \int_{b_{k-1}}^{b_k} f(x)\,\mathrm{d}x \quad (k = 1, \ldots, m)\,,$$

načež součet všech integrálů (18) *se rovná součtu všech integrálů* (19).

Důkaz. 𝔄) Budiž předně D_2 zjemněním rozdělení D_1. Vezmu libovolný interval (a_{j-1}, a_j); existují tedy r, s tak, že $a_{j-1} = b_r$, $a_j = b_s$ $(r < s)$. Podle 1. pomocné věty existuje $\int_{a_{j-1}}^{a_j}$ tehdy a jen tehdy, existují-li integrály

$$\int_{b_r}^{b_{r+1}}, \int_{b_{r+1}}^{b_{r+2}}, \ldots, \int_{b_{s-1}}^{b_s}, \text{ načež se } \int_{a_{j-1}}^{a_j}$$

rovná součtu těchto integrálů. Provedu-li to pro každé j $(1 \leqq j \leqq n)$, dostanu žádaný výsledek.

𝔅) Buďte nyní D_1, D_2 libovolná „vhodná" rozdělení. Sestrojme rozdělení

$$D_3: \qquad a = c_0 < c_1 < \ldots < c_p = b\,,$$

jež je jejich společným zjemněním (za body c_l vezmu např. všechny body a_j i b_k). Tedy D_3 je také „vhodné". Podle případu 𝔄) existují integrály (18) tehdy a jen tehdy, existují-li integrály

$$(20) \qquad \int_{c_{l-1}}^{c_l} \quad (l = 1, 2, \ldots, p)\,,$$

a (20) existují – opět podle 𝔄) – tehdy a jen tehdy, když existují integrály (19), načež – opět podle 𝔄) – součet integrálů (20) se rovná součtu integrálů (18) a rovněž součtu integrálů (19). Tím je důkaz 2. pomocné věty proveden.

Krátce řečeno: Existence integrálů (18) ani hodnota jejich součtu nezávisí na tom, které „vhodné" rozdělení intervalu (a, b) vezmeme. To nás opravňuje k této definici:

Definice zobecněného Riemannova integrálu. *Budiž* (a, b) *interval*, $f(x)$ *funkce. Jestliže existuje „vhodné" rozdělení intervalu* (a, b) (*pro funkci* f), *vyberme jedno takové vhodné rozdělení*

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b\,;$$

jestliže existují zobecněné integrály (18) (*ve smyslu definic A až D z* § 2), *budeme součet integrálů* (18) *nazývat zobecněným Riemannovým integrálem funkce f od a do b, značka* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Neexistuje-li žádné „vhodné" rozdělení nebo neexistuje-li při zvoleném „vhodném" rozdělení některý z integrálů (18), říkáme, že zobecněný Riemannův integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje. Až do konce tohoto paragrafu budeme slovem integrál rozumět (nepřipojím-li výslovně přívlastek „vlastní") zobecněný Riemannův integrál ve smyslu této definice.

Je patrno, že případy A, B, C, D z § 2 jsou speciálními případy této definice. V těchto případech je totiž už interval (a, b) sám „vhodný" (v případě C je $b = +\infty$, v případě D je $a = -\infty$), takže $a = a_0 < a_1 = b$ je „vhodné" rozdělení, takže $\int_a^b$ podle naší nové definice značí totéž jako $\int_{a_0}^{a_1}$ (tj. $\int_a^b$) podle některé z definic A až D.

Příklad 1. V integrálu I na začátku tohoto paragrafu je $-1 < 0 < 1$ „vhodné" rozdělení. Náš tehdejší výpočet (vyšlo $I = 6$) je tedy ve shodě s naší definicí. Rovněž to, co jsme řekli u integrálu J.

Příklad 2. Budiž $f(x) = 0$ pro racionální x, $f(x) = 1$ pro iracionální x. Pro žádnou dvojici α, β $(\alpha < \beta)$ neexistuje vlastní $\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ (viz kap. II, § 2, příkl. 2). Tedy žádný interval není „vhodný", žádné rozdělení není „vhodné". Tedy ani zobecněný integrál této funkce neexistuje.

Příklad 3. Vyšetřujme integrál $J = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.[18]) „Vhodné" rozdělení je např. $-1 < 0 < 1$. Integrál $(0 < \varepsilon < 1)$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\lg \varepsilon$$

má pro $\varepsilon \to 0+$ pouze *nevlastní* limitu $+\infty$. Tedy neexistuje $\int_0^1$, tedy ani $\int_{-1}^1$. Zde je snad poučná tato poznámka: Integrál J by existoval, kdyby existovaly vlastní limity

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x}. \tag{21}$$

Ty sice neexistují, ale za to existuje limita *součtu*:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} \right) = 0, \tag{22}$$

[18]) Zde vadí jedině bod 0.

ježto

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -\lg \varepsilon, \quad \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} = \lg \varepsilon.$$

K existenci integrálu J nestačí tedy existence vlastní limity (22), nýbrž musily by existovat *obě* vlastní limity (21), a ty neexistují.

Příklad 4. Vyšetřujme

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

„Vhodné" rozdělení je např. $-\infty < 0 < +\infty$. Rozklad dává

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2+4},$$

primitivní funkcí je

$$F(x) = \tfrac{1}{3}\operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\tfrac{1}{2}x.$$

Pro $A > 0$ je

$$\int_0^A = F(A), \quad \int_{-A}^0 = -F(-A) = F(A)$$

(funkce F je lichá). Dále $\lim_{A\to+\infty} F(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{12}\pi$, tedy

$$\int_0^{+\infty} = \int_{-\infty}^0 = \tfrac{1}{12}\pi, \quad \text{tedy} \quad J = \tfrac{1}{6}\pi.$$

Příklad 5. Budiž $a < b < c$. Potom integrál $J = \int_a^c f(x)\,dx$ existuje tehdy a jen tehdy, existují-li oba integrály $J_1 = \int_a^b f(x)\,dx$, $J_2 = \int_b^c f(x)\,dx$, a je potom $J = J_1 + J_2$.

Důkaz. I. Nechť existuje J. Zvolme „vhodné" rozdělení $a = a_0 < a_1 < \ldots$ $\ldots < a_n = c$, přičemž b můžeme mezi ty body a_i přidat; budiž třeba $b = a_k (0 < k < n)$. Potom jest podle definice

$$J = \left(\int_{a_0}^{a_1} + \ldots + \int_{a_{k-1}}^{a_k}\right) + \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{a_n}\right).$$

kde integrály vpravo jsou vzaty ve smyslu definic A až D, § 2. Ale existence těch integrálů v první (druhé) závorce říká, že existuje J_1 (J_2), přičemž J_1 je součtem integrálů v první závorce, J_2 je součtem integrálů v druhé závorce. Tedy $J = J_1 + J_2$.

II. Nechť existují J_1, J_2. Budiž

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$$

„vhodné" rozdělení intervalu (a, b) a budiž

$$b = a_k < a_{k+1} < \ldots < a_n = c$$

„vhodné“ rozdělení intervalu (b, c). Potom

(23) $$J_1 = \int_{a_0}^{a_1} + \ldots + \int_{a_{k-1}}^{a_k}, \quad J_2 = \int_{a_k}^{a_{k+1}} + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{a_n},$$

kde integrály na pravých stranách je třeba brát ve smyslu definic A až D, § 2. Zřejmě je $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ „vhodné“ rozdělení intervalu (a, c), a z (23) plyne, že existuje J; sečtením rovnic (23) pak plyne $J = J_1 + J_2$.

Dodatek k definici zobecněného Riemannova integrálu. *Zobecněný Riemannův integrál $\int_a^a f(x)\,dx$ klademe vždy roven 0. Pro $b < a$ definujeme zobecněný Riemannův integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ rovnicí $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, existuje-li zobecněný Riemannův integrál vpravo.*

Poznámka 1. Také zde, podobně jako ve speciálních případech v § 2, nazýváme zobecněný Riemannův integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ *nevlastní*, není-li vlastním, tj. neexistuje-li integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ ve smyslu kapitoly II.

Cvičení

1. Budiž $b \neq 0$. Potom je

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx\,dx = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx\,dx = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

pro $a > 0$; pro $a \leq 0$ integrály neexistují.

2. $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}; \quad \int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^4 + 1} = \tfrac{1}{4}\pi; \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}};$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3\,dx}{x^4 + 1} \text{ neexistuje}.$$

3. $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1} = \tfrac{2}{3}\pi\sqrt{3}; \quad \int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^3 + 1} = \tfrac{2}{3}\pi\sqrt{3}; \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^3 + 1} \text{ neexistuje}.$$

4. $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \pi; \quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 - x^2} \text{ neexistuje}.$$

5. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2 + x + 1} \text{ neexistuje}.$$

6. $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \tfrac{1}{2}\pi; \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}} \text{ neexistuje};$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}} = \lg(1 + \sqrt{2}); \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ neexistuje}.$$

7. Je-li $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$, existuje $J = \int_{a_0}^{a_n} f(x)\,dx$ tehdy a jen tehdy, existují-li integrály $J_k = \int_{a_{k-1}}^{a_k}$ pro $k = 1, \ldots, n$ a je potom $J = J_1 + \ldots + J_n$. (Důkaz úplnou indukcí z příkl. 5 na str. 177.)

8. Nechť existují $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$; budiž c konstanta. Potom existují integrály $\int_a^b c f(x) \,.\, dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$, kdežto $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ nemusí existovat. Návod: K funkci $f + g$: Jestliže pro obě funkce f, g nastává případ I (uvedený na str. 173 před 1. pomocnou větou) nebo jestliže pro obě funkce f, g nastává případ II, je důkaz snadný. V obecném případě rozdělím interval (a, b) tak, aby v každém částečném intervalu nastával jeden z uvedených případů. Důkaz pro cf je obdobný, ale snazší. Příklad pro fg: $\int_0^1 x^{-1/2}\,dx$, $\int_0^1 x^{-3/4}\,dx$ existují, $\int_0^1 x^{-5/4}\,dx$ neexistuje.

9. Jsou-li $c_1, \ldots, c_n$ konstanty a existují-li integrály $J_k = \int_a^b f_k(x)\,dx$ $(k = 1, \ldots, n)$, existuje též

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,dx = c_1 J_1 + \ldots + c_n J_n\,.$$

10. Z definice v § 3 a z definic A, B, C, D je vidět, že $\int_a^b f(x)\,dx$ $(a < b)$ může existovat, i když $f(x)$ není definována v *konečném* počtu bodů integračního intervalu. Dokažte: Je-li $f(x) = g(x)$ všude v (a, b) až na konečný počet bodů $c_1, c_2, \ldots, c_k$[19]) a existuje-li $\int_a^b f(x)\,dx$, existuje též $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. Návod: Sestrojte vhodné „vhodné" rozdělení (promiňte!), v němž za dělicí body vezmete též $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

11. Buďte a, b *vlastní* čísla, budiž $f(x)$ funkce *omezená* v $\langle a, b\rangle$. Nechť pro každou dvojici čísel a', b', vyhovující nerovnostem $a < a' < b' < b$, existuje vlastní integrál $\int_{a'}^{b'} f(x)\,dx$. Potom existuje též vlastní integrál $\int_a^b f(x)\,dx$. Návod:

$$\overline{\int_a^b} = \overline{\int_a^{a'}} + \int_{a'}^{b'} + \overline{\int_{b'}^b}\,; \qquad \underline{\int_a^b} = \underline{\int_a^{a'}} + \int_{a'}^{b'} + \underline{\int_{b'}^b}$$

(věta 29). Limitním přechodem $a' \to a+$, $b' \to b-$ snadno obdržíte $\overline{\int_a^b} = \underline{\int_a^b}$.

12. Nechť existuje zobecněný integrál $J = \int_a^b f(x)\,dx$ $(a < b)$, a nechť platí toto:

1. $a > -\infty$, $b < +\infty$. 2. f je definována a omezená v $\langle a, b\rangle$.

Dokažte: Potom integrál J je vlastní. Návod: Je-li (a, b) „vhodný" interval, plyne to z cvičení 11; v obecném případě proveďte „vhodné" rozdělení. Poznamenejme: Není-li některá z podmínek 1, 2 splněna, je J jistě nevlastní. Toto cvičení tedy řeší úplně otázku: Kdy je zobecněný integrál vlastní, kdy nevlastní.

[19]) V bodech c_j nemusí tedy rovnost $f(x) = g(x)$ platit: buďto proto, že některý ze symbolů $f(c_j)$, $g(c_j)$ není definován, nebo proto, že je $f(c_j) \neq g(c_j)$.