KAPITOLA VII

POČETNÍ TECHNIKA LEBESGUEOVA INTEGRÁLU

Tato kapitola slouží především tomu, aby se čtenář naučil užívati vyložené theorie k výpočtu integrálů. Jde hlavně o užití Fubiniovy věty, o zavádění nových proměnných do množných integrálů a o integrály funkcí, závislých na parametru: jejich spojitost, derivace a integrace podle parametru. Obecných vět je zde málo (věta 106 až 109); až na poslední jsou bezprostředními důsledky věty 65. Některé obecné úvahy jsou provedeny pro Lebesgue-Stieltjesův integrál, ale příklady (které zaujímají většinu kapitoly) se týkají jen Lebesgueova integrálu.

§ 1. Poznámky o jednoduchém Lebesgueově integrálu. Začnu několika triviálními poznámkami o Lebesgueově integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, abych se jimi později nemusil zdržovat. Ale přečtěte si napřed § 7 v kap. III, jestliže jste jej vynechali; nebudu se k němu vracet. Pro substituční methodu máme teď vydatnější větu 104; pro příklady, které budeme počítat, nám postačí následující speciální případ:

Poznámka 1. Budiž $\varphi(t)$ konečná funkce spojitá a buďto rostoucí nebo klesající v (α, β) $(-\infty \leqq \alpha < \beta \leqq +\infty)$, $a = \lim\limits_{t\to\alpha+} \varphi(t)$, $b = \lim\limits_{t\to\beta-} \varphi(t)$. Nechť existuje spočetná množina $M \subset (\alpha, \beta)$ uzavřená v (α, β)[1]) tak, že φ má v $(\alpha, \beta) \dot{-} M$ (to je otevřená množina) spojitou, konečnou a od nuly různou derivaci. Potom je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,\ ^{2})$$

jakmile jeden z integrálů existuje (při komplexním f čti: konverguje). Neboť M a tedy i $\varphi(M)$ jsou množiny spočetné a tedy nulové, načež se užije věty 104.

---

[1]) T. j. všechny hromadné body množiny M, které leží v (α, β), patří k M.

Poznámka 2. Speciálně pro $\varphi(t) = gt + h$ (g, h reálná konečná, $g \neq 0$) máme (pro $-\infty \leqq \alpha < \beta \leqq +\infty$)

$$\int_{g\alpha+h}^{g\beta+h} f(x)\,\mathrm{d}x = g\int_{\alpha}^{\beta} f(gt + h)\,\mathrm{d}t\,,^{2})$$

existuje-li jeden z integrálů.

Poznámka 3. Funkce f se nazývá *sudá* (po příp. *lichá*), platí-li toto: Má-li $f(x)$ smysl, má také $f(-x)$ smysl a je $f(-x) = f(x)$ (po příp. $f(-x) = -f(x)$). Tvrdím: *Existuje-li* $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ $(a \in \mathsf{E}_1^*)$, *je* $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ *pro sudou* f; *konverguje-li* $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$, *je* $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ *pro lichou* f. Důkaz.

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{-a} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t = \pm\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Poznámka 4. Budiž p konečné reálné číslo. Říkáme, že f má periodu p, platí-li toto: má-li $f(x)$ smysl, má i $f(x + p)$, $f(x - p)$ smysl a je $f(x) = f(x + p) = f(x - p)$. Je-li p periodou, je ovšem i kp periodou funkce f pro každé celé k. Funkce, mající aspoň jednu periodu $p \neq 0$, se nazývá *periodickou*. Je-li p periodou funkce f, je (substituce $x = t - p$) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+p}^{b+p} f(t - p)\,\mathrm{d}t = \int_{a+p}^{b+p} f(t)\,\mathrm{d}t$, má-li aspoň jeden integrál smysl. Tedy integrační interval lze *posunouti o periodu*. Jestliže však *délka intervalu je sama periodou*, lze posunouti o *libovolné* číslo. Neboť je-li $a \in \mathsf{E}_1$, $b \in \mathsf{E}_1$ a je-li $p > 0$ periodou funkce f, najděme napřed celé k tak, že $a + (k - 1)\,p \leqq b < a + kp$, tedy $a \leqq b - (k - 1)\,p < a + p$, $a + kp \leqq b + p < a + (k + 1)\,p$ (načrtněte). Tedy

$$\int_a^{b-(k-1)p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+kp}^{b+p}, \quad \int_{b-(k-1)p}^{a+p} = \int_b^{a+kp}$$

a sečtením obdržíme

$$\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^{b+p} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

má-li jeden z obou integrálů smysl.

---

[2]) Záměnou mezí lze vzorce použíti i pro $\alpha > \beta$.

P o z n á m k a 5. V následující pozn. 6 a též často později se nám vyskytne mocnina ξ^η s komplexními ξ, η. Ježto tento výraz vyžaduje jisté opatrnosti, zopakujme stručně některé věci z **D II**, kap. XII, § 3 a doplňme je o některé drobnosti.

Buďte ξ, η komplexní čísla, $\xi \neq 0$. Potom existuje právě jedna dvojice reálných čísel r, φ tak, že

$$\xi = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,, \quad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi \leqq \pi\,; \tag{1}$$

jest $r = |\xi|$, $\varphi = \operatorname{ampl} \xi$ (t. zv. „hlavní hodnota" amplitudy). „Hlavní hodnotu" logaritmu definujeme pak rovnicí

$$\lg \xi = \lg r + \mathrm{i}\varphi = \lg |\xi| + \mathrm{i} \operatorname{ampl} \xi$$

($\lg r$ je běžný logaritmus kladného čísla) a konečně klademe

$$\xi^\eta = \mathrm{e}^{\eta \lg \xi} = \mathrm{e}^{\eta(\lg r + \mathrm{i}\varphi)}\,. \tag{2}$$

Ihned zjistíme (z vlastností funkce e^z), že

$$\xi^{\eta_1}\xi^{\eta_2} = \xi^{\eta_1+\eta_2}\,, \quad \xi^{-\eta} = \frac{1}{\xi^\eta}\,, \quad (\xi^\eta)^n = \xi^{n\eta} \text{ pro celé } n\,. \tag{3}$$

Naproti tomu (viz **D II**, kap. XII, § 3, cvič. 2) nemusí býti

$$\xi_1^\eta \xi_2^\eta = (\xi_1\xi_2)^\eta\,. \tag{4}$$

V některých případech však (4) platí: *Jestliže* $-\pi < \operatorname{ampl} \xi_1 + \operatorname{ampl} \xi_2 \leqq \pi$, *platí* (4). D ů k a z. Pišme $r_k = |\xi_k|$, $\varphi_k = \operatorname{ampl} \xi_k$ ($k = 1, 2$). Dále pišme pro zjednodušení $\mathrm{e}^z = \exp(z)$. Potom levá a pravá strana v (4) jsou

$$\exp\{\eta(\lg r_1 + \mathrm{i}\varphi_1 + \lg r_2 + \mathrm{i}\varphi_2)\},\ \exp\{\eta(\lg(r_1r_2) + \mathrm{i} \operatorname{ampl}(\xi_1\xi_2))\}\,.$$

Zde je $\lg r_1 + \lg r_2 = \lg(r_1r_2)$ a jde ještě o to, zda $\varphi_1 + \varphi_2 = \operatorname{ampl}(\xi_1\xi_2)$. Ale to je pravda; neboť $\xi_1\xi_2 = r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$ a tedy se $\operatorname{ampl}(\xi_1\xi_2)$ liší od $\varphi_1 + \varphi_2$ pouze o celistvý násobek čísla 2π; ježto pak čísla $\varphi_1 + \varphi_2$, $\operatorname{ampl}(\xi_1\xi_2)$ leží v $(-\pi, \pi\rangle$, jsou si rovna. Tedy na př.: *Jestliže obě čísla* ξ_1, ξ_2 *mají reálnou část kladnou nebo jestliže* $\xi_1 \neq 0$ *je ryze imaginární a* ξ_2 *má reálnou část kladnou, platí* (4). Neboť je potom

$$|\operatorname{ampl} \xi_1| \leqq \tfrac{1}{2}\pi\,, \quad |\operatorname{ampl} \xi_2| < \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

Není-li $\xi \leqq 0$, je

(5) $$\frac{1}{\xi^\eta} = \left(\frac{1}{\xi}\right)^\eta.$$

Důkaz. Jest $\operatorname{ampl}\frac{1}{\xi} = -\operatorname{ampl}\xi$ (pro $\xi < 0$ to není pravda, ježto potom $\operatorname{ampl}\frac{1}{\xi} = \operatorname{ampl}\xi = \pi$). Tedy $\operatorname{ampl}\xi + \operatorname{ampl}\frac{1}{\xi} = 0$ leží v $(-\pi, \pi\rangle$, tedy $\xi^\eta \cdot \left(\frac{1}{\xi}\right)^\eta = \left(\xi \cdot \frac{1}{\xi}\right)^\eta = 1^\eta = 1$ (neboť $\lg 1 = 0$, $e^{\eta \lg 1} = e^0 = 1$) a odtud hořejší rovnice.

Jestliže ξ_1, ξ_2 mají reálnou část kladnou nebo jestliže $\xi_1 \neq 0$ je ryze imaginární a ξ_2 má reálnou část kladnou, je

(6) $$\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^\eta = \frac{\xi_1^\eta}{\xi_2^\eta}, \quad \left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^\eta = \frac{\xi_2^\eta}{\xi_1^\eta}.$$

Důkaz. Je-li $\xi \neq 0$ ryze imaginární (po případě má-li reálnou část kladnou), platí totéž pro číslo $1 : \xi$. V našem případě lze tedy užíti (4), (5). Tedy

$$\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^\eta = \left(\xi_1 \cdot \frac{1}{\xi_2}\right)^\eta = \xi_1^\eta \cdot \left(\frac{1}{\xi_2}\right)^\eta = \xi_1^\eta \cdot \frac{1}{\xi_2^\eta};$$

podobně pro $\xi_2 : \xi_1$.

Speciálně: (4), (5), (6) platí pro kladná ξ_1, ξ_2, ξ.

My se nejčastěji setkáme s případy, že buďto je základ kladný a mocnitel libovolný nebo základ libovolný ($\neq 0$) a mocnitel reálný. Místo $\xi^{\frac{1}{2}}$ budeme i pro komplexní ξ psáti často $\sqrt{\xi}$. Ježto z (2) plyne $\operatorname{ampl}\sqrt{\xi} = \frac{1}{2}\operatorname{ampl}\xi$, je patrno toto: Je-li $\xi < 0$, je $\sqrt{\xi} = i\sqrt{|\xi|}$; pro ostatní komplexní $\xi \neq 0$ má $\sqrt{\xi}$ reálnou část kladnou.

Pro reálná a, b je $e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}$, při čemž $|e^{bi}| = 1$, takže

(7) $$|e^{a+bi}| = e^a.$$

Píšeme-li tedy $\eta = \eta_1 + \eta_2 i$ (η_1, η_2 reálná), plyne z (2)

(8) $$|\xi^\eta| = e^{\eta_1 \lg r - \eta_2 \varphi} = |\xi|^{\eta_1} \cdot e^{-\eta_2 \varphi}.$$

Tedy speciálně

(9) $$|\xi^\eta| = |\xi|^\eta \text{ pro reálné } \eta\,,$$

(10) $$|\xi^{\eta_1+\eta_2 i}| = \xi^{\eta_1} \text{ pro } \xi > 0\,.$$

Při pevně zvoleném komplexním s je z^s funkcí komplexní proměnné z, která (**D II**, kap. XII, § 3) má derivaci sz^{s-1} pro všechna komplexní z s výjimkou hodnot $z \leqq 0$ (čtenář znalý theorie analytických funkcí ví, jak se vypořádat s tímto nepřirozeným omezením, jež nám však zde nevadí).

Vzpomeňme si ještě (**D II**, kap. XI, § 1, příkl. 2), že obvyklá pravidla pro derivování součtu, rozdílu, ..., složených funkcí platí i pro derivaci podle komplexní proměnné. Na př.

(11) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}((a + \mathrm{i}z)^s) = \mathrm{i}s(a + \mathrm{i}z)^{s-1}$$

v každém bodě, pro nějž není $a + \mathrm{i}z \leqq 0$. Nebo

(12) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}((1 - z^2)^s) = -\,2sz(1 - z^2)^{s-1}$$

v každém bodě, v němž není $1 - z^2 \leqq 0$. Abychom tyto body vyšetřili, pišme $z = x + iy$ (x, y reálná); potom nerovnost $1 - z^2 = 1 - x^2 + y^2 - 2ixy \leqq 0$ platí zřejmě tehdy a jen tehdy, je-li $1 - x^2 + y^2 \leqq 0$, $xy = 0$, t. j. $|x| \geqq 1$, $y = 0$, t. j. *rovnice* (12) *platí pro všechna komplexní z, jež neleží na žádné z polopřímek $z \leqq -1$, $z \geqq 1$.*

Ještě poslední poznámku: Budiž $f(z)$ funkce komplexní proměnné z; jestliže pro nějakou reálnou hodnotu $z = x$ existuje derivace $f'(x)$ (podle komplexní proměnné), bude toto číslo také derivací (v bodě x) oné funkce reálné proměnné, kterou dostaneme, když ve funkci $f(z)$ necháme z probíhat jen reálné hodnoty (pro něž $f(z)$ je definováno) — viz **D II**, kap. XI, § 1, pozn. 3.[3])

Na příklad: Sestrojme komplexní funkce reálné proměnné z:

$$(a + \mathrm{i}z)^s,\ (1 - z^2)^s \quad (a > 0,\ s \in \boldsymbol{K})\,.$$

---

[3]) Zcela přesně řečeno: Je-li $M \subset \boldsymbol{K}$ oborem funkce f, je $N = M\mathbf{E}_1$ množina všech reálných čísel, ležících v M; parciální funkce f_N (viz **D II**, kap. I, § 3) je pak komplexní funkcí jedné reálné proměnné. Platí pak: Má-li f v nějakém bodě $x \in \mathbf{E}_1$ derivaci $f'(x)$ (podle komplexní proměnné), existuje též $f'_N(x) = f'(x)$ (vlevo je derivace funkce f_N podle reálné proměnné).

Potom pro jejich derivace platí vzorec (11) (pro každé reálné z) a vzorec (12) (pro $-1 < z < 1$).

Poznámka 6. V dalším budeme často potřebovati integrály

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{s-1}\, \mathrm{d}x$$

(t. zv. funkce gamma neboli Eulerův integrál 2. druhu),

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, \mathrm{d}x$$

(t. zv. funkce beta neboli Eulerův integrál 1. druhu). Přitom jsou s, p, q komplexní čísla s kladnou reálnou částí. Integrály jsou konvergentní; rozložím-li totiž na reálnou a imaginární část $s = \sigma + \mathrm{i}\tau$, $p = \alpha + \mathrm{i}\gamma$, $q = \beta + \mathrm{i}\delta$ (σ, α, β kladná), jsou absolutní hodnoty integrandů $\mathrm{e}^{-x}x^{\sigma-1}$, $x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ a nyní viz příklady a návody v kap. III, § 7 — až asi do příkl. 6.

Jest zřejmě $\Gamma(1) = 1$ a substitucí $x = y^2$ dostáváme

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\, \mathrm{d}y = \sqrt{\pi} \tag{13}$$

(viz Laplaceův integrál, kap. III, § 7, příkl. 12). Integrací per partes dostáváme pro $\Re s > 0$ ihned

$$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)\,. \tag{14}$$

Odtud indukcí pro celé kladné n

$$\Gamma(n) = (n-1)\,.\,(n-2)\dots 2\,.\,1\,.\,\Gamma(1) = (n-1)!\,, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) &= (n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})\dots\tfrac{3}{2}\,.\,\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \\ &= \frac{1\,.\,3\,.\,5\dots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\,.\end{aligned} \tag{16}$$

Funkce Γ, B (tohoto označení se všeobecně užívá) budeme ještě vyšetřovati podrobněji (viz kap. XVIII).

Poznámka 7. Jestliže

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\,,$$

říkáme také, že funkce f, g jsou si asymptoticky rovny (pro $x \to a$, $x \in A$) a píšeme

$$f(x) \cong g(x) \text{ pro } x \to a,\ x \in A\,;$$

dodatky $x \to a$, $x \in A$ někdy vynecháváme, nehrozí-li nedorozumění.

Na př. je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,, \quad \lim_{x\to 1+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2(x-1)}} = 1\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{x^2} = 1\,;$$

místo toho píšeme $\sin x \cong x$ pro $x \to 0$, $\sqrt{x^2-1} \cong \sqrt{2(x-1)}$ pro $x \to 1+$, $x^2 + x \cong x^2$ pro $x \to +\infty$.

Připomínám ještě (viz **D II**, kap. VI, § 13) znaky $O(g(x))$, $o(g(x))$ (při kladném g):

Symbol

$$f(x) = O(g(x)) \text{ pro } x \to a,\ x \in A$$

značí, že $\limsup\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} \dfrac{|f(x)|}{g(x)} < +\infty$; symbol

$$f(x) = o(g(x)) \text{ pro } x \to a,\ x \in A$$

značí, že $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} \dfrac{|f(x)|}{g(x)} = 0$. Podotkl jsem, že se těchto symbolů užívá, jen když $g(x)$ je kladné (aspoň pro všechna x dostatečně blízká bodu a, různá od a a ležící v A). Zase vynecháváme často dodatek $x \in A$, někdy i $x \to a$. Příklady: $x = o(x^2)$ pro $x \to +\infty$; $x^2 = o(|x|)$ pro $x \to 0$; $x^2 = O(|x|)$ pro $x \to 0$ (každé $o(g(x))$ je tím spíše současně $O(g(x))$); $\sin x = x + O(|x|^3)$ pro $x \to 0$ (to znamená: abych dostal $\sin x$, musím k x přičísti funkci, která je $O(|x|^3)$), $\sin x = O(1)$ pro $x \to +\infty$ (podle definice značí $O(1)$ funkci, která je omezená v blízkosti příslušného bodu, kdežto $o(1)$ značí funkci, mající limitu 0).

Znaků O, o, $\cong$ budeme často užívati; komu nestačí toto krátké vysvětlení, může si hned teď přečíst § 1 v kap. XV nebo si zopakovat § 13 z **D II**, kap. VI.

§ 2. Existence a konvergence integrálu. Aby Lebesgueův integrál

(17) $$\int_M f(x)\,dx \quad (M \subset \mathbf{E}_r)$$

existoval, musí M být měřitelná (podle Lebesguea), dále musí f býti měřitelná v M. Mimo to víme, že se (17) nezmění, přidáme-li k M nebo ubereme-li od M množinu nulové míry nebo změníme-li f na množině nulové míry. Je proto vhodno uvědomit si, jak lze v jednoduchých případech zjistit, zda daná množina nebo funkce je měřitelná, po případě, zda daná množina má míru rovnou nule.

Poznámka 1. Uvědomme si především, že každá otevřená nebo uzavřená (v $\mathbf{E}_r$) množina je měřitelná; dále, že rozdíl dvou měřitelných množin je množina měřitelná a že sjednocení, průnik, limes inferior a superior, po případě limita posloupnosti měřitelných množin jsou opět množiny měřitelné. Pokud se pak měřitelnosti funkcí týče, víme, že každá funkce spojitá v měřitelné množině M je měřitelná v M. Obecněji (viz Luzinovu větu 40): Je-li M měřitelná množina a lze-li ke každému $\delta > 0$ nalézti množinu N tak, že $\mu(N) < \delta$ a že f je spojitá v množině $M \dot{-} N$, je f měřitelná v M. Často stačí tento speciální případ: Jestliže M je měřitelná a jestliže existuje množina N tak, že $\mu(N) = 0$ a že f je spojitá v $M \dot{-} N$, je f měřitelná v M.

Známe-li nějakou funkci f, měřitelnou v M, může nám tato funkce posloužit k zjišťování měřitelnosti dalších množin; neboť množiny

$$\mathop{\mathcal{E}}_{x}(x \in M, f(x) = c), \quad \mathop{\mathcal{E}}_{x}(x \in M, f(x) \leqq c)\,,$$
$$\mathop{\mathcal{E}}_{x}(x \in M, a < f(x) < b)$$

a pod. jsou měřitelné.

Příklad 1. Vyšetřujme v $\mathbf{E}_2$ množinu

$$M = \mathop{\mathcal{E}}_{[x,y]}\left(-1 < \frac{\sqrt{x}}{y\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \leqq 1\right). \tag{18}$$

Především označím znakem N množinu oněch bodů, pro které výraz napsaný v (18) nemá smyslu, t. j.

$$N = \mathop{\mathcal{E}}_{[x,y]}(x < 0) \cup \mathop{\mathcal{E}}_{[x,y]}(y = 0) \cup \mathop{\mathcal{E}}_{[x,y]}(x^2 + y^2 - 1 \geqq 0)\,.$$

Ježto $x, y, x^2 + y^2 - 1$ jsou funkce spojité v $\mathbf{E}_2$, je N měřitelná, tedy i $\mathbf{E}_2 \dot{-} N$ je měřitelná; dále

$$M = \mathop{\mathcal{E}}_{[x,y]}\left([x, y] \in \mathbf{E}_2 \dot{-} N,\ -1 < \frac{\sqrt{x}}{y\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \leqq 1\right).$$

Ale funkce $\dfrac{\sqrt{x}}{y\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ je spojitá a tedy měřitelná v $\mathsf{E}_2 \dot{-} N$; tedy je M měřitelná.[4])

Poznámka 2. Jde ještě o otázku, kdy má nějaká množina Lebesgueovu míru rovnou nule. Především víme podle věty 76, že „graf" každé měřitelné funkce $r - 1$ proměnných má v E_r míru nulovou. T. j. je-li f měřitelná v $M \subset \mathsf{E}_{r-1}$, potom množina všech bodů $x = [x_1, \ldots, x_r] \in \mathsf{E}_r$, vyhovujících podmínkám

$$x_r = f(x_1, \ldots, x_{r-1}),\ [x_1, \ldots, x_{r-1}] \in M\,,$$

má míru nulovou. Ježto Lebesgueova míra je invariantní vůči permutaci souřadnic, má také každá množina, daná podmínkami

$$x_k = f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_r),\ [x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_r] \in M\,,$$

míru nulovou (t. j. nemusí to býti právě poslední souřadnice, která je vypočtena pomocí ostatních).

Víme také, že každá část množiny nulové je nulová a že sjednocení spočetného systému množin nulových je opět množina nulová.

Poznámka 3. Často bývá množina $N \subset \mathsf{E}_r$ definována jako množina všech bodů $[x_1, \ldots, x_r]$, které vyhovují nějaké rovnici

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0 \tag{19}$$

nebo jako část takové množiny. Budiž S množina těch bodů $\xi \in \mathsf{E}_r$, jež mají tuto vlastnost: Existuje jisté okolí Ω_ξ bodu ξ (t. j. otevřená množina, obsahující bod ξ), ve kterém $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial F}{\partial x_r}$ jsou konečné a spojité. Zřejmě každý bod z Ω_ξ patří též do S, t. j. každý bod $\xi \in S$ je vnitřním bodem S, t. j. S je otevřená. Množina $N \dot{-} S$ (kde funkce F na př. nemusí mít vůbec parciální derivace) vyžaduje zřejmě zvláštního vyšetření. Vyšetřujme tedy zatím jen množinu NS. Abychom zjednodušili psaní, vezměme přímo S za obor funkce F, takže máme tento problém: Nechť reálná funkce F má v otevřené množině S konečné spojité parciální derivace 1. řádu; budiž N množina oněch bodů $x \in S$, pro něž platí (19).[5]) Otázka: Je $\mu(N) = 0$?

[4]) Až potud platí výsledky tohoto paragrafu pro jakoukoliv míru μ; teprve nyní počneme užívati toho, že jde o Lebesgueovu míru.

Označme znakem M_k $(k = 1, 2, \ldots, r)$ množinu oněch bodů z N, pro něž

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} \neq 0, \text{ t. j. } M_k = \mathop{\mathcal{E}}_{x}\left(F(x) = 0, \ \frac{\partial F(x)}{\partial x_k} \neq 0\right).$$

Tvrdím, že $\mu(M_k) = 0$. **Důkaz.** Budiž $\xi \in M_k$. Podle věty o implicitních funkcích (**D II**, kap. VIII, věta 210) lze rovnici $F(x) = 0$ v jistém okolí bodu ξ „jednoznačně řešiti" podle x_k. Přesně řečeno: Existují čísla $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ s touto vlastností: Ke každému bodu $[x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_r]$ intervalu

$$(20) \quad \begin{gathered} |x_1 - \xi_1| < \delta, \ \ldots, \ |x_{k-1} - \xi_{k-1}| < \delta, \ |x_{k+1} - \xi_{k+1}| < \delta, \ \ldots, \\ |x_r - \xi_r| < \delta \end{gathered}$$

existuje v intervalu

$$(21) \qquad |x_k - \xi_k| < \varepsilon$$

jedna a jen jedna hodnota

$$(22) \qquad x_k = f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_r),$$

která vyhovuje rovnici $F(x_1, \ldots, x_r) = 0$, a tato funkce f je spojitá v intervalu (20). Tedy: označíme-li znakem I_ξ interval (r-rozměrný), daný nerovnostmi (20), (21), je $N \,.\, I_\xi$ prostě množina všech bodů, pro něž platí (20), (22), t. j. $N \,.\, I_\xi$ je graf funkce f, takže $\mu(NI_\xi) = 0$. Nahraďme I_ξ „menším" racionálním[6]) intervalem K_ξ $(\xi \in K_\xi \subset I_\xi)$. Potom každý bod $\xi \in M_k$ leží v příslušném K_ξ a je ovšem $\mu(M_k K_\xi) \leqq \mu(NI_\xi) = 0$. Ježto racionálních intervalů je jen spočetně mnoho, lze všechny intervaly $K_\xi (\xi \in M_k)$ srovnat v posloupnost $K^1, K^2, K^3, \ldots$ a je $M_k \subset \bigcup_n M_k K^n$, tedy $\mu(M_k) \leqq \sum_n \mu(M_k K^n) = 0$, což bylo dokázati.

Jestliže tedy v každém bodě množiny N je $\dfrac{\partial F}{\partial x_k} \neq 0$ aspoň pro jedno k $(1 \leqq k \leqq r)$, je $N \subset \bigcup_{k=1}^{r} M_k$ a tedy $\mu(N) = 0$.

---

[5]) Píši tedy prostě N místo NS.

[6]) Interval $i_1 \times i_2 \times \ldots \times i_r$ nazýváme racionálním, mají-li jednorozměrné intervaly $i_1, \ldots, i_r$ racionální krajní body.

V obecném případě ovšem může býti v některých bodech $F = \frac{\partial F}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial F}{\partial x_r} = 0$. Odvoďme si proto následující obecnější větu:

Nechť reálná funkce $F(x_1, \ldots, x_r)$ má v otevřené množině S konečné spojité parciální derivace až do řádu n-tého ($n > 0$). Budiž

$$N = \mathop{\mathcal{E}}_{x}(x \in S, F(x) = 0)\,.$$

Budiž N_n množina oněch bodů $x \in S$, v nichž funkce F i všechny její derivace až do n-tého řádu jsou rovny nule.

Potom je $\mu(N \dot{-} N_n) = 0$ (tedy, dokáži-li nějak, že $\mu(N_n) = 0$, je dokázáno též, že $\mu(N) = 0$; jde o Lebesgueovu míru).

Důkaz. V každém bodě $x \in N \dot{-} N_n$ existuje derivace různá od nuly $\frac{\partial^p F}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_p}} \neq 0$ ($1 \leqq p \leqq n$), a současně $F = 0$. Tedy existuje $q > 0$ tak, že

$$\frac{\partial^q F}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{q-1}} \partial x_{i_q}} \neq 0, \quad \frac{\partial^{q-1} F}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{q-1}}} = 0 \tag{23}$$

($1 \leqq q \leqq n$).[7] Označme znakem $M_{q;i_1,\ldots,i_q}$ množinu oněch $x \in S$, pro něž platí (23). Užijeme-li předešlého výsledku na funkci $\frac{\partial^{q-1} F}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{q-1}}}$, dostaneme ihned, že $\mu(M_{q;i_1,\ldots,i_q}) = 0$. Tedy i množina $N \dot{-} N_n \subset \bigcup_{q=1}^{n} \bigcup_{i_1,\ldots,i_q=1}^{r} M_{q;i_1,\ldots,i_q}$ má míru 0.

Příklad 2. „Nadrovina", t. j. množina všech bodů x, vyhovujících rovnici

$$a_1 x_1 + \ldots + a_r x_r - b = 0 \quad (a_1^2 + \ldots + a_r^2 > 0)\,,$$

je nulová. Důkaz. Je-li $a_k \neq 0$, lze odtud vypočítat x_k jako lineární (tedy spojitou, tedy měřitelnou) funkci ostatních x_i. Tedy je nadrovina grafem měřitelné funkce. Jiný důkaz (pomocí pozn. 3): Derivace levé strany podle x_k je $a_k \neq 0$.

[7]) Pro $q = 1$ značí druhá rovnice prostě $F = 0$.

Příklad 3. „Povrch koule", daný rovnicí

$$x_1^2 + \ldots + x_r^2 - \varrho^2 = 0 \quad (0 < \varrho < +\infty)$$

je nulová množina. **Důkaz.** Jde o grafy dvou funkcí

$$x_1 = \pm \sqrt{\varrho^2 - x_2^2 - \ldots - x_r^2}$$

spojitých v měřitelné množině

$$\underset{[x_2,\ldots,x_r]}{\mathcal{E}} (x_2^2 + \ldots + x_r^2 - \varrho^2 \leqq 0) .$$

Druhý důkaz: $\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} (x_1^2 + \ldots + x_r^2 - \varrho^2) = 2 \neq 0.$

Příklad 4. Budiž $P(x_1, \ldots, x_r)$ reálný polynom n-tého stupně, takže aspoň jeden člen tvaru $ax_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}$ $(k_1 + \ldots + k_r = n > 0)$ má koeficient $a \neq 0$. Potom množina $\underset{x}{\mathcal{E}}(P(x) = 0)$ je nulová. **Důkaz.** Ihned zjistíme, že $\dfrac{\partial^n P}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_r^{k_r}} = k_1! \ldots k_r!\, a \neq 0.$

Příklad 5. Množina

$$M = \underset{[x,y]}{\mathcal{E}} (x + y^2 = \sqrt{x^3 + y^3}) \subset \mathbf{E}_2$$

je nulová. **Důkaz.** M je částí množiny $\underset{[x,y]}{\mathcal{E}} ((x + y^2)^2 - x^3 - y^3 = 0)$ a užije se předešlého příkladu.

Příklad 6. Množina

$$M = \underset{[x,y]}{\mathcal{E}} (4y \sin x - \arcsin (xy) = 0) \subset \mathbf{E}_2$$

je nulová. **Důkaz.** Funkce $f(x, y) = 4y \sin x - \arcsin (xy)$ je definována pro $|xy| \leqq 1$,[8]) ale spojité derivace má pouze pro $|xy| < 1$. Body, kde $|xy| = 1$, neboli $y = \pm \dfrac{1}{x}$, tvoří nulovou množinu. V bodech otevřené množiny $|xy| < 1$ je $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = - \dfrac{x^3 y}{(1 - x^2y^2)^{\frac{3}{2}}}.$

---

[8]) V **D II**, kap. XII, § 4 jsme sice definovali arcsin z pro všechna komplexní z; jestliže však není $-1 \leqq xy \leqq 1$, nemůže býti arcsin (xy) reálný a tedy bod $[x, y]$ nemůže patřiti k M.

Vyloučíme-li body, kde $x = 0$ nebo $y = 0$ (ty tvoří nulovou množinu), je $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \neq 0$.

Tyto poznámky snad zatím postačí. V příkladech, které budeme počítat, je zjišťování měřitelnosti množin a funkcí většinou tak snadné, že se o něm nebudu zpravidla zmiňovat.

Poznámka 4.[9]) Jestliže bylo již zjištěno, že M je měřitelná a že f je měřitelná v M, potom integrál (17) jistě existuje, jestliže f je skoro všude v M nezáporná; ovšem integrál může buďto konvergovati nebo míti hodnotu $+\infty$; podobně u funkcí skoro všude nekladných. Jestliže funkce f mění znamení, vede často k cíli věta 45, podle níž integrál (17) konverguje tehdy a jen tehdy, konverguje-li integrál

$$\int_M |f(x)| \, dx\,; \tag{24}$$

jestliže (24) nekonverguje, potom (17) má buďto hodnotu $+\infty$ nebo $-\infty$ nebo vůbec neexistuje.

O konvergenci integrálu (24) můžeme pak často rozhodnouti takto: Podaří-li se nám sestrojiti funkci φ tak, že je

$$|f(x)| \leqq \varphi(x) \text{ skoro všude v } M, \ \int_M \varphi(x) \, dx < +\infty\,, \tag{25}$$

je tím dokázáno, že (24) je konvergentní. Naopak, podaří-li se nám sestrojiti funkci ψ tak, že je

$$0 \leqq \psi(x) \leqq |f(x)| \text{ skoro všude v } M, \ \int_M \psi(x) \, dx = +\infty\,, \tag{26}$$

je tím dokázáno, že (24) není konvergentní. V praxi se ovšem snažíme sestrojit pokud možno jednoduchou takovou funkci φ (po příp. ψ), abychom integrál této funkce mohli vypočíst nebo aspoň odhadnout. Viz ostatně (pro „jednoduché" integrály) řadu příkladů v kap. III, § 7.

Poznámka 5. Uvědomte si ještě pozn. 11 v kap. IV, § 1: Jestliže $K = \int_M f(x) \, dx$, $L = \int_N g(y) \, dy$ konvergují ($M \subset \mathbf{E}_r$, $N \subset \mathbf{E}_s$), konverguje

[9]) Další úvahy tohoto paragrafu platí zase pro Lebesgue-Stieltjesův integrál.

i $\iint\limits_{M\times N} f(x)\,g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = KL$. Speciálně ($g(y) = 1$): Jestliže K konverguje a $\mu(N) < +\infty$, je

$$\iint\limits_{M\times N} f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mu(N)\,.\,K\,.$$

Obdobně pro $\iiint\limits_{M\times N\times P} f(x)\,g(y)\,h(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ atd.

§ 3. Užití Fubiniovy věty 74 a věty 103 o zavádění nových integračních proměnných k výpočtu množných integrálů. Obsahem tohoto paragrafu je řada příkladů na výpočet množných integrálů. Některé z těchto příkladů mají samostatný význam, jiné slouží jen k procvičení látky. Jde vesměs o Lebesgueovy integrály.

Budiž $F(y, z)$ funkce $r + s$ proměnných (píšeme $y = [y_1, \ldots, y_r]$, $z = [z_1, \ldots, z_s]$); budiž $M \subset \mathbf{E}_{r+s}$. Potom je (věta 74)

$$\int\limits_M F(y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\mathbf{E}_s} \Big(\int\limits_{M^{*,z}} F(y, z)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\mathbf{E}_r} \Big(\int\limits_{M^{y,*}} F(y, z)\,\mathrm{d}z \Big)\,\mathrm{d}y\,, \tag{27}$$

jestliže integrál vlevo existuje. Víme také toto (Dodatek k větě 74): Jestliže projekce P množiny M do prostoru $\mathbf{E}_s$ (t. j. do prostoru „posledních s souřadnic") je měřitelná (což obyčejně je splněno), můžeme místo $\int\limits_{\mathbf{E}_s}$ psáti $\int\limits_P$.

Příklad 1.

$$I = \iint\limits_{\substack{0\leq x\leq 2\\ 0\leq y\leq 1}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Vynecháme-li bod $[0, 0]$, je integrovaná funkce spojitá a nezáporná na zbytku integračního oboru. Tedy integrál existuje a je

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y}}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 (\sqrt{y + 4} - \sqrt{y})\,\mathrm{d}y$$

(neboť vnitřní integrál je $[\sqrt{x^2 + y}]_{x=0}^{x=2}$); vyjde $I = \frac{2}{3}(5\sqrt{5} - 9)$.

Příklad 2.

$$I = \iint\limits_{\substack{0\leq x\leq 1\\ 0\leq y\leq 1}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{y(x + y)}}\,.$$

Za integrační obor můžeme vzíti též $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ (vynechá se nulová množina), načež jde o integrál spojité kladné funkce.

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{y(x+y)}} \right) dy = 2 \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{y+1}{y}} - 1 \right) dy$$

atd. (substituce $\sqrt{\dfrac{y+1}{y}} = t$; dopočtěte každý příklad až do konce).

Příklad 3.

$$I = \iint_M y \, dx \, dy ,$$

kde M je čtvrtkruh

$$M = \mathop{\mathcal{E}}_{[x,y]} (x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq r^2) \quad (r > 0) .$$

$$I = \int_0^r \Big(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y \, dy \Big) \, dx = \tfrac{1}{2} \int_0^r (r^2 - x^2) \, dx = \tfrac{1}{3} r^3 ;$$

nebo také

$$I = \int_0^r \Big(\int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} y \, dx \Big) \, dy = \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} \, y \, dy = \tfrac{1}{3} r^3 .$$

U oborů složitějších je účelno, načrtnouti si orientační obrázek.

Příklad 4.

$$I = \iint_M xy \, dx \, dy ,$$

kde M je trojúhelník s vrcholy [1, 1], [2, 4], [3, 2]. Napíšeme-li rovnice spojnic těchto bodů, vidíme ihned, že M je definováno nerovnostmi

$$y \geqq \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2},\ y \leqq 3x - 2,\ y \leqq -2x + 8 . \tag{28}$$

Z náčrtku je patrno — a z (28) to ihned ověříme — že pro všechny body $[x, y] \in M$ je $1 \leqq x \leqq 3$, načež pro $1 \leqq x \leqq 2$ dává (28) podmínku $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \leqq y \leqq 3x - 2$, kdežto pro $2 \leqq x \leqq 3$ dává (28) podmínku $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \leqq y \leqq -2x + 8$. Tedy[10])

$$I = \int_1^2 \Big(\int_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{3x-2} xy \, dy \Big) \, dx + \int_2^3 \Big(\int_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{-2x+8} xy \, dy \Big) \, dx ,$$

což snadno dopočtete.

---

[10]) Ověřte, že dolní mez vnitřního integrálu je nejvýše rovna horní mezi. Nedbáte-li toho, můžete udělat chybu — viz příkl. 5.

Příklad 5. Při bezmyšlenkovitém psaní vzorce (27) můžeme se snadno dopustiti chyby. Nechť na př. existuje integrál

$$I = \iint\limits_{\substack{-1 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq x}} f(x, y) \, dx \, dy \, .$$

Napíšeme-li mechanicky

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{x} f(x, y) \, dy \right) dx \, ,$$

udělali jsme chybu. Neboť vnitřní integrál se má bráti přes množinu oněch y, pro něž (při daném x) je $0 \leqq y \leqq x$; tato množina je interval $\langle 0, x \rangle$ pro $x \geqq 0$, ale je **prázdná** pro $x < 0$. Tedy správně:

$$I = \int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{x} f(x, y) \, dy \right) dx \, .$$

Příklad 6. Podobně zjistěte, že platí (existují-li integrály vlevo — načrtněte si integrační obory)

$$\iint\limits_{\substack{0 < x < 2 \\ -x+2 < y < 2x-1}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{1}^{2} \left(\int_{-x+2}^{2x-1} f(x, y) \, dy \right) dx \, ,$$

$$\iint\limits_{\substack{x > 0 \\ 1 < x^2+y^2 < 4}} f(x, y) \, dx \, dy =$$

$$= \int_{0}^{1} \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) \, dy + \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \right) dx + \int_{1}^{2} \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) \, dy \right) dx \, .$$

Příklad 7. Jestliže první integrál v (27) neexistuje, nemusí druhý a třetí integrál v (27) míti stejnou hodnotu: může se státi, že žádný z nich neexistuje, nebo že existuje jen jeden z nich, nebo že existují oba a mají stejnou hodnotu nebo že existují oba a mají různé hodnoty. Uveďme příklad na poslední možnost.

Pro $x \neq 0$ je $\dfrac{\partial}{\partial y} \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2} \right) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$, tedy

$$\int_{0}^{1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy = \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

a odtud

$$I_1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 1} = \tfrac{1}{4}\pi \, ;$$

zcela obdobně

$$I_2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{y^2 + 1} = - \tfrac{1}{4}\pi \, .$$

Tedy $I_1 \neq I_2$. Vidíte, jak je důležité zjistit existenci prvního integrálu v (27) (v tomto příkladě ovšem tento integrál neexistuje, neboť není $I_1 = I_2$).

Příklad 8. Nerovnost $I_1 \neq I_2$ v příkl. 7 působí dojmem čistě negativního výsledku, který nás pouze varuje před bezmyšlenkovitým použitím vzorce (27). Ale úvahy tohoto druhu mohou míti též positivní význam. Jako příklad proveďme Gaussův důkaz fundamentální věty algebry: *Budiž n přirozené číslo,* $F(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ *polynom s komplexními koeficienty* a_k. *Potom existuje aspoň jedno komplexní* ζ *tak, že* $F(\zeta) = 0$.

Důkaz. Buďte r, φ reálná čísla; položíme-li $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, je $z^k = r^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi} = r^k(\cos k\varphi + \mathrm{i} \sin k\varphi)$; rozkladem na reálnou a imaginární část dostaneme $F(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = P(r, \varphi) + \mathrm{i}\, Q(r, \varphi)$, kde (klademe $a_k = \alpha_k + \mathrm{i}\beta_k$; α_k, β_k reálná)

$$(29) \qquad P(r, \varphi) = r^n \cos n\varphi + \sum_{k=1}^{n-1} r^k(\alpha_k \cos k\varphi - \beta_k \sin k\varphi) + \alpha_0 \, ,$$

$$(30) \qquad Q(r, \varphi) = r^n \sin n\varphi + \sum_{k=1}^{n-1} r^k(\beta_k \cos k\varphi + \alpha_k \sin k\varphi) + \beta_0 \, .$$

Předpokládejme, že pro žádné komplexní ζ není $F(\zeta) = 0$, takže pro žádné r, φ není současně $P = Q = 0$, t. j. pro každé (reálné) r, φ je $P^2 + Q^2 > 0$. Z toho odvodíme spor. Položme[11])

---

[11]) Píšeme $P_r = \dfrac{\partial P}{\partial r}$, $P_\varphi = \dfrac{\partial P}{\partial \varphi}$ atd. Všechny funkce a derivace, vystupující dále, jsou spojité.

$$(31)\qquad U(r, \varphi) = \frac{P_r Q - P Q_r}{P^2 + Q^2}, \quad V(r, \varphi) = \frac{P_\varphi Q - P Q_\varphi}{P^2 + Q^2}.$$

Tvrdím, že pro každé r, φ je

$$(32)\qquad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\partial V}{\partial r}.$$

Důkaz: Je-li $Q \neq 0$ v nějakém bodě $[r, \varphi]$ a tedy i v jistém jeho okolí, je v tomto okolí zřejmě

$$U = \frac{\partial}{\partial r}\left(\operatorname{arctg} \frac{P}{Q}\right), \quad V = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\operatorname{arctg} \frac{P}{Q}\right),$$

načež (32) plyne ze záměnnosti derivací 2. řádu; je-li však $Q = 0$ v nějakém bodě $[r, \varphi]$, je nutně $P \neq 0$ v tomto bodě a tedy i v jeho okolí, načež v tomto okolí je zřejmě

$$U = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\operatorname{arctg} \frac{Q}{P}\right), \quad V = -\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\operatorname{arctg} \frac{Q}{P}\right)$$

a (32) plyne opět ze záměnnosti.

Budiž $0 < R < +\infty$. Integrál

$$(33)\qquad I = \iint\limits_{\substack{0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} \frac{\partial U(r, \varphi)}{\partial \varphi} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi$$

zřejmě konverguje.[12] Podle Fubiniovy věty a podle (32) je tedy $I = I_1 = I_2$, klademe-li

$$(34)\qquad I_1 = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \, \mathrm{d}\varphi\right) \mathrm{d}r,$$

$$(35)\qquad I_2 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{\partial U}{\partial \varphi} \, \mathrm{d}r\right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{\partial V}{\partial r} \, \mathrm{d}r\right) \mathrm{d}\varphi.$$

[12]) Integrační obor je omezený uzavřený (t. j. kompaktní) interval, takže integrand, který je spojitý, je v integračním oboru omezený (při nekompaktním integračním oboru poslední úsudek neplatí!).

Ale vnitřní integrál v I_1 je zřejmě $U(r, 2\pi) - U(r, 0) = 0$, ježto U je při pevném r periodickou funkcí φ; tedy $I_1 = 0$. Vnitřní integrál v I_2 je pak

$$V(R, \varphi) - V(0, \varphi) = V(R, \varphi)\,, \tag{36}$$

ježto podle (29), (30) je $P_\varphi(0, \varphi) = Q_\varphi(0, \varphi) = 0$. Podle (29), (30), (31) zjistíme ihned, že

$$V(r, \varphi) = \frac{-nr^{2n} + f_{2n-1}(r, \varphi)}{r^{2n} + g_{2n-1}(r, \varphi)}\,,$$

kde f_{2n-1}, g_{2n-1} jsou polynomy v r stupně nejvýše $2n - 1$, jejichž koeficienty jsou omezené funkce φ. Tedy $\lim\limits_{r \to +\infty} V(r, \varphi) = -n$, a to stejnoměrně v intervalu $-\infty < \varphi < +\infty$. Zvolíme-li tedy R dosti velké, bude $V(R, \varphi) < -\frac{1}{2}n$ pro všechna φ a tedy $I_2 < \int\limits_0^{2\pi} (-\frac{1}{2}n)\, d\varphi = -\pi n < 0$, kdežto $I_1 = 0$, což je hledaný spor.

Příklad 9. Nechť existuje $I = \iint\limits_M f(x, y)\, dx\, dy$, kde M je dáno nerovnostmi $0 < y \leqq x \leqq 2$, $xy \geqq 1$ (načrtněte). Tyto nerovnosti jsou ekvivalentní s nerovnostmi $1 \leqq x \leqq 2$, $\dfrac{1}{x} \leqq y \leqq x$ a také s nerovnostmi $\frac{1}{2} \leqq y \leqq 2$, $\operatorname{Max}\left(\dfrac{1}{y}, y\right) \leqq x \leqq 2$. Tedy je jednak

$$I = \int\limits_1^2 \Big(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} f(x, y)\, dy\Big)\, dx\,,$$

jednak

$$I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \Big(\int\limits_{\frac{1}{y}}^{2} f(x, y)\, dx\Big)\, dy + \int\limits_1^2 \Big(\int\limits_y^2 f(x, y)\, dx\Big)\, dy\,.$$

Vidíte, že volba integračního pořadí nemusí býti při výpočtu lhostejná; formálně vypadá užití prvního vzorce jednodušeji — mohou se ovšem vyskytnouti funkce f, u nichž výpočet podle druhého vzorce je jednodušší.

Příklad 10. Víme (kap. IV, § 1, pozn. 5, 6, 7), že Fubiniovy věty lze užíti též k rozkladu integrace v E_r na r jednoduchých integrací. Budiž $M \subset \mathsf{E}_3$ čtyřstěn, daný podmínkami (načrtněte!)

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x + y + z \leqq 1\,. \tag{37}$$

Potom

$$I = \iiint\limits_M \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{1 + x + y} = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} \left(\int\limits_0^{1-x-y} \frac{\mathrm{d}z}{1 + x + y} \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\,.$$

Vnitřní integrace (podle z) dává

$$\frac{1 - x - y}{1 + x + y} = -1 + \frac{2}{1 + x + y}\,;$$

integrál této funkce podle y (v mezích $0, 1 - x$) dává $-1 + x + {}$ ${} + 2 \lg 2 - 2 \lg (1 + x)$ a poslední integrace v mezích $0, 1$ dává $I = \frac{3}{2} - 2 \lg 2$.

Příklad 11. Počítejme (α reálné)

$$I_\alpha = \iiint\limits_M (x + y + z)^\alpha\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

kde M je táž množina (viz (37)) jako v příkladě 10. Jde o integrál funkce spojité a kladné, vyloučíme-li z M bod $[0, 0, 0]$; tedy I_α existuje. Vyloučíme-li prozatím hodnoty $\alpha = -1$, $\alpha = -2$ a postupujeme-li obdobně jako v příkl. 10, dostaneme pro integrál podle z hodnotu $\dfrac{1}{\alpha + 1}\,(1 - (x + y)^{\alpha + 1})$, načež integrace podle y dává $\dfrac{1}{\alpha + 1}\left(1 - x + \dfrac{x^{\alpha + 2}}{\alpha + 2} - \dfrac{1}{\alpha + 2}\right)$; integrace podle x (v mezích $0, 1$) dává konečně $I_\alpha = +\infty$ pro $\alpha \leqq -3$, kdežto pro $\alpha > -3$ vyjde po úpravě

$$I_\alpha = \frac{1}{2(\alpha + 3)}\,; \tag{38}$$

přesvědčte se, že tento výsledek platí i pro $\alpha = -1$, $\alpha = -2$ (zde se při integrování vyskytnou logaritmy).[13]

[13]) Místo počítání můžete také soudit takto: v (38) je levá i pravá strana nerostoucí funkcí α v $(-3, +\infty)$; mimoto pravá strana je tam spojitá. Rovnice je pro $\alpha > -3$ správná, až snad na hodnoty $\alpha = -1, -2$. Tedy platí i pro $\alpha = -1$, $\alpha = -2$ (rozvažte si to).

Příklad 12. Budiž $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$;

$$I = \iiint\limits_M \frac{xy}{\sqrt{z}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

kde M je dáno nerovnostmi

$$x > 0,\ y > 0,\ 0 < z < c,\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 < \left(\frac{z}{c}\right)^2$$

(načrtněte! poslední nerovnost charakterisuje vnitřek eliptického kužele o ose z, který protíná rovinu $z = c$ v elipse o poloosách a, b).

$$I = \int_0^c \left(\int_0^{\frac{b}{c}z} \left(\int_0^{a\sqrt{\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \frac{xy}{\sqrt{z}}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z\,.$$

Vyjde $I = \frac{1}{36}a^2b^2\sqrt{c}$.

Příklad 13. Podejme ještě jiný výpočet Laplaceova integrálu $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ (viz kap. III, § 7, příkl. 12 a kap. VI, § 2, příkl. 4). Fubiniova věta dává

$$\iint\limits_{x>0,\,y>0} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \,.\, I\,\mathrm{d}x = I^2\,.$$

Substituce $y = tx$ ve vnitřním integrálu dává pro $x > 0$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}x\,\mathrm{d}t\,,$$

načež z Fubiniovy věty (obrácení integračního pořádku) plyne

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}x\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2(1+t^2)} = \frac{1}{4}\pi\,.$$

Ježto $I > 0$, vychází $I = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Příklad 14. Nechť existuje

$$\iint\limits_{a<y\leq x<b} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$(-\infty \leqq a < b \leqq +\infty)$. Potom Fubiniova věta dává ihned (načrtněte!)

$$\int_a^b\Bigl(\int_a^x f(x, y)\,\mathrm{d}y\Bigr)\,\mathrm{d}x = \int_a^b\Bigl(\int_y^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\Bigr)\,\mathrm{d}y\,. \tag{39}$$

To je důležitá Dirichletova formule. Obecněji: Nechť existuje

$$\int\limits_{a<x_n\leqq x_{n-1}\leqq\ldots\leqq x_1<b}\!\!\!\ldots\int f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n\,;$$

potom je

$$\begin{aligned}\int_a^b\Bigl(\int_a^{x_1}\Bigl(\ldots\Bigl(\int_a^{x_{n-1}} f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_n\Bigr)\ldots\Bigr)\,\mathrm{d}x_2\Bigr)\,\mathrm{d}x_1 &= \\ = \int_a^b\Bigl(\int_{x_n}^b\Bigl(\ldots\Bigl(\int_{x_2}^b f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\Bigr)\ldots\Bigr)\,\mathrm{d}x_{n-1}\Bigr)\,\mathrm{d}x_n&\,.\end{aligned} \tag{40}$$

Příklad 15. Budiž $-\infty < a < b < +\infty$. Nechť $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ konverguje. Potom konverguje též $\int\limits_I\ldots\int f(x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n$, kde $I = \langle a, b\rangle \times \ldots \times \langle a, b\rangle$ (viz § 2, pozn. 5). Tedy konverguje pro $a \leqq x \leqq b$ také integrál

$$K = \int\limits_{a\leqq x_n\leqq x_{n-1}\leqq\ldots\leqq x_1\leqq x}\!\!\!\ldots\int f(x_n)\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n\,, \tag{41}$$

jehož integrační obor je částí I. Fubiniova věta dává jednak

$$K = \int_a^x\Bigl(\int_a^{x_1}\Bigl(\ldots\Bigl(\int_a^{x_{n-1}} f(x_n)\,\mathrm{d}x_n\Bigr)\ldots\Bigr)\,\mathrm{d}x_2\Bigr)\,\mathrm{d}x_1\,, \tag{41a}$$

jednak

$$K = \int_a^x\Bigl(\int_{x_n}^x\Bigl(\ldots\Bigl(\int_{x_2}^x f(x_n)\,\mathrm{d}x_1\Bigr)\ldots\Bigr)\,\mathrm{d}x_{n-1}\Bigr)\,\mathrm{d}x_n\,.$$

Ale zde $f(x_n)$ nezávisí na $x_1, \ldots, x_{n-1}$, takže $K = \int_a^x f(x_n)\,V_n(x_n)\,\mathrm{d}x_n$, kde

$$V_n(x_n) = \int_{x_n}^x\Bigl(\ldots\Bigl(\int_{x_2}^x \mathrm{d}x_1\Bigr)\ldots\Bigr)\,\mathrm{d}x_{n-1}\,.$$

Je tedy $V_n(x_n) = \int\limits_{x_n}^{x} V_{n-1}(x_{n-1})\,\mathrm{d}x_{n-1}$; ježto $V_2(x_2) = x - x_2$, plyne indukcí $V_n(x_n) = \dfrac{(x - x_n)^{n-1}}{(n-1)!}$. Tedy (píši t místo x_n)

$$K = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x f(t)(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t\,. \tag{42}$$

Tak jsme vyjádřili (41), (41a) jednoduchým integrálem (42).

Nyní se obrátíme k zavádění nových proměnných (věta 103) a všimneme si také obecných poznámek v kap. VI, § 2, příkl. 2.

Budiž f zobrazení množiny $P \subset \mathbf{E}_r$ na $R = f(P) \subset \mathbf{E}_r$, regulární a prosté v P. Vyšetřujeme

$$I = \int\limits_M F(x)\,\mathrm{d}x\,;$$

jestliže $\mu(M \dot{-} R) = 0$, můžeme psáti

$$I = \int\limits_{RM} F(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{f_{-1}(RM)} F(f(u))|D_f(u)|\,\mathrm{d}u\,. \tag{43}$$

Přitom (43) platí, jakmile jeden ze tří napsaných integrálů existuje. Při použití vzorce (43) se mění integrační obor i integrovaná funkce. Úspěch závisí na tom, zda se nám buďto podaří vhodně zjednodušit integrovanou funkci (a nezkomplikovat přitom příliš integrační obor) nebo zjednodušit vhodně integrační obor (a nezkomplikovat přitom příliš integrovanou funkci) — nebo zda se nám dokonce podaří zjednodušit obojí. V praxi se ovšem kombinuje užití věty 103 s užitím věty Fubiniovy.

V několika prvních příkladech (16 až 21) najdeme míru $\mu(\Omega)$ („obsah", „objem") některých jednodušších množin.

Příklad 16a (obsah lemniskaty — viz **D I**, kap. XIV, § 1, cvič. 3). Položme (v $\mathbf{E}_2$)

$$\Omega = \mathop{\mathcal{E}}_{[x,y]}\left((x^2 + y^2)^2 \leqq 2a^2(x^2 - y^2)\right)\ (a > 0)\,.$$

Vzhledem k symetrii je $\mu(\Omega) = 4\mu(\Omega_1)$, kde Ω_1 je ona část Ω, jež leží v kvadrantu $x > 0$, $y > 0$. Polární souřadnice ($x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$; $\varrho > 0$, $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$) dávají

$$\mu(\Omega) = 4 \iint_{\Omega_1} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 4 \iint_{\Omega_2} \varrho \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\varphi \, ,$$

kde Ω_2 je dáno vztahy $\varrho^2 \leqq 2a^2 \cos 2\varphi$, $\varrho > 0$, $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$. Tedy především musí býti $\cos 2\varphi > 0$, t. j. $0 < \varphi < \frac{1}{4}\pi$ a potom $0 < \varrho \leqq a\sqrt{2 \cos 2\varphi}$; tedy

$$\mu(\Omega) = 4 \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \left(\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \varrho \, \mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi = 4a^2 \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \cos 2\varphi \, \mathrm{d}\varphi = 2a^2 \, .$$

Příklad 16b. Položme (v $\mathbf{E}_2$)

$$\Omega = \mathop{\mathcal{E}}_{[x,y]} ((x^2 + y^2)^3 \leqq a^2(x^4 + y^4)) \quad (a > 0) \, .$$

Omezíme se opět na první kvadrant a zavedeme polární souřadnice:

$$\Omega = 4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\int_0^{\varrho_1} \varrho \, \mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi \, ,$$

kde $\varrho_1^2 = a^2(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi)$, takže

$$\Omega = 2a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) \, \mathrm{d}\varphi = \tfrac{3}{4}\pi a^2 \, .$$

Příklad 17. Položme (v $\mathbf{E}_2$)

$$\Omega = \mathop{\mathcal{E}}_{[x,y]} ((x + y)^4 \leqq ax^2y, \; x > 0) \quad (a > 0) \, .$$

Zřejmě je v Ω též $y > 0$. Zobrazení $x = \varrho \cos^2 \varphi$, $y = \varrho \sin^2 \varphi$ zřejmě zobrazuje množinu $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$, $\varrho > 0$ prostě na „první kvadrant" $x > 0$, $y > 0$ — inversní zobrazení je $\varrho = x + y$, $\varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{y}{x}}$. Determinant zobrazení je $2\varrho \sin \varphi \cos \varphi$. Zobrazení jsme volili tak, že $x + y$ se jeví funkcí pouze ϱ (nezávisí na φ). Podmínky pro ϱ, φ jsou $0 < \varrho \leqq a \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi$, $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$ a dostáváme

$$\mu(\Omega) = \iint_{\Omega} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\int_0^{a \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi} \varrho \cos \varphi \sin \varphi \, \mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi =$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^9 \varphi \sin^5 \varphi \, \mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{210} \, .$$

Příklad 18. (Problém Vivianiho.) V E_3 budiž Ω průnik koule $x^2 + y^2 + z^2 \leqq R^2$ s válcem $(x - \frac{1}{2}R)^2 + y^2 \leqq \frac{1}{4}R^2$ (neboli $x^2 + y^2 \leqq Rx$). Načrtněte! V Ω je všude $x \geqq 0$. Z Fubiniovy věty plyne

$$\mu(\Omega) = \iint_{x^2+y^2 \leqq xR} \Big(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \Big) \, dx \, dy = 2 \iint_{x^2+y^2 \leqq xR} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy \, .$$

Zavedení polárních souřadnic $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$ $(-\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{1}{2}\pi$, $\varrho > 0)$ vede k integračnímu oboru $\varrho^2 \leqq \varrho R \cos \varphi$; tedy

$$\mu(\Omega) = 2 \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \Big(\int_0^{R \cos \varphi} \sqrt{R^2 - \varrho^2} \, \varrho \, d\varrho \Big) \, d\varphi = \tfrac{2}{3}R^3 \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (1 - |\sin^3 \varphi|) \, d\varphi = {}^{14})$$

$$= \tfrac{4}{3}R^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - \sin^3 \varphi) \, d\varphi = \tfrac{4}{3}R^3(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{2}{3}) \, .$$

Kdybyste byli zapomněli na znamení absolutní hodnoty u $\sin^3 \varphi$, byli byste dostali nesprávný výsledek $\frac{2}{3}\pi R^3$; zase jeden příklad, jak nutno dávati pozor při odmocňování. Byl bych mohl ovšem od počátku redukovati vše na hodnoty $y > 0$ (symetrie!) a tedy na interval $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$, kde $\sin \varphi > 0$.

Příklad 19. Vzpomeňme si na příkl. 1 v kap. VI, § 2. Z něho speciálně plyne: Probíhá-li bod $[u_1, \ldots, u_r]$ měřitelnou množinu M a jsou-li $a_1, \ldots, a_r$ kladná konečná čísla, probíhá bod $[a_1u_1, \ldots, a_ru_r]$ rovněž měřitelnou množinu N a je $\mu(N) = a_1a_2 \ldots a_r \, \mu(M)$. Speciálně pro $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = a$ („dilatace" v poměru $a : 1$) je $\mu(N) = a^r \mu(M)$.

Označme na př. $V_r(\varrho)$ míru r-rozměrné koule o poloměru $\varrho > 0$:

(44) $$x_1^2 + \ldots + x_r^2 \leqq \varrho^2 \, ;$$

potom $V_r(\varrho) = \varrho^r \, V_r(1)$. Dále objem „$r$-rozměrného elipsoidu"

(45) $$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_r}{a_r}\right)^2 \leqq 1 \quad (a_j > 0)$$

je $a_1a_2 \ldots a_r \, V_r(1)$. Konečně obecněji: Budiž $Q(x) = \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}x_ix_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$ reálná) positivně definitní kvadratická forma (t. j. $Q(x) > 0$ pro vše-

[14]) Pamatujte totiž, že $\sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = |\sin \varphi|$.

chny body x různé od počátku $[0, \ldots, 0]$). Množinu E všech bodů, pro něž je $Q(x) \leqq 1$, nazýváme r-rozměrným elipsoidem (o středu v počátku); (45) je speciálním případem. Z algebry je známo:[15])

1. Determinant D čísel a_{ij} je číslo kladné.
2. Existuje lineární substituce

$$x_i = \sum_{j=1}^{r} c_{ij} u_j \quad (i = 1, \ldots, r) \tag{46}$$

s determinantem $1 : \sqrt{D}$, která převádí $Q(x)$ ve formu $u_1^2 + \ldots + u_r^2$; t. j. dosadíme-li za x_i podle (46), vyjde $Q(x) = u_1^2 + \ldots + u_r^2$. Podle příkladu 1 v kap. VI, § 2 je tedy $\mu(E) = \frac{1}{\sqrt{D}} V_r(1)$.

Příklad 20. Počítejme $V_r(\varrho)$ (míra koule (44)). Fubiniova věta dává pro $r \geqq 2$

$$V_r(1) = \int_{-1}^{1} \Big(\int_{x_1^2 + \ldots + x_{r-1}^2 \leqq 1 - x_r^2} \cdots \int \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{r-1} \Big) \mathrm{d}x_r =$$
$$= \int_{-1}^{1} V_{r-1}(\sqrt{1 - x_r^2}) \, \mathrm{d}x_r = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{\frac{1}{2}(r-1)} \, V_{r-1}(1) \, \mathrm{d}t ,$$

tedy

$$V_r(1) = I_{r-1} V_{r-1}(1), \text{ kde } I_{r-1} = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{\frac{1}{2}(r-1)} \, \mathrm{d}t . \tag{47}$$

Integrací per partes obdržíme

$$I_{r-1} = \frac{r-1}{r} I_{r-3} \text{ pro } r \geqq 2 .$$

Ježto zde r skočilo o 2, napišme raději rovnice

$$I_{r-1} I_{r-2} = \frac{r-2}{r} I_{r-3} I_{r-4} \quad (r \geqq 3) , \tag{48}$$

$$V_r(1) = I_{r-1} I_{r-2} V_{r-2}(1) \quad (r \geqq 3) . \tag{49}$$

[15]) Vl. Kořínek, Základy algebry (Praha 1953); viz 36,3; 36,5; 36,8; 36,9. Forma $u_1^2 + \ldots + u_r^2$ má ovšem determinant $1 > 0$, takže i determinant naší původní formy $Q(x)$ — rovný převrácené druhé mocnině determinantu substituce (46) — je kladný.

Podle (48) je pro $m \geqq 1$

$$(50) \qquad I_{2m} I_{2m-1} = \frac{2m-1}{2m+1} \cdot \frac{2m-3}{2m-1} \cdots \frac{1}{3} I_0 I_{-1} \,,$$

$$(51) \qquad I_{2m+1} I_{2m} = \frac{2m}{2m+2} \cdot \frac{2m-2}{2m} \cdots \frac{2}{4} I_1 I_0 \,.$$

Ježto $I_{-1} = \pi$, $I_0 = 2$, $I_1 = \frac{1}{2}\pi$ (viz (47)), vychází z (50), (51)

$$I_{r-1} I_{r-2} = \frac{2\pi}{r} \text{ pro } r \geqq 3 \,.$$

Tedy (ježto $V_1(1) = 2$, $V_2(1) = 2I_1 = \pi$) podle (49)

$$(52) \qquad V_{2m}(1) = \frac{2\pi}{2m} \cdot \frac{2\pi}{2m-2} \cdots \frac{2\pi}{4} V_2(1) = \frac{\pi^m}{m!} \,,$$

$$(53) \quad V_{2m+1}(1) = \frac{2\pi}{2m+1} \cdot \frac{2\pi}{2m-1} \cdots \frac{2\pi}{3} V_1(1) = \frac{2 \,.\, (2\pi)^m}{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2m+1)}$$

pro $m \geqq 1$. Na př. $V_2(\varrho) = \pi\varrho^2$, $V_3(\varrho) = \frac{4}{3}\pi\varrho^3$, $V_4(\varrho) = \frac{1}{2}\pi^2\varrho^4$, $V_5(\varrho) = \frac{8}{15}\pi^2\varrho^5$ atd.

Výpočet by se dal ještě trochu zjednodušit, kdybychom místo (48) psali

$$r I_{r-1} I_{r-2} = (r-2)\, I_{r-3} I_{r-4} \,.$$

Příklad 21. Označme $S_r(\varrho)$ míru simplexu v $\mathbf{E}_r$, daného nerovnostmi

$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ \ldots,\ x_r \geqq 0,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_r \leqq \varrho \quad (\varrho > 0)\,.$$ [16]

Podle příkl. 19 je $S_r(\varrho) = \varrho^r S_r(1)$. Zřejmě $S_1(\varrho) = \varrho$ a dále pro $r > 1$

$$S_r(1) = \int_0^1 \Big(\int\limits_{\substack{x_1 \geqq 0, \ldots, x_{r-1} \geqq 0 \\ x_1 + \ldots + x_{r-1} \leqq 1 - x_r}} \!\!\cdots\!\! \int \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{r-1} \Big)\, \mathrm{d}x_r =$$

$$= \int_0^1 S_{r-1}(1 - x_r)\, \mathrm{d}x_r = S_{r-1}(1) \int_0^1 (1 - x_r)^{r-1}\, \mathrm{d}x_r = \frac{1}{r} S_{r-1}(1) \,.$$

Z této rekurentní formule ihned $S_r(1) = \dfrac{1}{r!}$. Míru obecného simplexu s vrcholy $P^0, P^1, \ldots, P^r$ dostaneme odtud podle příkl. 1 v kap. VI, § 2 tak, že (kladouce $P^j = [p_1^j, \ldots, p_r^j]$) převedeme vrcholy $[0, \ldots, 0]$,

[16]) Jeho vrcholy jsou $[0, \ldots, 0]$, $[\varrho, 0, \ldots, 0]$, $[0, \varrho, 0, \ldots, 0]$, $\ldots$, $[0, \ldots, 0, \varrho]$.

$[1, \ldots, 0], \ldots, [0, \ldots, 1]$ ve vrcholy $P^0, P^1, \ldots, P^r$ lineární substitucí
$x_i = \sum_{k=1}^{r} (p_i^k - p_i^0)\, u_k + p_i^0$.

Příklad 22. Budiž $0 < p < q < +\infty$, $0 < a < b < +\infty$. Budiž $\Omega \subset \mathbf{E}_2$ dána podmínkami

$$py \leqq x^2 \leqq qy\,, \quad ax \leqq y^2 \leqq bx \tag{54}$$

(takže v Ω je $x \geqq 0$, $y \geqq 0$). Kreslete si náčrtek! Každým bodem 1. kvadrantu ($x > 0$, $y > 0$) prochází právě jedna parabola $y^2 = \xi x$ ($\xi > 0$) a právě jedna parabola $x^2 = \eta y$ ($\eta > 0$). Odtud lze vypočísti

$$\xi = \frac{y^2}{x}\,, \quad \eta = \frac{x^2}{y} \tag{55}$$

a naopak řešením podle x, y

$$x = \sqrt[3]{\xi\eta^2}\,, \quad y = \sqrt[3]{\xi^2\eta}\,; \tag{56}$$

tyto rovnice definují tedy prosté zobrazení prvního kvadrantu na první kvadrant; determinant zobrazení je $-\frac{1}{3}$. Z (55) je vidět, že obor (54) — po vynechání bodu $[0, 0]$ — přechází v interval $a \leqq \xi \leqq b$, $p \leqq \eta \leqq q$, takže

$$\iint_\Omega F(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \frac{1}{3} \iint\limits_{\substack{a \leqq \xi \leqq b \\ p \leqq \eta \leqq q}} F(\sqrt[3]{\xi\eta^2}, \sqrt[3]{\xi^2\eta})\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\,,$$

existuje-li jeden z těchto integrálů (načež vpravo užiji Fubiniovy věty). Na př. pro $F = 1$ vyjde $\mu(\Omega) = \frac{1}{3}(b - a)(q - p)$; nebo

$$\iint_\Omega \frac{x^2 \sin xy}{y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \frac{1}{3} \int_p^q \left(\int_a^b \eta \sin \xi\eta\, \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\eta =$$
$$= \frac{1}{3a} (\sin aq - \sin ap) - \frac{1}{3b} (\sin bq - \sin bp)\,.$$

Příklad 23. Předešlý příklad je dosti typický. Máme na př. v $\mathbf{E}_2$ integrovati přes obor Ω, daný nerovnostmi tvaru[17]) $a < \varphi_1(x, y) < b$,

---

[17]) Obyčejně bývá lhostejno, píši-li $<$ nebo $\leqq$ (rozdíl obou množin bývá množina nulová).

$p < \varphi_2(x, y) < q$. Sestrojíme zobrazení, dané rovnicemi $\varphi_1(x, y) = u$, $\varphi_2(x, y) = v$, takže hořejší nerovnosti lze psáti $a < u < b$, $p < v < q$. Dají-li se nerovnosti $\varphi_1(x, y) = u$, $\varphi_2(x, y) = v$ řešiti pro $a < u < b$, $p < v < q$ podle x, y rovnicemi $x = f_1(u, v)$, $y = f_2(u, v)$ tak, že dostáváme prosté regulární zobrazení intervalu $a < u < b$, $p < v < q$ na obor Ω, můžeme zavedením proměnných u, v převésti $\int\int_\Omega F(x, y)\, dx\, dy$ na integrál přes interval $a < u < b$, $p < v < q$ — všechno ovšem za jistých podmínek, které je nejlépe vyšetřiti v každém případě zvláště. Podobně bychom postupovali v $\mathbf{E}_r$.

Příklad: Budiž $0 < a < b < +\infty$, $0 < p < q < +\infty$. Budiž $\Omega \subset \mathbf{E}_2$ dáno nerovnostmi

$$a < xy < b\,, \quad py < x < qy\,.$$

Z $py < qy$ plyne $y > 0$, načež nutně $x > 0$. Rovnice

$$xy = u\,, \quad \frac{x}{y} = v$$

dávají pro kladná x, y také kladná u, v; naopak, pro $u > 0$, $v > 0$ mají tyto rovnice jediné kladné řešení

$$x = \sqrt{uv}\,, \quad y = \sqrt{\frac{u}{v}}\,.$$

To je zobrazení s determinantem $-\frac{1}{2v}$, které zobrazuje interval $a < u < b$, $p < v < q$ prostě a regulárně na Ω. Tedy

$$\int\int_\Omega F(x, y)\, dx\, dy = \frac{1}{2} \int\int_{\substack{a<u<b \\ p<v<q}} F\left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right) \frac{du\, dv}{v}\,,$$

existuje-li jeden z těchto integrálů.

Příklad 24. Budiž Ω průnik koulí ($R > 0$)

(57) $$x^2 + y^2 + z^2 \leqq R^2\,, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leqq 2Rz\,.$$

Položme

(58) $$I_n = \int\int\int_\Omega z^n\, dx\, dy\, dz\,.$$

Z druhé nerovnosti (57) plyne $z \geqq 0$, z první $z \leqq R$. Mimo to pro $0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}R$ rozhoduje druhá nerovnost (první z ní plyne), pro $\frac{1}{2}R \leqq$ $\leqq z \leqq R$ rozhoduje první (druhá z ní plyne). Proveďte náčrtek! Tedy

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{2}R} z^n\Big(\iint_{x^2+y^2 \leqq 2Rz-z^2} dx\, dy\Big)\, dz + \int_{\frac{1}{2}R}^{R} z^n\Big(\iint_{x^2+y^2 \leqq R^2-z^2} dx\, dy\Big)\, dz .$$

Ale vnitřní integrály značí obsah kruhu; tedy

$$I_n = \pi \int_0^{\frac{1}{2}R} z^n(2Rz - z^2)\, dz + \pi \int_{\frac{1}{2}R}^{R} z^n(R^2 - z^2)\, dz .$$

Tedy $I_n = +\infty$ pro $n \leqq -2$; pro $n > -2$ vyjde

$$I_n = \left(\frac{2}{(n+1)(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\, 2^{n+1}}\right) \pi R^{n+3} ,$$

pokud $n \neq -1$; proveďte ještě výpočet pro $n = -1$ a zjistěte, že $\lim\limits_{n \to -1} I_n = I_{-1}$.

Příklad 25. (Sférické souřadnice, neboli „polární souřadnice v prostoru".) Rovnice

(59) $\qquad x = \varrho \cos\varphi \cos\vartheta,\; y = \varrho \sin\varphi \cos\vartheta,\; z = \varrho \sin\vartheta$

zobrazují interval[18]) $\varrho > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$, $-\frac{1}{2}\pi < \vartheta < \frac{1}{2}\pi$ prostě na množinu $\mathsf{E}_3 \dot{-} M$, kde $M = \underset{[x,y,z]}{\mathcal{E}} (x \geqq 0,\; y = 0)$ je množina nulová. Determinant zobrazení je $\varrho^2 \cos\vartheta \neq 0$. Můžeme tedy podobně jako v kap. VI, § 2, příkl. 2 psáti

$$(60) \qquad \begin{aligned} \iiint_{\Omega} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz &= \iiint_{\Omega \dot{-} M} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \\ &= \iiint_{f_{-1}(\Omega \dot{-} M)} F(\varrho \cos\varphi \cos\vartheta, \ldots, \ldots)\, \varrho^2 \cos\vartheta\, d\varrho\, d\varphi\, d\vartheta , \end{aligned}$$

je-li f_{-1} inversní zobrazení. Rovnice platí, má-li jeden z těchto integrálů smysl.

Příklad 26.

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{xyz}{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz ,$$

[18]) Tento interval beru za obor zobrazení.

kde Ω je dáno nerovnostmi ($a > 0$)

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 < a^2xy, \; x > 0, \; y > 0, \; z > 0 .$$

Sférické souřadnice vedou k oboru Ω_1, danému nerovnostmi

$$0 < \varphi < \tfrac{1}{2}\pi, \; 0 < \vartheta < \tfrac{1}{2}\pi ,$$

$$0 < \varrho < \varrho_1 , \quad \text{kde} \quad \varrho_1 = a\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}\cos\vartheta .$$

Tedy

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \Big(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \Big(\int_0^{\varrho_1} \varrho^3 \sin\varphi\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \, \mathrm{d}\varrho\Big) \, \mathrm{d}\vartheta\Big) \, \mathrm{d}\varphi = \tfrac{1}{288}\, a^4$$

(dopočtěte).

Příklad 27.

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \quad (a > 0, \; b > 0, \; c > 0) ,$$

kde Ω je dáno nerovností

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1$$

(elipsoid). Zde se zřejmě hodí zobecněné sférické souřadnice

$$x = a\varrho\cos\varphi\cos\vartheta, \; y = b\varrho\sin\varphi\cos\vartheta, \; z = c\varrho\sin\vartheta ;$$

determinant zobrazení $abc\varrho^2\cos\vartheta$. Vychází

$$I = \int_0^{2\pi} \Big(\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \Big(\int_0^1 abc\varrho^4 \cos\vartheta \, \mathrm{d}\varrho\Big) \, \mathrm{d}\vartheta\Big) \, \mathrm{d}\varphi = \tfrac{4}{5}\pi abc = \tfrac{3}{5}\mu(\Omega) .$$

Příklad 28. Odvodíme důležitý vztah mezi Eulerovými integrály 1. a 2. druhu (§ 1, pozn. 6): *Je-li* $\Re p > 0$, $\Re q > 0$, *je*

$$\mathrm{B}(p, q)\,\Gamma(p + q) = \Gamma(p)\,\Gamma(q) . \tag{61}$$

Důkaz (Jacobi). Integrál

$$I = \iint\limits_{x>0,\, y>0} \mathrm{e}^{-x-y} x^{q-1} y^{p-1} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{62}$$

má podle pozn. 5 v § 2 hodnotu $I = \Gamma(p)\,\Gamma(q)$. Zaveďme do I nové proměnné rovnicemi $x = u(1 - v)$, $y = uv$; determinant tohoto zobrazení je u. Je-li $u > 0$, $0 < v < 1$, vychází $x > 0$, $y > 0$. Naopak, je-li $x > 0$, $y > 0$, vychází řešením hořejších rovnic $u = x + y$, $v = \dfrac{y}{x+y}$, tedy $u > 0$, $0 < v < 1$ a tyto hodnoty vskutku vyhovují rovnicím $x = u(1 - v)$, $y = uv$. Naše zobrazení tedy zobrazuje $\underset{[u,v]}{\mathcal{E}}(u > 0,\ 0 < v < 1)$ regulárně a prostě na $\underset{[x,y]}{\mathcal{E}}(x > 0,\ y > 0)$. Tedy

$$I = \iint\limits_{\substack{u>0\\ 0<v<1}} \mathrm{e}^{-u} u^{p+q-1} v^{p-1} (1 - v)^{q-1}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\,.$$

Fubiniova věta dává ihned $I = \Gamma(p + q)\, \mathrm{B}(p, q)$. Tím je výpočet hotov.

Poznámka 1. Dokážeme později (v kap. XVIII, § 1, pozn. 2), že $\Gamma(s) \neq 0$ (pro reálná $s > 0$ je to zřejmé). Tedy lze psáti

(63) $$\mathrm{B}(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}\,.$$

Příklad 29. Zobecněme zobrazení z předešlého příkladu na E_r. Zobrazení, dané rovnicemi

(64) $$w_1 = u_1,\ w_2 = u_1 u_2,\ \ldots,\ w_r = u_1 u_2 \ldots u_r$$

zobrazuje interval $I = \underset{u}{\mathcal{E}}(u_1 > 0,\ 0 < u_2 < 1, \ldots, 0 < u_r < 1)$ prostě na množinu $J = \underset{w}{\mathcal{E}}(0 < w_r < w_{r-1} < \ldots < w_1)$; jeho determinant je

(65) $$1 \,.\, u_1 \,.\, (u_1 u_2) \ldots (u_1 u_2 \ldots u_{r-1}) = u_1^{r-1} u_2^{r-2} \ldots u_{r-2}^2 u_{r-1}\,.$$

Zobrazení, dané rovnicemi

(66) $$x_1 = w_1 - w_2,\ x_2 = w_2 - w_3,\ \ldots,\ x_{r-1} = w_{r-1} - w_r,\ x_r = w_r\,,$$

zobrazuje J prostě na interval $K = \underset{x}{\mathcal{E}}(x_1 > 0, \ldots, x_r > 0)$. Jeho determinant je roven jedné. Zobrazení f, vznikající složením (64), (66), je dáno rovnicemi

(67) $$\begin{aligned} x_1 &= u_1(1 - u_2) \\ x_2 &= u_1 u_2 (1 - u_3) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{r-1} &= u_1 u_2 \ldots u_{r-1}(1 - u_r) \\ x_r &= u_1 u_2 \ldots u_r\,; \end{aligned}$$

zobrazuje prostě a regulárně I na K a má determinant (65). Z (66), (64) plyne $x_k + x_{k+1} + \ldots + x_r = w_k = u_1 u_2 \ldots u_k$.

Příklad 30a (Liouville). Jde o příklad značně obecný a značně důležitý. Budiž $\Re p_j > 0$ pro $j = 1, 2, \ldots, r$ ($r > 1$) a nechť

$$A = \int_0^1 \varphi(u)\, u^{p_1 + \ldots + p_r - 1}\, du \tag{68}$$

konverguje. Potom

$$\begin{aligned} &\int \ldots \int_{\Omega} \varphi(x_1 + \ldots + x_r)\, x_1^{p_1 - 1} \ldots x_r^{p_r - 1}\, dx_1 \ldots dx_r = \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2) \ldots \Gamma(p_r)}{\Gamma(p_1 + \ldots + p_r)} \int_0^1 \varphi(u)\, u^{p_1 + \ldots + p_r - 1}\, du\,, \end{aligned} \tag{69}$$

jestliže $\Omega = \mathop{\mathcal{E}}_{x}(x_1 \geqq 0, \ldots, x_r \geqq 0, x_1 + \ldots + x_r \leqq 1)$.

Důkaz. Zaveďme zobrazení f z předešlého příkladu a označme znakem C integrál v (69) vlevo. Dostaneme ihned (je jedno, píši-li $<$ či $\leqq$)

$$\begin{aligned} C = &\int_{0 < u_1 < 1, \ldots, 0 < u_r < 1} \ldots \int \varphi(u_1)\, u_1^{p_1 + \ldots + p_r - 1} (1 - u_2)^{p_1 - 1} \,. \\ &. u_2^{p_2 + \ldots + p_r - 1} (1 - u_3)^{p_2 - 1} \,.\, u_3^{p_3 + \ldots + p_r - 1} \ldots (1 - u_r)^{p_{r-1} - 1}\, u_r^{p_r - 1} \,. \\ &. du_1\, du_2 \ldots du_r\,, \end{aligned} \tag{69a}$$

jestliže tento integrál konverguje. Ale z pozn. 5 v § 2 plyne ihned, že tento integrál vskutku konverguje a že má hodnotu

$$\begin{aligned} C = A \,.\, \mathrm{B}(p_2 + p_3 + \ldots + p_r, p_1) \,.\, \mathrm{B}(p_3 + \ldots + p_r, p_2) \ldots \\ .\, \mathrm{B}(p_r, p_{r-1}) \,. \end{aligned} \tag{70}$$

Z (63) plyne pak (69).

Specialisací $\varphi(u) = 1$ a užitím vztahu $s\Gamma(s) = \Gamma(s + 1)$ dostáváme Dirichletův vzorec (pro $\Re p_j > 0$)

$$\int \ldots \int_{\Omega} x_1^{p_1 - 1} \ldots x_r^{p_r - 1}\, dx_1 \ldots dx_r = \frac{\Gamma(p_1) \ldots \Gamma(p_r)}{\Gamma(p_1 + \ldots + p_r + 1)} \,. \tag{71}$$

Vzorec (69) lze ještě poněkud zobecnit. Budiž $a_j > 0$, $\sigma_j > 0$, $\Re p_j > 0$ ($j = 1, \ldots, r$). Položme

$$M = \mathop{\mathcal{E}}_{y}\left(y_1 > 0, \ldots, y_r > 0, \left(\frac{y_1}{a_1}\right)^{\sigma_1} + \ldots + \left(\frac{y_r}{a_r}\right)^{\sigma_r} < 1\right),$$

$$(72) \quad H = \int \ldots \int_M \varphi\left(\left(\frac{y_1}{a_1}\right)^{\sigma_1} + \ldots + \left(\frac{y_r}{a_r}\right)^{\sigma_r}\right) y_1^{p_1 - 1} \ldots y_r^{p_r - 1}\, \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_r .$$

Položme $y_k = a_k x_k^{\frac{1}{\sigma_k}}$ $(k = 1, \ldots, r)$. To je zobrazení s determinantem $\frac{a_1 \ldots a_r}{\sigma_1 \ldots \sigma_r} x_1^{\frac{1}{\sigma_1} - 1} \ldots x_r^{\frac{1}{\sigma_r} - 1}$; užijeme-li ho, dostáváme (s týmž Ω jako v (69))

$$H = \frac{a_1^{p_1} \ldots a_r^{p_r}}{\sigma_1 \ldots \sigma_r} \int \ldots \int_\Omega \varphi(x_1 + \ldots + x_r)\, x_1^{\frac{p_1}{\sigma_1} - 1} \ldots x_r^{\frac{p_r}{\sigma_r} - 1}\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_r .$$

Podle (69) tedy je

$$(73) \quad H = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\sigma_1} + \ldots + \frac{p_r}{\sigma_r}\right)} \prod_{k=1}^{r} \frac{a_k^{p_k} \Gamma\left(\frac{p_k}{\sigma_k}\right)}{\sigma_k} \cdot \int_0^1 \varphi(u)\, u^{\frac{p_1}{\sigma_1} + \ldots + \frac{p_r}{\sigma_r} - 1}\, du ,$$

jestliže integrál vpravo konverguje.

Speciálně pro $\varphi = 1$, $p_k = 1$ $(k = 1, \ldots, r)$ máme

$$(74) \quad \mu(M) = \frac{a_1 \ldots a_r}{\sigma_1 \ldots \sigma_r} \Gamma\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{1}{\sigma_r}\right) \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\sigma_1} + \ldots + \frac{1}{\sigma_r} + 1\right)} .$$

Ještě speciálněji: dosadíme-li do (74) $a_k = 1$, $\sigma_k = 2$, dostáváme pro kouli $y_1^2 + \ldots + y_r^2 < 1$ míru $(\Gamma(\frac{1}{2}))^r \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}r + 1)}$ (uvažte, že se koule skládá — podle různých kombinací znamení $\operatorname{sgn} y_1, \ldots, \operatorname{sgn} y_r$ — z 2^r částí stejné míry). Srovnejte tento výsledek s příkl. 20.

Příklad 30b. Jestliže v příkl. 30a je vše nezáporné, není nutno předpokládati konvergenci integrálu A. Přesně řečeno: Nechť $p_j > 0$, $\sigma_j > 0$, $a_j > 0$ $(j = 1, \ldots, r)$. Nechť φ je měřitelná a skoro všude nezáporná v $(0, 1)$. Potom platí (69), (73) (kde H je integrál z (72)).

Důkaz pro (69): Ježto případ $A < +\infty$ byl již rozřešen, budiž $A = +\infty$; chceme dokázat, že v (69a) je $C = +\infty$. Že (69a) platí, plyne z věty 103, ježto integrál vpravo existuje. Užijme na (69a) Fubiniovy věty:

$$C = \underset{\substack{0<u_2<1 \\ \cdots\cdots \\ 0<u_r<1}}{\int\ldots\int} \left(\int_0^1 \varphi(u_1)\, u_1^{p_1+\ldots+p_r-1} \,.\, (1-u_2)^{p_1-1} \ldots u_r^{p_r-1}\, \mathrm{d}u_1\right) \mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_r \,.$$

Podle věty 54 lze vnitřní integrál psáti jako

$$(1-u_2)^{p_1-1} \ldots u_r^{p_r-1} \,.\, \int_0^1 \varphi(u_1)\, u_1^{p_1+\ldots+p_r-1}\, \mathrm{d}u_1 = +\infty \,,$$

načež integrace podle $u_2, \ldots, u_r$ dává podle příkl. 2 v kap. III, § 1

$$C = \underset{\substack{0<u_2<1 \\ \cdots\cdots \\ 0<u_r<1}}{\int\ldots\int} (+\infty)\, \mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_r = +\infty \,.$$

Vzorec (73) plyne pak z (69) substitucí $y_k = a_k x_k^{\frac{1}{\sigma_k}}$ $(k = 1, \ldots, r)$ podle věty 103.

Příklad 31. Budiž E elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1$ $(0 < a < b < c)$; počítejme

$$W = \iiint_E \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{75}$$

(potenciál homogenního elipsoidu v jeho středu). Zavedení sférických souřadnic $x = r \cos\varphi \cos\vartheta$, $y = r \sin\varphi \cos\vartheta$, $z = r \sin\vartheta$ vede k integrálu

$$W = 8 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\int_0^{\varrho} r \cos\vartheta\, \mathrm{d}r\right) \mathrm{d}\varphi\right) \mathrm{d}\vartheta \,,$$

kde

$$\varrho > 0 \,, \quad \varrho^2 \left(\frac{\cos^2\varphi \cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi \cos^2\vartheta}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}\right) = 1 \,.$$

Integrace podle r dává

$$W = 4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\vartheta \left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi}\right) \mathrm{d}\vartheta \,,$$

kde

$$A = \frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}, \quad B = \frac{\cos^2\vartheta}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}.$$

Vnitřní integrál převedeme substitucí tg $\varphi = u$ na

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{A + Bu^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{AB}};$$

tedy

$$W = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}\right)\left(\frac{\cos^2\vartheta}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}\right)}}.$$

Substituce $\alpha \sin\vartheta = t$ $(\alpha > 0)$ dává

$$W = 2\pi\alpha abc^2 \int_0^{\alpha} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(c^2\alpha^2 - t^2(c^2 - a^2))(c^2\alpha^2 - t^2(c^2 - b^2))}}.$$

To je t. zv. eliptický integrál (pod odmocninou je polynom 4. stupně); o eliptických integrálech viz kap. XIX.

Výraz pod odmocninou chceme převésti na obvyklý „kanonický tvar" $(1 - t^2)(1 - k^2t^2)$, kde $0 < k < 1$. Ježto $c^2 - a^2 > c^2 - b^2$, volíme

$$\alpha = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c}, \quad k^2 = \frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2} \; (k > 0),$$

načež

(76) $$W = \frac{2\pi abc}{\sqrt{c^2 - a^2}} \int_0^{\frac{1}{c}\sqrt{c^2 - a^2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2t^2)}}.$$

Jiný tvar, často používaný v theorii eliptických integrálů, dostaneme substitucí $t = \sin\psi$ $(0 < \psi < \frac{1}{2}\pi)$, načež

(77) $$W = \frac{2\pi abc}{\sqrt{c^2 - a^2}} \int_0^{\psi_0} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}},$$

kde $\psi_0 = \arcsin \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}} = \arccos \frac{a}{c}$. Pro rotační elipsoid ($a = b < c$ nebo $a < b = c$) a pro kouli ($a = b = c$) má integrál (75) jednodušší tvar; spočtěte jej!

Příklad 32. Proberme ještě t. zv. *sférické* (nebo zobecněné polární) *souřadnice* v $\mathbf{E}_r$. Zobrazení F_r ($r > 1$) budiž dáno rovnicemi[19])

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \varrho \cos \vartheta_1 \\
x_2 &= \varrho \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \\
x_3 &= \varrho \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_{r-1} &= \varrho \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \dots \sin \vartheta_{r-2} \cos \vartheta_{r-1} \\
x_r &= \varrho \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \dots \sin \vartheta_{r-2} \sin \vartheta_{r-1} .
\end{aligned} \tag{78}
$$

Tvrdím: F_r zobrazuje interval $\varrho > 0$, $0 < \vartheta_1 < \frac{1}{2}\pi, \dots, 0 < \vartheta_{r-1} < \frac{1}{2}\pi$ regulárně a prostě na interval $x_1 > 0, \dots, x_r > 0$; determinant zobrazení F_r je

$$\varrho^{r-1} \sin^{r-2} \vartheta_1 \sin^{r-3} \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{r-2} . \tag{79}$$

Pro $r = 2$ je to pravda, neboť F_2 je známé nám zobrazení $x_1 = \varrho \,.\, \cos \vartheta_1$, $x_2 = \varrho \sin \vartheta_1$. Budiž tedy $r > 2$ a tvrzení budiž dokázáno až do hodnoty $r - 1$. Zobrazení F_r je zřejmě možno složiti z těchto dvou zobrazení:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1 \\
x_2 &= \sigma \cos \vartheta_2 \\
x_3 &= \sigma \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \\
&\dots\dots\dots\dots \\
x_{r-1} &= \sigma \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{r-2} \cos \vartheta_{r-1} \\
x_r &= \sigma \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{r-2} \sin \vartheta_{r-1}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
x_1 &= \varrho \cos \vartheta_1 \\
\sigma &= \varrho \sin \vartheta_1 \\
\vartheta_2 &= \vartheta_2 \\
&\dots\dots \\
\vartheta_{r-2} &= \vartheta_{r-2} \\
\vartheta_{r-1} &= \vartheta_{r-1} .
\end{aligned}
$$

Podle indukčního předpokladu zobrazuje druhé zobrazení s determinantem ϱ interval

$$I_1\colon \ \varrho > 0,\ 0 < \vartheta_1 < \tfrac{1}{2}\pi,\ 0 < \vartheta_2 < \tfrac{1}{2}\pi,\ \dots,\ 0 < \vartheta_{r-1} < \tfrac{1}{2}\pi$$

regulárně a prostě na interval

$$I_2\colon \ x_1 > 0,\ \sigma > 0,\ 0 < \vartheta_2 < \tfrac{1}{2}\pi,\ \dots,\ 0 < \vartheta_{r-1} < \tfrac{1}{2}\pi ,$$

[19]) Je to téměř totéž zobrazení jako v **D II**, kap. VIII, § 2, cvič. 8; pouze x_k jsou očíslovány obráceně a je položeno $\vartheta_k = \frac{1}{2}\pi - \varphi_{r-k}$.

a prvé zobrazení s determinantem

$$\sigma^{r-2} \sin^{r-3} \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{r-2}$$

zobrazuje I_2 regulárně a prostě na interval $x_1 > 0, \dots, x_r > 0$. Složením obou zobrazení a vynásobením jejich determinantů dostáváme ihned žádaný výsledek pro F_r.

Následuje několik příkladů, ve kterých nejde ani tak o výpočet integrálů, jako o zjištění jejich konvergence. Až do konce paragrafu je α reálné.

Příklad 33.

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}\,.$$

Zavedení polárních souřadnic dává

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \varrho^{1-2\alpha}\,d\varrho\right) d\varphi\,.$$

Tedy: pro $1 - 2\alpha > -1$, t. j. pro $\alpha < 1$ je $I < +\infty$, pro $\alpha \geqq 1$ je $I = +\infty$. Tohoto výsledku můžeme ihned použíti také v složitějších případech. Budiž dána funkce $f(x, y)$, měřitelná v kruhu $Q = \mathop{\mathcal{E}}\limits_{[x,y]} (x^2 + y^2 \leqq 1)$ a položme

$$K = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{f(x, y)\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}\,.$$

Potom z předešlého výsledku plyne:

I. Existují-li konečná kladná čísla A, B tak, že skoro všude v Q je $A \leqq |f(x, y)| \leqq B$, potom K konverguje tehdy a jen tehdy, je-li $\alpha < 1$.

II. Existuje-li konečné kladné číslo A tak, že skoro všude v Q je $|f(x, y)| \leqq A$, je K konvergentní, jestliže $\alpha < 1$. V případě $\alpha \geqq 1$ nelze v případě II říci nic. Podobně lze využíti výsledků příkladů 34—39.

Příklad 34.

$$I = \iint_\Omega \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}\,,$$

kde Ω je dáno nerovnostmi $0 < x < 1$, $0 < y < x^n$ ($n \geqq 1$); načrtněte! Ježto v Ω je $y \leqq x$, tedy $x^2 < x^2 + y^2 \leqq 2x^2$, je I konvergentní tehdy a jen tehdy, je-li konvergentní integrál

$$I_1 = \iint_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^{2\alpha}} = \int_0^1 x^{n-2\alpha}\,\mathrm{d}x\,,$$

t. j. je-li $n - 2\alpha > -1$, t. j. $\alpha < \frac{1}{2}(n + 1)$.[20])

V příkl. 33, 34 byl jediný „nepříjemný" bod $[0, 0]$. V následujícím příkladu jsou „nepříjemné" všechny body kružnice $x^2 + y^2 = 1$.

Příklad 35.

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leqq 1} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1 - x^2 - y^2)^\alpha}\,.$$

Polární souřadnice dávají

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{\varrho\,\mathrm{d}\varrho}{(1 - \varrho^2)^\alpha} \right) \mathrm{d}\varphi$$

a odtud konvergence pro $\alpha < 1$, divergence pro $\alpha \geqq 1$.

Příklad 36.

$$I = \iint_{\substack{x+y<1 \\ x>0,\, y>0}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1 - x^2 - y^2)^\alpha}\,.$$

Z důvodu symetrie (načrtněte!) lze se omeziti na integrál přes obor $0 < y < x$, $x + y < 1$, načež polární souřadnice dávají

$$I = 2 \iint_{\substack{x+y<1 \\ 0<y<x}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1 - x^2 - y^2)^\alpha} = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \left(\int_0^{\varrho_1} \frac{2\varrho\,\mathrm{d}\varrho}{(1 - \varrho^2)^\alpha} \right) \mathrm{d}\varphi\,,$$

kde $\varrho_1(\cos\varphi + \sin\varphi) = 1$. Vnitřní integrál je — vyloučíme-li prozatím případ $\alpha = 1$ —

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(1 - (1 - \varrho_1^2)^{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \frac{(2\sin\varphi\cos\varphi)^{1-\alpha}}{(\cos\varphi + \sin\varphi)^{2-2\alpha}}\right).$$

[20]) Tedy: čím větší n, t. j. čím „užší" hrot má obor Ω v bodě $[0, 0]$, tím větší jsou přípustné hodnoty α. Pro $n = 1$ máme týž výsledek jako v příkl. 33; proč?

Při integraci podle φ může vaditi pouze okolí bodu $\varphi = 0$; ale pro $\varphi \to 0$ je $\sin\varphi \cong \varphi$, $\cos\varphi \cong 1$ (t. j. $\lim \frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1$, $\lim \frac{\cos\varphi}{1} = 1$), takže I se chová — pokud se konvergence týče — jako $\int_0^\varepsilon \varphi^{1-\alpha}\, d\varphi$ ($\varepsilon > 0$); t. j. konverguje pro $1 - \alpha > -1$, t. j. pro $\alpha < 2$ (a to i pro $\alpha = 1$ — neboť z konvergence pro $\alpha = \frac{3}{2}$ plyne konvergence i pro menší hodnotu $\alpha = 1$); pro $\alpha \geqq 2$ integrál diverguje.

Příklad 37. Budiž $n > 0$,

$$I = \iint_\Omega \frac{dx\, dy}{(1 - x^2 - y^2)^\alpha},$$

kde Ω je dáno v polárních souřadnicích nerovnostmi $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$, $0 < \varrho < 1 - \left(\frac{2}{\pi}\varphi\right)^n$. Načrtněte aspoň zhruba; čím větší n, tím těsněji se hranice oboru Ω v blízkosti bodu $x = 1$, $y = 0$ přimyká ke „kritické" kružnici $x^2 + y^2 = 1$. Polární souřadnice dávají

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\int_0^{\varrho_1} \frac{\varrho\, d\varrho}{(1 - \varrho^2)^\alpha} \right) d\varphi,$$

kde $\varrho_1 = 1 - \left(\frac{2}{\pi}\varphi\right)^n$. Vyloučíme-li prozatím hodnotu $\alpha = 1$, je vnitřní integrál roven (píšeme $1 - \varrho_1^2 = (1 - \varrho_1)(1 + \varrho_1)$)

$$\frac{1}{2(1 - \alpha)} \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{2}{\pi}\varphi\right)^{n(\alpha - 1)} \left(2 - \left(\frac{2}{\pi}\varphi\right)^n\right)^{\alpha - 1}} \right).$$

Při integraci podle φ může vaditi pouze okolí bodu $\varphi = 0$; tedy se I chová — pokud se konvergence týče — jako integrál $\int_0^\varepsilon \varphi^{n(1-\alpha)}\, d\varphi$ ($\varepsilon > 0$), t. j. I konverguje pro $\alpha < 1 + \frac{1}{n}$ (tedy i pro $\alpha = 1$), diverguje pro $\alpha \geqq 1 + \frac{1}{n}$.

Příklad 38.

$$I_1 = \int\limits_{x_1^2+\ldots+x_r^2\leqq 1} \cdots \int \frac{\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_r}{(x_1^2 + \ldots + x_r^2)^\alpha},$$

$$I_2 = \int\limits_{x_1^2+\ldots+x_r^2\leqq 1} \cdots \int \frac{\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_r}{(1 - x_1^2 - \ldots - x_r^2)^\alpha}.$$

Ježto jde o integrál nezáporné měřitelné funkce, můžeme užíti příkl. 30b, ať integrál konverguje nebo diverguje.[21]) V integrálu (72) volíme $a_1 = \ldots = a_r = 1$, $\sigma_1 = \ldots = \sigma_r = 2$, $p_1 = \ldots = p_r = 1$; v I_1 volíme $\varphi(u) = u^{-\alpha}$, v I_2 volíme $\varphi(u) = (1 - u)^{-\alpha}$. Podle (73) rozhoduje o konvergenci konvergence integrálu $\int_0^1 \varphi(u)\, u^{\frac{1}{2}r-1}\, \mathrm{d}u$. Tedy: I_1 konverguje tehdy a jen tehdy, je-li $\alpha < \frac{1}{2}r$; I_2 konverguje tehdy a jen tehdy, je-li $\alpha < 1$.

Příklad 39. Trochu více zběhlosti v odhadech vyžaduje integrál

$$(80) \qquad I = \int\limits_S \cdots \int \frac{\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_r}{(1 - x_1^2 - \ldots - x_r^2)^\alpha} \quad (r > 2),$$

kde S je simplex $x_1 \geqq 0, \ldots, x_r \geqq 0, x_1 + \ldots + x_r \leqq 1$.[22]) Do I zavedeme sférické souřadnice podle (78). Napřed však poznamenejme toto:

Je-li $x \in S$ a je-li $0 < x_k < 1$ pro některé k, je $x_k^2 < x_k$ a tedy $x_1^2 + \ldots + x_r^2 < x_1 + \ldots + x_r \leqq 1$. Jestliže tedy z integračního oboru S odstraníme libovolně malá okolí bodů $[1, 0, \ldots, 0]$, $[0, 1, 0, \ldots, 0]$, $\ldots$, $[0, \ldots, 0, 1]$, dostaneme integrál funkce spojité na uzavřené omezené množině, takže tato funkce je omezená a integrál je konvergentní. Stačí tedy zjistit konvergenci integrálu přes libovolně malá okolí bodů $[1, 0, \ldots, 0], \ldots, [0, \ldots, 0, 1]$. Následkem symetrie stačí se omezit na okolí bodu $[1, 0, \ldots, 0]$. Ježto v S je $\varrho^2 = x_1^2 + \ldots + x_r^2 \leqq \leqq x_1 + \ldots + x_r \leqq 1$, je z první rovnice (78) patrno toto: Stačí zvoliti dostatečně malé číslo δ $(0 < \delta < \frac{1}{2})$ a počítati integrál I_1 přes obor $0 < \vartheta_1 < \delta$, $0 < \vartheta_k < \frac{1}{2}\pi$ $(k = 2, \ldots, r - 1)$, $\frac{1}{2} < \varrho < \varrho_1$, kde při

[21]) Z důvodů symetrie se stačí omeziti na body $x_1 > 0, \ldots, x_r > 0$.
[22]) Jednodušší případ $r = 2$ jsme vyřešili již v příkl. 36.

pevných $\vartheta_1, \dots, \vartheta_{r-1}$ je ϱ_1 dáno podmínkou $x_1 + \dots + x_r = 1$; je patrno, že pro dosti malé δ je $\varrho_1 > \frac{1}{2}$, neboť z (78) plyne sečtením

$$1 = \varrho_1(\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta_1(\cos\vartheta_2 + \dots)) \leqq \varrho_1(1 + (r-1)\sin\delta);$$

stačí tedy, aby $(r-1)\sin\delta < 1$. Ježto v integračním oboru integrálu I_1 je $\cos\vartheta_1$, ϱ, $1 + \varrho$ „téhož řádu" jako číslo 1,[23]) mohu tyto činitele podle libosti přidávat nebo ubírat, aniž se co změní na konvergenci integrálu; rovněž mohu místo $\sin\vartheta_1$ psáti ϑ_1. Stačí tedy (podle (78), (79), (80)) vyšetřiti

$$I_2 = \int\limits_{\substack{0<\vartheta_2<\frac{1}{2}\pi \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0<\vartheta_{r-1}<\frac{1}{2}\pi}} \!\!\dots\! \int \left(\int_0^\delta \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\varrho_1} \frac{\varrho\,\mathrm{d}\varrho}{(1-\varrho^2)^\alpha}\right) \vartheta_1^{r-2}\,\mathrm{d}\vartheta_1\right) \sin^{r-3}\vartheta_2 \dots$$

$$\dots \sin\vartheta_{r-2}\,.\,\mathrm{d}\vartheta_2 \dots \mathrm{d}\vartheta_{r-1}\,.$$

Předpokládám-li prozatím $\alpha > 1$, je vnitřní integrál

$$\frac{1}{2(\alpha-1)}\left((1-\varrho_1^2)^{1-\alpha} - \left(\frac{3}{4}\right)^{1-\alpha}\right).$$

Ale

$$1 - \varrho_1^2 = 1 - \frac{1}{(\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \dots + \sin\vartheta_1 \dots \sin\vartheta_{r-1})^2}\,.$$

Je však

$$\cos^2\vartheta_1 + \sin^2\vartheta_1\cos^2\vartheta_2 + \dots + \sin^2\vartheta_1 \dots \sin^2\vartheta_{r-1} = 1$$

a tedy

$$1 \leqq \cos\vartheta_1 + \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \dots + \sin\vartheta_1 \dots \sin\vartheta_{r-1} \leqq r - 1 \tag{81}$$

(to platí identicky pro $0 \leqq \vartheta_k \leqq \frac{1}{2}\pi$). Tedy $1 - \varrho_1^2$ je řádově stejné jako

$$(\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \dots)^2 - 1 = 2\Sigma\,,$$

kde Σ značí součet součinů po dvou (součet čtverců dá 1). Ale

$$\begin{aligned} \Sigma = {} & \cos\vartheta_1\sin\vartheta_1(\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_2\cos\vartheta_3 + \dots \\ & + \sin\vartheta_2 \dots \sin\vartheta_{r-1}) + O(\vartheta_1^2) \quad (\text{pro } \vartheta_1 \to 0)\,, \end{aligned} \tag{82}$$

---

[23]) Říkám zde, že dvě kladné funkce f, g jsou (v jisté množině) téhož řádu, je-li podíl $f : g$ obsažen mezi dvěma kladnými konstantami.

neboť členové, shrnutí do $O(\vartheta_1^2)$, obsahují činitele $\sin^2 \vartheta_1$. Použijeme-li (81) s hodnotou $r - 1$ místo r, dostaneme, že činitel při $\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1$ v (82) je téhož řádu jako 1, takže Σ a tedy i $1 - \varrho_1^2$ je téhož řádu jako $\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1$, t. j. jako ϑ_1. Nyní vyšetříme

$$\frac{1}{\alpha - 1} \int_0^\delta \left(\vartheta_1^{1-\alpha} - \left(\frac{3}{4}\right)^{1-\alpha}\right) \vartheta_1^{r-2} \, d\vartheta_1 .$$

Tento integrál konverguje[24]) pro $1 - \alpha + r - 2 > -1$, t. j. pro $\alpha < r$, a má hodnotu $+\infty$ pro $\alpha \geqq r$. Následující integrace podle $\vartheta_2, \ldots, \vartheta_{r-1}$ na tom již zřejmě nic nezmění. Tedy I diverguje pro $\alpha \geqq r$, konverguje pro $\alpha < r$ (a to i pro $\alpha \leqq 1$, neboť konverguje na př. dokonce pro $\alpha = \frac{3}{2}$).

§ 4. Integrály funkcí závislých na parametru: limita a spojitost.

Budiž $M \subset \mathsf{E}_r$, budiž $f(x_1, \ldots, x_r, \alpha) = f(x, \alpha)$ funkce $r + 1$ reálných proměnných. Zvolíme-li zde nějak hodnotu α a integrujeme-li tak vzniklou funkci r proměnných $x_1, \ldots, x_r$ přes množinu M, závisí vzniklý integrál

$$F(\alpha) = \int_M f(x, \alpha) \, dx = \int \ldots \int_M f(x_1, \ldots, x_r, \alpha) \, dx_1 \ldots dx_r$$

na zvolené hodnotě α, je funkcí α. Je však zbytečno, omezovati se na Lebesgueovy integrály. Vezměme nějakou míru μ v E_r a sestrojme Lebesgue-Stieltjesův integrál

$$F(\alpha) = \int_M f(x, \alpha) \, d\mu . \tag{83}$$

V označení je zde jistá „licence“; proto to řekneme ještě trochu jinak: Sestrojíme funkci $f^{*,\alpha}$[25]) (to je funkce r proměnných, α je zvoleno) a klademe

$$F(\alpha) = \int_M f^{*,\alpha} \, d\mu \tag{83a}$$

(pokud integrál existuje). Přes jistou neurčitost budeme užívati především obvyklého označení (83); čtenář je může vždy nahraditi důslednějším označením (83a). Ostatně: Lebesgue-Stieltjesova integ-

---

[24]) a nezávisí na $\vartheta_2, \ldots, \vartheta_{r-1}$

[25]) Viz definici tohoto symbolu v kap. IV, § 1, před větou 70a.

rálu budeme používati většinou jen v obecných větách, kdežto v příkladech se omezíme hlavně na Lebesgueův integrál, kde klasické označení je dostatečně určité: V integrálu $\int\limits_M f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x$ je „integrační proměnnou" x, kdežto v $\int\limits_N f(x, \alpha)\,\mathrm{d}\alpha$ je „integrační proměnnou" α. V prvním integrálu je „parametrem" — jak se říkává — proměnná α, v druhém je parametrem x.

Cílem našich vyšetřování — až do konce této kapitoly a částečně i v kapitolách dalších — je studium vlastností funkce $F(\alpha)$: Ptáme se, za jakých podmínek existuje $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} F(\alpha)$, kdy je $F(\alpha)$ spojitá (v nějaké množině), kdy existuje $\frac{\mathrm{d}F(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}$, kdy existuje $\int\limits_a^b F(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$ a jak se dá limita, derivace a integrál funkce F počítat; na př. pro $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$ je $F(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ pro $\alpha > 0$ (tedy spojitá), $F'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2}$ pro $\alpha > 0$, $\int\limits_a^b F(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \lg \frac{b}{a}$ pro konečná kladná a, b. Ovšem tak snadno to vždy nepůjde. V tomto paragrafu se omezíme na limitu a spojitost. Při tom je zbytečné, abychom předpokládali, že α je reálné číslo: můžeme obecněji vyšetřovati případ, že α je bod nějakého metrického prostoru. Platí pak tato věta:

Věta 106. *Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$, $A \subset P$, kde P je metrický prostor, $\alpha_0 \in A'$. Budiž $f(x, \alpha)$ komplexní funkce, jejíž obor leží v $M \times P$.*[26]) *Nechť platí toto:*

1. Pro μ-skoro všechna[27]) *$x \in M$ existuje*

$$\lim_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \alpha \in A}} f(x, \alpha) = \varphi(x) \tag{84}$$

(jde o limitu při pevném x).

2. Pro každé $\alpha \in A \dot{-} (\alpha_0)$ je $f(x, \alpha)$ (jakožto funkce bodu x) μ-měřitelná v M.

3. Existuje funkce $g(x) \in \mathbf{L}(M)$ s touto vlastností: Je-li $\alpha \in A \dot{-} (\alpha_0)$, je $|f(x, \alpha)| \leqq g(x)$ pro μ-skoro všechna $x \in M$ (t. j. všechny funkce

[26]) Znakem x značím body z $\mathbf{E}_r$, znakem α body z P.
[27]) V této větě jde obecně o Lebesgue-Stieltjesův integrál.

$f(x, \alpha)$ — jakožto funkce x, pro jakkoliv zvolené $\alpha \in A \dot{-} (\alpha_0)$ — mají společnou „integrabilní majorantu" g). *Potom je*

$$(85) \qquad \lim_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \alpha \in A}} \int_M f(x, \alpha)\, \mathrm{d}\mu = \int_M \varphi(x)\, \mathrm{d}\mu\,.$$

Důkaz. Stačí dokázati toto:[28]) Je-li $\alpha_n \in A$, $\alpha_n \neq \alpha_0$ pro $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha_0$, je

$$(86) \qquad \lim_{n \to \infty} \int_M f(x, \alpha_n)\, \mathrm{d}\mu = \int_M \varphi(x)\, \mathrm{d}\mu\,.$$

Ale z (84) plyne $\lim\limits_{n \to \infty} f(x, \alpha_n) = \varphi(x)$ pro skoro všechna $x \in M$, a dále je $|f(x, \alpha_n)| \leqq g(x)$ pro $n = 1, 2, \ldots$ a pro skoro všechna $x \in M$, takže (86) plyne z věty 65, klademe-li v ní $f_n(x) = f(x, \alpha_n)$.

Jinou větu bychom dostali, kdybychom místo věty 65 užili věty 57; viz cvič. 1 k § 11.

Z věty 106 plyne ihned tato věta o spojitosti:

Věta 107. *Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$, budiž P metrický prostor, $A \subset P$. Budiž $f(x, \alpha)$ komplexní funkce, jejíž obor leží v $M \times P$. Nechť platí toto:*

1. Pro μ-skoro všechna[29]) *$x \in M$ je $f(x, \alpha)$ (jakožto funkce α, při pevném x) spojitá v A.*

2. Pro každé $\alpha \in A$ je $f(x, \alpha)$ (jakožto funkce bodu x) μ-měřitelná v M.

3. Existuje funkce $g(x) \in \mathbf{L}(M)$ s touto vlastností: Je-li $\alpha \in A$, je $|f(x, \alpha)| \leqq g(x)$ pro μ-skoro všechna $x \in M$.

Potom integrál (83) *je spojitou funkcí α v množině A.*

Důkaz. Stačí dokázati, že pro každé $\alpha_0 \in A \,.\, A'$ je

$$\lim_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \alpha \in A}} \int_M f(x, \alpha)\, \mathrm{d}\mu = \int_M f(x, \alpha_0)\, \mathrm{d}\mu\,.$$

Ale to plyne z věty 106, neboť je $\lim\limits_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \alpha \in A}} f(x, \alpha) = f(x, \alpha_0)$ pro μ-skoro všechna $x \in M$.

---

[28]) Viz **D II**, kap. VI, věta 143.
[29]) Také zde jde o Lebesgue-Stieltjesův integrál.

Příklad 1. Funkce komplexní proměnné s

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx$$

je spojitá v polorovině $\Re s > 0$. Důkaz. Předně je integrand pro každé $x > 0$ spojitou funkcí s v celé komplexní rovině (neboť $x^{s-1} = e^{(s-1)\lg x}$). Také podmínka 2 věty 107 je zřejmě splněna. Jde ještě o „integrabilní majorantu" (podm. 3). Značme $s = \sigma + it$ (σ, t reálná). Budiž $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < +\infty$. Leží-li s v „pásu" $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, je $|e^{-x}x^{s-1}| = e^{-x}x^{\sigma-1} \leqq e^{-x}x^{\sigma_1-1}$ pro $0 < x \leqq 1$, $|e^{-x}x^{s-1}| \leqq e^{-x}x^{\sigma_2-1}$ pro $x \geqq 1$. Pro všechna $x > 0$ je tedy

$$|e^{-x}x^{s-1}| \leqq e^{-x} \operatorname{Max}(x^{\sigma_1-1}, x^{\sigma_2-1}) \leqq e^{-x}(x^{\sigma_1-1} + x^{\sigma_2-1})\,;$$

pravá strana je hledaná „integrabilní majoranta". Tedy je $\Gamma(s)$ spojitá v pásu $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$. Ježto však každý bod s poloroviny $\sigma > 0$ leží v nějakém takovém pásu, je $\Gamma(s)$ spojitá v každém bodě poloroviny $\sigma > 0$.

Poznámka 1. Věty 106, 107, ač velmi užitečné — jak uvidíme na četných příkladech — jsou triviálními důsledky věty 65. Trochu složitější je případ, že i integrační obor závisí na α, t. j. že jde o integrál $\int_{M_\alpha} f(x, \alpha)\, dx$. Vezměme pouze případ jednoduchého Lebesgueova integrálu, kde integračním oborem je interval:

$$F(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx\,. \tag{87}$$

Budiž $A \subset P$, kde P je metrický prostor, $\alpha_0 \in A'$. Buďte $a(\alpha)$, $b(\alpha)$ reálné funkce a nechť existují vlastní nebo nevlastní limity

$$\lim_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \alpha \in A}} a(\alpha) = a_0, \quad \lim_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \alpha \in A}} b(\alpha) = b_0 \quad (a_0 < b_0)\,. \tag{88}$$

Učiňme tyto předpoklady:

1. Pro skoro všechna[30] $x \in (a_0, b_0)$ existuje limita (84).
2. Pro každé $\alpha \in A \dot{-} (\alpha_0)$ je $f(x, \alpha)$ měřitelná v $(a(\alpha), b(\alpha))$.
3. Doplníme-li definici funkce $f(x, \alpha)$ pro $\alpha \in A \dot{-} (\alpha_0)$ tak, že pro $x < a(\alpha)$ i pro $x > b(\alpha)$ klademe $f(x, \alpha) = 0$, potom nechť exis-

[30]) Ve smyslu Lebesgueovy míry.

tuje nezáporná funkce $g(x) \in \mathsf{L}(-\infty, +\infty)$ tak, že pro každé $\alpha \in A \dot{-} (\alpha_0)$ je $|f(x, \alpha)| \leqq g(x)$ pro skoro všechna $x \in \mathsf{E}_1$. Za těchto předpokladů je

$$\lim_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \alpha \in A}} \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha)\, \mathrm{d}x = \int_{a_0}^{b_0} \varphi(x)\, \mathrm{d}x \,. \tag{89}$$

Důkaz. Položíme-li $\varphi(x) = 0$ pro $x < a_0$ i pro $x > b_0$, platí (84) nejenom pro skoro všechna $x \in (a_0, b_0)$, ale i pro všechna $x < a_0$ a pro všechna $x > b_0$ (neboť je-li na př. $x > b_0$ a je-li α „dosti blízko“ α_0, je podle (88) též $x > b(\alpha)$, tedy $f(x, \alpha) = 0$ a rovněž $\varphi(x) = 0$). Stačí nyní užíti věty 106, kde $M = (-\infty, +\infty)$ a dostaneme

$$\lim_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \alpha \in A}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \alpha)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, \mathrm{d}x \,,$$

což je (89).

Na př. (při reálném parametru α) je

$$\lim_{\alpha \to 0+} \int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x^{-\alpha}} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}\pi \,;$$

neboť předně pro $x > 0$ je $\lim\limits_{\alpha \to 0+} (x^2 + x^{-\alpha}) = x^2 + 1$ a za druhé: pro $0 < x \leqq 1$, $\alpha > 0$ je $\dfrac{1}{x^2 + x^{-\alpha}} \leqq 1$ a pro $x > 1$ je $\dfrac{1}{x^2 + x^{-\alpha}} < \dfrac{1}{x^2}$; „integrabilní majorantu“ tedy dostaneme, klademe-li $g(x) = 0$ pro $x \leqq 0$, $g(x) = 1$ pro $0 < x \leqq 1$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ pro $x > 1$.

§ 5. Výpočet integrálu $J(b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{b-1}}{1 + x}\, \mathrm{d}x$ $(0 < b < 1)$.[31]

Je-li b racionální, t. j.

$$b = \frac{r}{s} \quad (r, s \text{ celá nesoudělná, } 0 < r < s) \,,$$

[31]) Konvergence integrálu je zřejmá z kap. III, § 7, příkl. 1, 2, 3; neboť pro $0 < x < 1$ je funkce integrovaná menší než x^{b-1} (kde $b - 1 > -1$), pro $x > 1$ je pak menší než x^{b-2} (kde $b - 2 < -1$).

dovedeme integrál $J(b)$ převésti substitucí $x = z^s$ $(z > 0)$ na integrál funkce racionální (jde o integrál typu, vyšetřovaného v **J I**, kap. IV, § 4); obdržíme ihned

$$J\left(\frac{r}{s}\right) = s\int_0^{+\infty} \frac{z^{r-1}}{1+z^s}\,dz\,. \tag{90}$$

Rovnice $1 + z^s = 0$, t. j. $z^s = e^{\pi i}$, má s různých kořenů, totiž

$$e^{\frac{(2k+1)\pi i}{s}} \quad (k = 0, 1, \ldots, s-1)\,,$$

takže

$$1 + z^s = \prod_{k=0}^{s-1}\left(z - e^{\frac{(2k+1)\pi i}{s}}\right)$$

a rozklad integrované funkce na zlomky částečné je tedy (viz **J I**, kap. XI, § 1, cvič. 9)

$$\frac{sz^{r-1}}{1+z^s} = s\sum_{k=0}^{s-1} \frac{e^{\frac{(2k+1)\pi i}{s}(r-1)}}{s\,.\,e^{\frac{(2k+1)\pi i}{s}(s-1)}}\,.\,\frac{1}{z - e^{\frac{(2k+1)\pi i}{s}}} = -\sum_{k=0}^{s-1}\frac{e^{(2k+1)\pi i\frac{r}{s}}}{z - e^{\frac{(2k+1)\pi i}{s}}}\,. \tag{91}$$

Abychom si výpočet zjednodušili, omezme se na případ, že s je **sudé** (a tedy r liché); potom člen odpovídající hodnotě k $(0 \leqq k \leqq \frac{1}{2}s - 1)$ je komplexně sdružený se členem odpovídajícím hodnotě $s - 1 - k$, neboť

$$\frac{(2k+1)\pi i}{s} + \frac{(2(s-1-k)+1)\pi i}{s} = 2\pi i\,.$$

Značíme-li znakem $\mathfrak{R}a$ reálnou část čísla a, máme podle (91)

$$\frac{sz^{r-1}}{1+z^s} = -2\mathfrak{R}\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}s-1}\frac{e^{(2k+1)\pi i\frac{r}{s}}}{z - e^{(2k+1)\pi i\,.\,\frac{1}{s}}}\,. \tag{92}$$

Násobím-li zde v každém sčítanci čitatel i jmenovatel hodnotou komplexně sdruženou se jmenovatelem, obdržím

$$\frac{sz^{r-1}}{1+z^s} = -2\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}s-1}\frac{z\,.\cos(2k+1)\pi\frac{r}{s} - \cos(2k+1)\pi\frac{r-1}{s}}{\left(z - \cos\frac{(2k+1)\pi}{s}\right)^2 + \left(\sin\frac{(2k+1)\pi}{s}\right)^2}\,.$$

Máme nyní integrovati od 0 do $+\infty$; ježto r je liché, je integrand v (90) sudá funkce, a tedy

$$J\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sz^{r-1}}{1+z^s}\,\mathrm{d}z = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}\int_{-A}^{A}\frac{sz^{r-1}}{1+z^s}\,\mathrm{d}z =$$

$$= -\lim_{A\to+\infty}\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}s-1}\int_{-A}^{A}\frac{z\cos(2k+1)\pi\dfrac{r}{s} - \cos(2k+1)\pi\dfrac{r-1}{s}}{\left(z-\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{s}\right)^2 + \left(\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{s}\right)^2}\,\mathrm{d}z =$$

$$= -\lim_{A\to+\infty}\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}s-1} I_k(A)\,,$$

kde $I_k(A)$ značí integrál právě napsaný. Pro zkrácení pišme nyní $\dfrac{\pi}{s} = \alpha$. Tedy

$$I_k(A) = \int_{-A}^{A}\frac{M(z-\lambda)+N}{(z-\lambda)^2+\mu^2}\,\mathrm{d}z\,,$$

kde

$$M = \cos(2k+1)r\alpha\,,\quad \lambda = \cos(2k+1)\alpha\,,$$
$$\mu = \sin(2k+1)\alpha > 0\,,$$ [32])

$$N - M\lambda = -\cos(2k+1)(r-1)\alpha\,,$$
$$N = \cos(2k+1)r\alpha\,.\cos(2k+1)\alpha - \cos(2k+1)(r-1)\alpha =$$
$$= -\sin(2k+1)r\alpha\,.\sin(2k+1)\alpha\,.$$

Ale

$$I_k(A) = \tfrac{1}{2}M\lg\frac{(A-\lambda)^2+\mu^2}{(-A-\lambda)^2+\mu^2} + \frac{N}{\mu}\left[\operatorname{arctg}\frac{z-\lambda}{\mu}\right]_{z=-A}^{z=A}$$

Odtud ihned

$$\lim_{A\to+\infty} I_k(A) = 0 + \frac{\pi N}{\mu} = -\pi\sin(2k+1)r\alpha\,,$$

[32]) Neboť $0 < \dfrac{2k+1}{s}\pi < \pi$.

takže celkem

$$J\left(\frac{r}{s}\right) = \pi \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}s-1} \sin (2k+1)\, r\alpha\,,$$

což je imaginární část geometrické řady $S = \pi \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}s-1} e^{i(2k+1)r\alpha}$ o kvocientu $e^{i2r\alpha} = e^{\frac{2r}{s}\pi i} \neq 1$ (neboť $\frac{r}{s}$ není celé číslo). Tedy

$$S = \pi \frac{e^{(s+1)r\alpha i} - e^{r\alpha i}}{e^{2r\alpha i} - 1} = \frac{-2\pi}{e^{r\alpha i} - e^{-r\alpha i}} = i\,\frac{\pi}{\sin r\alpha}\,, \text{[33]}$$

takže $J\left(\frac{r}{s}\right) = \dfrac{\pi}{\sin \pi \frac{r}{s}}$.

Pro vyšetřované hodnoty $b = \frac{r}{s}$ (r, s celá nesoudělná, s sudé, $0 < \frac{r}{s} < 1$) je tedy

(93) $$J(b) = \frac{\pi}{\sin \pi b}\,.$$

Zde je pravá strana spojitou funkcí b v $(0, 1)$; dokážeme-li totéž o levé straně, bude tím dokázána platnost rovnice (93) pro každé $b \in (0, 1)$. Neboť množina M oněch hodnot $b = \frac{r}{s}$, pro něž jsme již rovnost (93) dokázali, je zřejmě hustá v $(0, 1)$; spojitá funkce $J(b) - \frac{\pi}{\sin \pi b} = \varphi(b)$ je pak rovna nule v množině M a tedy (ježto pro $b_0 \in (0, 1)$ je $\varphi(b_0) = \lim\limits_{\substack{b \to b_0 \\ b \in M}} \varphi(b) = 0$) je rovna nule v $(0, 1)$.

Spojitost funkce $J(b)$ v intervalu $0 < b < 1$ pak plyne takto: budiž $0 < b_0 < b_1 < 1$; potom pro $b_0 < b < b_1$ platí $\frac{x^{b-1}}{1+x} < x^{b_0-1}$ pro $0 < x < 1$, $\frac{x^{b-1}}{1+x} < x^{b_1-2}$ pro $x \geqq 1$. Integrabilní majorantou

[33]) Je totiž $e^{sr\alpha i} = e^{\pi r i} = -1$.

pro funkci $\frac{x^{b-1}}{1+x}$ (pro $b_0 < b < b_1$) je tedy funkce g takto definovaná: $g(x) = x^{b_0-1}$ pro $0 < x < 1$ (pamatujme, že $b_0 - 1 > -1$), $g(x) = x^{b_1-2}$ pro $x \geqq 1$ (pamatujme, že $b_1 - 2 < -1$).[34]) Tedy je $J(b)$ spojitá v každém bodě intervalu (b_0, b_1) a tedy i v intervalu $(0, 1)$; tedy (93) platí pro všechna $b \in (0, 1)$.

Poznámka 1. Výsledek právě odvozený vede k důležitému vztahu pro funkci Γ. Provedeme-li v integrálu

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}\,\mathrm{d}y \quad (\Re p > 0,\ \Re q > 0)$$

substituci

$$y = \frac{x}{1+x}, \quad 1 - y = \frac{1}{1+x}, \quad \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2},$$

dostaneme

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,\mathrm{d}x \quad (\Re p > 0,\ \Re q > 0)\,. \tag{94}$$

Speciálně pro $p = s$, $q = 1 - s$, $0 < s < 1$ dostáváme vzhledem k příkl. 28 § 3 a k rovnici $\Gamma(1) = 1$ podle (93) důležitý vztah $\mathrm{B}(s, 1 - s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$, t. j.

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad \text{pro } 0 < s < 1\,. \tag{95}$$

§ 6. Derivace integrálu podle parametru.

Půjde o derivaci funkce $F(\alpha)$ ze vzorce (83); zde tedy α bude již znamenati reálnou proměnnou.

Věta 108. *Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$, budiž I nezvrhlý interval v $\mathbf{E}_1$, budiž $f(x, \alpha) = f(x_1, \ldots, x_r, \alpha)$ komplexní funkce $r + 1$ reálných proměnných. Nechť platí toto:*

---

[34]) Jednodušeji: $\int_0^1 \frac{x^{b-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$ je spojitý v (b_0, b_1), ježto máme majorantu x^{b_0-1}; také $\int_1^{+\infty}$ je tam spojitý — majoranta x^{b_1-2}; tedy též $J(b) = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$ je tam spojitý.

1. Integrál (Lebesgue-Stieltjesův)

$$F(\alpha) = \int_M f(x, \alpha) \, d\mu \tag{96}$$

konverguje aspoň pro jednu hodnotu $\alpha \in I$.

2. Pro každé $\alpha \in I$ jest $f(x, \alpha)$ (jakožto funkce bodu x) μ-měřitelná v M.

3. Existuje μ-nulová množina $N \subset \mathbf{E}_r$ tak, že pro všechna $x \in M \dot{-} N$ a pro všechna $\alpha \in I$ existuje konečná $\dfrac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$. [35]

4. Existuje funkce $g(x) \in \mathbf{L}(M)$ tak, že pro každé $x \in M \dot{-} N$ a pro každé $\alpha \in I$ je $\left| \dfrac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right| \leqq g(x)$. (Přitom N je množina z podm. 3.)

Potom platí: Pro každé $\alpha \in I$ je integrál (96) *konvergentní a je*[35])

$$F'(\alpha) = \int_M \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \, d\mu \quad (\textit{pro každé } \alpha \in I) \,. \tag{97}$$

Důkaz. Je-li $\alpha \in I$, $\alpha + h \in I$, je pro každé $x \in M \dot{-} N$ podle věty o přírůstku funkce a podle 3 a 4 [36])

$$|f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)| = |h \, f_\alpha(x, \alpha + \Theta h)| \leqq |h| \, g(x) \,, \tag{98}$$

kde $0 \leqq \Theta \leqq 1$. Speciálně, je-li $\alpha \in I$ a je-li $\alpha_0 \in I$ onen bod, pro nějž (96) konverguje, platí pro všechna $x \in M \dot{-} N$

$$|f(x, \alpha)| \leqq |f(x, \alpha_0)| + |\alpha - \alpha_0| \, g(x) \,,$$

takže vskutku (96) konverguje pro každé $\alpha \in I$. Je-li dále $\alpha \in I$, $\alpha + h \in I$, $h \neq 0$, je

$$\frac{1}{h} (F(\alpha + h) - F(\alpha)) = \int_M \frac{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)}{h} \, d\mu \,.$$

Zde je funkce

$$\psi(x, h) = \frac{1}{h} (f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha))$$

---

[35]) V počátečním (po příp. koncovém) bodě intervalu I, jestliže tento bod patří k I, míním derivaci zprava (po příp. zleva).

[36]) Píši $f_\alpha(x, \alpha) = \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}$.

pro každé $h \neq 0$, $\alpha + h \in I$[37]) μ-měřitelná v M, dále je pro všechna $x \in M \dot{-} N$ (viz (98))

$$\lim_{h \to 0} \psi(x, h) = f_\alpha(x, \alpha)\,, \quad |\psi(x, h)| \leqq g(x)$$
$$(\text{pro } \alpha + h \in I,\ h \neq 0)\,.$$

Podle věty 106 je tedy

$$\int_M f_\alpha(x, \alpha)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{h \to 0} \int_M \psi(x, h)\,\mathrm{d}\mu =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\,(F(\alpha + h) - F(\alpha)) = F'(\alpha)\,,$$

což bylo dokázati. (Ovšem: je-li α počátečním, po příp. koncovým bodem intervalu I, je nutno místo $h \to 0$ psáti $h \to 0\,+$, po příp. $h \to 0\,-$.)

Vidíte, že věta 108 je téměř bezprostředním důsledkem věty 106; poskytuje však velmi vydatný prostředek k výpočtu integrálů. Při tom se postupuje hlavně trojím způsobem, který vyložíme v tomto paragrafu a v několika dalších na příkladech, týkajících se již výhradně Lebesgueova integrálu.

I. Dovedeme vypočísti $F(\alpha) = \int_M f(x, \alpha)\,\mathrm{d}\mu$; odtud derivováním podle α lze vypočísti další integrály.

Příklad 1. Pro $\alpha > -1$ je $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha + 1}$. Odtud derivováním

$$(99) \quad \int_0^1 \frac{\partial x^\alpha}{\partial \alpha}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^\alpha \lg x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{1}{\alpha + 1}\right) = -\frac{1}{(\alpha + 1)^2}\,.$$

Užití věty 108 je pro $\alpha > -1$ přípustné z tohoto důvodu: Zvolme $\alpha_0 > -1$; pro $\alpha > \alpha_0$, $0 < x < 1$ je $0 < x^\alpha < x^{\alpha_0}$, takže pro α v intervalu $(\alpha_0, +\infty)$ má funkce $\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \alpha} = x^\alpha \lg x$ „integrabilní majorantu“ $x^{\alpha_0} |\lg x|$ (uvažte, že $|\lg x|$ roste pro $x \to 0\,+$ pomaleji do ne-

[37]) Bod $\alpha \in I$ si nyní myslím pevně zvolen.

konečna než jakákoliv mocnina $x^{-\gamma}$, $\gamma > 0$). Tedy (99) platí podle věty 108 pro každé $\alpha > \alpha_0$. Ježto jsme mohli voliti za α_0 jakékoliv číslo větší než -1, platí (99) pro každé $\alpha > -1$.[38])

Podobným způsobem dokáže čtenář použitelnost věty 108 (po příp. věty 106 nebo 107) v příkl. 2—9 i často dále; nebudu to již rozváděti.

Postupným derivováním dospějeme ke vzorci

$$\int_0^1 x^\alpha \lg^n x \,dx = \frac{d^n}{d\alpha^n}\left(\frac{1}{\alpha+1}\right) = (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+1)^{n+1}} \tag{100}$$

$$\text{pro } \alpha > -1,\ n = 1, 2, \ldots$$

Příklad 2. Obdobně ze vzorce

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} \quad (\alpha > 1)$$

odvoďte

$$\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} \lg^n x \,dx = \frac{n!}{(\alpha-1)^{n+1}} \text{ pro } \alpha > 1,\ n = 1, 2, \ldots \tag{101}$$

Příklad 3. Z integrálu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\alpha + x^2} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} \quad (\alpha > 0)$$

odvoďte pro $\alpha > 0$, $n = 2, 3, \ldots$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(\alpha + x^2)^n} = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-3)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots (2n-2)} \frac{\pi}{\alpha^{n-\frac{1}{2}}}\,. \tag{102}$$

Příklad 4. Někdy parametr do integrálu teprve vkládáme, abychom mohli užíti věty 108. Na př. chceme vypočísti $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n \,dx$ ($n = 1, 2, \ldots$).

[38]) Tohoto obratu se často užívá: nemohli jsme přímo volit $\alpha_0 = -1$, ježto $\int_0^1 x^{-1} \lg x \,dx$ diverguje.

Vyjdeme z integrálu

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha > 0)\,,$$

načež derivováním dostaneme

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} x^n\, dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \quad \text{a dosadíme } \alpha = 1\,.$$

Příklad 5. Věty 108 lze užíti nejenom k výpočtu určitých integrálů, ale též k výpočtu primitivních funkcí. Příklad: Pro $\alpha > 0$ je

$$\int_{-\infty}^{x} e^{\alpha t}\, dt = \frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha x}\,.$$

Derivujme nyní (při pevném x) n-kráte podle α; vyjde

$$\int_{-\infty}^{x} t^n\, e^{\alpha t}\, dt = \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \left(\frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha x}\right). \tag{103}$$

To platí pro každé $x \in E_1$, $\alpha > 0$. Derivace levé strany (a tedy i derivace pravé strany) podle x (při pevném α) je $x^n e^{\alpha x}$, t. j. funkce (103) je primitivní funkcí k funkci $x^n e^{\alpha x}$ (ve smyslu **J I**, kap. III, § 1), t. j.

$$\int x^n\, e^{\alpha x}\, dx = \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \left(\frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha x}\right) \tag{104}$$

pro $x \in E_1$. Týž výsledek dostanete pro $\alpha < 0$, vyjdete-li ze vzorce

$$\int_{x}^{+\infty} e^{\alpha t}\, dt = -\, \frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha x}\,.$$

Příklad 6. Pro $x > 0$ je

$$\int_0^x t^\alpha\, dt = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \text{ pro } \alpha > -1\,, \quad \int_x^{+\infty} t^\alpha\, dt = -\, \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \text{ pro } \alpha < -1\,.$$

Odtud jako v příkl. 5

$$(105)\quad \int x^\alpha \lg^n x \, dx = \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1}\right) \text{ pro } \alpha \neq -1,\ n = 1, 2, \ldots$$

Obdobně najdete pro $\alpha > 0$, $n = 1, 2, \ldots$

$$(106)\quad \int \frac{dx}{(\alpha + x^2)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

Příklad 7. Z integrálu $J(b)$ v § 5 obdržíte ihned

$$(107)\quad K_1(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{b-1}}{a + x} \, dx = \frac{\pi a^{b-1}}{\sin \pi b} \text{ pro } a > 0,\ 0 < b < 1.$$

Derivováním podle a obdržíte

$$(108)\quad K_2(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{b-1}}{(a + x)^2} \, dx = \frac{\pi(1 - b)\, a^{b-2}}{\sin \pi b}$$

pro $a > 0$, $0 < b < 1$. Ale integrál $K_2(a, b)$ konverguje i pro $1 \leqq b < 2$. Pro $1 < b < 2$ dostanete jeho hodnotu, integrujete-li per partes:

$$K_2(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{(b - 1)\, x^{b-2}}{a + x} \, dx = (b - 1) \frac{\pi a^{b-2}}{\sin \pi(b - 1)}$$

(podle (107), ježto $0 < b - 1 < 1$), takže (108) platí i pro $1 < b < 2$. Ale $K_2(a, b)$ je při pevném $a > 0$ spojitou funkcí b v intervalu $(0, 2)$, což se nahlédne podobně jako v § 5 při $J(b)$.

Tedy platí (108) i pro $b = 1$, nahradíme-li pravou stranu (jež nemá pro $b = 1$ smyslu) její limitou pro $b \to 1$, t. j. číslem a^{-1}. V tomto smyslu platí tedy (108) pro $0 < b < 2$. Dokažte úplnou indukcí, že pro $a > 0$, $0 < b < n$ jest

$$(109)\quad \int_0^{+\infty} \frac{x^{b-1} \, dx}{(a + x)^n} = (-1)^{n-1} \frac{(b-1)(b-2)\ldots(b-n+1)}{(n-1)!\, \sin \pi b} \pi a^{b-n}.\text{[39]}$$

---

[39]) Pro celé $b = p$ musím vzíti ovšem limitu příslušného výrazu pro $b \to p$.

Odtud derivováním podle b (pro $a > 0$; $0 < b < n$; $k = 1, 2, \ldots$) vyjde, že integrál

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{b-1} \lg^k x \, \mathrm{d}x}{(a + x)^n} \quad (110)$$

[40]

je roven k-té parciální derivaci pravé strany v (109) podle b.[39]

Příklad 8. Jest (viz kap. III, § 7 na konci)

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha y^2} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{pro } \alpha > 0 \, .$$

Derivováním podle α vychází

$$\int_0^{+\infty} y^{2n} \, \mathrm{e}^{-\alpha y^2} \, \mathrm{d}y = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} \cdot \alpha^{-n-\frac{1}{2}} \quad (111)$$

pro $\alpha > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Naproti tomu vzorec

$$\int_0^{+\infty} y^{2n+1} \, \mathrm{e}^{-\alpha y^2} \, \mathrm{d}y = \tfrac{1}{2} n! \, \alpha^{-n-1} \quad (\alpha > 0, \, n = 0, 1, 2, \ldots) \quad (112)$$

dostaneme z příkl. 4 substitucí $y^2 = x$.

II. Někdy dovedeme vypočísti $F'(\alpha) = \int\limits_M \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \, \mathrm{d}\mu$, načež $F(\alpha) = \int\limits_M f(x, \alpha) \, \mathrm{d}\mu$ stanovíme jako primitivní funkci k $F'(\alpha)$; musíme ovšem určiti vhodným způsobem „integrační konstantu".

Příklad 9. Vyšetřujme

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{-\beta x}}{x} \, \mathrm{d}x \quad (\alpha > 0, \, \beta > 0) \, ; \quad (113)$$

přitom budeme tento integrál vyšetřovati při pevném β jako funkci α.[41]) Jest $I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} \, \mathrm{d}x = -\alpha^{-1}$, tedy $I(\alpha) = C - \lg \alpha$,

[40]) Jenž je při pevném $a > 0$ spojitou funkcí b v $(0, n)$.
[41]) Integrovaná funkce má v bodě $x = 0$ limitu $\beta - \alpha$.

kde C nezávisí na α. Dosazením $\alpha = \beta$ (jest $I(\beta) = 0$) plyne $I(\alpha) = = \lg \frac{\beta}{\alpha}$.

Podobně pro integrál

$$K(\alpha) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x^2} + (\alpha - \beta) \frac{e^{-\beta x}}{x} \right) dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0)$$

plyne $K'(\alpha) = - I(\alpha) = \lg \frac{\alpha}{\beta}$ a odtud integrací a dosazením $\alpha = \beta$ vyjde $K(\alpha) = \alpha \lg \frac{\alpha}{\beta} - (\alpha - \beta)$.

Příklad 10. Vyšetřujme integrál

$$(114) \qquad I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\lg (1 + a^2x^2)}{1 + b^2x^2} dx \quad (a \geqq 0,\ b > 0)\,.$$

Tento integrál je spojitou funkcí a (při pevném b) v intervalu $\langle 0, +\infty)$, neboť pro $0 \leqq a < A$ $(0 < A < +\infty)$ máme integrabilní majorantu $\lg (1 + A^2x^2) : (1 + b^2x^2)$. Pro $a > 0$ je

$$(115) \qquad I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{2ax^2\, dx}{(1 + a^2x^2)(1 + b^2x^2)}\,;$$

neboť, jsou-li $a_1 < a_2$ jakákoliv konečná kladná čísla, má integrand pro $a_1 < a < a_2$ integrabilní majorantu

$$\frac{2a_2x^2}{(1 + a_1^2x^2)(1 + b^2x^2)}\,.^{42)}$$

Pro $a > 0$, $a \neq b$ dává rozklad na částečné zlomky

$$I'(a) = \frac{2a}{b^2 - a^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1 + a^2x^2} - \frac{1}{1 + b^2x^2} \right) dx = \frac{\pi}{b(a + b)}\,.$$

Následkem spojitosti levé i pravé strany v bodě b (viz [42]) platí tento výsledek i pro $a = b$, tedy pro všechna $a > 0$. Integrací plyne

[42]) Tedy je (115) také spojitou funkcí a v $(0, +\infty)$.

(pro $a > 0$) $I(a) = \frac{\pi}{b} \lg (a + b) + C$, kde C nezávisí na a. Ježto zde obě strany jsou spojité zprava v bodě 0 a ježto $I(0) = 0$, vychází (limitním přechodem $a \to 0+$) $I(a) = \frac{\pi}{b} \lg \frac{a + b}{b}$ pro $a \geqq 0$. Vidíte (to se vyskytuje často), že jsme zde kombinovali použití derivace (pro $a > 0$) a spojitosti (k určení konstanty C).

Poznámka 1. Stojí za to uvésti tento klasický případ, kdy lze užíti vět 107, 108:

I. Budiž $f(x, \alpha) = f(x_1, \ldots, x_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ konečná komplexní funkce $r + s$ reálných proměnných; buďte $M \subset \mathsf{E}_r$, $N \subset \mathsf{E}_s$ kompaktní množiny. Budiž $f(x, \alpha)$ spojitá v množině $P = M \times N$. Potom funkce $F(\alpha) = \int_M f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x$ je spojitá v N.

II. Budiž $f(x, \alpha) = f(x_1, \ldots, x_r, \alpha)$ komplexní funkce $r + 1$ reálných proměných; budiž $M \subset \mathsf{E}_r$ kompaktní, $-\infty < \gamma < \delta < +\infty$. Funkce $f(x, \alpha)$, $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ buďte konečné a spojité v množině $P = M \times \langle \gamma, \delta \rangle$. Potom funkce $F(\alpha) = \int_M f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x$ má v $\langle \gamma, \delta \rangle$ derivaci $F'(\alpha) = \int_M \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\,\mathrm{d}x$ (v bodě γ míním derivaci zprava, v bodě δ zleva).

Důkaz. I. Existuje C_1 $(0 < C_1 < +\infty)$ tak, že všude v P je $|f(x, \alpha)| < C_1$. Číslo C_1 je tedy „integrabilní majorantou" a lze užíti věty 107.

II. Podobně $\left| \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right| < C_2$ a užije se věty 108.

Příklad 11 (důležitý). Pro libovolné $r \in \mathsf{E}_1$ položme

$$I(r) = \int_0^\pi \lg (1 + 2r \cos x + r^2)\,\mathrm{d}x \,. \tag{116}$$

Pro $0 \leqq x \leqq \pi$ je výraz $1 + 2r \cos x + r^2 = (1 + r \cos x)^2 + (r \sin x)^2$ vždy kladný až na ten případ, kdy $r \cos x = -1$, $r \sin x = 0$, tedy $r \neq 0$, $\sin x = 0$, tedy buďto $x = 0$ a potom $r = -1$ nebo $x = \pi$ a potom $r = 1$. Tedy je integrand v (116) a podobně integrand v (117) funkcí spojitou v každém (dvojrozměrném) intervalu $0 \leqq x \leqq \pi$, $a \leqq r \leqq b$ (a, b konečná), jestliže interval $\langle a, b \rangle$ neobsahuje bod 1 ani -1. Tedy je (viz pozn. 1) pro všechna $r \neq \pm 1$ funkce $I(r)$ spojitá a je

$$I'(r) = 2 \int_0^\pi \frac{\cos x + r}{1 + 2r \cos x + r^2} \, dx \, . \tag{117}$$

Vypočtěme $I'(r)$ napřed pro $|r| < 1$, $r \neq 0$ (napřed trochu zjednodušíme, potom zavedeme substituci $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = t$ a konečně $\frac{1-r}{1+r} t = u$):

$$I'(r) = \frac{1}{r} \int_0^\pi \left(1 + \frac{r^2 - 1}{1 + 2r \cos x + r^2}\right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{r} + 2 \frac{r^2 - 1}{r} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + r)^2 + (1 - r)^2 t^2} = \frac{\pi}{r} - \frac{2}{r} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2} = 0 \, .$$

Podle (117) platí tento výsledek i pro $r = 0$, takže $I(r)$ je konstantní v $(-1, 1)$; ježto $I(0) = 0$, je tedy

$$I(r) = 0 \text{ pro } |r| < 1 \, . \tag{118}$$

Pro $|r| > 1$ je pak

$$\begin{aligned} I(r) &= \int_0^\pi \lg \left(r^2 \left(1 + \frac{2}{r} \cos x + \frac{1}{r^2}\right)\right) dx = \\ &= \int_0^\pi \lg r^2 \, dx + I\left(\frac{1}{r}\right) = 2\pi \lg |r| \, , \end{aligned} \tag{119}$$

ježto $\left|\frac{1}{r}\right| < 1$ a tedy $I\left(\frac{1}{r}\right) = 0$.

Zbývá $I(\pm 1)$. Dokážeme-li, že integrand v (116) má v **uzavřeném** intervalu $-1 \leqq r \leqq 1$ „integrabilní majorantu", bude tím dokázána spojitost $I(r)$ v $\langle -1, 1 \rangle$ a tedy (podle (118)) rovnice $I(\pm 1) = 0$. Ale pro $|r| \leqq 1$, $0 < x < \pi$ je

$$1 + 2r \cos x + r^2 \leqq 4\,,$$
$$1 + 2r \cos x + r^2 = 1 - \cos^2 x + (\cos x + r)^2 \geqq \sin^2 x > 0\,,$$
tedy
$$2 \lg \sin x \leqq \lg (1 + 2r \cos x + r^2) \leqq \lg 4$$
(uvažte, že zde $\lg \sin x \leqq 0$). Tedy zřejmě
$$|\lg (1 + 2r \cos x + r^2)| \leqq \operatorname{Max} (\lg 4, 2|\lg \sin x|)$$
a jde jen o to, zda $\int_0^\pi |\lg \sin x|\, dx$ konverguje. Ježto $\sin (\pi - x) = \sin x$, stačí se omeziti na integraci od 0 do $\frac{1}{2}\pi$. Ale v $(0, \frac{1}{2}\pi)$ je $\sin x > \frac{2}{\pi}\, x$, tedy
$$0 > \lg \sin x > \lg \frac{2}{\pi} + \lg x\,,$$
tedy
$$|\lg \sin x| = - \lg \sin x < - \lg \frac{2}{\pi} - \lg x$$
a $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \lg x\, dx$ konverguje; tím je důkaz proveden. Vzhledem k rovnicím
$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2}x\,, \quad 1 - \cos x = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}x$$
lze rovnicím $I(1) = I(-1) = 0$, t. j. rovnicím $\int_0^\pi (\lg 2 + \lg (1 \pm \pm \cos x))\, dx = 0$ dáti tvar
$$\int_0^\pi \lg \cos \tfrac{1}{2}x\, dx = \int_0^\pi \lg \sin \tfrac{1}{2}x\, dx = - \pi \lg 2\,.$$

III. Někdy se nám nepodaří přímo vypočísti ani $F(\alpha) = \int_M f(x, \alpha)\,.\, d\mu$ ani $F'(\alpha) = \int_M \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, d\mu$, ale podaří se nám nalézti vztah mezi funkcemi F, F' (po příp. mezi F, F', F'' atd.), t. j. tak zvanou diferenciální rovnici pro funkci F. Řešením (nebo, jak se říkává, „integrací“) této rovnice se nám někdy podaří nalézti F. Řadu příkladů tohoto druhu viz v § 8—10 i v dalších kapitolách (hlavně v kap. VIII, § 4 a potom — pro t. zv. „zobecněné integrály“ — v § 6).

Napřed si však připravíme několik drobností z theorie diferenciálních rovnic, které budeme potřebovati (mnohý čtenář je asi zná).

§ 7. Dvě poznámky o diferenciálních rovnicích. Věta A. *Buďte $p(x)$, $q(x)$ funkce konečné a spojité v intervalu (a, b) (mohou býti komplexní). Zvolme primitivní funkce*[43] $P(x) = \int p(x)\,\mathrm{d}x$, $Q(x) = \int \mathrm{e}^{P(x)} q(x)\,\mathrm{d}x$ *v intervalu (a, b). Potom funkce (komplexní) $y(x)$ vyhovuje v intervalu (a, b) rovnici*

$$y'(x) + p(x)\,y(x) = q(x) \tag{120}$$

(t. zv. lineární diferenciální rovnice 1. řádu) tehdy a jen tehdy, je-li

$$y(x) = (Q(x) + C)\,\mathrm{e}^{-P(x)}\,, \tag{121}$$

kde C je jakékoliv (konečné) komplexní číslo.

Poznámka 1. Je-li $q(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, zjednoduší se (121):

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-P(x)}\,. \tag{122}$$

Poznámka 2. Jsou-li p, q reálné funkce, lze zvolit primitivní funkce P, Q rovněž reálné, načež funkce (121) je reálná tehdy a jen tehdy, je-li C reálné.

Důkaz věty **A**. Rovnicí

$$y(x) = A(x)\,\mathrm{e}^{-P(x)} \text{ neboli } A(x) = y(x)\,\mathrm{e}^{P(x)} \tag{123}$$

je každé funkci y přiřazena jistá funkce A a naopak. Je jasno, že y má derivaci[44]) tehdy a jen tehdy, má-li A derivaci (uvažme, že $P'(x) = p(x)$ existuje). Funkce y vyhovuje pak rovnici (120) tehdy a jen tehdy, je-li

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(A(x)\,\mathrm{e}^{-P(x)}) + p(x)\,A(x)\,\mathrm{e}^{-P(x)} = q(x)\,,$$

t. j.

$$A'(x)\,\mathrm{e}^{-P(x)} = q(x),\; A'(x) = \mathrm{e}^{P(x)}\,q(x),\; A(x) = Q(x) + C\,;$$

odtud a z (123) plyne tvrzení věty **A**.

[43]) T. j. zvolme příslušné „integrační konstanty".
[44]) Mínim vlastní (konečnou) derivaci.

Vypočteme nyní několik příkladů, a to právě ty, které budeme dále potřebovati.

Příklady. Rovnici $y' = ky$ (k konstanta) vyhovují právě všechny funkce $y = Ce^{kx}$. U rovnice $y' = -\frac{x}{2a}y$ ($a \neq 0$ konstanta) je $P(x) = \int \frac{x}{2a} \mathrm{d}x = \frac{x^2}{4a}$ [45]; vyhovují jí právě všechny funkce $y = Ce^{-\frac{x^2}{4a}}$. Zde se užívalo zjednodušeného vzorce (122). Vzorce (121) užijeme u složitější rovnice $y' = \frac{1}{2a} - \frac{x}{2a} \cdot y$ ($a \neq 0$ konstanta). Zde $p(x) = \frac{x}{2a}$, $q(x) = \frac{1}{2a}$, $P(x) = \frac{x^2}{4a}$, [45] $Q(x) = \frac{1}{2a}\int e^{\frac{x^2}{4a}} \mathrm{d}x$. Aby byla primitivní funkce Q jednoznačně stanovena, volme třeba $Q(x) = \frac{1}{2a}\int_0^x e^{\frac{t^2}{4a}} \mathrm{d}t$; všechna řešení naší rovnice jsou tedy dána vzorcem

$$y = e^{-\frac{x^2}{4a}}\left(\frac{1}{2a}\int_0^x e^{\frac{t^2}{4a}} \mathrm{d}t + C\right).$$

Věta B. *Buďte α, β, γ konečná komplexní čísla, $\alpha \neq 0$. Buďte λ, μ kořeny rovnice $\alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma = 0$. Potom funkce*

(124) $$y(x) = C_1e^{\lambda x} + C_2e^{\mu x} \quad (\textit{jestliže } \lambda \neq \mu),$$

po příp. funkce

(125) $$y(x) = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x} \quad (\textit{jestliže } \lambda = \mu)$$

vyhovují rovnici

(126) $$\alpha\, y''(x) + \beta\, y'(x) + \gamma\, y(x) = 0$$

v celém intervalu $(-\infty, +\infty)$; při tom C_1, C_2 jsou jakákoliv konečná komplexní čísla. Naopak, jestliže funkce y vyhovuje rovnici (126) *v nějakém (sebekratším) intervalu (a, b), má y v (a, b) nutně tvar* (124), *po příp.* (125).

[45]) Mohl jsem volit také jinou primitivní funkci.

Poznámka 3. Rovnici tvaru (126) se říká homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty. Funkci, která vyhovuje nějaké diferenciální rovnici, se obyčejně říká **integrál** té rovnice.

Důkaz. Víte z algebry (nebo z **D II**, str. 531 (před větou 224) nebo z **J I**, kap. XI, § 1, cvič. 8 — jde o případ dvojnásobného kořenu), že $\lambda = \mu$ tehdy a jen tehdy, je-li derivace $2\alpha\lambda + \beta = 0$. Víte rovněž (stačí rozložit $\alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma = \alpha(\xi - \lambda)(\xi - \mu)$), že $\lambda + \mu = -\dfrac{\beta}{\alpha}$. Přiřaďme každé funkci y funkci z rovnicí $y(x) = z(x)\,e^{\lambda x}$. Zřejmě existuje y''[46]) tehdy a jen tehdy, existuje-li z''. Dále: y vyhovuje v (a, b) rovnici (126) tehdy a jen tehdy, je-li

$$\alpha(ze^{\lambda x})'' + \beta(ze^{\lambda x})' + \gamma ze^{\lambda x} = 0\,,$$

t. j.[47])

$$\alpha z'' + (2\lambda\alpha + \beta)\,z' + (\lambda^2\alpha + \lambda\beta + \gamma)\,z = 0\,;$$

ježto λ je kořenem, lze tuto rovnici psáti — označím-li ještě $z'(x) = u(x)$ —

$$\alpha\,u'(x) + (2\lambda\alpha + \beta)\,u(x) = 0\,. \tag{127}$$

Dělme číslem $\alpha \neq 0$ a užijme věty **A**; dostaneme, že (127) je ekvivalentní po řadě těmto vztahům:

1. V případě $\lambda \neq \mu$, t. j. $2\lambda\alpha + \beta \neq 0$:

$$z'(x) = u(x) = ke^{-\left(2\lambda + \frac{\beta}{\alpha}\right)x} = ke^{(\mu - \lambda)x} \quad (k \text{ konstanta})\,,$$
$$z(x) = C_2e^{(\mu-\lambda)x} + C_1,\ y(x) = C_1e^{\lambda x} + C_2e^{\mu x}\,.$$

2. V případě $\lambda = \mu$, t. j. $2\lambda\alpha + \beta = 0$:

$$u'(x) = 0,\ z'(x) = u(x) = C_2,\ z(x) = C_2x + C_1,$$
$$y(x) = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x}\,.$$

Příklady. $y'' = y$. Rovnice $\xi^2 - 1 = 0$ má kořeny ± 1. Řešení rovnice $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$. U rovnice $y'' - 4y' + 4y = 0$ má rovnice $\xi^2 - 4\xi + 4 = 0$ dvojnásobný kořen $\lambda = 2$; tedy řešení $y = C_1e^{2x} +$

[46]) Míním vlastní (konečnou) derivaci.
[47]) Dělím číslem $e^{\lambda x} \neq 0$.

$+ C_2 x e^{2x}$. U rovnice $y'' - 4y' + 5y = 0$ má rovnice $\xi^2 - 4\xi + 5 = 0$ kořeny $2 \pm i$. Tedy řešení $C_1 e^{(2+i)x} + C_2 e^{(2-i)x}$. Jako cvičení (ale nebudeme to v dalším potřebovat) můžete zjistit, že systém všech řešení je v tomto případě dán také funkcemi $e^{2x}(K_1 \cos x + K_2 \sin x)$ s libovolnými konstantami K_1, K_2 a že reálné řešení dostaneme jen pro reálné hodnoty K_1, K_2. Obecněji: Jsou-li α, β, γ reálná, kořeny $r \pm is$ imaginární, lze řešení psáti též ve formě e^{rx} $(K_1 \cos sx + K_2 \sin sx)$; přitom reálná řešení dostanete jen pro reálná K_1, K_2.

§ 8. Integrály $I(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx$, $K(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \sin bx \, dx$ **pro** $a > 0$. Při pevném $a > 0$ vyšetřujme tyto integrály pro reálné b. Derivováním podle b a potom integrací per partes dostáváme

$$I'(b) = - \int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx \, dx = - \frac{b}{2a} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx$$

(integrand v prvním integrálu má „integrabilní majorantu“ $x e^{-ax^2}$), t. j. $I'(b) = - \frac{b}{2a} I(b)$, načež podle příkladu v § 7 je $I(b) = C e^{-\frac{b^2}{4a}}$.

Konstantu C určíme dosazením $b = 0$; ježto $I(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ (viz konec § 7 v kap. III), vyjde

$$I(b) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}} \text{ pro } a > 0\,. \tag{128}$$

Úplně obdobně dostaneme rovnici $K'(b) = \frac{1}{2a} - \frac{b}{2a} K(b)$; odtud (viz příklad v § 7) a z rovnice $K(0) = 0$ plyne

$$K(b) = \frac{1}{2a} e^{-\frac{b^2}{4a}} \int_0^b e^{\frac{t^2}{4a}} \, dt \text{ pro } a > 0\,, \tag{129}$$

tedy výsledek podstatně složitější než (128), ač oba integrály I, K vypadají na pohled stejně „složitě“. Rozvinete-li v (129) integrand v řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{t^{2n}}{2^{2n} a^n}$$

a integrujete člen po členu (jde o řadu s kladnými členy), dostanete

$$K(b) = \frac{1}{2a} e^{-\frac{b^2}{4a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+1)} \cdot \frac{b^{2n+1}}{2^{2n}a^n}. \tag{130}$$

Jako cvičení vypočtěte $I(b)$, $K(b)$ ještě jinak. Především rozviňte $\cos bx$ po příp. $\sin bx$ v řadu a integrujte člen po členu (integrabilní majorantou ke všem částečným součtům bude na př. funkce $e^{-ax^2} \,.\, e^{|b|x}$). Pro $I(b)$ vyjde

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n b^{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} x^{2n}\, dx\,;$$

podle (111) v § 6, příkl. 8 snadno zjistíte, že tento výsledek lze psáti ve tvaru (128). Podobně vyjde (užitím (112))

$$K(b) = \frac{b}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} \left(\frac{b^2}{a}\right)^n. \tag{131}$$

Zjistěte jako cvičení přímým výpočtem, že pravé strany v (130), (131) mají stejnou hodnotu. Návod: V (130) rozviňte $e^{-\frac{b^2}{4a}}$ v řadu a proveďte násobení obou řad v (130). Srovnáte-li pak koeficienty při b^{2n+1} v této řadě a v (131), vidíte, že jde o ověření vztahu

$$\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1}\,;$$

ale pravá strana je $\int_0^1 (1 - x^2)^n\, dx$, a tento integrál snadno vypočtete (nejlépe integrací per partes, snižujíce postupně mocnitele α v integrálu $\int_0^1 (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta\, dx$).

§ 9. Integrál $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}}\, dx$.

Pro všechna reálná α máme integrabilní majorantu e^{-x^2}, takže $I(\alpha)$ je funkce spojitá v $(-\infty, +\infty)$. Dále je to funkce sudá (stačí tedy vyšetřovati $\alpha \geqq 0$) a je $I(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Formálním derivováním dostaneme (oprávněnost zjistíme dodatečně)

$$(132) \qquad I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \left(-2\alpha e^{-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}} \right) \frac{dx}{x^2}.$$

Funkce $\lambda e^{-\lambda}$ je omezená v $\langle 0, +\infty)$, neboť pro $\lambda \to +\infty$ má limitu 0. Tedy je $0 < \frac{\alpha^2}{x^2} e^{-\frac{\alpha^2}{x^2}} < k$ (k konstanta) pro $\alpha > 0$, $x > 0$. Je-li tedy $\alpha_0 > 0$, platí pro všechna $\alpha > \alpha_0$, $x > 0$ nerovnost $\frac{\alpha}{x^2} e^{-\frac{\alpha^2}{x^2}} < \frac{k}{\alpha_0}$, takže integrand v (132) má pro $\alpha > \alpha_0$ integrabilní majorantu $2k\alpha_0^{-1}e^{-x^2}$; tedy (132) vskutku platí pro každé $\alpha > 0$. Substitucí $\frac{\alpha}{x} = y$ obdržíme ihned $I'(\alpha) = -2I(\alpha)$ a tedy podle příkladu v § 7 je $I(\alpha) = Ce^{-2\alpha}$ pro $\alpha > 0$. Následkem spojitosti platí tato rovnice i pro $\alpha = 0$, načež dosazením $\alpha = 0$ plyne $I(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-2\alpha}$ pro $\alpha \geqq 0$. Ježto $I(\alpha)$ je sudá funkce, je $I(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-2|\alpha|}$ pro každé reálné α.

§ 10. Integrál $I(\alpha) = \iint_{\substack{x>0\\y>0}} e^{-\left(x+y+\frac{\alpha^3}{xy}\right)} x^{-\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{3}} \,dx\,dy$ pro $\alpha \geqq 0$.

Integrabilní majorantu dostaneme, dosadíme-li $\alpha = 0$, neboť[48])

$$I(0) = \iint_{\substack{x>0\\y>0}} e^{-(x+y)} x^{-\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{3}} \,dx\,dy = \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

(viz (95) v § 5). Tedy je $I(\alpha)$ funkce spojitá v $\langle 0, +\infty)$. Formální derivování dává

$$(133) \qquad I'(\alpha) = \iint_{\substack{x>0\\y>0}} \left(-\frac{3\alpha^2}{xy} \right) e^{-\left(x+y+\frac{\alpha^3}{xy}\right)} x^{-\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{3}} \,dx\,dy\,.$$

Ježto funkce $\lambda e^{-\lambda}$ je omezená ($< C$) v $\langle 0, +\infty)$, je (pro $\alpha > 0$, $x > 0$, $y > 0$) $\frac{\alpha^3}{xy} e^{-\frac{\alpha^3}{xy}} < C$; je-li tedy $\alpha_0 > 0$, má integrand v (133)

[48]) Užívám opětovně mlčky Fubiniovy věty.

pro $\alpha > \alpha_0$ integrabilní majorantu $3C\alpha_0^{-1}\mathrm{e}^{-x-y}x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}$, takže (133) vskutku platí pro všechna $\alpha > 0$. Užiji-li v (133) Fubiniovy věty a potom do vnitřního integrálu (podle y) dosadím novou proměnnou $z = \dfrac{\alpha^3}{xy}\left(\text{tedy } y = \dfrac{\alpha^3}{xz},\ \mathrm{d}y = -\dfrac{\alpha^3\,\mathrm{d}z}{xz^2}\right)$, dostanu ihned $I'(\alpha) = -3I(\alpha)$, tedy podle příkladu v § 7 $I(\alpha) = K\mathrm{e}^{-3\alpha}$ pro $\alpha > 0$; následkem spojitosti platí tato rovnice i pro $\alpha = 0$, takže $K = I(0)$, $I(\alpha) = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-3\alpha}$ pro $\alpha \geqq 0$.

§ 11. Integrály funkcí závislých na parametru: Integrace podle parametru. Budiž $f(x, \alpha) = f(x_1, \ldots, x_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ funkce $r + s$ proměnných; budiž μ_1 funkce s vlastností $\mathbf{S}_r$ (viz kap. I, § 6, text za větou 7), budiž μ_2 funkce s vlastností $\mathbf{S}_s$ a budiž μ_{12} definováno jako ve větě 70. Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$ množina μ_1-měřitelná a budiž $N \subset \mathbf{E}_s$ μ_2-měřitelná. Položme $F(\alpha) = \int_M f(x, \alpha)\,\mathrm{d}\mu_1$ [49] a ptáme se, kdy můžeme integrovati F „za integračním znamením", t. j. kdy platí

$$\int_N F(\alpha)\,\mathrm{d}\mu_2 = \int_M \left(\int_N f(x, \alpha)\,\mathrm{d}\mu_2\right)\mathrm{d}\mu_1\,. \tag{134}$$

To není nic jiného než záměna integračního pořadí; podle Fubiniovy věty platí (134), jakmile existuje (při komplexní funkci f čti: konverguje)

$$\int_{M \times N} f(x, \alpha)\,\mathrm{d}\mu_{12}\,.$$

Vzorce (134) užíváme často tímto způsobem k výpočtu integrálů: Dána je nějaká funkce $F(\alpha)$; nedovedeme přímo vypočísti levou stranu v (134). Snažíme se tedy vyjádřiti $F(\alpha)$ ve tvaru $\int_M f(x, \alpha)\,\mathrm{d}\mu_1$ a vypočísti potom pravou stranu v (134). Tímto způsobem jsme již vypočetli $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\lg x}\,\mathrm{d}x$ v kap. IV, § 1, příkl. 3 $(0 < a < b)$; nyní připojíme několik dalších příkladů.

[49]) Zde se integruje „podle x".

Příklad 1. Pro $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ máme počítati

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}\, dx\,;$$

integrand je pro $x > 0$ roven $\int_\alpha^\beta e^{-yx^2}\, dy$; ježto e^{-yx^2} je spojitá kladná funkce, lze užíti Fubiniovy věty a psáti (příště budu stručnější) pro $0 \leqq \alpha \leqq \beta$

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_\alpha^\beta e^{-yx^2}\, dy\right) dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_0^{+\infty} e^{-yx^2}\, dx\right) dy =$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}\, dy = \sqrt{\pi\beta} - \sqrt{\pi\alpha}\,.$$

Výsledek platí ovšem i pro $0 \leqq \beta < \alpha$ (stačí vyměnit α, β).

Příklad 2. Počítejme $I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1 - x^2}}\, dx$. Jest $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1 + x^2y^2}$ a tedy (záměnou integračního pořadí)

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2y^2)\sqrt{1 - x^2}}\right) dy\,.$$

Substituce $x = \sin \Theta$ a potom $\operatorname{tg} \Theta = t$ ve vnitřním integrálu dává

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\Theta}{1 + y^2 \sin^2 \Theta} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2(1 + y^2)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1 + y^2}}\,,$$

takže

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = \frac{\pi}{2} \lg (1 + \sqrt{2})\,.$$

Příklad 3. Pro $0 < b \leqq a$ počítejme

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \lg \frac{a + b \sin x}{a - b \sin x} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}.$$

Pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ je

$$\frac{1}{\sin x} \lg \frac{a + b \sin x}{a - b \sin x} = \int_0^b \left(\frac{1}{a - y \sin x} + \frac{1}{a + y \sin x} \right) \mathrm{d}y =$$

$$= 2a \int_0^b \frac{\mathrm{d}y}{a^2 - y^2 \sin^2 x}.$$

Fubiniova věta[50]) a potom substituce $\mathrm{tg}\, x = t$ ve vnitřním integrálu vede k výsledku

$$I = 2a \int_0^b \left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - y^2 \sin^2 x} \right) \mathrm{d}y = 2a \int_0^b \left(\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{a^2 + (a^2 - y^2)\, t^2} \right) \mathrm{d}y =$$

$$= 2a \int_0^b \frac{\pi\, \mathrm{d}y}{2a\sqrt{a^2 - y^2}} = \pi \arcsin \frac{b}{a}.$$

Jak patrno, není vždy snadno nalézti úspěšnou cestu k řešení.

Cvičení

1. (K větě 106.) Kdybychom místo věty 65 užili věty 57, dostali bychom tuto větu (s **reálným** parametrem α): Nechť funkce $f(x, \alpha) = f(x_1, x_2, \ldots, x_r, \alpha)$ má tyto vlastnosti:

I. Pro každé $\alpha \in (\beta, \gamma)$ je $f(x, \alpha)$ (jakožto funkce x, t. j. vlastně $f^{*,\alpha}$) μ-měřitelná v M. II. Pro μ-skoro všechna $x \in M$ je $0 \leqq f(x, \alpha) \leqq f(x, \alpha')$, jestliže $\beta < \alpha < \alpha' < \gamma$. Potom je

$$\lim_{\alpha \to \gamma -} \int_M f(x, \alpha)\, \mathrm{d}\mu = \int_M \lim_{\alpha \to \gamma -} f(x, \alpha)\, \mathrm{d}\mu.$$

[50]) Všimněte si, že jde o integrál kladné funkce.

Příklady (pro $a > 0$):

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \lg \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \cdot \frac{dx}{\sin x} = \lim_{b \to a -} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \lg \frac{a + b \sin x}{a - b \sin x} \cdot \frac{dx}{\sin x};$$

$$\lim_{b \to 1 -} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\lg (b - \sin x)} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\lg (1 - \sin x)} = -\infty .$$

2. Označme integrál z příkl. 3 znakem $I(b)$ a zkusme jej počítat derivováním podle parametru b. Pro $-a < b < a$ najdeme snadno

$$I'(b) = 2a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{a^2 - b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

$I(b) = \int \frac{\pi \, db}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \pi \arcsin \frac{b}{a}$ (integrační konstanta se určí z toho, že $I(0) = 0$). Pro $b = \pm a$ tento způsob selhává a je nutno provésti limitní přechod (viz cvič. 1). Vidíme, že jsme byli vedeni k týmž výpočtům jako v příkl. 3, avšak se dvěma rozdíly (v neprospěch cvičení 2): Předně jsme musili určovat integrační konstantu (což ovšem v tomto příkladě bylo triviální), za druhé jsme musili provést limitní přechod $b \to a -$. Tato příbuznost i tyto rozdíly mezi integrováním podle parametru (Fubiniova věta) a derivováním podle parametru jsou dosti typické, ale nebudeme se jimi hlouběji zabývat.

§ 12. Derivace integrálu podle parametru při proměnných mezích.

Omezíme se na jednoduché integrály, při čemž integračním oborem bude interval. Závisí-li jen horní mez na parametru, jde o integrál

$$F(\alpha) = \int_c^{B(\alpha)} f(x, \alpha) \, dx . \tag{135}$$

Půjde o to, za jakých podmínek lze tvrdit, že v jistém bodě α_0 existuje derivace $F'(\alpha_0)$, a jak ji vypočísti.

Věta 109. *Budiž $\alpha_0 \in E_1$, $0 < \lambda < +\infty$; budiž $B(\alpha)$ reálná funkce jedné reálné proměnné, mající v bodě α_0 konečnou derivaci; položme $B(\alpha_0) = b$. Budiž $-\infty \leqq c < b$ (b je ovšem konečné číslo). Budiž $f(x, \alpha)$ komplexní funkce dvou reálných proměnných, o které předpokládáme toto:*

I. Integrál (135) *konverguje pro všechna* $\alpha \in (\alpha_0 - \lambda, \alpha_0 + \lambda)$.

II. Funkce $f(x, \alpha)$ *je spojitá a konečná v bodě* $[b, \alpha_0]$ *vzhledem k množině* $\underset{[x,\alpha]}{\mathcal{E}}(x \leqq B(\alpha))$.

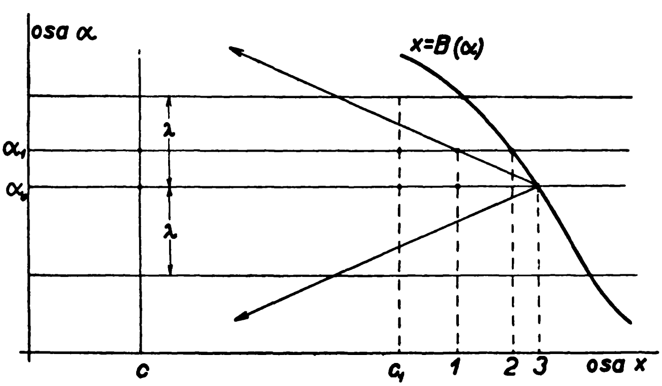
III. Existuje číslo K $(0 < K < +\infty)$, *funkce* $\varphi(x) \in \mathbf{L}(c, b)$ *a nulová množina* $Q \subset \mathbf{E}_1$[51]) *tak, že pro*

(136) $\alpha \in (\alpha_0 - \lambda, \alpha_0 + \lambda)$, $x \operatorname{non} \in Q$, $c < x < b - K|\alpha - \alpha_0|$

existuje $\dfrac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} = f_\alpha(x, \alpha)$ *a je* $|f_\alpha(x, \alpha)| \leqq \varphi(x)$.

Potom má funkce $F(\alpha)$ *v bodě* α_0 *konečnou derivaci*

(137) $$F'(\alpha_0) = \int_c^b f_\alpha(x, \alpha_0)\, dx + f(b, \alpha_0)\, B'(\alpha_0) \quad (b = B(\alpha_0))\,.$$



Obr. 7. Body $[x, \alpha]$, které vyhovují rovnici $x = b - K|\alpha - \alpha_0|$, tvoří dvě polopřímky, opatřené na obr. 7 šipkami. Body 1, 2, 3 na ose x mají po řadě souřadnici $b - K|\alpha_1 - \alpha_0|$, $B(\alpha_1)$, $b(= B(\alpha_0))$.

Důkaz. Je patrno toto: Jsou-li předpoklady splněny pro jisté hodnoty λ, K, jsou splněny i pro každé menší λ a pro každé větší K. Smíme tedy předpokládati, že

(138) $$K > |B'(\alpha_0)| = \lim_{\alpha_1 \to \alpha_0} \left| \frac{B(\alpha_1) - B(\alpha_0)}{\alpha_1 - \alpha_0} \right|,$$

[51]) Jde o Lebesgueovu míru a Lebesgueův integrál.

načež můžeme zvoliti λ tak malé, že

(139) $$0 < |\alpha_1 - \alpha_0| < \lambda \Rightarrow |B(\alpha_1) - B(\alpha_0)| < K|\alpha_1 - \alpha_0| .$$

Buďte K, λ již tak zvoleny. Pro $0 < |\alpha_1 - \alpha_0| < \lambda$ sestrojme funkci

(140) $$\begin{aligned}\Phi(\alpha_1) = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_0} \Big(\int_c^{B(\alpha_1)} f(x, \alpha_1)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x, \alpha_0)\,\mathrm{d}x\Big) - \\ - \int_c^b f_\alpha(x, \alpha_0)\,\mathrm{d}x - B'(\alpha_0)\, f(b, \alpha_0) ;\end{aligned}$$

máme dokázati, že $\lim\limits_{\alpha_1 \to \alpha_0} \Phi(\alpha_1) = 0$.

Budiž tedy dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme c_1 tak, že

(141) $$c < c_1 < b , \quad \int_{c_1}^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon ;$$

odtud a z III plyne

(142) $$\Big|\int_{c_1}^b f_\alpha(x, \alpha_0)\,\mathrm{d}x\Big| < \varepsilon .$$

Toto c_1 podržme; uvažme, že pro α_1 dostatečně blízké α_0 (řekněme pro $|\alpha_1 - \alpha_0| < \delta_1$, kde $0 < \delta_1 < \lambda$) je $c_1 < b - K|\alpha_1 - \alpha_0|$. Tedy pro $|\alpha_1 - \alpha_0| < \delta_1$ je (viz též (139))

(143) $$c < c_1 < b - K|\alpha_1 - \alpha_0| \leqq B(\alpha_1) .$$

Rozdělme, předpokládajíce stále $0 < |\alpha_1 - \alpha_0| < \delta_1$, funkci $\Phi(\alpha_1)$ na tři sčítance:

(144) $$\Phi_1(\alpha_1) = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_0} \Big(\int_c^{c_1} f(x, \alpha_1)\,\mathrm{d}x - \int_c^{c_1} f(x, \alpha_0)\,\mathrm{d}x\Big) - \int_c^b f_\alpha(x, \alpha_0)\,\mathrm{d}x ,$$

(145) $$\Phi_2(\alpha_1) = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_0} \Big(\int_{c_1}^{b - K|\alpha_1 - \alpha_0|} f(x, \alpha_1)\,\mathrm{d}x - \int_{c_1}^{b - K|\alpha_1 - \alpha_0|} f(x, \alpha_0)\,\mathrm{d}x\Big) ,$$

(146) $$\begin{aligned}\Phi_3(\alpha_1) = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_0} \Big(\int_{b - K|\alpha_1 - \alpha_0|}^{B(\alpha_1)} f(x, \alpha_1)\,\mathrm{d}x - \int_{b - K|\alpha_1 - \alpha_0|}^{b} f(x, \alpha_0)\,\mathrm{d}x\Big) - \\ - B'(\alpha_0)\, f(b, \alpha_0) .\end{aligned}$$

Podle I, III, (143) lze na první člen ve Φ_1 užíti věty 108 a dostáváme

$$\lim_{\alpha_1 \to \alpha_0} \Phi_1(\alpha_1) = \int_c^{c_1} f_\alpha(x, \alpha_0)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f_\alpha(x, \alpha_0)\,\mathrm{d}x ,$$

a tedy podle (142)

$$(147)\qquad |\lim_{\alpha_1\to\alpha_0} \Phi_1(\alpha_1)| = |\int_{c_1}^{b} f_\alpha(x, \alpha_0)\, dx| < \varepsilon\,.$$

Pokud se týče Φ_2, uvažme toto: je-li α mezi α_0, α_1,[52]) $x \in (c_1, b - - K|\alpha_1 - \alpha_0|) \dot{-} Q$, je tím spíše $x \in (c, b - K|\alpha - \alpha_0|) \dot{-} Q$, a tedy můžeme podle III užíti věty o přírůstku funkce:

$$\left|\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_0} (f(x, \alpha_1) - f(x, \alpha_0))\right| = |f_\alpha(x, \alpha_2)| \leqq \varphi(x)$$

(α_2 mezi α_0, α_1) a tedy podle (141)

$$(148)\qquad |\Phi_2(\alpha_1)| \leqq \int_{c_1}^{b - K|\alpha_1 - \alpha_0|} \varphi(x)\, dx < \varepsilon\,.$$

Ve Φ_3 užijeme předpokladu II. Píšeme-li $f(x, \alpha) = f(b, \alpha_0) + \varrho(x, \alpha)$, je

$$(149)\qquad \lim_{\substack{[x,\alpha]\to[b,\alpha_0]\\ x\leqq B(\alpha)}} \varrho(x, \alpha) = 0\,;$$

lze pak psáti

$$\Phi_3(\alpha_1) = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_0} (B(\alpha_1) - (b - K|\alpha_1 - \alpha_0|))\, f(b, \alpha_0) +$$
$$+ \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_0} \int_{b - K|\alpha_1 - \alpha_0|}^{B(\alpha_1)} \varrho(x, \alpha_1)\, dx -$$
$$- \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_0} (b - (b - K|\alpha_1 - \alpha_0|))\, f(b, \alpha_0) -$$
$$- \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_0} \int_{b - K|\alpha_1 - \alpha_0|}^{b} \varrho(x, \alpha_0)\, dx - B'(\alpha_0)\, f(b, \alpha_0)\,.$$

Vpravo je pět členů; první, třetí a pátý dávají

$$(150)\qquad f(b, \alpha_0) \left(\frac{B(\alpha_1) - b}{\alpha_1 - \alpha_0} - B'(\alpha_0)\right);$$

ježto $b = B(\alpha_0)$, má (150) limitu rovnou nule. Pokud se týče druhého a čtvrtého členu (t. j. obou členů, obsahujících integrály), uvažme, že

---

[52]) Nevylučujeme případy $\alpha = \alpha_0$, $\alpha = \alpha_1$.

integrační interval každého z nich má podle (139) délku nejvýše $2K|\alpha_1 - \alpha_0|$ a že v integračním oboru je $|x - b| \leqq K|\alpha_1 - \alpha_0|$. Podle (149) existuje ke každému $\eta > 0$ číslo $\mu > 0$ tak, že

$$(|\alpha - \alpha_0| < \mu,\ |x - b| < \mu,\ x \leqq B(\alpha)) \Rightarrow |\varrho(x, \alpha)| < \eta\,.$$

Jestliže tedy je $0 < |\alpha_1 - \alpha_0| < \mu$ a současně $K|\alpha_1 - \alpha_0| < \mu$, bude v integračním oboru obou zmíněných integrálů $|x - b| < \mu$, a tedy $|\varrho(x, \alpha_1)| < \eta$ v prvním integrálu, $|\varrho(x, \alpha_0)| < \eta$ v druhém. Tedy druhý a čtvrtý člen dávají dohromady v absolutní hodnotě nejvýše

$$2 \,.\, \frac{1}{|\alpha_1 - \alpha_0|} \,.\, 2K|\alpha_1 - \alpha_0| \,.\, \eta = 4K\eta\,.$$

To platí, jakmile $|\alpha_1 - \alpha_0| < \mathrm{Min}\left(\mu, \frac{\mu}{K}\right)$. T. j.: druhý a čtvrtý člen ve $\Phi_3(\alpha_1)$ dávají pro $\alpha_1 \to \alpha_0$ také limitu rovnou nule. Tedy (ježto totéž platí o výrazu (150)) je

(151) $$\lim_{\alpha_1 \to \alpha_0} \Phi_3(\alpha_1) = 0\,.$$

Podle (147), (148), (151) (víme, že (148) platí pro $0 < |\alpha_1 - \alpha_0| < \delta_1$) je patrno, že existuje δ $(0 < \delta < \delta_1)$ tak, že

$$(0 < |\alpha_1 - \alpha_0| < \delta) \Rightarrow (|\Phi_1(\alpha_1)| < \varepsilon,\ |\Phi_2(\alpha_1)| < \varepsilon,\ |\Phi_3(\alpha_1)| < \varepsilon)\,,$$

a tedy $|\Phi(\alpha_1)| < 3\varepsilon$. Tedy vskutku $\lim\limits_{\alpha_1 \to \alpha_0} \Phi(\alpha_1) = 0$.

Poznámka 1. Za příslušně změněných předpokladů (které si čtenář sám doplní) má funkce

$$G(\alpha) = \int_{A(\alpha)}^{c} f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x = \int_{-c}^{-A(\alpha)} f(-x, \alpha)\,\mathrm{d}x$$

v bodě α_0 derivaci

(152) $$G'(\alpha_0) = \int_{-c}^{-A(\alpha_0)} f_\alpha(-x, \alpha_0)\,\mathrm{d}x - A'(\alpha_0)\, f(A(\alpha_0), \alpha_0)\,,$$

kde integrál vpravo je $\int_{A(\alpha_0)}^{c} f_\alpha(x, \alpha_0)\,\mathrm{d}x$.

Ze (137), (152) pak plyne sečtením za příslušných předpokladů, že integrál $\int\limits_{A(\alpha)}^{B(\alpha)} f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x$ má v bodě α_0 derivaci

$$(153)\quad \int\limits_{A(\alpha_0)}^{B(\alpha_0)} f_\alpha(x, \alpha_0)\,\mathrm{d}x + B'(\alpha_0)\, f(B(\alpha_0), \alpha_0) - A'(\alpha_0)\, f(A(\alpha_0), \alpha_0)\,.$$

Příklad 1. Pro každé $\alpha \in \mathsf{E}_1$, $\alpha \neq 0$ je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int\limits_{\alpha^2}^{\alpha^2+1} \sin\frac{\pi\alpha^2}{2x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \pi\alpha \int\limits_{\alpha^2}^{\alpha^2+1} \cos\frac{\pi\alpha^2}{2x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x} + 2\alpha\sin\frac{\pi\alpha^2}{2\alpha^2+2} - 2\alpha\sin\frac{1}{2}\pi\,.$$

Poznámka 2. Náš důkaz věty 109 byl dosti složitý; v učebnicích integrálního počtu se vzorec (153) obyčejně odvozuje způsobem mnohem jednodušším, ale za předpokladů mnohem více omezujících — viz k tomu cvič. 1.

Cvičení

1. Náš důkaz vzorce (153) byl dosti složitý; proto předkládám čtenáři důkaz jednodušší, platný ovšem za předpokladů daleko více omezujících. Buďte dány v E_1 otevřené intervaly (A, B), (C, D) a funkce $f(x, \lambda)$ taková, že funkce f, $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}$ jsou spojité a omezené v $(A, B) \times (C, D)$ (t. j. pro $A < x < B$, $C < \lambda < D$). Budiž $C < \alpha_0 < D$ a buďte $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ reálné funkce takové, že $A < A(\alpha_0) < B(\alpha_0) < B$ a že existují konečné derivace $A'(\alpha_0)$, $B'(\alpha_0)$. Položme

$$F(\alpha) = \int\limits_{A(\alpha)}^{B(\alpha)} f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x\,, \quad I(a, b, \lambda) = \int\limits_a^b f(x, \lambda)\,\mathrm{d}x\,,$$

takže $F(\alpha) = I(A(\alpha), B(\alpha), \alpha)$. Tvrdím, že $F'(\alpha_0)$ existuje a rovná se výrazu (153).

Důkaz. Pro $A < a < b < B$, $C < \lambda < D$ je

$$\frac{\partial I}{\partial a} = -f(a, \lambda)\,, \quad \frac{\partial I}{\partial b} = f(b, \lambda)\,, \quad \frac{\partial I}{\partial \lambda} = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}\,\mathrm{d}x$$

(proč?). Ježto I má *nejenom parciální derivace, nýbrž i totální diferenciál* (proč?), můžeme užít na $F(\alpha)$ pravidla o derivování složených funkcí (**D II**, věta 189) a obdržíme, že $F'(\alpha_0)$ má hodnotu (153). Poznámka: Věty o existenci

$$\frac{\partial I}{\partial a}, \quad \frac{\partial I}{\partial b}, \quad \frac{\partial I}{\partial \lambda}$$

platí za předpokladů (o funkci f) značně obecnějších; ale s existencí totálního diferenciálu jsou v obecnějších případech obtíže. Proto jsem v textu zvolil obecnější větu 109 s obtížnějším důkazem.