Diferenciální rovnice v komplexním oboru

Kapitola II. Existenční věty pro řešení diferenciálních rovnic

In: Vojtěch Jarník (author); Břetislav Novák (other): Diferenciální rovnice v komplexním oboru. (Czech). Praha: Academia, 1975. pp. 35–54.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402035

Kapitola II

EXISTENČNÍ VĚTY PRO ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

V celé této kapitole budou slova „okolí bodu $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m]$„ znamenat speciální okolí tvaru

(1) $$|x_1 - \alpha_1| < R_1, \ldots, |x_m - \alpha_m| < R_m \quad (0 < R_j \leqq +\infty),$$

tedy kartézský součin otevřených kruhů. Pro pohodlí budeme říkat, že funkce $f(x_1, \ldots, x_m)$ je holomorfní v kartézském součinu uzavřených kruhů

(2) $$|x_1 - \alpha_1| \leqq r_1, \ldots, |x_m - \alpha_m| \leqq r_m \quad (0 < r_j < +\infty),$$

jestliže existují čísla $R_j > r_j$ tak, že f je holomorfní v množině (1). Funkce f je potom spojitá, a tedy omezená na kompaktní množině (2).

Aby vynikla základní myšlenka, proberu v § 1 nejjednodušší rovnici

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

kde f je daná komplexní funkce dvou komplexních proměnných. Budeme říkat, že nějaká komplexní funkce $y(x)$ jedné komplexní proměnné je řešením této rovnice v oblasti $M \subset \boldsymbol{E}$ (nebo také že splňuje nebo vyhovuje rovnici v oblasti M), jestliže pro všechna $x \in M$ je $\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$ (místo „řešení diferenciální rovnice“ se často říká „integrál diferenciální rovnice“ — ale nebudu tohoto rčení užívat). Cílem studia takové diferenciální rovnice je získat přehled o řešeních této rovnice a o jejich vlastnostech. Ježto řešení $y(x)$ má mít v M derivaci (podle komplexní proměnné), musí $y(x)$ být holomorfní v M. Abychom dostali ucelenou teorii, je vhodné klást nějaké požadavky na $f(x, y)$; budeme předpokládat, že $f(x, y)$ je holomorfní v některé oblasti $N \subset \boldsymbol{E}^2$. Proto jsem také kap. I věnoval počátkům teorie holomorfních funkcí několika proměnných.

§ 1

Rovnice $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$

Buďte dána komplexní čísla x_0, y_0 a funkce $f(x, y)$ holomorfní pro

$$|x - x_0| \leqq r\,, \quad |y - y_0| \leqq R \tag{3}$$

(r, R konečná kladná). Hledáme funkci $y(x)$ jedné komplexní proměnné, která v nějakém okolí bodu x_0 splňuje diferenciální rovnici

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{4}$$

a nabývá v bodě x_0 hodnoty y_0 (neboli splňuje „počáteční podmínku" $y(x_0) = y_0$). Funkce $y(x)$ má podle (4) mít derivaci, tedy má být holomorfní v jistém okolí bodu x_0 (viz (I) na začátku kap. I, § 3). Funkci f lze v (3) rozvinout v absolutně konvergentní řadu

$$f(x, y) = \sum_{i,j \geqq 0} a_{ij}(x - x_0)^i (y - y_0)^j \tag{5}$$

a hledáme řadu

$$y(x) = y_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m(x - x_0)^m\,, \tag{6}$$

absolutně konvergentní v nějakém okolí $|x - x_0| < \sigma$ a splňující v tomto okolí rovnici (4).[1]) To však zřejmě znamená totéž jako nalézt řadu $\eta(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \xi^m$, která v množině $|\xi| < \sigma$ konverguje a splňuje rovnici

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \sum_{i,j \geqq 0} a_{ij} \xi^i \eta^j = f(\xi + x_0, \eta + y_0)\,;$$

stačí totiž položit $y(x) = y_0 + \eta(x - x_0)$. Počáteční podmínka $y(x_0) = y_0$ přejde v podmínku $\eta(0) = 0$. Tuto triviální úpravu („posunutí" o konstantní vektor $[-x_0, -y_0]$) nebudu už v příštím paragrafu vykládat.

Budeme tedy od počátku předpokládat, že $x_0 = y_0 = 0$. Tedy

$$f(x, y) = \sum_{i,j \geqq 0} a_{ij} x^i y^j \tag{7}$$

[1]) Slovo „absolutně" zde ovšem lze vynechat: jestliže mocninná řada o jedné proměnné je v nějaké otevřené množině konvergentní, je v ní absolutně konvergentní, neboť neabsolutní konvergence se může vyskytnout jen v bodech konvergenční kružnice.

je holomorfní v oboru

(8) $$|x| \leqq r, \quad |y| \leqq R.$$

Hledáme řadu

(9) $$y(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m,$$

která v jistém okolí V počátku konverguje a splňuje tam rovnici (4). Jde nám o to, dokázat, že taková řada existuje, a to jediná (podobně jako u diferenciálních rovnic v reálném oboru). Zároveň nás bude zajímat, jak velké lze vzít okolí V. Podotkněme, že f je omezená v (8). Existuje tedy M $(0 < M < +\infty)$ tak, že

(10) $$|f(x, y)| \leqq M \quad \text{v oboru (8)}.$$

Vezměme jakoukoliv řadu tvaru (9), konvergentní v okolí W počátku. Potom předně pro $x \in W$ je

(11) $$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^{m-1}.$$

Za druhé: řada (9) nemá prostý člen, a proto podle pozn. 1 k větě 7 existuje okolí počátku $V \subset W$ tak, že pro každé $x \in V$ je

(12) $$f(x, y(x)) = \sum_{i,j \geqq 0} a_{ij} x^i \Big(\sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m \Big)^j$$

absolutně konvergentní řada a její součet se dostane jako součet mocninné řady $\sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$, kterou dostaneme úpravou vylíčenou ve větě 7 (budeme krátce říkat, že součet řady v (12) dostaneme „formální úpravou řady (12) v mocninnou řadu“).

Jestliže tedy (9) konverguje v okolí počátku, potom bude řada (9) řešením rovnice (4) v jistém (popřípadě menším) okolí počátku tehdy a jen tehdy, jestliže koeficient mc_m řady (11) se pro každé $m \geqq 1$ rovná koeficientu řady (12), formálně upravené v mocninnou řadu, při x^{m-1}. Tato rovnost koeficientů znamená zřejmě totéž jako splnění rovnic

$$c_1 = a_{00}, \quad 2c_2 = a_{10} + a_{01}c_1, \quad 3c_3 = a_{20} + a_{11}c_1 + a_{01}c_2 + a_{02}c_1^2$$

atd. Vcelku vypadá tento systém rovnic zřejmě takto:

(13) $$c_1 = a_{00},$$

(14) $$mc_m = P_m(\ldots, a_{ij}, \ldots, c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}) \quad \text{pro} \quad m > 1,$$

kde P_m je jistý polynom proměnných $c_1, \ldots, c_{m-1}$ a některých a_{ij} (zřejmě v něm mohou vystupovat jen taková a_{ij}, pro něž $i + j < m$). Koeficienty polynomu P_m jsou zřejmě celá nezáporná čísla (to je důležité!). Je vidět, že (13) určuje c_1 a (14) určuje c_m pomocí $c_1, \ldots, c_{m-1}$. Tedy existuje právě jedna řada (9), která vyhovuje rovnicím (13), (14). V dalším bude znamenat řada (9) stále tuto řadu. Jde ještě o konvergenci této řady. Ale napřed poznamenejme:

(A) *Nechť V je okolí počátku s těmito vlastnostmi:*

α) *Řada (9) konverguje ve V.*

β) *Pro každé $x \in V$ je $f(x, y(x))$ rovno součtu mocninné řady, kterou dostaneme „formální úpravou" řady (12). Potom řada (9) splňuje rovnici (4) v celém okolí V.*

To je zřejmé z předcházející úvahy. Vyšetřujme tedy konvergenci řady (9); ta závisí zřejmě na koeficientech a_{ij} v (7). Zdálo by se, že k vyšetření konvergence řady (9) bude nutné podrobné studium polynomů P_m, abychom pomocí (14) mohli odhadnout c_m. Ale pomocí znamenité ideje, pocházející od Cauchyho, můžeme tuto obtíž obejít. Idea spočívá v užití dominantních řad. Budiž

$$\sum_{i,j \geqq 0} A_{ij} x^i y^j \tag{15}$$

řada dominantní k (7), tj.

$$A_{ij} \geqq |a_{ij}|, \tag{16}$$

která absolutně konverguje v oboru

$$|x| < r, \quad |y| < R \tag{17}$$

(tentokráte otevřeném). Vezměme diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = \sum_{i,j \geqq 0} A_{ij} x^i Y^j, \tag{18}$$

kterou budeme teď vyšetřovat jako diferenciální rovnici v reálném oboru. Budeme hledat řadu

$$Y(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m x^m \quad (\text{tedy } Y(0) = 0), \tag{19}$$

která v nějakém intervalu $0 < x < \Delta$ (přičemž $0 < \Delta < r$) konverguje (takže ovšem konverguje i pro všechna komplexní x kruhu $|x| < \Delta$) a splňuje pro $0 < x < \Delta$ rovnici (18).

Vezměme tedy nějakou řadu (19) konvergentní v okolí počátku. V tomto okolí je pak $\frac{dY(x)}{dx} = \sum_{m=1}^{\infty} mC_m x^{m-1}$ a v jistém (popříp. menším) okolí počátku lze hodnotu

$$\sum_{i,j \geqq 0} A_{ij} x^i (Y(x))^j = \sum_{i,j \geqq 0} A_{ij} x^i \Big(\sum_{m=1}^{\infty} C_m x^m\Big)^j \tag{20}$$

vypočítat „formální úpravou" řady v (20) v mocninnou řadu. K tomu, aby $Y(x)$ vyhovovalo rovnici (18) v nějakém intervalu $0 < x < \delta$, je podle příkladu k větě 5 nutné a stačí, aby mC_m se rovnalo koeficientu při x^{m-1} ve „formálně upravené" řadě (20). To tedy znamená totéž jako rovnice

$$C_1 \doteq A_{00}\,, \tag{13a}$$

$$C_m = P_m(\ldots, A_{ij}, \ldots, C_1, C_2, \ldots, C_{m-1}) \quad \text{pro} \quad m > 1\,. \tag{14a}$$

Zde je P_m týž polynom jako v (14), pouze hodnoty proměnných, dosazených do P_m, jsou nyní A_{ij}, C_k místo a_{ij}, c_k. Srovnáním s rovnicemi (13), (14) (viz též (16)) dostáváme předně $C_1 \geqq |c_1|$; za druhé, je-li již dokázáno, že $C_1 \geqq |c_1|, \ldots, C_{m-1} \geqq$ $\geqq |c_{m-1}|$, plyne z (14), (14a) $C_m \geqq |c_m|$, ježto P_m má nezáporné koeficienty.

Tedy řada (19), jednoznačně určená rovnicemi (13a), (14a), je dominantní k řadě (9). Zatím ovšem nevíme, zda je konvergentní v nějakém intervalu $(0, \delta)$. Vyšetříme nyní: Co můžeme říci o řešení rovnice (4), jestliže najdeme nějaké vhodné řešení rovnice (18)? Odpověď je tato:

(B) *Nechť existuje číslo Δ $(0 < \Delta < r)$ a reálná funkce $Y(x)$, definovaná v $(0, \Delta)$, s těmito vlastnostmi:*

1) *$Y(x)$ splňuje rovnici (18) pro $0 < x < \Delta$.*

2) *$Y(x)$ je v $(0, \Delta)$ dáno konvergentní řadou tvaru (19) (takže C_m jsou nutně čísla nezáporná, daná rovnicemi (13a), (14a) a dále je $\lim_{x \to 0+} Y(x) = 0$, $Y(x) \geqq 0$ pro $0 < x < \Delta$).*

3) *$Y(x) < R$ pro $0 < x < \Delta$.*

Tvrdím: Potom řada (9) je konvergentní pro všechna komplexní x kruhu $|x| < \Delta$ a splňuje v tomto kruhu rovnici (4).

Důkaz. Mohl bych říci, že důkaz plyne „zřejmě" z věty 8. Ale raději ho provedu. Užijme věty 8 pro $r = 2$, $q = 1$ a pišme x místo u_1. Klaďme

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i_1, i_2 \geqq 0} a_{i_1, i_2} x_1^{i_1} x_2^{i_2}\,, \quad \varphi_1(x) = x = 0 + x^1 + 0 \,.\, x^2 + \ldots\,,$$

$$\varphi_2(x) = y(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m\,.$$

Řada (42) bude teď $\sum_{i_1, i_2 \geqq 0} A_{i_1, i_2} x_1^{i_1} x_2^{i_2}$, řady (43) budou

$$x = 0 + x^1 + 0 \,.\, x^2 + \ldots, \quad Y(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m x^m \,.$$

Zvolme čísla U_1, X_1, X_2 z věty 8 takto:

$$0 < U_1 = X_1 < \Delta \,; \quad X_2 = \sum_{m=1}^{\infty} C_m U_1^m$$

(tedy $X_1 < r$ a $X_2 < R$ podle předpokladu 3) v (B)). Tedy jsou splněny podmínky (44), (45) věty 8, a věta 8 říká, že řada (9) konverguje pro $|x| < U_1$ a že pro každé $|x| < U_1$ je $f(x, y(x))$ rovno součtu mocninné řady, kterou dostaneme „formální úpravou" řady (12). Podle (A) splňuje tedy řada (9) rovnici (4) v oboru $|x| < U_1$, a tedy v celém oboru $|x| < \Delta$, ježto U_1 můžeme volit libovolně blízko číslu Δ.

Zbývá nám poslední úkol: V některém intervalu $0 < x < \Delta$ $(0 < \Delta < r)$ nalézt řešení $Y(x)$ rovnice (18), které by splňovalo podmínky 1), 2), 3) z (B). To nevypadá na první pohled jednodušší než náš původní úkol, máme však rozhodující výhodu v tom, že řadu (15) můžeme volit různými způsoby; zvolíme takový způsob, aby řada (15) byla co nejjednodušší. Víme, že v oboru (8) je $|f(x, y)| \leqq M$ (viz (10)). Podle věty 12 zvolíme $A_{ij} = M r^{-i} R^{-j}$, načež platí (16) a řada $\sum_{i,j \geqq 0} M \left(\frac{x}{r}\right)^i \left(\frac{y}{R}\right)^j$ je vskutku absolutně konvergentní v oboru (17) (geometrické řady). Rovnice (18) má teď tvar

$$(21) \quad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{Y}{R}\right)} \,.$$

Omezíme se na $0 < x < r$ a budeme hledat řešení $Y(x)$ v nějakém intervalu $(0, \Delta)$ $(\Delta < r)$ takové, že $\lim_{x \to 0+} Y(x) = 0$, $0 \leqq Y(x) < R$. Pro $0 < x < r$, $0 \leqq Y < R$ lze rovnici (21) psát ve tvaru

$$\left(1 - \frac{Y}{R}\right) \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = \frac{M}{1 - \frac{x}{r}} \,,$$

a tato rovnice bude splněna, když

$$-\frac{R}{2}\left(1 - \frac{Y(x)}{R}\right)^2 = -rM \lg \left(1 - \frac{x}{r}\right) + \text{konst} \,.$$

Z podmínky $\lim_{x \to 0+} Y(x) = 0$ plyne konst $= -\frac{1}{2} R$, tedy

$$(22) \qquad \left(1 - \frac{Y}{R}\right)^2 = 1 - U\,,$$

kde

$$(23) \qquad U = U(x) = \frac{2rM}{R}\left(-\lg\left(1 - \frac{x}{r}\right)\right) > 0\,.$$

Ježto levá strana v (22) má být kladná, omezíme se na ta x, pro něž $U < 1$, tj.

$$\frac{2rM}{R} \lg\left(1 - \frac{x}{r}\right) > -1\,,$$

neboli

$$(24) \qquad 0 < x < \Delta\,, \quad \Delta = r\left(1 - \exp\left(-\frac{R}{2rM}\right)\right).$$

Je vskutku $0 < \Delta < r$. Ježto má být $Y < R$, plyne z (22) $1 - \frac{Y}{R} = (1 - U)^{1/2}$ (kladná odmocnina),

$$(25) \qquad Y(x) = R(1 - (1 - U(x))^{1/2})\,.$$

To je vskutku řešení rovnice (21) v $(0, \Delta)$ a je $0 < U < 1$, tedy $0 < Y < R$. Jde ještě o podmínku 2) z (B). Binomická řada dává

$$(26) \qquad 1 - (1 - U)^{1/2} = \binom{\frac{1}{2}}{1} U - \binom{\frac{1}{2}}{2} U^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \binom{\frac{1}{2}}{n} U^n + \ldots\,,$$

kde řada konverguje pro $0 < U < 1$ a všechny členy jsou kladné, ježto $\binom{\frac{1}{2}}{n}$ obsahuje po rozepsání $n - 1$ záporných činitelů. Ježto $0 < \frac{x}{r} < 1$, je

$$(27) \qquad U = \frac{2rM}{R} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \left(\frac{x}{r}\right)^q,$$

což je konvergentní řada s kladnými členy. Užijeme věty B z kap. I, § 1. Jestliže do (26) dosadím za U řadu (27) a v každém členu provedu vynásobení, dostanu zobecněnou řadu s kladnými členy, která má stejný součet jako (26), tedy je konvergentní. Mohu na ni opět použít věty B, a to tak, že ji přerovnám v mocninnou řadu v proměnné x, která podle (26), (27) nemá prostý člen. Tedy je $Y(x)$ (viz (25)) vskutku dáno konvergentní řadou tvaru (19). Výsledek, k němuž jsme došli, vyslovme hned pro obecná x_0, y_0:

Věta 15. *Nechť $f(x, y)$ je holomorfní v bodě $[x_0, y_0]$. Potom existuje právě jedna mocninná řada*

$$y(x) = y_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m(x - x_0)^m\,,$$

která v jistém kruhu $|x - x_0| < \Delta$ je konvergentní a dává v něm řešení rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)\,.$$

K tomu jsme dokázali ještě tento kvantitativní dodatek:

Věta 15a. *Nechť v oboru $|x - x_0| \leqq r$, $|y - y_0| \leqq R$ je $f(x, y)$ holomorfní a nechť v tomto oboru je $|f(x, y)| \leqq M$ $(0 < M < +\infty)$. Potom za číslo Δ ve větě 15 smíme vzít číslo*

$$\Delta = r\left(1 - \exp\left(\frac{-R}{2rM}\right)\right).$$

Poznámka 1. Rovnice (21) ukazuje, že nalezená hodnota Δ je obecně nejlepší možná. Dále: Rovnice $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2$ má řešení $y(x) = 0$ (identicky) a dále řešení $y(x) = \frac{1}{c - x}$ s libovolnou komplexní konstantou c. Buďte dána x_0, y_0; hledejme řešení $y(x)$, pro které je $y(x_0) = y_0$. Je-li $y_0 = 0$, je takovým řešením $y(x) = 0$. Je-li $y_0 \neq 0$, je takovým řešením $y(x) = \frac{1}{c - x}$, kde $y_0 = \frac{1}{c - x_0}$, tj. $c = x_0 + \frac{1}{y_0}$. Ježto libovolným počátečním podmínkám vyhovuje některé z řešení 0, $\frac{1}{c - x}$, neexistují další řešení (neboť věta 15 je též větou o jednoznačnosti).[2] Tedy: každé řešení kromě nulového má pól v některém bodě c, a naopak, každé číslo c je pólem některého řešení. Z tvaru naší rovnice, kde $f(x, y) = y^2$ je holomorfní v E^2, není na první pohled existence takových pólů patrná. Říkává se, že řešení této rovnice má **„pohyblivé singularity"** (nebudu toto rčení precizovat jako matematický pojem).

K procvičení Cauchyovy myšlenky použití dominantních řad uveďme následující příklady (proveďte podrobně!).

Příklad 1. Buď $f(x, y)$ holomorfní v bodě $[x_0, y_0] \in E^2$, $f(x_0, y_0) = 0$, $\left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|_{[x_0, y_0]} \neq 0$. Potom existuje okolí $U: |x - x_0| < r$, $|y - y_0| < R$ bodu

---

[2]) Řešení nulové je definováno v E^2; řešení $\frac{1}{c - x}$ je definováno v $E^2 - \{c\}$. Nevšímám si řešení, jež z nich vznikají zúžením definičního oboru.

$[x_0, y_0]$ a funkce $\varphi(x)$ holomorfní v množině $|x - x_0| < r$ tak, že $f(x, y) = 0$ pro $[x, y] \in U$, právě když $y = \varphi(x)$.

Návod. Vztah $f(x, y) = 0$ lze v jistém okolí bodu $[x_0, y_0] = [0, 0]$ přepsat ve tvaru $y = a_{10}x + \sum_{i+j>1} a_{ij}x^i y^j$. Nyní lze odtud pro $y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$ nejprve „formálně" odvodit rekurentní vztahy pro určení čísel $c_1, c_2, \ldots$ Konvergenci příslušné řady $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$ v jistém okolí počátku pak dokážeme vyšetřováním příslušné „dominantní" rovnice. Zbytek tvrzení dokážeme jednoduchou aplikací Rouchéovy věty (Černý, věta 196).

Příklad 2. Vyslovte a dokažte zobecnění předchozího příkladu pro funkci k komplexních proměnných.

Příklad 3. Předpoklad

$$\left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|_{[x_0, y_0]} \neq 0$$

v příkladech nahraďme předpoklady

$$\left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|_{[x_0, y_0]} = \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{[x_0, y_0]} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \neq 0\,.$$

Jak lze popsat v tomto případě množinu všech bodů $[x, y]$ ležících v dostatečně malém okolí bodu $[x_0, y_0]$, pro něž je $f(x, y) = 0$?

§ 2

Systémy rovnic. Závislost řešení na parametrech a počátečních podmínkách

Máme-li nějaký systém diferenciálních rovnic „rozřešený podle nejvyšších derivací", např. (čárky značí derivace)

$$y'' = f(x, y, y', z, z', z'')\,, \quad z''' = g(x, y, y', z, z', z'')\,, \tag{28}$$

můžeme jej přidáním nových „neznámých funkcí" (zde y_1, z_1, z_2) převést na systém, v němž se vyskytují jen derivace 1. řádu:

$$y' = y_1\,, \quad z' = z_1\,, \quad z_1' = z_2\,, \quad y_1' = f(x, y, y_1, z, z_1, z_2)\,,$$
$$z_2' = g(x, y, y_1, z, z_1, z_2)\,.$$

Proto se omezíme na systémy rovnic tvaru

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{29}$$

Řešení systému (29) v oblasti $M \subset E$ je ovšem soustava n funkcí $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, která splňuje rovnice (29) v oblasti M. Je nutné, aby čtenář dovedl výsledky, které odvodíme pro systém (29), převést na systémy typu (28), zvláště pak na rovnici n-tého řádu

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\,,$$

které odpovídá systém

$$y' = y_1\,, \quad y_1' = y_2, \ldots, y_{n-2}' = y_{n-1}\,, \quad y_{n-1}' = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})\,.$$

Naším prvním cílem bude zobecnění věty 15:

Věta 16. *Funkce* $f_k(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(k = 1, \ldots, n)$ *buďte holomorfní v bodě* $[x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}]$. *Potom existuje právě jeden systém n mocninných řad*

$$y_k(x) = y_{k0} + \sum_{i=1}^{\infty} c_i^{(k)}(x - x_0)^i \quad (k = 1, \ldots, n)\,, \tag{30}$$

které v jistém kruhu $|x - x_0| < \Delta$ *jsou absolutně konvergentní a dávají v něm řešení systému rovnic* (29).

Poznámka 1. Prosté členy y_{k0} v (30) znamenají, že naše řešení vyhovuje „počátečním podmínkám“ $y_k(x_0) = y_{k0}$. Při důkazu najdeme (podobně jako ve větě 15a) přípustnou hodnotu pro Δ.

Současně vyřešíme úlohu o něco obecnější: Nechť funkce f_k závisí ještě na nějakých dalších proměnných $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ (říkává se jim „parametry“), takže máme funkce $f_k(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_q)$ a hledáme řešení $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ systému

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_q) \quad (k = 1, \ldots, n)\,, \tag{31}$$

které vyhovuje předepsaným počátečním podmínkám

$$y_1(x_0) = y_{10}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}\,. \tag{32}$$

Pro různé systémy čísel $[\lambda_1, \ldots, \lambda_q]$ dostáváme obecně různé systémy rovnic (31) a tedy obecně různá řešení $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ (při pevných počátečních podmínkách (32)), takže tato řešení závisí vlastně na $q + 1$ proměnných: $y_k(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_q)$. Nás pak zajímá, za jakých předpokladů o funkcích f_k je možno tvrdit, že tyto funkce y_k jsou holomorfní funkce $q + 1$ proměnných. Výsledek bude dán touto větou:

Věta 17. *Buďte dána čísla*

$$x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_q \quad (n \geqq 1,\ q \geqq 0)\,.$$

Funkce

$$f_k(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_q) \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{33}$$

buďte holomofrní v bodě $[x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_q]$. *Potom existuje právě jeden systém n mocninných řad*[3])

$$y_k(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_q) = \tag{34}$$
$$= \sum_{i, l_1, \ldots, l_q \geqq 0} c^{(k)}(i, l_1, \ldots, l_q)\,(x - x_0)^i\,(\lambda_1 - \Lambda_1)^{l_1} \ldots (\lambda_q - \Lambda_q)^{l_q}$$
$$(k = 1, \ldots, n)\,,$$

které jsou absolutně konvergentní v jistém okolí V bodu $[x_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_q]$, *splňují ve V rovnice* (31) *a „počáteční podmínky"*

$$y_k(x_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q) = y_{k0} \quad (k = 1, \ldots, n)\,. \tag{35}$$

Tedy vskutku funkce (34) je ve V holomorfní funkcí $q + 1$ proměnných. V (31) bychom tedy vlastně měli psát $\dfrac{\partial y_k}{\partial x}$, ale budeme si rozumět. Všimněte si, že případ $q = 0$ (žádný parametr) věty 17 dává větu 16. Stačí tedy, dokážeme-li větu 17. Při důkazu odvodíme také příslušný kvantitativní dodatek (jak velké smíme vzít okolí V). Zavedeme-li nové proměnné $\xi = x - x_0$, $\mu_l = \lambda_l - \Lambda_l$ a nové neznámé funkce $\eta_k = y_k - y_{k0}$ vidíme, že můžeme (obdobně jako v důkazu věty 15) předpokládat v celém důkazu

$$x_0 = y_{10} = \ldots = y_{n0} = \Lambda_1 = \ldots = \Lambda_q = 0\,.$$

Důkaz věty 17. Nechť funkce (33) jsou holomorfní v oboru

$$|x| \leqq r\,,\quad |y_k| \leqq R \quad (k = 1, \ldots, n)\,,\quad |\lambda_1| \leqq \sigma_1, \ldots, |\lambda_q| \leqq \sigma_q \tag{36}$$

(proč se nespokojíme hodnotou $\sigma = \min(\sigma_1, \ldots, \sigma_q)$, uvidíme v důkazu věty 18). Nechť v oboru (36) je

$$|f_k(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_q)| \leqq M \quad (k = 1, \ldots, n;\ 0 < M < +\infty)\,. \tag{37}$$

Tedy v oboru (36) máme absolutně konvergentní řady

$$f_k(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_q) = \tag{38}$$
$$= \sum_{\substack{i, j_1, \ldots, j_n, \\ l_1, \ldots, l_q \geqq 0}} a^{(k)}(i, j_1, \ldots, j_n, l_1, \ldots, l_q)\, x^i y_1^{j_1} \ldots y_n^{j_n} \lambda_1^{l_1} \ldots \lambda_q^{l_q}\,,$$

---

[3]) Při složitých indexech budu místo $C_{\alpha,\beta,\gamma}$ psát $C(\alpha, \beta, \gamma)$ apod.

$$(39)\qquad |a^{(k)}(i, j_1, \ldots, j_n, l_1, \ldots, l_q)| \leqq \frac{M}{r^i R^{j_1+\ldots+j_n} \sigma_1^{l_1} \ldots \sigma_q^{l_q}}.$$

Hledané řady (34) mají tvar

$$\sum_{i, l_1, \ldots, l_q \geqq 0} c^{(k)}(i, l_1, \ldots, l_q)\, x^i \lambda_1^{l_1} \ldots \lambda_q^{l_q}$$

a pro $x = 0$ mají dávat hodnotu 0, tj.

$$\sum_{l_1, \ldots, l_q \geqq 0} c^{(k)}(0, l_1, \ldots, l_q)\, \lambda_1^{l_1} \ldots \lambda_q^{l_q} = 0$$

pro všechna $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ z jistého okolí počátku; tedy nutně (podle důsledku věty 4) $c^{(k)}(0, l_1, \ldots, l_q) = 0$ pro všechna $l_1, \ldots, l_q$, takže hledané řady musí mít tvar

$$(40)\qquad y_k(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_q) =$$
$$= \sum_{\substack{i \geqq 1,\\ l_1, \ldots, l_q \geqq 0}} c^{(k)}(i, l_1, \ldots, l_q)\, x^i \lambda_1^{l_1} \ldots \lambda_q^{l_q} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Jestliže takové řady jsou absolutně konvergentní v jistém okolí počátku, je předně v tomto okolí

$$\frac{\partial y_k}{\partial x} = \sum_{\substack{i \geqq 1,\\ l_1, \ldots, l_q \geqq 0}} i c^{(k)}(i, l_1, \ldots, l_q)\, x^{i-1} \lambda_1^{l_1} \ldots \lambda_q^{l_q};$$

za druhé řady (40) nemají prostý člen, a proto (poznámka 1 k větě 7) lze v jistém (popříp. menším) okolí počátku provést dosazení funkcí (40) za y_k do funkcí $f_1, \ldots, f_n$ tak, že provedeme „formální úpravu" výsledku v mocninnou řadu (v proměnných $x, \lambda_1, \ldots, \lambda_q$).

Jestliže tedy nějaké řady (40) jsou absolutně konvergentní v jistém okolí počátku, potom dávají v jistém okolí počátku řešení rovnic (31) tehdy a jen tehdy, když jsou splněny rovnice udávající rovnost koeficientů v mocninných řadách, stojících na levé a na pravé straně vzorců

$$\frac{\partial y_k}{\partial x} = f_k(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_q) \quad (k = 1, \ldots, n),$$

kde $y_1, \ldots, y_n$ znamená řady (40). Tyto rovnice jsou podobné jako (13), (14) v § 1, jsou pouze poněkud složitější:

$$(41)\qquad c^{(k)}(1, l_1, \ldots, l_q) = a^{(k)}(0, \ldots, 0, l_1, \ldots, l_q) \quad (n + 1 \text{ nul}),$$

$$(42)\qquad i c^{(k)}(i, l_1, \ldots, l_q) =$$
$$= P_{i, l_1, \ldots, l_q}(\ldots, a^{(k)}(i', j'_1, \ldots, j'_n, l'_1, \ldots, l'_q), \ldots, c^{(m)}(i'', l''_1, \ldots, l''_q), \ldots) \quad (i > 1),$$

kde $P_{i,l_1,\dots,l_q}$ je polynom v některých $a^{(k)}(\dots)$ (s týmž indexem k jako vlevo) a v některých $c^{(1)}(\dots), c^{(2)}(\dots), \dots, c^{(n)}(\dots)$. Přitom je zřejmé, že v $P_{i,l_1,\dots,l_q}$ vystupují jen takové

$$a^{(k)}(i', j'_1, \dots, j'_n, l'_1, \dots, l'_q)\,, \quad c^{(m)}(i'', l''_1, \dots, l''_q)\,,$$

kde $i' < i$, $i'' < i$, $j'_1 < i, \dots, j'_n < i$, $l'_1 \leqq l_1, \dots, l'_q \leqq l_q$, $l''_1 \leqq l_1, \dots, l''_q \leqq l_q$. Je tedy vidět, že rovnice (41) jednoznačně určují $c^{(k)}(1, l_1, \dots, l_q)$ a že koeficient $c^{(k)}(i, l_1, \dots, l_q)$ $(i > 1)$ je rovnicí (42) jednoznačně určen pomocí koeficientů $c^{(m)}(i'', l''_1, \dots, l''_q)$, ve kterých $i'' < i$, $l''_1 \leqq l_1, \dots, l''_q \leqq l_q$. Tedy systém rovnic (41), (42) má právě jedno řešení. Poznamenejme ještě, že koeficienty polynomu $P_{i,l_1,\dots,l_q}$ jsou celá nezáporná čísla.

Další postup je do té míry podobný důkazu věty 15, že jej stačí provést stručně. Přitom v zájmu stručnosti pozměním někde pořadí úvah.

Vedle rovnic (31) budeme vyšetřovat rovnice

$$\text{(43)} \qquad \frac{\mathrm{d}Y_k}{\mathrm{d}x} = \sum_{\substack{i,j_1,\dots,j_n,\\ l_1,\dots,l_q \geqq 0}} A^{(k)}(i, j_1, \dots, j_n, l_1, \dots, l_q)\, x^i Y_1^{j_1} \dots Y_n^{j_n} \lambda_1^{l_1} \dots \lambda_q^{l_q} \qquad (k = 1, \dots, n)\,,$$

kde položíme (viz (39))

$$\text{(44)} \qquad A^{(k)}(i, j_1, \dots, j_n, l_1, \dots, l_q) = \frac{M}{r^i R^{j_1 + \dots + j_n} \sigma_1^{l_1} \dots \sigma_q^{l_q}} \geqq$$

$$\geqq \left|a^{(k)}(i, j_1, \dots, j_n, l_1, \dots, l_q)\right|\,,$$

takže v oboru

$$\text{(45)} \qquad |x| < r\,, \quad |Y_k| < R\,, \quad |\lambda_m| < \sigma_m \quad (k = 1, \dots, n,\ m = 1, \dots, q)$$

jde o rovnice

$$\text{(46)} \qquad \frac{\mathrm{d}Y_1}{\mathrm{d}x} = \dots = \frac{\mathrm{d}Y_n}{\mathrm{d}x} = M \frac{1}{1 - \dfrac{x}{r}} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \dfrac{Y_k}{R}} \prod_{m=1}^{q} \frac{1}{1 - \dfrac{\lambda_m}{\sigma_m}}\,.$$

(Pro $q = 0$ znamená prázdný součin $\prod_{m=1}^{q} \dots$ jedničku.)

Budeme hledat řešení těchto rovnic jakožto rovnic v reálném oboru v jistém intervalu $0 < x < \Delta$ $(0 < \Delta < r)$ a pro „dosti malá“ nezáporná $\lambda_1, \dots, \lambda_q$, přičemž budeme žádat, aby $\lim_{x \to 0+} Y_k(x, \lambda_1, \dots, \lambda_q) = 0$. Pro takové řešení je nutně $Y_1 = \dots = Y_n$, ježto tyto funkce mají podle (46) stejnou derivaci a pro $x \to 0+$ stejnou limitu. Tedy jde o rovnici

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = M_1 \left(1 - \frac{x}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{Y}{R}\right)^{-n}, \tag{47}$$

kde

$$M_1 = M \prod_{m=1}^{q} \frac{1}{1 - \dfrac{\lambda_m}{\sigma_m}}. \tag{48}$$

Aby číslo M_1 (které je funkcí $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$) zůstávalo omezené, omezíme λ_m na intervaly $0 \leqq \lambda_m < \frac{1}{2} \sigma_m$, takže

$$0 < M_1 \leqq 2^q M. \tag{49}$$

Rovnici (47) s podmínkou $\lim_{x \to 0+} Y(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_q) = 0$ řešíme jako rovnici (21) v § 1 (předpokládajíce zatím $0 < x < r$):

$$-\frac{R}{n+1} \left(1 - \frac{Y}{R}\right)^{n+1} = -rM_1 \lg \left(1 - \frac{x}{r}\right) + \text{konst};$$

limitní přechod $x \to 0_+$ dává konst $= -\dfrac{R}{n+1}$, tedy

$$\left(1 - \frac{Y}{R}\right)^{n+1} = 1 - U, \tag{50}$$

$$U = \frac{M_1(n+1)\,r}{R} \left(-\lg \left(1 - \frac{x}{r}\right)\right) > 0. \tag{51}$$

Aby bylo $1 - U > 0$, stačí (viz (49)), když

$$2^q \frac{M(n+1)\,r}{R} \lg \left(1 - \frac{x}{r}\right) > -1,$$

tj.

$$0 < x < \Delta, \tag{52}$$

kde

$$\Delta = r\left(1 - \exp\left(\frac{-R}{2^q M(n+1)\,r}\right)\right), \tag{53}$$

tedy $0 < \Delta < r$. V intervalu $0 < x < \Delta$ nám dává (50) řešení

$$Y_1 = \ldots = Y_n = Y = Y(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_q) = R(1 - (1 - U)^{1/(n+1)}. \tag{54}$$

Dokážeme, že tato funkce Y je v oboru

$$0 < x < \Delta\,, \quad 0 \leqq \lambda_m < \tfrac{1}{2}\sigma_m \quad (m = 1, 2, \ldots, q) \tag{55}$$

dána součtem absolutně konvergentní řady tvaru

$$Y(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_q) = \sum_{\substack{i \geqq 1, \\ l_1, \ldots, l_q \geqq 0}} C(i, l_1, \ldots, l_q)\, x^i \lambda_1^{l_1} \ldots \lambda_q^{l_q} \tag{56}$$

(scházejí členy s $i = 0$) s nezápornými koeficienty. Je totiž předně

$$Y = R \frac{1}{n+1} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} U - \begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} \\ 2 \end{pmatrix} U^2 + \begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} \\ 3 \end{pmatrix} U^3 - \ldots \right),$$

kde prostý člen schází a ostatní koeficienty jsou kladné. Zde je

$$U = \frac{(n+1)\, r}{R} M_1 \,.\left(-\lg \left(1 - \frac{x}{r} \right) \right),$$

$$-\lg \left(1 - \frac{x}{r} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \left(\frac{x}{r} \right)^i \text{(schází prostý člen, ostatní koeficienty jsou kladné)},$$

$$M_1 = M \prod_{m=1}^{q} \left(1 + \frac{\lambda_m}{\sigma_m} + \left(\frac{\lambda_m}{\sigma_m} \right)^2 + \ldots \right)$$

(mocninné řady s kladnými koeficienty).

Tím jsme našli řešení $Y_1, \ldots, Y_n$ systému (46) (totiž $Y_1 = \ldots = Y_n = Y$) v oboru (55), které v něm vyhovuje podmínkám $0 < Y_k < R$ a je dáno řadami

$$Y_k(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_q) = \sum_{\substack{i \geqq 1, \\ l_1, \ldots, l_q \geqq 0}} C^{(k)}(i, l_1, \ldots, l_q)\, x^i \lambda_1^{l_1} \ldots \lambda_q^{l_q} \tag{57}$$

($C^{(k)}(\ldots)$ je $C(\ldots)$ z (56)). Stejnou úvahou jako v § 1 plyne nyní: Mezi koeficienty $A^{(k)}(\ldots)$ a $C^{(m)}(\ldots)$ (viz (43) a (57)) platí tytéž rovnice (41), (42) jako mezi $a^{(k)}(\ldots)$ a $c^{(m)}(\ldots)$ (viz (38) a (40)). Z nerovnosti (44) plyne pak jako v § 1

$$C^{(k)}(i, l_1, \ldots, l_q) \geqq |c^{(k)}(i, l_1, \ldots, l_q)|\,.$$

Odtud pak (pomocí úvah analogických k (A), (B) z § 1) ihned plyne, že řady (40) jsou v oboru komplexních čísel $x, \lambda_1, \ldots, \lambda_q$, vyhovujících nerovnostem $|x| < \Delta$,

$|\lambda_m| < \frac{1}{2}\sigma_m$, absolutně konvergentní a splňují v tomto oboru rovnice (31). Tím je dokázána věta 17 (a tedy – pro $q = 0$ – též věta 16). Současně jsme dokázali tento kvantitativní dodatek:

Věta 17a. *Buďte dána čísla* $x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_q$ $(n \geqq 1,\ q \geqq 0)$. *Nechť v oboru*

$$|x - x_0| \leqq r\,, \quad |y_k - y_{k0}| \leqq R \quad (k = 1, \ldots, n)\,, \quad |\lambda_m - \Lambda_m| \leqq \sigma_m \quad (m = 1, \ldots, q)$$

jsou $f_k(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_q)$ *holomorfní a*

$$|f_k(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_q| \leqq M$$

$$(k = 1, \ldots, n;\ 0 < M < +\infty)\,.$$

Potom za okolí V z věty 17 *lze vzít obor*

$$|x - x_0| < \Delta\,, \quad |\lambda_m - \Lambda_m| < \frac{1}{2}\sigma_m \quad (m = 1, \ldots, q)\,,$$

kde

$$\Delta = r\left(1 - \exp\frac{-R}{2^q M(n + 1)\, r}\right)\right)\,.$$

Pro $q = 0$ je to kvantitativní dodatek k základní existenční větě 16.

Dokážeme nyní nejobecnější z existenčních vět, které zde odvodíme, totiž větu o závislosti řešení systému diferenciálních rovnic na parametrech a počátečních podmínkách. Mysleme si např. systém dvou rovnic s jedním parametrem

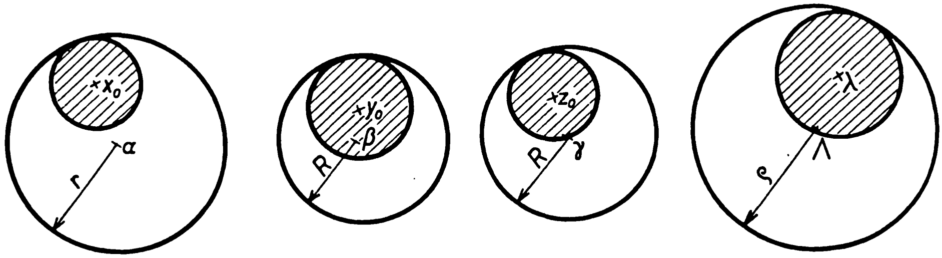
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y, z, \lambda)\,, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = g(x, y, z, \lambda)\,,$$

kde f, g jsou holomorfní v jistém okolí bodu $[\alpha, \beta, \gamma, \Lambda]$:

$$|x - \alpha| < r\,, \quad |y - \beta| < R\,, \quad |z - \gamma| < R\,, \quad |\lambda - \Lambda| < \varrho$$

(viz obr. 2). Zvolíme-li určité λ ($|\lambda - \Lambda| < \varrho$), dostávám funkce $f(x, y, z, \lambda)$, $g(x, y, z, \lambda)$ tří proměnných x, y, z, holomorfní pro $|x - \alpha| < r$, $|y - \beta| < R$, $|z - \gamma| < R$. Zvolím-li nyní x_0, y_0, z_0 tak, že $|x_0 - \alpha| < r$, $|y_0 - \beta| < R$, $|z_0 - \gamma| < R$, potom f, g jsou holomorfní funkce x, y, z v kartézském součinu šrafovaných kruhů na obr. 2. Tedy podle věty 16 existuje v jistém okolí bodu x_0 právě jedno řešení $y(x)$, $z(x)$, které splňuje počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$. Toto řešení závisí ovšem na x_0, y_0, z_0 a také na zvolené hodnotě parametru λ; pišme tedy obšírněji $y(x, x_0,$

$y_0, z_0, \lambda)$, $z(x, x_0, y_0, z_0, \lambda)$. Okolnost, že tyto funkce vyhovují počátečním podmínkám, lze napsat takto: $y(x_0, x_0, y_0, z_0, \lambda) = y_0$, $z(x_0, x_0, y_0, z_0, \lambda) = z_0$. Nám půjde o to, dokázat, že $y(x, x_0, y_0, z_0, \lambda)$, $z(x, x_0, y_0, z_0, \lambda)$ jsou holomorfní funkce pěti proměnných, pokud x a x_0 jsou dostatečně blízko bodu α, a y_0, z_0, λ jsou dostatečně blízko bodům β, γ, Λ.



Obr. 2.

Vyslovme obecnou větu:

Věta 18. *Buďte* $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_p$ $(n \geqq 1,\ p \geqq 0)$ *daná komplexní čísla. Funkce*

$$f_k(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{58}$$

buďte holomorfní v bodě

$$[\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_p]\,. \tag{59}$$

Potom v jistém okolí

$$|x - \alpha| < \delta\,, \quad |x_0 - \alpha| < \delta\,, \quad |y_{k0} - \beta_k| < \delta_1\,, \quad |\lambda_l - \Lambda_l| < \delta_2 \tag{60}$$
$$(k = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, p)$$

bodu (59) *existuje* n *holomorfních funkcí*

$$y_k(x, x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{61}$$

tak, že

$$y_k(x_0, x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) = y_{k0} \tag{62}$$ [4])

a že v oboru (60) *funkce* (61) *jakožto funkce* x *splňují systém diferenciálních rovnic*

$$\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x} = f_k(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) \quad (k = 1, \ldots, n)\,. \tag{63}$$

[4]) To jsou právě „počáteční podmínky“.

Během důkazu podáme také kvantitativní odhad okolí (60).

Důkaz. Posunutím o konstantní vektor lze dosáhnout toho, že $\alpha = \beta_1 = \dots$ $\dots = \beta_n = \Lambda_1 = \dots = \Lambda_p = 0$. Nechť tedy funkce (58) jsou holomorfní v oboru

$$(64) \qquad |x| \leqq r\,, \quad |y_j| \leqq R\ (j = 1, \dots, n)\,, \quad |\lambda_l| \leqq \varrho\ (l = 1, \dots, p)\,;$$

existuje tedy M $(0 < M < +\infty)$ tak, že v oboru (64) je

$$(65) \qquad |f_k(x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_p)| \leqq M \quad (k = 1, \dots, n)\,.$$

Dále existují čísla $r' > r$, $R' > R$, $\varrho' > \varrho$ tak, že funkce (58) jsou holomorfní v oblasti

$$(66) \qquad |x_l| < r'\,, \quad |y_j| < R'\ (j = 1, \dots, n)\,, \quad |\lambda_k| < \varrho'\ (l = 1, \dots, p)\,.$$

Důkaz bude spočívat na tom, že z „proměnných" počátečních podmínek, tj. z čísel $x_0, y_{10}, \dots, y_{n0}$, udělám nové parametry, a tím úlohu převedu na problém řešený ve větě 17 s „konstantními" – totiž nulovými – počátečními podmínkami. Proveďme to.

V oboru (66) je f_k rovno součtu absolutně konvergentní řady

$$(67) \qquad f_k(x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_p) = \\ = \sum_{\substack{i, j_1, \dots, j_n, \\ l_1, \dots, l_p}} a^{(k)}(i, j_1, \dots, j_n, l_1, \dots, l_p)\, x^i y_1^{j_1} \dots y_n^{j_n} \lambda_n^{l_1} \dots \lambda_p^{l_p}\,.$$

Je-li mimo to

$$(68) \qquad |x - x_0| < \frac{1}{2} r'\,, \quad |x_0| < \frac{1}{2} r'\,, \quad |y_m - y_{m0}| < \frac{1}{2} R'\,, \quad |y_{m0}| < \frac{1}{2} R'\,,$$

rozepíšeme

$$(69) \qquad \begin{cases} x^i = ((x - x_0) + x_0)^i = \sum\limits_{a=0}^{i} \dbinom{i}{a} (x - x_0)^a\, x_0^{i-a}\,, \\ y_m^j = ((y_m - y_{m0}) + y_{m0})^j = \sum\limits_{a=0}^{j} \dbinom{j}{a} (y_m - y_{m0})^a\, y_{m0}^{j-a}\,; \end{cases}$$

dosadíme za $x^i, y_1^{j_1}, \dots, y_n^{j_n}$ rozvoje (69) do řady (67) a dostaneme absolutně konvergentní řadu

$$(70) \qquad f_k(x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_p) = \\ = \sum a^{(k)} \begin{pmatrix} i\, j_1 \dots j_n & l_1 \dots l_p \\ I J_1 \dots J_n & \end{pmatrix} (x - x_0)^i\, (y_1 - y_{10})^{j_1} \dots \\ \dots (y_n - y_{n0})^{j_n}\, x_0^I \cdot y_{10}^{J_1} \dots y_{n0}^{J_n} \lambda_1^{l_1} \dots \lambda_p^{l_p}\,,$$

kde se sčítá přes celá nezáporná $i, j_1, \ldots, j_n, I, J_1, \ldots, J_n, l_1, \ldots, l_p$. Položme

$$g_k(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) = \tag{71}$$

$$= \sum a^{(k)} \begin{pmatrix} i\, j_1 \ldots j_n & l_1 \ldots l_p \\ I J_1 \ldots J_n & \end{pmatrix} \xi^i \eta_1^{j_1} \ldots \eta_n^{j_n} x_0^J y_{10}^{J_1} \ldots y_{n0}^{J_n} \lambda_1^{l_1} \ldots \lambda_p^{l_p} =$$

$$= f_k(\xi + x_0, \eta_1 + y_{10}, \ldots, \eta_n + y_{n0}, \lambda_1, \ldots, \lambda_p).$$

Řada v (71) je absolutně konvergentní v oboru

$$|\xi| < \frac{1}{2} r', \quad |\eta_m| < \frac{1}{2} R', \quad |x_0| < \frac{1}{2} r', \tag{72}$$

$$|y_{m0}| < \frac{1}{2} R', \quad |\lambda_m| < \varrho'$$

a v oboru

$$|\xi| \leqq \frac{1}{2} r, \quad |\eta_m| \leqq \frac{1}{2} R, \quad |x_0| \leqq \frac{1}{2} r, \tag{73}$$

$$|y_{m0}| \leqq \frac{1}{2} R, \quad |\lambda_m| \leqq \varrho$$

je $|g_k| \leqq M$.

Hledejme nyní řešení

$$\eta_k(\xi, x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{74}$$

systému rovnic

$$\frac{\partial \eta_k}{\partial \xi} = g_k(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{75}$$

s počáteční podmínkou

$$\eta_k(0, x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{76}$$

Zde je o systém n rovnic s $n + p + 1$ parametry. Podle věty 17a existují takové funkce (74) a jsou holomorfní v oboru

$$|\xi| < \Delta, \quad |x_0| < \frac{1}{4} r, \quad |y_{m0}| < \frac{1}{4} R, \quad |\lambda_m| < \frac{1}{2} \varrho, \tag{77}$$

kde $\left(\text{místo } r, R \text{ z věty 17a nutno psát } \frac{1}{2} r, \frac{1}{2} R\right)$

$$0 < \Delta = \frac{1}{2} r \left(1 - \exp\left(\frac{-R}{2^{n+p+1} M(n+1) r}\right)\right) < \frac{1}{2} r. \tag{78}$$

V tomto oboru máme tedy pro η_k absolutně konvergentní řady

$$(79) \qquad \eta_k(\xi, x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, a_1, \ldots, \lambda_p) =$$

$$= \sum_{i,I,J_1,\ldots,J_n,l_1,\ldots,l_p \geqq 0} c^{(k)}(i, I, J_1, \ldots, J_n, l_1, \ldots, l_p)\, \xi^i x_0^I y_{10}^{J_1} \ldots y_{n0}^{J_n} \lambda_1^{l_1} \ldots \lambda_p^{l_p} .$$

Položme teď

$$(80) \qquad y_k(x, x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) =$$

$$= y_{k0} + \eta_k(x - x_0, x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) =$$

$$= y_{k0} + \sum_{i,I,J_1,\ldots,J_n,l_1,\ldots,l_p \geqq 0} c^{(k)}(i, I, \ldots, l_p)\,(x - x_0)^i x_0^I y_{10}^{J_1} \ldots y_{n0}^{J_n} \lambda_1^{l_1} \ldots \lambda_p^{l_p} .$$

Podmínky $|\xi| < \Delta$, $|x_0| < \frac{1}{4} r$ přecházejí v $|x - x_0| < \Delta$, $|x_0| < \frac{1}{4} r$; pro $x = x_0$ dostáváme (viz 76)) $y_k(x_0, x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) = y_{k0}$. Přepíšeme-li rovnice (75) pomocí (80), vidíme, že funkce (80) vyhovují rovnicím

$$\frac{\partial y_k}{\partial x} = \frac{\partial(y_k - y_{k0})}{\partial x} =$$

$$= g_k(x - x_0, y_1 - y_{10}, \ldots, y_n - y_{n0}, x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) =$$

$$= f_k(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) .$$

Tedy funkce (80) jsou vskutku hledané řešení. Ještě je chceme mít vyjádřeny ve tvaru mocninných řad v $x, x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Je-li $|x| < \frac{1}{2}\Delta$, $|x_0| < \frac{1}{2}\Delta$ $\left(\text{tedy také } |x_0| < \frac{1}{4} r\right)$, je $|x| + |x_0| < \Delta$ a v řadě (80) můžeme rozepsat $(x - x_0)^i = \sum_{a=0}^{i} \binom{i}{a} x^a x_0^{i-a} \cdot (-1)^{i-a}$ a řadu přerovnat v absolutně konvergentní mocninnou řadu. Tím je věta dokázána a zároveň máme tento kvantitativní dodatek:

Věta 18a. *Nechť funkce f_k z věty 18 jsou holomorfní v oboru*

$$|x - \alpha| \leqq r, \quad |y_j - \beta_j| \leqq R, \quad |\lambda_m - \Lambda_m| \leqq \varrho \quad (j = 1, \ldots, n;\ m = 1, \ldots, p)$$

a splňují v něm nerovnosti $|f_k| \leqq M$ $(0 < M < +\infty)$.

Potom ve větě 18 je možno volit

$$\delta = \frac{1}{4} r \left(1 - \exp\left(\frac{-R}{2^{n+p+1} M(n + 1) r}\right)\right), \quad \delta_1 = \frac{1}{4} R, \quad \delta_2 = \frac{1}{2} \varrho .$$