Kapitola X

POUŽITÍ VĚTY O PŘÍRŮSTKU FUNKCE: PRŮBĚH FUNKCÍ

V této kapitole se budeme hlavně zabývat otázkou, jaký význam má znamení první a druhé derivace pro průběh funkce (tj. pro průběh „čáry“ $y = f(x)$). Abych nerušil přehled, budu mluvit jen o vlastních derivacích, ač některé věty platí i pro nevlastní derivace (viz o tom cvičení 1 k § 1). Zdůrazňuji ještě jednou, že podle úmluvy v kap. VIII, § 1, poznámka 3 slova „derivace“ a „limita“ značí v dalším výkladu vždy *vlastní* derivaci a vlastní limitu, pokud není nevlastní derivace nebo limita výslovně připuštěna.

§ 1. Funkce monotónní; funkce konvexní a konkávní. Budiž f funkce spojitá v intervalu J, jež má derivaci v každém vnitřním bodě intervalu J. Jsou-li x_1, x_2 dva libovolné různé body intervalu J, je uzavřený interval J_1 o krajních bodech x_1, x_2 částí intervalu J, takže f je spojitá v J_1 a má derivaci v každém vnitřním bodě intervalu J_1. Podle věty 133 existuje tedy číslo ξ, jež je vnitřním bodem intervalu J_1 – a tedy též vnitřním bodem intervalu J – tak, že platí

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1). \tag{1}$$

Odtud plyne

Věta 135. *Budiž f funkce, jež je spojitá v intervalu J a má derivaci v každém vnitřním bodě intervalu J.*[1] *Potom platí:*

1. *Jestliže v každém vnitřním bodě intervalu J je $f'(x) > 0$, je funkce f rostoucí v J.*

2. *Obdobně: jestliže v každém vnitřním bodě intervalu J je $f'(x) \geqq 0$ (popř. $f'(x) < 0$, popř. $f'(x) \leqq 0$, popř. $f'(x) = 0$), je funkce f v intervalu J neklesající (popř. klesající, popř. nerostoucí, popř. konstantní).*[2]

Důkaz. Je-li $x_1 \in J$, $x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, plyne z rovnice (1) v prvním případě $f(x_2) > f(x_1)$, v druhém $f(x_2) \geqq f(x_1)$, v třetím $f(x_2) < f(x_1)$, ve čtvrtém $f(x_2) \leqq f(x_1)$, čímž jsou první čtyři tvrzení dokázána. Zvolím-li konečně libovolný bod $c \in J$, dostávám v pátém případě z (1) $f(x) - f(c) = 0$ pro každý bod x intervalu

[1] Ve *vnitřních* bodech intervalu J plyne ovšem spojitost z existence derivace, viz větu 122.

[2] Shrnul jsem zde čtyři případy, abych se nemusil stále opakovat.

J různý od c; ale pro $x = c$ je rovněž $f(x) - f(c) = 0$. Tedy: pro všechna $x \in J$ je $f(x) = f(c)$, tj. f je konstantní v J.

Věta 136. *Buďte f, g funkce spojité v intervalu J; v každém vnitřním bodě intervalu J budiž $f'(x) = g'(x)$.* (Jde ovšem o *vlastní* derivace.) *Potom je rozdíl $f(x) - g(x)$ konstantní v intervalu J.*

Důkaz. Užijte posledního případu věty 135 na funkci $f(x) - g(x)$.

Věta 135 je velmi názorná, uvědomíte-li si, že derivace je směrnice tečny. K poslednímu případu věty 135 poznamenávám toto: je-li f konstantní v J, je f ovšem spojitá v J a má v každém vnitřním bodě intervalu J derivaci $f'(x) = 0$. Věta 135 ukazuje, že toto tvrzení lze obrátit: je-li f spojitá v J a je-li $f'(x) = 0$ v každém vnitřním bodě intervalu J, je funkce f jistě konstantní v J.

Příklad 1. Druhý případ věty 135 lze doplnit takto: *Budiž f funkce spojitá v intervalu J, jež má derivaci v každém vnitřním bodě intervalu J. Potom je $f(x)$ neklesající v intervalu J tehdy a jen tehdy, je-li $f'(x) \geqq 0$ v každém vnitřním bodě intervalu J.* Důkaz: I. Je-li $f'(x) \geqq 0$ v každém vnitřním bodě intervalu J, je f neklesající v J podle věty 135. II. Není-li uvedená podmínka splněna, existuje číslo x_0, jež je vnitřním bodem intervalu J, tak, že $f'(x_0) < 0$. Podle věty 131 je tedy f klesající v bodě x_0, takže jistě existuje číslo $x \in J$ tak, že je $x > x_0$, ale současně $f(x) < f(x_0)$; tedy není f neklesající v J.

Obdobně pro funkce nerostoucí; pokud se týče funkcí ryze monotónních, viz cvičení 3.

Věta 135 nám říká, jaký je význam znaménka *první* derivace. Odvodíme nyní obdobnou větu pro *druhou* derivaci; napřed však zavedeme některé jednoduché pojmy. Budiž dána přímka p o rovnici

$$y = y_0 + k(x - x_0) \tag{2}$$

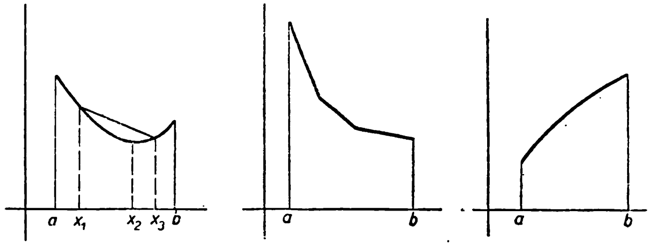
(tedy není rovnoběžná s osou y). Přímka p je právě množina oněch bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice vyhovují *rovnici* (2). Jestliže souřadnice x, y nějakého bodu $P = [x, y]$ splňují *nerovnost* $y > y_0 + k(x - x_0)$, říkáme, že bod P leží *nad* přímkou p; splňují-li nerovnost $y < y_0 + k(x - x_0)$, říkáme, že bod P leží *pod* přímkou p; obojí je velmi názorné.

Zavedeme nyní tyto definice:

Definice 26. *Budiž f funkce, definovaná v intervalu J, jež má tuto vlastnost: jsou-li x_1, x_2, x_3 libovolná tři čísla intervalu J splňující nerovnosti $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $P_2 = [x_2, f(x_2)]$ buďto pod přímkou, spojující body $P_1 = [x_1, f(x_1)]$, $P_3 = [x_3, f(x_3)]$, nebo na ní. Potom říkáme, že funkce f je konvexní v intervalu J. Jestliže v této definici nahradíme slovo „pod" slovem „nad", obdržíme definici funkce konkávní v J.*

Definice je velmi názorná; viz obr. 40, kde první dvě funkce jsou konvexní, třetí konkávní v $\langle a, b\rangle$.

Definice 26a. *Budiž f funkce, definovaná v intervalu J, jež má tuto vlastnost: jsou-li x_1, x_2, x_3 libovolná čísla intervalu J splňující nerovnosti $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $P_2 = [x_2, f(x_2)]$ pod přímkou spojující body $P_1 = [x_1, f(x_1)]$, $P_3 = [x_3, f(x_3)]$. Potom říkáme, že funkce f je ryze konvexní v intervalu J. Jestliže v této definici nahradíme slovo „pod“ slovem „nad“, obdržíme definici funkce ryze konkávní v J.*



Obr. 40.

Každá funkce ryze konvexní v J je ovšem konvexní v J, ale ne naopak; na obr. 40 je první funkce ryze konvexní v $\langle a, b\rangle$, druhá je sice konvexní, ale ne ryze konvexní v $\langle a, b\rangle$; třetí je ryze konkávní v $\langle a, b\rangle$.

Definice funkcí ryze konvexních a ryze konkávních je k definici funkcí konvexních a konkávních v podobném poměru jako definice funkcí ryze monotónních k definici funkcí monotónních.

Rovnice přímky z definic 26, 26a, jež spojuje body P_1, P_3, je

$$y - f(x_1) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1).$$

Funkce f je tedy konvexní v J tehdy a jen tehdy, jestliže pro každou trojici čísel x_1, x_2, x_3 intervalu J, jež splňuje nerovnosti $x_1 < x_2 < x_3$, platí nerovnost

$$f(x_2) \leqq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + f(x_1),$$

tj. nerovnost

$$f(x_2)(x_3 - x_1) \leqq f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_2 - x_1). \tag{3}$$

Pro funkce ryze konvexní nastupuje místo (3) nerovnost

$$f(x_2)(x_3 - x_1) < f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_2 - x_1). \tag{4}$$

Pro funkce konkávní, popř. ryze konkávní nutno obrátit v (3), (4) znamení nerovnosti. Z toho je zřejmé: funkce f je konvexní (popř. ryze konvexní) v J tehdy a jen tehdy, je-li funkce $-f$ konkávní (popř. ryze konkávní) v J. Stačí tedy jistě, omezím-li se v následující větě na funkce konvexní (ke konkávním funkcím se přejde změnou znamení).

Věta 137. *Budiž f funkce spojitá v intervalu J, jež má v každém vnitřním bodě intervalu J druhou derivaci $f''(x)$.*

A) Potom je f konvexní v J tehdy a jen tehdy, je-li $f''(x) \geqq 0$ v každém vnitřním bodě intervalu J.

B) Je-li $f''(x) > 0$ v každém vnitřním bodě intervalu J, je f dokonce ryze konvexní v J.

Poznámka 1. Tvrzení A) připomíná příklad 1, tvrzení B) připomíná první případ věty 135. Také pro funkce *ryze* konvexní je možné doplnit podmínku B) tak, že dostaneme podmínku nutnou a postačující („tehdy a jen tehdy"); viz cvičení 6.

Důkaz. Označme znakem J_0 množinu všech vnitřních bodů intervalu J; množina J_0 je tedy otevřený interval, jenž vznikne z J odstraněním krajních bodů (pokud patří k J). Buďte $x_1 < x_2 < x_3$ tři body z J. Podle věty o přírůstku funkce existují čísla ξ, η tak, že

$$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f'(\xi)\,, \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\eta)\,, \tag{5}$$

$$x_1 < \eta < x_2 < \xi < x_3.\text{[3]}$$

I. Budiž předně $f''(x) \geqq 0$ pro každé $x \in J_0$. Funkce $f'(x)$ (jež má derivaci $f''(x)$) je tedy podle 2. případu věty 135 neklesající v J_0. Ve vzorci (5) je tedy $f'(\xi) \geqq f'(\eta)$. Tedy: jsou-li $x_1 < x_2 < x_3$ tři body z J, je podle (5)

$$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \geqq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\,,$$

a tedy

$$(f(x_3)-f(x_2))(x_2-x_1) \geqq (f(x_2)-f(x_1))(x_3-x_2)\,,$$
$$f(x_2)(x_3-x_1) \leqq f(x_1)(x_3-x_2) + f(x_3)(x_2-x_1)\,,$$

což je nerovnost (3); tedy je f konvexní v J.

II. Nechť podmínka, vyslovená v tvrzení A), není splněna, takže existuje číslo $x \in J_0$ tak, že $f''(x) < 0$. Toto x označme znakem x_2. Ježto funkce f' má v bodě x_2 zápornou derivaci, je funkce f' klesající v bodě x_2 (věta 131); existuje tedy číslo $\delta > 0$ tak, že je $f'(x) > f'(x_2)$ pro $x_2 - \delta < x < x_2$, $f'(x) < f'(x_2)$ pro $x_2 < x < x_2 + \delta$; přitom zvolme δ tak malé, že $x_2 - \delta \in J$, $x_2 + \delta \in J$. Položme $x_1 = x_2 - \delta$, $x_3 = x_2 + \delta$. Potom platí (5) a je $x_2 - \delta < \eta < x_2 < \xi < x_2 + \delta$ a tedy $f'(\eta) > f'(x_2) > f'(\xi)$; z (5) tedy plyne

$$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\,,$$

[3]) Ježto v J_0 existuje $f''(x)$, existuje v J_0 též první derivace $f'(x)$ a je dokonce spojitá v J_0.

$$(f(x_3) - f(x_2))(x_2 - x_1) < (f(x_2) - f(x_1))(x_3 - x_2),$$

$$f(x_2)(x_3 - x_1) > f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_2 - x_1),$$

takže nerovnost (3) neplatí, ač jsou x_1, x_2, x_3 tři body z J takové, že $x_1 < x_2 < x_3$. Tím je tvrzení A) dokázáno.

Budiž nyní $f''(x) > 0$ v každém bodě intervalu J_0. Funkce $f'(x)$ má tedy v každém bodě intervalu J_0 kladnou derivaci a je tedy *rostoucí* v J_0, takže podobně jako v I plyne $f'(\xi) > f'(\eta)$; odtud plynou další nerovnosti jako v I, ale s vyloučením znaménka $=$. Místo (3) dostaneme tedy nerovnost (4), takže f je ryze konvexní v J, čímž i tvrzení B) je dokázáno.

Cvičení

1. Věta 135 platí i tehdy, připouštím-li též nevlastní derivaci.[4])

2. Budiž f neklesající v intervalu J. Potom platí: není-li f rostoucí v J, existuje interval $J_1 \subset J$, v němž je f konstantní.

3. Z cvičení 2 a věty 135 odvoďte tuto větu: Funkce f budiž spojitá v intervalu J a měj v každém vnitřním bodě toho intervalu derivaci $f'(x)$. Potom je f rostoucí v J tehdy a jen tehdy, jsou-li splněny tyto podmínky: A) V každém vnitřním bodě intervalu J je $f'(x) \geqq 0$; B) Každý interval $J_1 \subset J$ obsahuje aspoň jeden bod, v němž je $f'(x) > 0$.

4. Funkce f je konvexní a současně konkávní v intervalu J tehdy a jen tehdy, je-li funkce f lineární v J (tj. je-li v tomto intervalu $f(x) = ax + b$, kde a, b jsou konstanty — případ $a = 0$ není vyloučen).

5. Budiž f konvexní v intervalu J. Potom platí: není-li f ryze konvexní v J, existuje interval $J_1 \subset J$, v němž je f lineární.

6. Z věty 137 a z cvičení 5 odvoďte tuto větu: Funkce f budiž spojitá v intervalu J a měj v každém vnitřním bodě toho intervalu druhou derivaci. Potom je f ryze konvexní v J tehdy a jen tehdy, jsou-li splněny tyto podmínky: A) V každém vnitřním bodě intervalu J je $f''(x) \geqq 0$. B) Každý interval $J_1 \subset J$ obsahuje aspoň jeden bod, v němž je $f''(x) > 0$.

7. Tvrzení 1 věty 135 lze takto zobecnit: Budiž f spojitá v intervalu J; dále nechť existuje v intervalu J konečný počet bodů $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tak, že v každém vnitřním bodě intervalu J, různém od bodů $x_1, x_2, \ldots, x_k$, je $f'(x) > 0$ (v bodech $x_1, \ldots, x_k$ nemusí $f'(x)$ vůbec existovat). Potom je f rostoucí v J. (Návod: rozdělíte interval J body $x_1, \ldots, x_k$ na několik menších intervalů a na každý z nich užijete věty 135). Zobecněte obdobně celou větu 135, větu 136, 137, příklad 1 a cvičení 1, 3.

8. Je-li f rostoucí v intervalu $(a, b\rangle$ i v intervalu $\langle b, c)$, je zřejmě rostoucí v intervalu (a, c). Je-li však f konvexní v $(a, b\rangle$ i v $\langle b, c)$, nemusí být konvexní v (a, c). Příklad: budiž $f(x) = x^2$ pro $x \leqq 1$, $f(x) = (x - 2)^2$ pro $x \geqq 1$. Potom je f ryze konvexní v $(-\infty, 1\rangle$ i v $\langle 1, +\infty)$ $(f''(x) = 2 > 0$ pro $x \neq 1)$, ale není konvexní v $(-\infty, +\infty)$, neboť bod $[1, 1]$ leží nad spojnicí bodů $[0, 0]$, $[2, 0]$. Nakreslete si obrázek!

9. Pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ je $\operatorname{tg} x > x$ (stačí dokázat, že $\operatorname{tg} x - x$ je rostoucí v intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\pi)$).

---

[4]) Přičemž ovšem případ $f'(x) = +\infty$ je nutno počítat k oněm případům, kdy je derivace kladná a případ $f'(x) = -\infty$ k oněm, kdy je derivace záporná.

10. Pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ je $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1$ (stačí dokázat, že $\sin x : x$ je klesající v $(0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ a připomenout si, že $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).

11. Pro $0 < x < 1$ je $\arcsin x > x$.

12. Pro $x > 0$ je $\operatorname{arctg} x < x$.

13. Pro každé x je $e^x > x$ (jasné pro $x < 0$; v intervalu $\langle 0, +\infty)$ je $e^x - x$ rostoucí).

14. Pro $x > 0$ je $\lg x < x$.

§ **2. Lokální význam znaménka první a druhé derivace.** V předešlém paragrafu jsme vyšetřovali hlavně tuto otázku: nechť víme něco o znamení první nebo druhé derivace *v celém intervalu* J; co se z toho dá soudit o celkovém průběhu funkce v intervalu J? Zde budeme vyšetřovat obdobnou „lokální" otázku: nechť známe znamení první nebo druhé derivace *v jednom bodě*; co se z toho dá soudit o průběhu funkce v bezprostřední blízkosti tohoto bodu?

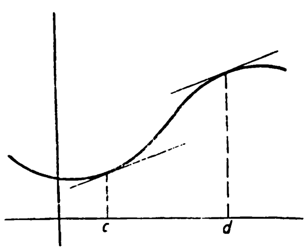
Pro první derivaci je tato otázka řešena větou 131: je-li $f'(x_0) > 0$, je funkce f v bodě x_0 rostoucí, je-li $f'(x_0) < 0$, je f v bodě x_0 klesající. Zbývá otázka: co se děje, je-li $f'(x_0) = 0$? Tato otázka souvisí s problémem tzv. lokálních maxim a minim, viz § 3.

Obraťme se k druhé derivaci, zaveďme však napřed tuto definici:

Definice 27. *Nechť existuje derivace $f'(x_0)$ v bodě x_0. Existuje-li číslo $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \delta$ leží bod $[x, f(x)]$ nad tečnou*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{6}$$

říkáme, že funkce f je ryze konvexní v bodě x_0; existuje-li číslo $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \delta$ leží bod $[x, f(x)]$ pod tečnou (6), říkáme, že funkce f je ryze konkávní v bodě x_0.



Obr. 41.

Poznámka 1. Definice je velmi názorná; jde o vzájemnou polohu křivky $y = f(x)$ a tečny (6), sestrojené v bodě $[x_0, f(x_0)]$. Např. funkce, znázorněná na obr. 41, je ryze konvexní v bodě c, ryze konkávní v bodě d. Pojem funkce ryze konvexní v intervalu a pojem funkce ryze konvexní v bodě jsou dva nezávisle zavedené pojmy. O vztazích mezi nimi viz cvičení 2.

Věta 138. *Je-li $f''(x_0) > 0$, je funkce f v bodě x_0 ryze konvexní; je-li $f''(x_0) < 0$, je funkce f v bodě x_0 ryze konkávní.*

Poznámka 2. Zbývá otázka: co se děje, je-li $f''(x_0) = 0$? Tato otázka souvisí s problémem inflexních bodů, viz § 4.

Důkaz. I. Budiž $f''(x_0) > 0$. Funkce $f'(x)$ je tedy podle věty 131 rostoucí v bodě x_0; existuje tedy $\delta > 0$ tak, že pro $x_0 - \delta < \xi < x_0$ je $f'(\xi) < f'(x_0)$ a pro $x_0 < \xi < x_0 + \delta$ je $f'(x_0) < f'(\xi)$. Tvrdím, že pro $0 < |x - x_0| < \delta$ leží bod $[x, f(x)]$ nad tečnou (6), tj. že platí

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) . \tag{7}$$

Vskutku: je-li $0 < |x - x_0| < \delta$, lze na interval o krajních bodech x_0, x aplikovat větu o přírůstku funkce; tedy existuje číslo ξ ležící mezi x_0, x tak, že je $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$. Je-li $x_0 < x < x_0 + \delta$, je též $x_0 < \xi < x_0 + \delta$, tedy $f'(\xi) > f'(x_0)$ a tedy $f'(\xi)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0)$ (násobím kladným číslem $x - x_0$). Je-li však $x_0 - \delta < x < x_0$, je též $x_0 - \delta < \xi < x_0$, tedy $f'(\xi) < f'(x_0)$ a tedy opět $f'(\xi)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0)$ (násobím *záporným* číslem $x - x_0$). V obou případech ($x_0 - \delta < x < x_0$ i $x_0 < x < x_0 + \delta$) je tedy

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) .$$

Tím je (7) dokázáno a funkce f je ryze konvexní v bodě x_0.

II. Případ $f''(x_0) < 0$ se řeší obdobně nebo se (jednodušeji) užije případu I na funkci $-f$.

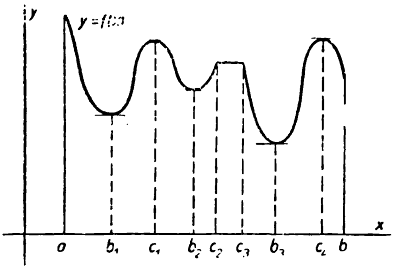
Cvičení

1. Rozvažte tyto podrobnosti: funkce rostoucí v intervalu J nemůže být klesající, ba ani nerostoucí v J. Funkce může však být současně nerostoucí a neklesající v J; potom je v J konstantní. Funkce nemůže být současně konvexní v J a ryze konkávní v J; může však být konvexní a současně konkávní v J; potom je v J lineární. Funkce nemůže být v bodě x_0 současně rostoucí a klesající, ani současně ryze konvexní a ryze konkávní.

2. Dokažte větu: Nechť existuje $f''(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Potom je f ryze konvexní v (a, b) tehdy a jen tehdy, je-li ryze konvexní v každém bodě intervalu (a, b). Návod: Podle cvičení 6, 3 k § 1 je f ryze konvexní v (a, b) tehdy a jen tehdy, je-li f' rostoucí v (a, b). I. případ: f' budiž rostoucí v (a, b); potom jako v důkazu věty 138 plyne, že f je ryze konvexní v každém bodě (a, b). II. případ: f' není rostoucí, ale je neklesající v (a, b). Tedy existují c, d tak, že $a < c < d < b$, a že $f'(x)$ je konstantní v (c, d) (§ 1, cvičení 2); potom je f lineární v (c, d) (věta 136: ježto $f'(x) = k = (kx)'$ v (c, d), je $f(x) - kx = k_1$ v (c, d)) a f není tedy ryze konvexní v žádném bodě intervalu (c, d). III. případ: f' není neklesající v (a, b), takže existují c, d tak, že $a < c < d < b$, $f'(c) > f'(d)$. Pro jisté $\xi \in (c, d)$ je $f''(\xi) = \dfrac{f'(d) - f'(c)}{d - c} < 0$ (věta 133), takže f není ryze konvexní v bodě ξ (věta 138).

§ 3. Maxima a minima — Definice 28. *Budiž dáno číslo c a funkce f, definovaná v jistém intervalu (a, b) obsahujícím bod c. Existuje-li kladné číslo δ tak, že pro všechna x intervalu $(c - \delta, c + \delta)$ je $f(x) \leqq f(c)$, říkáme, že funkce f má v bodě c lokální maximum. Lze-li zvolit $\delta > 0$ dokonce tak, že pro všechna x intervalu $(c - \delta, c + \delta)$, různá od c, je $f(x) < f(c)$, říkáme, že funkce f má v bodě c ostré lokální* *maximum. Nahradím-li nerovnosti $f(x) \leqq f(c)$, $f(x) < f(c)$ nerovnostmi $f(x) \geqq \geqq f(c), f(x) > f(c)$, dostanu definici lokálního minima a ostrého lokálního minima.*

Lokálním maximům a minimům dáváme společný název lokální extrémy. Mnozí autoři vynechávají slovo „lokální"; často také rozumějí slovy maximum, minimum to, co jsme my nazvali ostré lokální maximum nebo minimum. Někteří autoři říkají ostrým lokálním extrémům „relativní extrémy".



Obr. 42.

Všimněme si funkce $f(x)$ na obr. 42, jejímž oborem je interval $\langle a, b \rangle$. Tato funkce má ostrá lokální minima v bodech b_1, b_2, b_3, ostrá lokální maxima v bodech c_1, c_4; dále má lokální maxima (ale ne ostrá) ve všech bodech intervalu $\langle c_2, c_3 \rangle$ a současně lokální minima (ale rovněž ne ostrá) ve všech bodech otevřeného intervalu (c_2, c_3). Obecně platí: je-li funkce f konstantní v intervalu (a, b), má ve všech bodech tohoto intervalu lokální maximum i lokální minimum (ovšem nikoliv ostré). Zajímavější příklad „neostrého" lokálního minima podává tato funkce $g(x)$: budiž $g(x) = x^2 \sin^2 \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $g(0) = 0$. Je $g(0) = 0$, dále $g\left(\frac{1}{n\pi}\right) = 0$ pro $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$; pro všechna ostatní x je $g(x) > 0$. Tedy je v bodě 0 lokální minimum, ale nikoliv ostré.

Všimněme si ještě obr. 42. Funkce f nabývá v intervalu $\langle a, b \rangle$ své nejmenší hodnoty v bodě b_3, v němž má lokální minimum, největší hodnoty pak v počátečním bodě a (v němž nelze ovšem mluvit o lokálním extrému ve smyslu def. 28, ježto funkce f není definována v žádném otevřeném intervalu obsahujícím bod a). Obecně platí

Věta 139. *Funkce f budiž definována v intervalu J. Má-li funkce v některém bodě $c \in J$ největší hodnotu ze všech hodnot, jichž v intervalu J nabývá (tj. je-li $f(x) \leqq f(c)$ pro všechna $x \in J$), je bod c buďto krajním bodem intervalu J[5]) nebo má funkce f v bodě c lokální maximum. Obdobně pro nejmenší hodnotu.*

Poznámka 1. Může se ovšem stát, že funkce f vůbec v intervalu J nikde své největší hodnoty nenabývá; to může nastat např., není-li f spojitá v J nebo též, je-li spojitá v J, ale není-li J uzavřený.

Důkaz. Není-li c krajním bodem intervalu J, existuje $\delta > 0$ tak, že $(c - \delta, c + \delta) \subset J$. Potom je však podle předpokladu $f(x) \leqq f(c)$ pro všechna $x \in (c - \delta, c + \delta)$, tj. f má v bodě c lokální maximum. Podobně pro nejmenší hodnotu.

[5]) **Tento případ ovšem odpadá, je-li interval J otevřený.**

Význam lokálních extrémů pro získání lepší představy o průběhu funkcí je jasný; jejich význam pro hledání největší a nejmenší hodnoty funkce plyne z věty 139. Jak nalézt body, v nichž funkce má lokální extrémy? První pomůcku dává tato

Věta 140. *Existuje-li $f'(x_0) \neq 0$, nemá funkce f v bodě x_0 lokální extrém.*

Důkaz. Je-li $f'(x_0) \neq 0$, tj. buďto $f'(x_0) > 0$ nebo $f'(x_0) < 0$, je funkce f v bodě x_0 buďto rostoucí nebo klesající (viz větu 131) a tedy nemůže v bodě x_0 mít lokální maximum ani minimum (jak ihned vidíme, srovnáme-li definice 25, 28).

Lokální extrémy *může* tedy funkce mít jen v těch bodech, ve kterých derivace buďto neexistuje nebo je rovna nule. Ale nesmíme si myslit, že v takovém bodě funkce *musí* mít lokální extrém. Např. funkce $f_1(x) = x^2$ a rovněž funkce $f_2(x) = x^3$ má v bodě 0 derivaci rovnou nule, ale funkce $f_1(x)$ má v bodě 0 ostré lokální minimum, kdežto funkce $f_2(x)$ nemá v bodě 0 lokálního extrému (nýbrž je rostoucí v tomto bodě – ba dokonce rostoucí v intervalu $(-\infty, +\infty)$). Dále funkce[6] $f_3(x) = |x|$ (tj. $f_3(x) = -x$ pro $x \leqq 0$, $f_3(x) = x$ pro $x \geqq 0$) a rovněž funkce $f_4(x) = 2x + |x|$ (tj. $f_4(x) = x$ pro $x \leqq 0$, $f_4(x) = 3x$ pro $x \geqq 0$) nemá derivaci v bodě 0; neboť $f_3(x)$ má v bodě 0 derivaci zleva rovnou -1 a derivaci zprava rovnou 1, a funkce $f_4(x)$ má v bodě 0 derivaci zleva rovnou 1 a derivaci zprava rovnou 3. Přitom funkce $f_3(x)$ má v bodě 0 zřejmě ostré lokální minimum, kdežto funkce $f_4(x)$ nemá v bodě 0 lokálního extrému (nýbrž je rostoucí v tomto bodě – ba dokonce rostoucí v intervalu $(-\infty, +\infty)$).

Pro vyšetření, zda nějaký lokální extrém nastane v bodě, v němž derivace buďto neexistuje nebo se rovná nule, je často užitečná tato věta (v níž však se předpokládá *spojitost* funkce $f(x)$):

Věta 141. *Budiž (a, b) otevřený interval obsahující bod x_0. Budiž $f(x)$ funkce, spojitá v intervalu (a, b), jež má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) různém od bodu x_0.*[7] *Potom platí:*

1) *Existuje-li $\Delta > 0$ tak, že pro $x_0 - \Delta < x < x_0$ je $f'(x) > 0$ a pro $x_0 < x < x_0 + \Delta$ je $f'(x) < 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.*

2) *Existuje-li $\Delta > 0$ tak, že pro $x_0 - \Delta < x < x_0$ je $f'(x) < 0$ a pro $x_0 < x < x_0 + \Delta$ je $f'(x) > 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.*

3) *Existuje-li $\Delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \Delta$ je $f'(x) > 0$, je funkce f v bodě x_0 rostoucí.*[8]

4) *Existuje-li $\Delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \Delta$ je $f'(x) < 0$, je funkce f v bodě x_0 klesající.*[8]

Poznámka 2. Obsah této věty se snad nejsnáze pamatuje pod heslem: mění-li $f'(x)$ při průchodu bodem x_0 své znamení, nastává v bodě x_0 ostrý lokální extrém;

[6] Načrtněte si grafy těchto funkcí!

[7] V bodě x_0 tedy funkce $f(x)$ derivaci mít může, ale nemusí.

[8] A tedy nemá v bodě x_0 lokální extrém (ani „neostrý").

má-li $f'(x)$ v blízkosti bodu x_0 stále totéž znamení, nenastává v bodě x_0 lokální extrém.

Důkaz. Je-li x libovolný bod takový, že $0 < |x - x_0| < \Delta$, existuje (podle věty 133 o přírůstku funkce) číslo ξ tak, že je

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0); \tag{8}$$

přitom leží ξ mezi čísly x_0, x, tj. bod ξ leží na téže straně bodu x_0 jako bod x.

V případě 1) má tedy $f'(\xi)$ opačné znamení než $x - x_0$, takže podle (8) je $f(x) - f(x_0) < 0$ pro $0 < |x - x_0| < \Delta$; v případě 2) má $f'(\xi)$ totéž znamení jako $x - x_0$, takže podle (8) je $f(x) - f(x_0) > 0$ pro $0 < |x - x_0| < \Delta$; v případě 3) je $f'(\xi) > 0$, takže $f(x) - f(x_0)$ má totéž znamení jako $x - x_0$; pro $x_0 - \Delta < x < x_0$ je tedy $f(x) < f(x_0)$, pro $x_0 < x < x_0 + \Delta$ je $f(x) > f(x_0)$, takže f je rostoucí v bodě x_0; obdobně v případě 4).

Poznámka 3. Čtyři případy věty 141 nevyčerpávají všechny možné případy; viz cvičení 17.

Příklad 1. Budiž dáno číslo $P > 0$; mezi všemi přímými rotačními kuželi o povrchu P máme nalézt ten, jenž má největší objem (existuje-li takový kužel).

Označím-li znakem x poloměr podstavy, znakem v výšku kužele, je povrch

$$P = \pi x^2 + \pi x \sqrt{x^2 + v^2} \tag{9}$$

(podstava + plášť); objem V je

$$V = \tfrac{1}{3}\pi x^2 v\,. \tag{10}$$

Přitom se omezujeme — jak odpovídá geometrickému významu čísel x, v — pouze na kladné hodnoty x, v. Náš úkol tedy jest:

„Mezi všemi dvojicemi kladných čísel x, v vyhovujících rovnici (9) máme nalézt onu dvojici x, v, pro kterou výraz (10) je co největší.“[9])

Z rovnice (9) plyne

$$v^2 = \frac{(P - \pi x^2)^2}{x^2\pi^2} - x^2 = \frac{P(P - 2\pi x^2)}{\pi^2 x^2}; \tag{11}$$

aby tento výraz byl při $x > 0$ kladný, musí být

$$0 < x < \sqrt{\frac{P}{2\pi}}\,. \tag{12}$$

[9]) Čtenář může právem namítnout, že jsme dosud řádně nedefinovali povrch a objem; této obtíži se vyhne, bude-li za daný úkol považovat větu právě uvedenou v uvozovkách, jež tyto pojmy neobsahuje. Dal jsem úloze geometrický tvar, aby byla zajímavější; totéž platí o četných cvičeních.

Dosadíme-li z (11) do (10), obdržíme

$$V^2 = \tfrac{1}{9}\pi^2 x^4 v^2 = \tfrac{1}{9}Px^2(P - 2\pi x^2)\,. \tag{13}$$

Čím větší je kladné číslo V, tím větší je V^2; náš úkol tedy jest: pro kterou hodnotu x intervalu (12) má výraz (13) největší hodnotu? Existuje-li taková hodnota x, musí výraz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} V^2 = \tfrac{2}{9}Px(P - 4\pi x^2) \tag{14}$$

pro tuto hodnotu x být roven nule;[10]) to nastává pro $x = 0, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{\pi}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{\pi}}$.

Z těchto tří hodnot x pouze hodnota $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{\pi}}$ leží v intervalu (12). Pro $0 < x < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{\pi}}$ je derivace (14) kladná, pro $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{\pi}} < x < \sqrt{\frac{P}{2\pi}}$ je záporná, takže výraz (13) roste v intervalu $\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{\pi}}\right\rangle$ a potom klesá v intervalu $\left\langle\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{\pi}}, \sqrt{\frac{P}{2\pi}}\right)$, takže V^2 a tedy i V nabývá skutečně v intervalu (12) největší hodnoty pro jednu a jen jednu hodnotu x, totiž pro $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{\pi}}$. Tvar a objem příslušného kužele je patrný z rovnic (plynoucích z (10), (11))

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{\pi}}\,, \quad v = \sqrt{\frac{2P}{\pi}} = 2\sqrt{2}x\,, \quad V = \frac{\sqrt{2}}{12\sqrt{\pi}}P^{3/2}\,.$$

Příklad 2. Hledejme nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = x^3 - 3x + 20$ v intervalu $\langle -3, 3)$. Je $f'(x) = 3(x^2 - 1)$, takže v úvahu přicházejí pouze body $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$. Ze znamení derivace plyne: v intervalu $\langle -3, -1\rangle$ funkce roste od hodnoty $f(-3) = 2$ do hodnoty $f(-1) = 22$, v intervalu $\langle -1, 1\rangle$ funkce klesá od hodnoty 22 do hodnoty $f(1) = 18$, v intervalu $\langle 1, 3)$ funkce roste od hodnoty 18 a má limitu $\lim\limits_{x\to 3-} f(x) = f(3) = 38$. Tedy: v intervalu $\langle -3, 3)$ má $f(x)$ nejmenší hodnotu $f(-3) = 2$, nemá však největší hodnoty; neboť je zřejmě $\sup\limits_{x\in\langle -3,3)} f(x) = 38$, ale této hodnoty funkce v intervalu $\langle -3, 3)$ nikde nedosahuje. Kdybychom byli vzali *uzavřený* interval $\langle -3, 3\rangle$, byli bychom ovšem dostali největší hodnotu $f(3) = 38$.

Cvičení

1. Funkce x^x v intervalu $(0, +\infty)$ nabývá své nejmenší hodnoty v jediném bodě $x = e^{-1}$, v němž je též jediný lokální extrém (minimum).

[10]) Interval (12) je otevřený, takže jeho krajní body nepřicházejí v úvahu.

2. Funkce $2x^3 - 3x^2 + 5$ má právě dva lokální extrémy: maximum pro $x = 0$, minimum pro $x = +1$.

3. Funkce $x^3 - 3x^2 + 3x + 5$ nemá lokálních extrémů; podobně funkce $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

4. Budiž n celé kladné. Je-li n sudé, má funkce $x^n e^x$ dva lokální extrémy: maximum pro $x = -n$, minimum pro $x = 0$ (což je zároveň nejmenší hodnota funkce vůbec). Je-li n liché, je pouze jediný lokální extrém, a to minimum pro $x = -n$, což je zároveň vůbec nejmenší hodnota funkce.

5. Sestrojte obdélník[11]) daného obvodu s, jenž má co největší plošný obsah (vyjde čtverec).

6. Dána jsou čísla a, s $(0 < a < s)$. Mezi všemi trojúhelníky, jež mají obvod $2s$ a jednu stranu a, sestrojte onen, jenž má největší obsah (užijte třeba Heronova vzorce; vyjde rovnoramenný trojúhelník o stranách a, $s - \frac{1}{2}a$, $s - \frac{1}{2}a$, a žádný jiný).

7. Ze všech rovnoramenných trojúhelníků o daném obvodu má rovnostranný (a žádný jiný) trojúhelník největší obsah.

8. Z cvičení 6, 7 plyne, že ze všech trojúhelníků o daném obvodu má rovnostranný (a pouze tento) největší obsah.

9. Mezi rotačními kuže
li, jež mají danou velikost pláště P, sestrojte ten, jenž má největší objem (vyjde poloměr podstavy $r = (P^2 : (3\pi^2))^{\frac{1}{4}}$, výška $v = \sqrt{2} \,.\, r$).

10. Do koule o poloměru r vepište rotační kužel 1. o největším objemu, 2. o největším plášti, 3. o největším povrchu (= podstava + plášť). Výsledek: je-li v výška hledaného kužele, je v prvních dvou případech $v = \frac{4}{3}r$, ve třetím případě $v = \dfrac{23 - \sqrt{17}}{16} r$. Vezmete-li v jako nezávisle proměnnou, je ve třetím případě povrch $P = \pi v(2r - v) + \pi v \sqrt{2r}\sqrt{2r - v}$. Položíte-li $P' = 0$, obdržíte rovnici

$$(2r - 2v) + \sqrt{r}(4r - 3v) : (\sqrt{2} \,.\, \sqrt{2r - v}) = 0 \,. \tag{15}$$

Odstraněním odmocniny dostanete několik kořenů pro v, z nichž musíte vybrat takový, aby byla splněna rovnice (15), tedy jistě $v < \frac{4}{3}r$ (proč?); tak dostanete jediný kořen rovnice (15).

11. Mezi všemi přímými kruhovými válci o daném povrchu P se má nalézt ten, jenž má největší objem (pro poloměr podstavy x a výšku v vyjde $x = \sqrt{\dfrac{P}{6\pi}}$, $v = 2x$).

12. Z kruhového kusu papíru vystřihněme výseč o středovém úhlu β. Ze zbývající výseče (o středovém úhlu $\alpha = 2\pi - \beta$) můžete sestrojit filtr, tj. plášť kužele. Najděte α tak, aby objem kužele byl co největší (vyjde $\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \,.\, 2\pi$).

13. Dány jsou body $P = [0, a]$, $Q = [d, -b]$ (a, b, d kladná). Pohyblivý bod se pohybuje rychlostí $v > 0$ z bodu P po přímce až do bodu $R = [x, 0]$ a potom z bodu R po přímce až do bodu Q rychlostí $w > 0$. Najděte polohu bodu R tak, aby pohyblivý bod dospěl z P do Q v době co nejkratší. Návod: potřebný čas je $f(x) = \dfrac{1}{v}\sqrt{a^2 + x^2} + \dfrac{1}{w}\sqrt{(d - x)^2 + b^2}$; podmínka $f'(x) = 0$ je

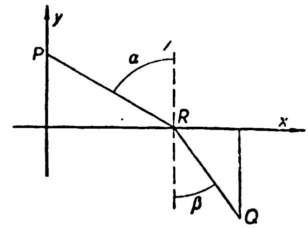
$$\frac{x}{v\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d - x}{w\sqrt{(d - x)^2 + b^2}} \,. \tag{16}$$

[11]) Připouštím též čtverec. Při příkladech tohoto druhu se nespokojte nalezením lokálních extrémů, nýbrž zjistěte též (podle vzoru příkl. 1), zda nalezený lokální extrém dává skutečně největší (popř. nejmenší) ze všech hodnot.

Ze znamení $f''(x)$ zjistíte, že $f'(x)$ stále roste; odtud snadno zjistíte, že existuje právě jedna hodnota x, pro kterou platí (16); z obr. 43 zjistíte, že podmínku (16) lze psát ve tvaru $\sin\alpha : \sin\beta = v : w$ (zákon lomu, známý z optiky).

14. Buďte $k_1, k_2, \ldots, k_n$ daná čísla. Výraz $(x - k_1)^2 + (x - k_2)^2 + \ldots + (x - k_n)^2$ je nejmenší, je-li $x = \frac{1}{n}(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)$.

15. Rozdělme číslo $a > 0$ na dva nezáporné sčítance $x \geqq 0$, $a - x \geqq 0$ a sestrojme součet jejich p-tých mocnin: $f(x) = x^p + (a - x)^p$. Vyšetřujme $f(x)$ v intervalu $\langle 0, a\rangle$. Je-li $p > 1$, je $f(x)$ nejmenší pro $x = \frac{1}{2}a$, největší pro $x = 0$, $x = a$. Pro $p = 1$ je $f(x) = a$ konstantní. Pro $0 < p < 1$ máme největší hodnotu pro $x = \frac{1}{2}a$, nejmenší pro $x = 0$, $x = a$. Pro $p = 0$ je $f(x) = 2$ konstantní. Pro $p < 0$ je nutno se omezit na otevřený interval $(0, a)$; v něm není $f(x)$ shora omezená, ale nabývá nejmenší hodnoty pro $x = \frac{1}{2}a$. Nakreslete třeba pro $a = 1$ čáry $y = f(x)$ pro případy $p = 1, 2, 4, 8, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 0, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -1$ (všechny na jeden obrázek).



Obr. 43.

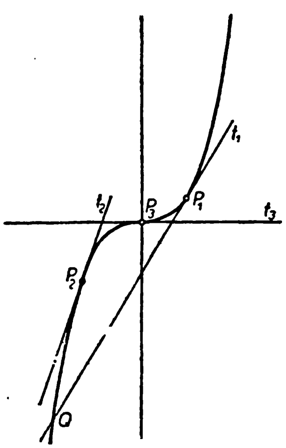
16. Bodem $[a, b]$ ($a > 0$, $b > 0$) veďme přímku o *záporné* směrnici $-k$; ta protne osu x v bodě P, osu y v bodě Q. Probíhá-li k všechny kladné hodnoty, má plocha pravoúhlého trojúhelníka OPQ (O je bod $[0, 0]$) nejmenší hodnotu $2ab$ pro $k = \frac{b}{a}$; součet obou odvěsen má nejmenší hodnotu $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ pro $k = \sqrt{\frac{b}{a}}$; přepona má nejmenší hodnotu $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$ pro $k = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$.

17. Položme $g(x) = x^6 \sin\frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $g(0) = 0$. Dále budiž $f_1(x) = 2x^6 + g(x)$, $f_2(x) = \frac{1}{10}x^5 + g(x)$. Je $g'(0) = f_1'(0) = f_2'(0) = 0$; spočtete-li ještě $g'(x)$ pro $x \neq 0$, zjistíte, že nenastává pro $x_0 = 0$ žádný ze čtyř případů věty 141. Funkce g nemá v bodě 0 lokální extrém ani v něm není rostoucí ani klesající; funkce f_1 má v bodě 0 ostré lokální minimum; funkce f_2 je v bodě 0 rostoucí. Načrtněte si obrázky.

18. Funkce f z cvičení 8 v kap. VIII, § 3 má ostré lokální maximum v bodě 2, kdežto v bodě -1 a v bodě 0 je rostoucí.

19. Funkce $3|x + 3| - 4|x| + 2|x - 1|$ má tyto lokální extrémy (vesměs ostré): minima v bodech -3, 1, maximum v bodě 0.

20. Funkce $x^3 + 12|x|$ má ostré lokální minimum v bodě 0, ostré lokální maximum v bodě -2.



Obr. 44.

§ 4. Vzájemná poloha křivky a tečny. Inflexní body.

Známe význam nerovností $f''(x_0) > 0$, $f''(x_0) < 0$ (věta 138). Nyní budeme zkoumat, co může nastat v těch bodech, v nichž je $f''(x_0) = 0$. Začněme příkladem $f(x) = x^3$ (obr. 44). Zvolím-li bod $P_1 = [x_1, x_1^3]$ o kladné abscise x_1, je $f''(x_1) = 6x_1 > 0$ a podle věty 138 platí toto: sestrojím-li v bodě P_1 tečnu t_1, leží křivka $y = x^3$ v blízkosti bodu P_1 nad tečnou t_1 (jdu-li ovšem dosti daleko doleva.

až za bod Q, klesne křivka pod tečnu t_1). Obdobně: zvolím-li bod $P_2 = [x_2, x_2^3]$ o záporné abscise x_2, je $f''(x_2) = 6x_2 < 0$ a křivka $y = x^3$ leží v blízkosti bodu P_2 pod tečnou t_2, sestrojenou v bodě P_2. Zbývá ještě bod $P_3 = [0, 0]$; tečna t_3 v tomto bodě je osa x. Zde je $f''(0) = 0$ a věta 138 nám nic neříká. Z obrázku vidíte (a počtem ihned ověříte), že v blízkosti bodu P_3 neleží křivka $y = x^3$ ani stále nad tečnou t_3 ani stále pod ní, nýbrž přechází v bodě P_3 z jedné strany přímky t_3 na druhou. Říkáme, že křivka $y = x^3$ má v bodě P_3 inflexní bod; obecně definujeme:

Definice 29. *Funkce f nechť má v bodě x_0 derivaci. Nechť existuje číslo $\delta > 0$ tak, že platí jeden z těchto dvou případů:*

I. Buďto leží bod $[x, f(x)]$ pro $x_0 - \delta < x < x_0$ pod tečnou

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{17}$$

a pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ nad ní.

II. Nebo leží bod $[x, f(x)]$ pro $x_0 - \delta < x < x_0$ nad tečnou (17) a pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ pod ní.

Potom říkáme, že funkce f má v bodě x_0 inflexi nebo také, že křivka $y = f(x)$ má v bodě $[x_0, f(x_0)]$ inflexní bod.

Názorný smysl je jasný: křivka přechází v bodě $[x_0, f(x_0)]$ — zhruba řečeno — z jedné strany tečny na druhou. Případ I vidíte na obr. 44, případ II nastává např. u křivky $y = -x^3$ v bodě $[0, 0]$.

Věta 142. *Existuje-li $f''(x_0) \neq 0$, nemá funkce f v bodě x_0 inflexi.*

Důkaz. Podle věty 138 je funkce f v bodě x_0 ryze konvexní nebo ryze konkávní (podle toho, je-li $f''(x_0) > 0$ či $f''(x_0) < 0$). Nemůže tedy mít v bodě x_0 inflexi, jak okamžitě zjistíte srovnáním definice 29 s definicí 27.

Inflexe může tedy nastat jen v těch bodech, v nichž druhá derivace buďto vůbec neexistuje (takové body vyžadují obyčejně zvláštní úvahy) nebo v těch bodech, v nichž se druhá derivace rovná nule. V těchto bodech nám často pomůže tato věta:

Věta 143. *Budiž (a, b) otevřený interval obsahující bod x_0. Budiž $f(x)$ funkce, jež má první derivaci $f'(x)$ spojitou v (a, b) a jež má druhou derivaci $f''(x)$ v každém bodě intervalu (a, b) různém od x_0* (v bodě x_0 tedy druhá derivace může, ale nemusí existovat). *Potom platí:*

I. Existuje-li číslo $\Delta > 0$ tak, že pro $x_0 - \Delta < x < x_0$ je $f''(x) < 0$ a pro $x_0 < x < x_0 + \Delta$ je $f''(x) > 0$, má funkce f v bodě x_0 inflexi (a to případ I z definice 29).

II. Existuje-li číslo $\Delta > 0$ tak, že pro $x_0 - \Delta < x < x_0$ je $f''(x) > 0$ a pro $x_0 < x < x_0 + \Delta$ je $f''(x) < 0$, má funkce f v bodě x_0 inflexi (a to případ II z definice 29).

III. Existuje-li číslo $\Delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \Delta$ je $f''(x) > 0$, je funkce f v bodě x_0 ryze konvexní.[12]

IV. Existuje-li číslo $\Delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \Delta$ je $f''(x) < 0$, je funkce f v bodě x_0 ryze konkávní.[12]

Všimněte si obdoby mezi větou 143 a větou 141. Poznamenávám, že někteří autoři prostě říkají, že funkce f má v bodě x_0 inflexi, když $f''(x_0) = 0$. To je definice *odlišná* od naší definice 29. Např. pro funkci $f(x) = x^4$ je $f''(x) > 0$ pro $x \neq 0$, $f''(0) = 0$; podle věty 143 nenastává tedy v bodě 0 inflexe ve smyslu definice 29, ač je $f''(0) = 0$.

Důkaz. Vezměme bod x tak, že $0 < |x - x_0| < \Delta$. Bod $[x, f(x)]$ leží nad nebo pod tečnou $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ podle toho, zda je

$$f(x) - f(x_0) > f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{či} \quad f(x) - f(x_0) < f'(x_0)(x - x_0)\,. \tag{18}$$

Podle věty o přírůstku funkce[13] existuje mezi body x_0, x bod ξ tak, že

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)\,. \tag{19}$$

Případ I. Nechť $f''(x) < 0$ pro $x_0 - \Delta < x < x_0$, $f''(x) > 0$ pro $x_0 < x < x_0 + \Delta$. Potom je funkce $f'(x)$ klesající v intervalu $(x_0 - \Delta, x_0\rangle$ a rostoucí v intervalu $\langle x_0, x_0 + \Delta)$ (podle věty 135 aplikované na funkci f'). Ve vzorci (19) je tedy vždy $f'(\xi) > f'(x_0)$; pro $x_0 - \Delta < x < x_0$ plyne tedy z (19)

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) < f'(x_0)(x - x_0)$$

(násobím záporným číslem $x - x_0$), pro $x_0 < x < x_0 + \Delta$ plyne obdobně

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0)$$

(násobím kladným číslem $x - x_0$). Tedy platí druhá nerovnost (18) pro $x_0 - \Delta < x < x_0$, první pro $x_0 < x < x_0 + \Delta$, tj. nastává inflexe, a to případ I z definice.

Případ II se řeší obdobně (nebo jednodušeji: použiji případu I na funkci $-f$).

Případ III. Nechť $f''(x) > 0$ pro $0 < |x - x_0| < \Delta$; potom je $f'(x)$ rostoucí v intervalu $(x_0 - \Delta, x_0\rangle$ i v intervalu $\langle x_0, x_0 + \Delta)$ (věta 135), tedy celkem rostoucí v intervalu $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$. Pro $x_0 - \Delta < x < x_0$ je tedy v (19) $f'(\xi) < f'(x_0)$, tedy $f'(\xi)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0)$ ($x - x_0$ je záporné); pro $x_0 < x < x_0 + \Delta$ je $f'(\xi) > f'(x_0)$, tedy rovněž $f'(\xi)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0)$ ($x - x_0$ je kladné). V obou případech, tj. pro všechna x splňující nerovnosti $0 < |x_0 - x| < \Delta$, je tedy podle (19)

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0)\,,$$

tj. platí první z nerovností (18), tedy je f ryze konvexní v bodě x_0.

[12]) A tedy nemá v bodě x_0 inflexi.

[13]) Z existence funkce f' plyne spojitost funkce f v intervalu $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$.

Případ IV se řeší obdobně (nebo jednodušeji: použiji případu III na funkci $-f$).

Poznámka 1. Čtyři případy uvedené ve větě 143 nevyčerpávají ovšem všechny možné případy; viz cvičení 10.

Příklad 1. Dosavadní věty této kapitoly poskytují užitečné pomůcky k rýsování křivek $y = f(x)$. Vezměme příklad $y = f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$, jejž jsme částečně již vyšetřovali. Je

$$y' = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}, \quad y'' = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}.$$

Podle znamení funkce y' je patrno (věta 135): funkce je rostoucí v intervalu $\langle -1, 1\rangle$, klesající v intervalu $(-\infty, -1\rangle$ a v intervalu $\langle 1, +\infty)$; v bodě -1 máme tedy ostré lokální minimum, v bodě 1 ostré lokální maximum: $f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = +\frac{1}{2}$. Uvážíte-li, že $f(x) < 0$ pro $x < 0$, $f(x) > 0$ pro $x > 0$, vidíte, že $-\frac{1}{2}$ je vůbec nejmenší a $+\frac{1}{2}$ vůbec největší hodnota funkce. Druhá derivace $f''(x)$ je záporná v intervalu $(-\infty, -\sqrt{3})$ a v intervalu $(0, \sqrt{3})$;[14] v každém bodě těchto dvou intervalů je tedy funkce ryze konkávní (definice 27, heslo: křivka pod tečnou). V intervalu $(-\sqrt{3}, 0)$ i v intervalu $(\sqrt{3}, +\infty)$ je $f''(x)$ kladná; v každém bodě těchto dvou intervalů je tedy funkce ryze konvexní (definice 27, heslo: křivka nad tečnou). V bodě $-\sqrt{3}$ nastává podle věty 143 inflexe (případ I z definice 29), podobně v bodě 0 (případ II) a v bodě $\sqrt{3}$ (případ I). Sestrojíte-li body odpovídající extrémům a inflexím, tj. body $[-1, -\frac{1}{2}]$, $[1, \frac{1}{2}]$, $[-\sqrt{3}, -\frac{1}{4}\sqrt{3}]$, $[0, 0]$, $[\sqrt{3}, \frac{1}{4}\sqrt{3}]$ a ještě několik dalších bodů, jakož i tečny v těchto bodech a uvážíte-li ještě, že $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2 + 1} = 0$, můžete křivku spolehlivě rýsovat.

Poznamenejme ještě: v intervalu $\langle 0, \sqrt{3}\rangle$ je funkce ryze konkávní podle věty 137 (jde teď o pojem z definice 26a, nikoliv z definice 27). Zvolím-li tedy na naší čáře dva body P, Q, jejichž abscisy leží v intervalu $\langle 0, \sqrt{3}\rangle$, potom všechny body oblouku PQ (s výjimkou krajních bodů P, Q) leží nad tětivou PQ. Podobné poznámky platí pro intervaly $(-\infty, -\sqrt{3}\rangle$, $\langle -\sqrt{3}, 0\rangle$, $\langle \sqrt{3}, +\infty)$.

Podobně postupujeme při jiných funkcích. Jen bych ještě poznamenal, že zvláštní pozornosti zasluhují ty body, v nichž nelze užít vět této kapitoly; to nastává např. v těchto případech: A) $f'(x_0)$ neexistuje nebo $f'(x_0) = 0$, ale nenastává žádný ze čtyř případů uvedených ve větě 141. B) $f''(x_0)$ neexistuje nebo $f''(x_0) = 0$, ale nenastává žádný ze čtyř případů uvedených ve větě 143. V blízkosti takových bodů bývá průběh funkce leckdy velmi složitý a vyžaduje často speciálních úvah. Viz cvičení 10.

[14]) Sleduji znamení u jednotlivých činitelů v čitateli

$$2x(x^2 - 3) = 2x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}).$$

Cvičení

1. Funkce $ax^2 + bx + c$ je pro $a > 0$ ryze konvexní v intervalu $(-\infty, +\infty)$ a též ryze konvexní v každém bodě. Je klesající v intervalu $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right\rangle$, rostoucí v $\left\langle -\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$. V bodě $-\dfrac{b}{2a}$ nabývá své nejmenší hodnoty $-\dfrac{b^2}{4a} + c$. Pro $a < 0$ jsou výsledky obdobné (změníme znamení).

2. Budiž $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a > 0$ (případ $a < 0$ vyšetřím změnou znamení). Funkce je ryze konvexní v intervalu $\left\langle -\dfrac{b}{3a}, +\infty\right)$ a též v každém vnitřním bodě tohoto intervalu; obdobně se slovem konkávní místo konvexní v $\left(-\infty, -\dfrac{b}{3a}\right\rangle$. Inflexe (a to případ I z definice 29) v bodě $-b:(3a)$. Vzrůst a klesání posoudíme z derivace $3ax^2 + 2bx + c$. Je-li $b^2 - 3ac \leqq 0$, je $f(x)$ rostoucí v $(-\infty, +\infty)$. Je-li $b^2 - 3ac > 0$, buďte α_1, α_2 ($\alpha_1 < \alpha_2$) kořeny rovnice $3ax^2 + 2bx + c = 0$. Máme potom lokální ostré maximum v bodě α_1, minimum v bodě α_2. Funkce f je rostoucí v $(-\infty, \alpha_1\rangle$ i v $\langle\alpha_2, +\infty)$, klesající v $\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle$.

3. Funkce $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$) má v bodě $-\dfrac{d}{c}$ limitu zleva $-\infty$, zprava $+\infty$, je-li $ad - bc < 0$; v intervalu $\left(-\infty, -\dfrac{d}{c}\right)$ je pak klesající a ryze konkávní, v $\left(-\dfrac{d}{c}, +\infty\right)$ je klesající a ryze konvexní. Obdobně pro $ad - bc > 0$. Pro $ad - bc = 0$ se funkce rovná $a:c$ pro všechna $x \neq -d:c$.

4. Funkce $x + k\cos x$ ($k \neq 0$) je rostoucí v intervalu $(-\infty, +\infty)$, je-li $|k| \leqq 1$. Je-li $|k| > 1$, má nekonečně mnoho ostrých lokálních extrémů v bodech, pro něž $\sin x = \dfrac{1}{k}$, tj. $x = \arcsin\dfrac{1}{k} + 2n\pi$, $x = -\arcsin\dfrac{1}{k} + (2n+1)\pi$ ($n = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots$). Pro $k > 1$ dává první vzorec maxima, druhý minima; pro $k < -1$ obráceně. Inflexe nastává v bodech $n\pi + \frac{1}{2}\pi$ ($n = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots$).

Následující tři cvičení se týkají funkce $(ax^2 + bx + c):(Ax^2 + Bx + C)$, kde $A \neq 0$. Funkci lze dát tvar $\dfrac{a}{A} + \dfrac{\beta x + \gamma}{Ax^2 + Bx + C}$, takže se omezíme na funkci

$$f(x) = \frac{\beta x + \gamma}{Ax^2 + Bx + C},$$

přičemž vyloučíme triviální případ $\beta = \gamma = 0$.

5. Nechť rovnice $Ax^2 + Bx + C = 0$ nemá reálných kořenů, takže funkce f je spojitá v $(-\infty, +\infty)$. Budiž předně $\beta = 0$, $\gamma \neq 0$. Potom existuje jediný lokální extrém v bodě $x = -B:(2A)$, jenž dává pro $\gamma A > 0$ největší, pro $\gamma A < 0$ nejmenší hodnotu funkce. V intervalech $(-\infty, -B:(2A)\rangle$, $\langle -B:(2A), +\infty)$ je f ryze monotónní. Nakreslete průběh křivky $y = 1:(1+x^2)$. Budiž za druhé $\beta \neq 0$, tedy

$$f'(x) = (-A\beta x^2 - 2A\gamma x + \beta C - B\gamma):(Ax^2 + Bx + C)^2;$$

ježto $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, nemůže být f ryze monotónní v $(-\infty, +\infty)$; odtud snadno plyne, že rovnice $f'(x) = 0$ má dva různé reálné kořeny $\alpha_1 < \alpha_2$. Je-li $\beta A > 0$, klesá $f(x)$ v intervalu $(-\infty, \alpha_1\rangle$, roste v $\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle$ a klesá v $\langle\alpha_2, +\infty)$; v bodě α_1 nabývá nejmenší, v bodě α_2 největší hodnoty; pro $\beta A < 0$ je výsledek obdobný. Viz příkl. 1, kde byl probrán případ $f(x) = x : (x^2 + 1)$.

6. Nechť rovnice $Ax^2 + Bx + C = 0$ má jediný reálný kořen (tzv. kořen dvojnásobný, neboli dva splývající), takže $f(x) = \dfrac{\beta}{A}\dfrac{x + \gamma : \beta}{(x - x_1)^2}$ pro $\beta \neq 0$, $f(x) = \dfrac{\gamma}{A}\cdot\dfrac{1}{(x - x_1)^2}$ pro $\beta = 0$, $\gamma \neq 0$. Píšeme-li v prvním případě $\xi = x + \gamma : \beta$, $\eta = y \cdot A : \beta$ (posunutí na ose x, změna měřítka na ose y), lze rovnici $y = f(x)$ psát ve tvaru $\eta = \dfrac{\xi}{(\xi - p)^2}$. Kdyby bylo $p = 0$, dala by se rovnice dále zjednodušit. Je-li $p > 0$, klesá η v intervalu $(-\infty, -p\rangle$ od 0 do $-1 : (4p)$, dále roste v intervalu $\langle -p, p)$ od $-1 : (4p)$ do $+\infty$ a konečně klesá v $(p, +\infty)$ od $+\infty$ do 0. Nakreslete křivku $\eta = \xi : (\xi - 1)^2$. Je-li $p < 0$, převedeme tento případ na předcházející tím, že píšeme $-\eta$, $-\xi$ místo η, ξ (tj. obrátíme kladné směry os souřadnic). V případě $\beta = 0$ jsme obdobně vedeni ke křivce $\eta = 1 : (\xi - p)^2$. Zde η roste v intervalu $(-\infty, p)$ od 0 do $+\infty$ a potom v intervalu $(p, +\infty)$ klesá od $+\infty$ do 0. Nakreslete pro $p = 1$!

7. Nechť rovnice $Ax^2 + Bx + C = 0$ má dva různé reálné kořeny. Jako v předešlém cvičení jsme vedeni ke křivkám

$$\eta = \frac{\xi}{(\xi - p)(\xi - q)} \text{ pro } \beta \neq 0\,, \quad \eta = \frac{1}{(\xi - p)(\xi - q)} \text{ pro } \beta = 0;$$

přitom $p < q$. V prvním případě předpokládejme $pq \neq 0$ (jinak nastoupí zjednodušení). Dostanete: I. Je-li $pq < 0$, klesá η v intervalu $(-\infty, p)$ od 0 do $-\infty$, potom klesá v (p, q) od $+\infty$ do $-\infty$ a konečně klesá v $(q, +\infty)$ od $+\infty$ do 0. Nakreslete křivku $\eta = \xi : (\xi^2 - 1)$. II. Je-li $pq > 0$, předpokládejme $0 < p < q$ (případ $p < q < 0$ by se převedl na případ $0 < p < q$ tím, že bychom psali $-\xi$, $-\eta$ místo ξ, η). Potom η klesá v $(-\infty, -\sqrt{pq}\rangle$ od 0 do $-1 : (\sqrt{q} + \sqrt{p})^2$, dále roste v intervalu $\langle -\sqrt{pq}, p)$ do $+\infty$; potom roste v intervalu $(p, \sqrt{pq}\rangle$ od $-\infty$ do $-1 : (\sqrt{q} - \sqrt{p})^2$ a potom klesá v intervalu $\langle\sqrt{pq}, q)$ do $-\infty$; konečně klesá v intervalu $(q, +\infty)$ od $+\infty$ do 0. Nakreslete křivku $\eta = \dfrac{\xi}{(\xi - 1)(\xi - 4)}$. V druhém případě $(\beta = 0)$ roste η v intervalu $(-\infty, p)$ do 0 do $+\infty$, v intervalu $(p, \frac{1}{2}(p + q)\rangle$ roste od $-\infty$ do $-4 \cdot (q - p)^{-2}$, v intervalu $\langle\frac{1}{2}(p + q), q)$ klesá do $-\infty$, v intervalu $(q, +\infty)$ klesá od $+\infty$ do 0. Nakreslete křivku $\eta = 1 : (\xi^2 - 1)$.

8. Budiž $a > 0$, $b > 0$. Funkce $\dfrac{a^2}{\sin^2 x} + \dfrac{b^2}{\cos^2 x}$ je sudá a má periodu π; stačí se tedy omezit na interval $(0, \frac{1}{2}\pi)$. V tomto intervalu je funkce ryze konvexní. Je-li $x_0 = \operatorname{arctg} \sqrt{a : b}$, je funkce klesající v intervalu $(0, x_0\rangle$, rostoucí v intervalu $\langle x_0, \frac{1}{2}\pi)$; její nejmenší hodnota je $(a + b)^2$.

9. Funkci $f(x) = \operatorname{tg} 3x \operatorname{cotg} 2x$ (sudá, perioda π) stačí vyšetřovat v intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$. Funkce f má v bodě 0 limitu $\frac{3}{2}$ $\left(\text{neboť } \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{2x}{\sin 2x}\right)$ a roste v intervalu $(0, \frac{1}{6}\pi)$ od $\frac{3}{2}$ do $+\infty$. V intervalu $(\frac{1}{6}\pi, \arcsin\sqrt{\frac{5}{8}}\rangle$ roste od $-\infty$ do $\frac{1}{9}$, v intervalu $\langle\arcsin\sqrt{\frac{5}{8}}, \frac{1}{2}\pi)$ klesá od $\frac{1}{9}$ do $-\infty$. Návod: je $f'(x) = (\frac{3}{2}\sin 4x - \sin 6x) \cdot \sin^{-2} 2x \cdot \cos^{-2} 3x$; první závorku lze psát $\sin 2x\,(-4\cos^2 2x + 3\cos 2x + 1)$; odtud $f'(x) = 0$ právě pro $x = \arcsin\sqrt{\frac{5}{8}}$. Že např. v intervalu $(0, \frac{1}{6}\pi)$ je f rostoucí, plyne takto: derivace je v tomto intervalu spojitá a různá od nuly, tedy má tam stále totéž znamení, tedy je tam f ryze monotónní. Ježto $\lim_{x \to \pi/6-} f(x) = + \infty$, nemůže f být klesající. Načrtněte křivku $y = f(x)$.

10. Pro funkce $g(x), f_1(x), f_2(x)$ z § 3, cvičení 17 je osa x tečnou v počátku, dále $g''(0) = f_1''(0) = f_2''(0) = 0$. Spočtete-li $g''(x)$ pro $x \neq 0$, zjistíte, že v bodě $x = 0$ nenastává žádný ze čtyř případů věty 143. Funkce f_1 je v bodě 0 ryze konvexní, funkce f_2 tam má inflexi; funkce g má pak tuto vlastnost: v libovolném intervalu $(0, \delta)$ (kde $\delta > 0$) existují jak body x takové, že bod $[x, g(x)]$ leží nad tečnou $y = 0$, tak také body x takové, že bod $[x, g(x)]$ leží pod tečnou $y = 0$. Totéž platí o intervalu $(-\delta, 0)$.

11. Definujme $\operatorname{sgn} a = 1$ pro $a > 0$, $\operatorname{sgn} a = -1$ pro $a < 0$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$. Funkce $x^2 \operatorname{sgn} x + 2(x-1)^2 \operatorname{sgn}(x-1)$ je rostoucí v $(-\infty, +\infty)$. Má jedinou inflexi v bodě 1; v každém bodě $x < 1$ je ryze konkávní (ve smyslu def. 27, i v bodě $x = 0$); v každém bodě $x > 1$ je ryze konvexní.

§ 5. Užití derivací vyšších řádů. Místo vět 141, 143 lze někdy užít následujících vět, v nichž vystupují derivace vyšších řádů.

Věta 144. *Budiž f funkce, x_0 číslo. Nechť existuje přirozené číslo n tak, že je $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, ale $f^{(k)}(x_0) = 0$ pro $0 < k < n$.*[15]

Potom platí:

I. *Je-li n liché, $f^{(n)}(x_0) > 0$, je funkce f rostoucí v bodě x_0.*

II. *Je-li n liché, $f^{(n)}(x_0) < 0$, je funkce klesající v bodě x_0.*

III. *Je-li n sudé, $f^{(n)}(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.*

IV. *Je-li n sudé, $f^{(n)}(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.*

Poznámka 1. Při důkazu této i následující věty si uvědomte: z existence čísla $f^{(n)}(x_0)$ plyne, že v jistém intervalu (a, b), obsahujícím bod x_0, existuje derivace $f^{(n-1)}(x)$; následkem toho jsou funkce $f^{(n-2)}(x), f^{(n-3)}(x), \ldots, f'(x), f(x)$ (jestliže $n \geqq 2$) dokonce spojité v (a, b).

Poznámka 2. Proveďme napřed důkaz ve speciálním případě $n = 4$,[16] $f^{(4)}(x_0) > 0$. Funkce $f'''(x)$ je tedy rostoucí v bodě x_0; ježto $f'''(x_0) = 0$, existuje číslo $\delta > 0$ tak, že je $f'''(x) < 0$ pro $x_0 - \delta < x < x_0$, $f'''(x) > 0$ pro $x_0 < x < x_0 + \delta$. Tedy je (podle věty 135) funkce $f''(x)$ klesající v intervalu $(x_0 - \delta, x_0\rangle$ a rostoucí v intervalu $\langle x_0, x_0 + \delta)$. Nejmenší hodnotou funkce $f''(x)$ v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je tedy hodnota $f''(x_0) = 0$, pro $x_0 - \delta < x < x_0$ i pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ je pak $f''(x) > 0$. Tedy je (podle věty 135) funkce $f'(x)$ rostoucí v intervalu $(x_0 - \delta, x_0\rangle$ i v intervalu $\langle x_0, x_0 + \delta)$; ježto $f'(x_0) = 0$, je $f'(x) < 0$ pro $x_0 - \delta < x < x_0$, $f'(x) > 0$ pro $x_0 < x < x_0 + \delta$; tedy je funkce $f(x)$ klesající v intervalu

[15]) Podrobně: $f^{(n)}(x_0)$ je první člen posloupnosti čísel $f'(x_0), f''(x_0), f'''(x_0), \ldots$, jenž je různý od nuly. Je-li např. $n = 1$, znamená to, že $f'(x_0) \neq 0$; je-li $n = 3$, znamená to, že $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$.

[16]) Tedy $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$.

$(x_0 - \delta, x_0\rangle$ a rostoucí v intervalu $\langle x_0, x_0 + \delta)$. V bodě x_0 má tedy funkce f ostré lokální minimum. Pro obecné n by byla tato úvaha nepřehledná; proto k obecnému důkazu užijeme úplné indukce.

Důkaz věty 144. Budeme větu dokazovat pouze pro případ $f^{(n)}(x_0) > 0$; případ $f^{(n)}(x_0) < 0$ lze na tento případ převést, vyšetřujeme-li funkci $-f$ místo funkce f.

A) Pro $n = 1$ (tj. $f'(x_0) > 0$) je tvrzení věty správné podle věty 131 (f je rostoucí v bodě x_0).

B) Budiž $m > 1$ a předpokládejme, že tvrzení věty 144 je správné pro $n = m - 1$; máme dokázat, že je pak správné i pro $n = m$. Budiž tedy $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0$, $f^{(m)}(x_0) > 0$. Funkce $g(x) = f'(x)$ vyhovuje tedy předpokladům $g^{(k)}(x_0) = 0$ pro $0 < k < m - 1$, $g^{(m-1)}(x_0) > 0$. Na funkci g můžeme tedy užít věty 144, jejíž správnost pro $n = m - 1$ předpokládáme.

Rozeznávejme dva případy:

1) Buďto je m sudé, tedy $m - 1$ liché a podle věty 144 je funkce $g = f'$ rostoucí v bodě x_0; ježto je $f'(x_0) = 0$, existuje $\Delta > 0$ tak, že pro $x_0 - \Delta < x < x_0$ je $f'(x) < 0$, pro $x_0 < x < x_0 + \Delta$ je $f'(x) > 0$. Podle věty 141 (případ 2) má tedy f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

2) Nebo je m liché, tedy $m - 1$ sudé a podle věty 144 má funkce $g = f'$ v bodě x_0 ostré lokální minimum. Ježto $f'(x_0) = 0$, existuje $\Delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \Delta$ je $f'(x) > 0$. Podle věty 141 (případ 3) je tedy funkce f v bodě x_0 rostoucí.

Poznámka 3. Ve větě 141 jsme vystačili s první derivací, ale musili jsme ji vyšetřovat ve *všech* bodech jistého intervalu $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$, různých od x_0; ve větě 144 vystupují derivace vyšších řádů, ale stačí, když známe jejich hodnoty v *jediném* bodě x_0. Věta 144 může ovšem selhat, např. když je $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0)$ neexistuje. V praxi je často výhodnější věta 141.

Odvoďme obdobnou náhradu za větu 143:

Věta 145. *Budiž f funkce, x_0 číslo. Nechť existuje celé číslo $n > 1$ tak, že je $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, ale $f^{(k)}(x_0) = 0$ pro $1 < k < n$.*[17] *Potom platí:*

I. Je-li n sudé, $f^{(n)}(x_0) > 0$, je funkce f ryze konvexní v bodě x_0.

II. Je-li n sudé, $f^{(n)}(x_0) < 0$, je funkce f ryze konkávní v bodě x_0.

III. Je-li n liché, $f^{(n)}(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 inflexi, a to případ I z definice 29.

IV. Je-li n liché, $f^{(n)}(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 inflexi, a to případ II z definice 29.

[17]) Podrobně: $f^{(n)}(x_0)$ je první člen posloupnosti $f''(x_0), f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), \ldots$, jenž je různý od nuly. Je-li např. $n = 2$, znamená to, že $f''(x_0) \neq 0$; je-li $n = 4$, znamená to, že $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0, f^{(4)}(x_0) \neq 0$. *Na rozdíl od věty 144 si zde vůbec nevšímáme hodnoty $f'(x_0)$.*

Důkaz. Stačí opět, omezíme-li se na případ $f^{(n)}(x_0) > 0$ (případ $f^{(n)}(x_0) < 0$ lze na tento případ převést, vyšetřujeme-li místo funkce f funkci $-f$). Bod $[x, f(x)]$ leží nad nebo pod tečnou

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{20}$$

podle toho, zda výraz $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ je kladný či záporný. Je zřejmě $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$, $g^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$ pro $1 < k \leqq n$. Tedy

$$g(x_0) = 0, \quad g'(x_0) = \ldots = g^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad g^{(n)}(x_0) > 0\,.$$

Užijeme-li věty 144, dostáváme:

A) Je-li n sudé, má funkce g v bodě x_0 ostré lokální minimum. Ježto $g(x_0) = 0$, existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \delta$ je $g(x) > 0$, tj. bod $[x, f(x)]$ leží nad tečnou (20), tedy je funkce f ryze konvexní v bodě x_0.

B) Je-li n liché, je funkce g rostoucí v bodě x_0. Ježto $g(x_0) = 0$, existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x_0 - \delta < x < x_0$ je $g(x) < 0$, takže bod $[x, f(x)]$ leží pod tečnou (20), kdežto pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ je $g(x) > 0$, takže bod $[x, f(x)]$ leží nad tečnou (20). Tedy má funkce f v bodě x_0 inflexi, a to případ I z definice 29.

K větě 145 by bylo ovšem možno připojit poznámku obdobnou k poznámce 3. Aspoň nejjednodušší případy vět 144, 145 je dobře si zapamatovat: je-li $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, nastává ostrý lokální extrém v bodě x_0 (pro $f''(x_0) > 0$ minimum, pro $f''(x_0) < 0$ maximum); je-li $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, nastává inflexe.

Příklad 1. Najděte lokální extrémy a inflexe funkce $f(x) = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4$. Je $f'(x) = x^6 + x^5 - x^4 - x^3 = x^3(x^3 + x^2 - x - 1) = x^3(x + 1)^2(x - 1)$, $f''(x) = x^2(x + 1)(6x^2 - x - 3) = 6x^2(x + 1)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$, klademe-li $\alpha_1 = \frac{1}{12}(1 + \sqrt{73})$, $\alpha_2 = \frac{1}{12}(1 - \sqrt{73})$. Je $\frac{9}{12} < \alpha_1 < \frac{10}{12}$, $-\frac{8}{12} < \alpha_2 < -\frac{7}{12}$, tedy $-1 < \alpha_2 < 0 < \alpha_1 < 1$. Rovnice $f'(x) = 0$ je splněna pro $x = -1$, 0, 1, rovnice $f''(x) = 0$ pro $x = 0, -1, \alpha_1, \alpha_2$. Počtem najdete $f''(0) = f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) < 0$; $f''(-1) = 0, f'''(-1) > 0$; $f''(1) > 0$; $f'''(\alpha_1) > 0$; $f'''(\alpha_2) < 0$. Tedy: ostré lokální maximum pro $x = 0$, minimum pro $x = 1$; inflexní body pro $x = -1$, α_1, α_2.

Ale věty 141, 143 dávají tyto výsledky přímo z výrazů pro $f'(x)$, $f''(x)$ takto. Je (vyšetřuji znamení jednotlivých činitelů)

$f'(x) > 0$ v intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, +\infty)$;
$f'(x) < 0$ v intervalu $(0, 1)$;
$f''(x) > 0$ v intervalech $(-1, \alpha_2)$, $(\alpha_1, +\infty)$;
$f''(x) < 0$ v intervalech $(-\infty, -1)$, $(\alpha_2, 0)$, $(0, \alpha_1)$.

Z toho dávají věty 141, 143 ihned žádané výsledky, jakož i celkový průběh naší funkce. (Nakreslete si křivku $y = f(x)$ třeba pro $-1 \leqq x \leqq 1$; nebude to příliš pěkný obrázek.)

Cvičení

1. Budiž m celé kladné číslo, $f(x) = (x - a)^m g(x) + b$, $g(a) \neq 0$; nechť existuje $g^{(m)}(a)$. Potom platí: je-li m sudé, má $f(x)$ v bodě a ostrý lokální extrém (maximum pro $g(a) < 0$, minimum pro $g(a) > 0$). Je-li m liché, je $f(x)$ v bodě a rostoucí nebo klesající podle toho, zda $g(a) > 0$ či $g(a) < 0$. Je-li $m > 1$, m liché, má funkce f v bodě a inflexi.

2. Buďte m, n přirozená čísla, $a < b$, $f(x) = (x - a)^m (x - b)^n$. Funkce $f(x)$ má tyto lokální extrémy (ostré): A) $x = (na + mb) : (m + n)$, a to maximum pro n sudé, minimum pro n liché, B) $x = a$ pouze pro sudé m; a to maximum pro n liché, minimum pro n sudé; C) $x = b$ pouze pro sudé n, a to minimum.

3. Funkce $(x + 1)^3 (x - 1)^2$ má lokální extrémy (ostré): pro $x = \frac{1}{5}$ maximum, pro $x = 1$ minimum. Inflexe jsou v bodech -1, $\frac{1}{5}(1 + \sqrt{6})$, $\frac{1}{5}(1 - \sqrt{6})$.

4. Budiž $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$; budiž $\psi(a) \neq 0$ a nechť existují $\varphi''(a)$, $\psi''(a)$. Potom platí: A) Je-li $\varphi'(a)\,\psi(a) - \varphi(a)\,\psi'(a)$ kladné (záporné), je f v bodě a rostoucí (klesající). B) Je-li $\varphi'(a)\,\psi(a) - \varphi(a)\,\psi'(a) = 0$ a současně $\varphi''(a)\,\psi(a) - \varphi(a)\,\psi''(a)$ kladné (záporné), má $f(x)$ v bodě a ostré lokální minimum (maximum). Tato věta je někdy pohodlná pro vyšetřování funkcí daných ve tvaru podílu.

5. Funkce $x : (x^2 + 2x + 8)$ má ostré lokální minimum v bodě $-2\sqrt{2}$, maximum v bodě $+2\sqrt{2}$.