Kapitola IX

OBECNÉ VĚTY O SPOJITOSTI A O DERIVACI

§ 1. Úvod.[1]) Je-li dána funkce f v oboru M, nazvali jsme jejím grafem nebo grafickým znázorněním množinu všech bodů $[x, f(x)]$, kde x probíhá všechny body z M. Tento graf se nazývá někdy „čarou nebo křivkou o rovnici $y = f(x)$“; pro jednoduché funkce, jak jsme na řadě příkladů zjistili (viz příkl. 1 až 6 z kap. V, § 1) má skutečně tato „křivka $y = f(x)$“ vlastnosti, které spojujeme s naivní představou čáry nakreslené plynulým tahem tužky na papíře. Ale naše definice funkce (definice 14) byla velmi široká; není tedy divu, že existují také funkce, jejichž „grafické znázornění“ (tj. množina všech bodů $[x, f(x)]$, kde $x \in M$) je zrakovému názoru naprosto nepřístupné. Příklad takové funkce jsme již měli (viz kap. V, § 1, příkl. 9); ještě „divočejší“ je např. tato funkce: je-li x iracionální, budiž $f(x) = 0$; je-li však x racionální, dá se x psát jedním a jen jedním způsobem ve tvaru $x = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou celá nesoudělná čísla, $q > 0$; potom budiž $f(x) = q$. Tím je vskutku každému číslu x přiřazeno jisté číslo $f(x)$; např. $f(\sqrt{2}) = 0$, $f(-3) = 1$ $\left(\text{je totiž } -3 = \frac{-3}{1}\right)$, $f(\frac{2}{3}) = 3$, $f(1) = 1$, $f(0{,}999) = 1000$ atd. Snadno zjistíte, že v každém sebe menším intervalu nabývá funkce $f(x)$ libovolně velkých hodnot, neboť v každém intervalu leží čísla $\frac{p}{q}$ (p, q celá nesoudělná, $q > 0$), kde q je větší než libovolné předem dané číslo. „Čáru $y = f(x)$“ si asi ani nejživější fantazie nedovede představit.

Pro mnohé účely (ovšem ne pro všechny) budou asi z oné nepřeberné zásoby všech možných funkcí nejdůležitější takové funkce, jejichž grafické znázornění $y = f(x)$ má aspoň některé z vlastností odpovídajících běžnému názoru na křivku. Nakreslíme-li plynulým tahem tužky takovou křivku $y = f(x)$, napadnou nám hned dvě vlastnosti:

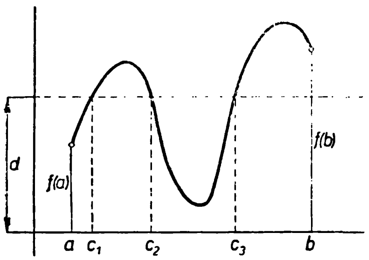
I. Velmi malé změně hodnoty x odpovídá velmi malá změna hodnoty y, tj. hodnoty $f(x)$.

II. Je-li d libovolná hodnota ležící mezi čísly $f(a)$, $f(b)$, leží mezi čísly a, b aspoň jedno číslo c tak, že $f(c) = d$[2]) (tj. funkce $f(x)$ nabývá v intervalu (a, b) všech hodnot ležících mezi hodnotami $f(a)$, $f(b)$).

[1]) Tento paragraf má hlavně orientační význam a nečiní si všude nároků na přesnost.

[2]) Na obr. 33 existují k hodnotě d tam zvolené dokonce tři takové hodnoty c_1, c_2, c_3.

Vlastností I jsme se zabývali v kap. V; dali jsme této vlastnosti — kterou jsme zde ovšem vyslovili poněkud neurčitě — přesný smysl a funkce, které tuto vlastnost mají, jsme nazvali *spojitými*[3]) (nebudu se zde pouštět do jednotlivostí, kterým jsme věnovali dosti místa v kap. V). Nejsou ovšem všechny funkce spojité, tj. existují funkce, které nemají vlastnost I. Podobně existují funkce, které nemají vlastnost II. Volím-li např. $f(x) = \frac{1}{3}$ pro $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{2}{3}$ pro $\frac{1}{2} < x \leqq 1$, leží číslo $\frac{2}{5}$ mezi čísly $f(0) = \frac{1}{3}$, $f(1) = \frac{2}{3}$, ale neexistuje hodnota c v intervalu $(0, 1)$ tak, aby bylo $f(c) = \frac{2}{5}$. Zjistíme však v § 2, že (zhruba řečeno) každá funkce mající vlastnost I má též vlastnost II. Přesně řečeno: dokážeme, že každá funkce, jež je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, má vlastnost II.



Obr. 33.

S definicí spojitosti jsme tedy měli štěstí: každá funkce, jež je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, má ještě jednu velmi názornou vlastnost, totiž vlastnost II.[4]) Ovšem hned je nutno varovat čtenáře před nesprávnou domněnkou: názor nás vedle vlastností I, II vede ještě k dalším vlastnostem; např. bychom byli z názoru ochotni věřit, že každá „spojitá" čára $y = f(x)$ má v každém bodě tečnu — snad s výjimkou některých osamělých bodů, v nichž křivka sice zůstává spojitou, ale mění náhle svůj směr (jako např. čára $y = |x|$, viz obr. 7). Podle definice tečny (kap. VIII, § 1, poznámka 5) bychom tuto domněnku mohli vyslovit též takto: každá funkce spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ má ve všech bodech tohoto intervalu derivaci, vyjma v některých osamělých bodech. Ale tato domněnka *není* správná: Bolzano a nezávisle na něm později Weierstrass sestrojili funkci, spojitou např. v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, jež v *žádném* bodě tohoto intervalu nemá derivaci.[5]) (Příklad takové funkce sestrojíme až v 2. svazku tohoto díla.) Tento příklad je snad zvláště poučný pro čtenáře: ježto, jak jsme právě podotkli, existují spojité funkce, jež *nemají* jistou jednoduchou vlastnost, budeme si tím více vážit toho, až v příštím paragrafu zjistíme, že některé jiné jednoduché vlastnosti mají *všechny* spojité funkce.

§ 2. Obecné věty o spojitých funkcích. Budiž dána funkce f definovaná v neprázdné množině M (může být ovšem definována i v některých bodech ležících mimo množinu

[3]) Např. u obr. 33 bychom mluvili o funkci spojité v intervalu $\langle a, b\rangle$.

[4]) Není to ovšem vlastně štěstí, nýbrž výsledek dlouholetého vývoje matematiky. Kdybychom místo od vlastnosti I vyšli od vlastnosti II, měli bychom méně štěstí: existují funkce, které v každém intervalu $\langle a, b\rangle$ mají vlastnost II, ale přesto v některém bodě *nejsou* spojité, tj. nemají vlastnost I; viz cvičení 2 k § 3. S větší námahou by se dokonce dala sestrojit funkce, jež v každém intervalu $\langle a, b\rangle$ má vlastnost II, ale přitom není spojitá v žádném bodě.

[5]) Představit si příslušnou „spojitou čáru, jež v žádném bodě nemá tečnu", asi nikdo nedovede. Tedy také třída všech *spojitých* funkcí je ještě velmi rozsáhlá, neboť obsahuje funkce, jejichž složitost zcela přesahuje schopnosti naší zrakové představivosti.

M). Funkce f zobrazuje množinu M na jistou množinu N (viz kap. VII, počátek § 1). Množina N je množina všech hodnot $f(x)$ pro všechna $x \in M$. Je-li množina N shora omezená (tj. existuje-li číslo K tak, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leqq K$), říkáme, že funkce $f(x)$ je shora omezená v množině M; číslu $\sup N$ (viz větu 39) říkáme „supremum funkce f v množině M" a značíme je $\sup\limits_{x \in M} f(x)$. Podle věty 39 pak platí:

I. Pro každé $x \in M$ je $f(x) \leqq \sup\limits_{x \in M} f(x)$.

II. Je-li $G' < \sup\limits_{x \in M} f(x)$, existuje aspoň jedno číslo $x_0 \in M$ tak, že $f(x_0) > G'$.

Obdobně: je-li N zdola omezená (tj. existuje-li číslo K tak, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geqq K$), říkáme, že funkce f je zdola omezená v množině M; číslu $\inf N$ (viz větu 40) říkáme pak infimum funkce f v množině M, značka $\inf\limits_{x \in M} f(x)$. Podle věty 40 pak platí:

I. Pro každé $x \in M$ je $f(x) \geqq \inf\limits_{x \in M} f(x)$.

II. Je-li $g' > \inf\limits_{x \in M} f(x)$, existuje aspoň jedno číslo $x_0 \in M$ tak, že $f(x_0) < g'$.

Je-li f shora i zdola omezená v M, říkáme krátce, že f je omezená v M.

Věta 127. *Funkce spojitá v uzavřeném intervalu je v tomto intervalu omezená.*

Poznámka 1. Pro neuzavřené intervaly by věta neplatila. Např. funkce $\dfrac{1}{x}$ je spojitá v intervalu $(0, 1\rangle$ (bod 0 nepatří k tomuto intervalu), ale zřejmě v něm není shora omezená.

Důkaz. Budiž $f(x)$ spojitá v $\langle a, b\rangle$. Budiž M množina oněch čísel c intervalu $(a, b\rangle$, jež mají tu vlastnost, že $f(x)$ je omezená v intervalu $\langle a, c)$. Ježto $f(x)$ je spojitá zprava v bodě a, existuje číslo $\delta > 0$ (jež zvolíme menší než $b - a$) tak, že pro $a \leqq x < a + \delta$ je $f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1$. Tedy je $a + \delta \in M$ (neboť $a < a + \delta < b$ a funkce f je omezená v intervalu $\langle a, a + \delta)$). Množina M je tedy neprázdná a shora omezená; položme $\xi = \sup M$. Ježto $a + \delta \in M$ a ježto žádné číslo množiny M není větší než b, je $a + \delta \leqq \xi \leqq b$, tedy

$$a < \xi \leqq b\,. \tag{1}$$

Předpokládejme na chvíli, že

$$a < \xi < b\,; \tag{2}$$

z toho odvodíme spor. Ježto $f(x)$ je spojitá v bodě ξ, existuje číslo $\delta_1 > 0$ tak, že pro všechna x intervalu $J_1 = (\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$ je $f(\xi) - 1 < f(x) < f(\xi) + 1$; δ_1 zvolíme hned tak malé, aby interval J_1 ležel celý v (a, b).[6] Ježto $\xi - \delta_1 < \xi = \sup M$, existuje v M číslo $c_1 > \xi - \delta_1$ (a ovšem $c_1 \leqq \xi$). V intervalu $J_2 =$

[6]) Kreslete si obr. 34.

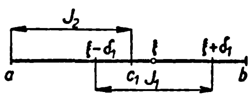
$= \langle a, c_1)$ je f omezená (neboť $c_1 \in M$), takže existují čísla K_1, K_2 tak, že pro všechna $x \in J_2$ je $K_1 < f(x) < K_2$. Každý bod intervalu $\langle a, \xi + \delta_1)$ leží však buďto v J_1 nebo v J_2; pro všechna $x \in \langle a, \xi + \delta_1)$ je tedy

$$\operatorname{Min}(K_1, f(\xi) - 1) < f(x) < \operatorname{Max}(K_2, f(\xi) + 1).$$

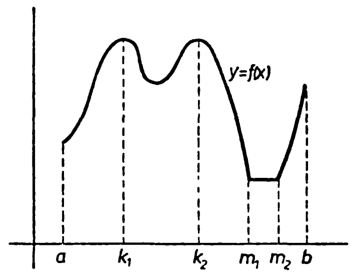
Tedy je f omezená v intervalu $\langle a, \xi + \delta_1)$, takže $\xi + \delta_1 \in M$. Ale to je nemožné, neboť $\xi + \delta_1 > \xi = \sup M$. Tedy neplatí (2); podle (1) je tedy nutně $\xi = b$. Odtud plyne pak věta 127 takto: ježto f je spojitá zleva v bodě b, existuje $\delta_2 > 0$ tak, že pro $b - \delta_2 < x \leqq b$ je $f(b) - 1 < f(x) < f(b) + 1$; volme hned $\delta_2 < b - a$. Ježto $b = \sup M$, $b - \delta_2 < b$, existuje $c_2 \in M$ tak, že $c_2 > b - \delta_2$ (a ovšem $c_2 \leqq b$). V intervalu $\langle a, c_2)$ je tedy f omezená, tj. existují čísla K_3, K_4 tak, že pro $a \leqq x < c_2$ je $K_3 < f(x) < K_4$. Ale každý bod x intervalu $\langle a, b\rangle$ leží buďto v $(b - \delta_2, b\rangle$ nebo v $\langle a, c_2)$ (nakreslete si obrázek, obdobný k obr. 34); pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je tedy

$$\operatorname{Min}(K_3, f(b) - 1) < f(x) < \operatorname{Max}(K_4, f(b) + 1),$$

tj. f je omezená v $\langle a, b\rangle$.



Obr. 34.



Obr. 35.

Z věty 127 snadno plyne

Věta 128. *Buďiž $f(x)$ spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ (a tedy, podle věty 127, omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$). Potom existují v intervalu $\langle a, b\rangle$ body c_1, c_2 tak, že*

$$f(c_1) = \sup_{x \in \langle a, b\rangle} f(x), \quad f(c_2) = \inf_{x \in \langle a, b\rangle} f(x).$$

Poznámka 2. Pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je tedy $f(c_2) \leqq f(x) \leqq f(c_1)$. To tedy znamená, že funkce f má v bodě c_1 největší (a v bodě c_2 nejmenší) ze všech hodnot, kterých v intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá. Takových bodů může být více; např. na obr. 35 nabývá funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ své největší hodnoty ve dvou bodech k_1, k_2 a své nejmenší hodnoty dokonce v nekonečně mnoha bodech, totiž ve všech bodech intervalu $\langle m_1, m_2\rangle$. Věta by nebyla správná pro jiné druhy intervalů; funkce $f(x) = 2x^2$ zobrazuje interval $\langle 0, 1)$ na interval $\langle 0, 2)$, takže $\sup_{x \in \langle 0, 1)} 2x^2 = 2$, ale funkce $2x^2$ této hodnoty 2 v intervalu $\langle 0, 1)$ vůbec nenabývá (nabývá ovšem v intervalu $\langle 0, 1)$ hodnot libovolně blízkých hodnotě 2).

Důkaz. Poznamenejme: je-li $F(x)$ funkce spojitá v $\langle a, b\rangle$ a je-li $F(x) \neq 0$ pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$, je též $\frac{1}{F(x)}$ spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ (to plyne z vět 97, 100).

I. Položme $G = \sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$. Pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ je tedy $f(x) \leqq G$. Máme dokázat, že v intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje číslo x, pro něž je $f(x) = G$. Předpokládejme, že tomu tak není, takže pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) < G$, tj. $G - f(x) > 0$; z toho odvodíme spor. Ježto $G - f(x)$ je v $\langle a, b\rangle$ spojitá a podle předpokladu stále kladná, je funkce $1 : (G - f(x))$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá, tedy (podle věty 127) shora omezená a ovšem stále kladná. Existuje tedy kladné číslo K tak, že pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ je $1 : (G - f(x)) < K$, tj. $G - f(x) > \frac{1}{K}$, tj.

$$f(x) < G - \frac{1}{K} \text{ pro všechna } x \in \langle a, b\rangle. \tag{3}$$

Ale číslo $G - \frac{1}{K}$ je menší než číslo $G = \sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$; tedy existuje v intervalu $\langle a, b\rangle$ číslo x_0 tak, že $f(x_0) > G - \frac{1}{K}$, což je ve sporu s (3).

II. Funkce $-f(x)$ je spojitá v $\langle a, b\rangle$ a je zřejmě $\sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} (-f(x)) = -\inf\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$. Podle bodu I existuje číslo $c_2 \in \langle a, b\rangle$ tak, že $-f(c_2) = \sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} (-f(x))$, tj. $f(c_2) = \inf\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$.

Věta 129. *Budiž $f(x)$ spojitá v $\langle a, b\rangle$, budiž $f(a) \neq f(b)$. Potom funkce $f(x)$ nabývá v intervalu (a, b) všech hodnot ležících mezi čísly $f(a)$, $f(b)$.* (Podrobně: je-li d libovolné číslo, ležící mezi[7]) čísly $f(a)$, $f(b)$, existuje aspoň jedno číslo c tak, že $a < c < b$, $f(c) = d$.)

Poznámka 3. To je věta, kterou jsem slíbil čtenáři v § 1. Pro funkce, jež nejsou spojité v $\langle a, b\rangle$, nemusí tvrzení věty platit; viz příklad uvedený v § 1.

Důkaz. I. Budiž $f(a) < f(b)$; budiž d číslo ležící mezi $f(a)$, $f(b)$, tj. $f(a) < d < f(b)$. Budiž M množina oněch čísel x intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž je $f(x) < d$. Množina M je shora omezená a neprázdná (neboť $a \in M$). Budiž $c = \sup M$, tedy $a \leqq c \leqq b$. Ze spojitosti funkce $f(x)$ v bodě a zprava a v bodě b zleva plyne předně: ježto $d - f(a) > 0$, existuje číslo $\delta_1 > 0$ tak, že pro $a \leqq x < a + \delta_1$ je $|f(x) - f(a)| < d - f(a)$, tedy $f(x) < f(a) + (d - f(a)) = d$; všechna x intervalu $\langle a, a + \delta_1)$ patří k M, tedy $c \geqq a + \delta_1 > a$. Za druhé: ježto $f(b) - d > 0$, existuje $\delta_2 > 0$

[7]) Říkáme ovšem, že číslo D leží mezi čísly A, B ($A \neq B$), leží-li D v otevřeném intervalu, jehož krajní body jsou A, B.

tak, že pro $b - \delta_2 < x \leqq b$ je $|f(x) - f(b)| < f(b) - d$, tedy $f(x) > f(b) - (f(b) - d) = d$. Žádné číslo x větší než $b - \delta_2$ nepatří k M, takže $c \leqq b - \delta_2 < b$. Tedy máme

$$(4) \qquad a < c < b\,.$$

Dokážeme nyní, že $f(c) = d$. Budiž ε jakékoliv kladné číslo. Ježto $f(x)$ je podle (4) spojitá v bodě c, existuje číslo $\delta > 0$ tak, že je $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, tj.

$$(5) \qquad f(x) - \varepsilon < f(c) < f(x) + \varepsilon \quad \text{pro} \quad c - \delta < x < c + \delta\,.$$

Ježto $c - \delta < c = \sup M$, existuje číslo $x_1 > c - \delta$ patřící do M (tedy $x_1 \leqq c < c + \delta$); tedy je $f(x_1) < d$ a podle (5) je $f(c) < d + \varepsilon$. Zvolme za druhé číslo x_2 tak, aby bylo $c < x_2 < c + \delta$ a současně $x_2 < b$ (to je možné podle (4)); ježto x_2 nepatří k M (je totiž $x_2 > \sup M$), je $f(x_2) \geqq d$; podle (5) je tedy $f(c) > d - \varepsilon$. Pro *každé* kladné ε je tedy $d - \varepsilon < f(c) < d + \varepsilon$, tedy $|f(c) - d| < \varepsilon$; tedy je $f(c) - d = 0$, $f(c) = d$.[8])

II. Budiž $f(a) > f(b)$ a nechť d leží mezi $f(a)$, $f(b)$, tj. $f(a) > d > f(b)$. Tedy je $-f(a) < -d < -f(b)$; ježto $-f(x)$ je spojitá v $\langle a, b\rangle$, existuje podle I číslo $c \in (a, b)$ tak, že $-f(c) = -d$, tj. $f(c) = d$.

Z věty 129 nyní snadno plyne věta, kterou jsem čtenáři slíbil již v kap. VII, § 1:

Věta 130. *Funkce f budiž spojitá v intervalu J (jakéhokoliv druhu). Potom funkce f zobrazuje interval J buďto na jednobodovou množinu nebo na interval.*

Důkaz. Je-li f konstantní v J, je tvrzení správné (f zobrazuje interval J na jednobodovou množinu). Předpokládejme tedy, že f není konstantní v J. Potom zobrazuje f interval J na jistou množinu N, jež obsahuje aspoň dva různé body. Jsou možné tyto případy:

I. Množina N není shora ani zdola omezená. Budiž d libovolné číslo. Existují tedy čísla $A \in N$, $B \in N$ tak, že $A < d < B$, tj. existují čísla $a \in J$, $b \in J$ tak, že $A = f(a) < d < f(b) = B$. Uzavřený interval J_1, jehož krajní body jsou a, b,[9]) je částí intervalu J, takže f je spojitá v uzavřeném intervalu J_1. Ježto $f(a) < d < f(b)$, existuje podle věty 129 číslo $c \in J_1$ (tedy $c \in J$) tak, že $f(c) = d$. Tedy $d \in N$. Každé číslo d patří do N, tedy je $N = (-\infty, +\infty)$.

II. Množina N je zdola, ale není shora omezená; položme $C = \inf N$. Budiž $d > C$; potom existují čísla $A \in N$, $B \in N$ tak, že $A < d < B$, tj. existují čísla $a \in J$, $b \in J$ tak, že $A = f(a) < d < f(b) = B$. Jako dříve plyne odtud, že existuje číslo $c \in J$ tak, že $f(c) = d$; tedy $d \in N$. Množina N obsahuje tedy všechna čísla větší než

[8]) Podrobně: budiž A nějaké číslo, jež má tuto vlastnost: pro každé $\varepsilon > 0$ je $|A| < \varepsilon$. Tvrdím: potom je $A = 0$. Důkaz: kdyby bylo $A \neq 0$, bylo by $|A| > 0$ a nerovnost $|A| < \varepsilon$ by nebyla splněna pro určitou *kladnou* hodnotu ε, totiž např. pro $\varepsilon = |A|$. Tohoto úsudku se leckdy užívá.

[9]) Je-li $a < b$, je $J_1 = \langle a, b\rangle$; je-li $a > b$, je $J_1 = \langle b, a\rangle$.

C, ale neobsahuje ovšem žádné číslo menší než C; je tedy nutně buďto $N = \langle C, +\infty)$ nebo $N = (C, +\infty)$, podle toho, zda bod C patří nebo nepatří k N.

III. Množina N je shora, ale není zdola omezená. Podobně jako v případě II zjistíme, že je buďto $N = (-\infty, D\rangle$ nebo $N = (-\infty, D)$, přičemž $D = \sup N$.

IV. Množina N je shora i zdola omezená. Položme $C = \inf N$, $D = \sup N$; je $C < D$, ježto N obsahuje aspoň dva různé body. Budiž $C < d < D$. Tedy existují čísla $A \in N$, $B \in N$ tak, že $A < d < B$, tj. existují čísla $a \in J$, $b \in J$ tak, že $A = f(a) < d < f(b) = B$. Jako dříve plyne odtud, že existuje $c \in J$ tak, že $f(c) = d$, takže $d \in N$. Množina N obsahuje tedy všechna čísla d ležící mezi čísly C, D, ale neobsahuje ovšem žádné číslo menší než C ani žádné číslo větší než D. Množina N je tedy nutně jeden z intervalů (C, D), $\langle C, D)$, $(C, D\rangle$, $\langle C, D\rangle$.

Poznámka 4. Budiž funkce f spojitá v intervalu J. Je-li $J = \langle a, b\rangle$ *uzavřený* interval, je množina N opět *uzavřený* interval nebo jednobodová množina; neboť podle věty 127 je množina N omezená a podle věty 128 patří krajní body intervalu N (v případě, že N je vskutku interval a ne jednobodová množina), tj. čísla $\sup N = \sup\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$, $\inf N = \inf\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$ k intervalu N. V ostatních případech nemusí druh intervalu zůstat zachován; např. funkce x^2 zobrazuje otevřený interval $(-1, 1)$ na polouzavřený interval $\langle 0, 1)$.

Poznámka 5. Na větách tohoto paragrafu je pozoruhodná jedna okolnost. Spojitost funkce f v bodě x_0 je „lokální vlastnost": závisí – zhruba řečeno – jen na průběhu funkce v bezprostředním okolí bodu x_0. Spojitost funkce v intervalu, např. v intervalu $\langle a, b\rangle$, znamená, že funkce je spojitá v každém bodě tohoto intervalu (v bodě a zprava, v bodě b zleva). Je to tedy opět lokální vlastnost požadovaná pro každý jednotlivý bod intervalu. Přesto se nám podařilo z této lokální vlastnosti odvodit věty 127 až 129 týkající se *celkového* průběhu funkce. Tak např. věta 127, obšírně řečeno, říká toto: je-li $a < b$, je-li funkce f spojitá v každém bodě x_0, kde $a < x_0 < b$, je-li dále spojitá zprava v bodě a a zleva v bodě b,[10]) existují čísla K_1, K_2 tak, že pro *všechna* x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $K_1 < f(x) < K_2$.[11])

§ 3. Věta o přírůstku funkce (nebo věta o střední hodnotě). Dokážeme napřed jednu „lokální" větu o derivaci.

Definice 25. *Budiž f funkce, x_0 číslo. Říkáme, že funkce f je rostoucí v bodě x_0, existuje-li číslo $\delta > 0$ tak, že pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ je $f(x) > f(x_0)$ a pro $x_0 - \delta < x < x_0$ je $f(x) < f(x_0)$. Říkáme, že funkce f je klesající v bodě x_0, existuje-li číslo $\delta > 0$ tak, že pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ je $f(x) < f(x_0)$ a pro $x_0 - \delta < x < x_0$ je $f(x) > f(x_0)$.*

[10]) To jsou samé „lokální" vlastnosti.

[11]) To už je výrok o *celkovém* průběhu funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$. Názorně to můžeme říci takto: celá „čára" $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ leží mezi přímkami $y = K_1$, $y = K_2$.

Definice je velmi názorná: funkce je rostoucí v bodě x_0, má-li ve všech bodech x, dostatečně blízkých bodu x_0, hodnotu větší nebo menší než v bodě x_0, podle toho, zda bod x leží vpravo či vlevo od bodu x_0. Při funkci klesající v bodě x_0 je tomu naopak. Je to opět „lokální" pojem: hodnotu funkce v *pevném* bodě x_0 srovnávám s hodnotou funkce v *libovolném*, ale dostatečně blízkém bodě x. Od tohoto pojmu „funkce rostoucí v bodě" je třeba rozlišovat pojem „funkce rostoucí v intervalu" (kap. V, § 3), při němž se srovnávají hodnoty funkce ve *dvou libovolných* bodech toho intervalu; o vztazích mezi oběma pojmy viz cvičení 6.

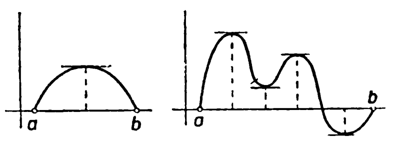
Věta 131. *I. Budiž $f'(x_0) > 0$ (popř. $f'(x_0) = +\infty$). Potom je funkce f rostoucí v bodě x_0. II. Budiž $f'(x_0) < 0$ (popř. $f'(x_0) = -\infty$). Potom je funkce f klesající v bodě x_0.*

Věta je velmi názorná a téměř samozřejmá, jak uvidíte z důkazu.

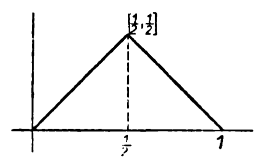
D ů k a z. V prvním případě je limita zlomku

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{6}$$

pro $x \to x_0$ kladná, popř. $+\infty$. Tedy existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \delta$ je zlomek (6) kladný, tj. čitatel má totéž znamení jako jmenovatel. Pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ je jmenovatel kladný, tedy i čitatel kladný, tedy $f(x) > f(x_0)$. Pro $x_0 - \delta < x < x_0$ je jmenovatel záporný, tedy i čitatel, tedy $f(x) < f(x_0)$. V druhém případě existuje obdobně $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \delta$ je zlomek záporný, takže



a) Obr. 36. b)



Obr. 37.

čitatel má opačné znamení než jmenovatel. Pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ je jmenovatel kladný, tedy čitatel záporný, tedy $f(x) < f(x_0)$; pro $x_0 - \delta < x < x_0$ je jmenovatel záporný, tedy čitatel kladný, tedy $f(x) > f(x_0)$.

Hlavním obsahem tohoto paragrafu jsou tři věty, jež nyní odvodíme. Představme si čáru $y = f(x)$, která pro $x = a$ a pro $x = b$ protíná osu x, tj. $f(a) = f(b) = 0$. Z názoru tušíme, že v intervalu (a, b) bude aspoň jeden bod c, v němž je tečna rovnoběžná s osou x, tj. $f'(c) = 0$. (Na obr. 36a je jeden takový bod, na obr. 36b čtyři.) Tato domněnka je správná, ovšem jen tehdy, učiníme-li o funkci $f(x)$ některé předpoklady. Tak pro funkci: $f(x) = x$ pro $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$, $f(x) = 1 - x$ pro $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ (viz obr. 37) domněnka správná není: pro $0 < x < \frac{1}{2}$ je $f'(x) = 1$, pro $\frac{1}{2} < x < 1$ je $f'(x) = -1$, pro $x = \frac{1}{2}$ pak derivace vůbec neexistuje, nýbrž pouze derivace zprava -1 a zleva $+1$. Abychom se takovým případům vyhnuli, předpokládejme že derivace $f'(x)$ existuje v intervalu (a, b), tj. v každém vnitřním bodě intervalu $\langle a, b\rangle$. Ale ani tento předpoklad ještě nestačí: je-li např. $f(x) = x$ pro $0 \leqq x < 1$, $f(1) = 0$, je $f(0) = f(1) = 0$, pro $0 < x < 1$ existuje derivace $f'(x) = 1$, ale tato derivace není nikdy rovna nule. Zde asi vadí to, že funkce $f(x)$ není spojitá zleva v bodě 1. Učiňme tedy ještě předpoklad, že $f(x)$ je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$. A za těchto předpokladů už větu dokážeme:

Věta 132 (Rolleova). *Budiž f funkce, jež má tyto vlastnosti: A) Funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, B) Funkce $f(x)$ má derivaci (vlastní nebo nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b). C) Je $f(a) = f(b) = 0$.*

Potom existuje číslo c tak, že $a < c < b$, $f'(c) = 0$.

Poznámka 1. Pro aplikace je často důležité, že bod c leží uvnitř (ne na kraji) intervalu $\langle a, b\rangle$ a že v bodech a, b nemusíme předpokládat existenci derivace.

Důkaz. Jsou možné tyto tři případy: I. Existuje aspoň jeden bod $x_1 \in \langle a, b\rangle$ tak, že $f(x_1) > 0$. II. Existuje aspoň jeden bod $x_2 \in \langle a, b\rangle$ tak, že $f(x_2) < 0$.[12]) III. Nenastává případ I ani II, takže v žádném bodě intervalu $\langle a, b\rangle$ není $f(x)$ ani kladná ani záporná, takže je $f(x) = 0$ v každém bodě intervalu $\langle a, b\rangle$. V tomto případě je tvrzení zřejmě správné (je totiž $f'(c) = 0$ dokonce pro každé $c \in (a, b)$).

Případ I. Podle vlastnosti A) a podle věty 128 existuje číslo c $(a \leqq c \leqq b)$ tak, že je

$$f(x) \leqq f(c) \quad \text{pro všechna} \quad x \in \langle a, b\rangle\,. \tag{7}$$

Tedy je též $f(c) \geqq f(x_1) > 0$; ježto podle C) je $f(a) = f(b) = 0$, je jistě $c \neq a$, $c \neq b$, tedy

$$a < c < b\,. \tag{8}$$

Podle vlastnosti B) tedy existuje vlastní nebo nevlastní derivace $f'(c)$. Kdyby bylo $f'(c) > 0$ nebo $f'(c) = +\infty$, byla by funkce f v bodě c rostoucí (věta 131) a tedy by (podle definice 25) jistě existovalo v intervalu (c, b) číslo x tak, že $f(x) > f(c)$; ale to není možné podle (7). Kdyby bylo $f'(c) < 0$ nebo $f'(c) = -\infty$, byla by funkce f v bodě c klesající a tedy by existovalo v intervalu (a, c) číslo x tak, že $f(x) > f(c)$, což rovněž není možné. Tedy: $f'(c)$ existuje, není však ani nevlastní ani vlastní a kladná ani vlastní a záporná; tedy je $f'(c) = 0$.

Případ II. Funkce $-f(x)$ je spojitá v $\langle a, b\rangle$, má derivaci (vlastní nebo nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b) a je $-f(a) = -f(b) = 0$. Mimoto je $-f(x_2) > 0$. Podle případu I existuje tedy bod c tak, že $a < c < b$, $-f'(c) = 0$, tedy $f'(c) = 0$.

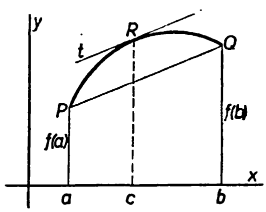
Snadným zobecněním věty Rolleovy je tato věta, v níž je vynechán požadavek $f(a) = f(b) = 0$:

[12]) Tyto dva případy se ovšem navzájem nevylučují; např. na obr. 36b nastává současně případ I i II.

Věta 133. (tzv. věta o přírůstku funkce nebo věta o střední hodnotě). *Funkce f nechť je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ a má derivaci (vlastní nebo nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b). Potom existuje v intervalu (a, b) aspoň jedno číslo c tak, že je*

$$(9) \qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a), \quad \text{tj.} \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Poznámka 2. V bodě c je tedy derivace vlastní. Význam věty 133 je velmi názorný (viz obr. 38): podíl $(f(b) - f(a)) : (b - a)$ je směrnice přímky PQ, číslo $f'(c)$ je směrnice tečny t v bodě R. Vzorec (9) tedy praví, že uvnitř oblouku PQ existuje aspoň jeden bod R, v němž je tečna rovnoběžná se spojnicí krajních bodů oblouku PQ.



Obr. 38.

Poznámka 3. Má-li funkce $f_1(x)$ v bodě x_0 nevlastní derivaci a má-li funkce $f_2(x)$ v bodě x_0 vlastní derivaci, má funkce $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$ v bodě x_0 nevlastní derivaci $F'(x_0) = f_1'(x_0)$ (viz cvičení 61 v kap. VIII, § 2; ostatně dostanete toto tvrzení okamžitě z rovnice

$$(F(x_0 + h) - F(x_0)) : h = (f_1(x_0 + h) - f_1(x_0)) : h + (f_2(x_0 + h) - f_2(x_0)) : h$$

pro $h \to 0$).

Poznámka 4. Důkaz věty 133 provedeme tak, že od funkce $f(x)$ odečteme mnohočlen nejvýše prvního stupně, který pro $x = a$ a pro $x = b$ nabývá téže hodnoty jako funkce $f(x)$; tím převedeme tuto větu na větu Rolleovu. Takový mnohočlen je

$$f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a)).$$

Důkaz věty. Položme

$$(10) \qquad \Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a)).$$

Zřejmě je $\Phi(x)$ spojitá v $\langle a, b\rangle$. Dále má funkce $\Phi(x)$ vlastní nebo nevlastní derivaci v každém bodě intervalu (a, b). Neboť, je-li v některém bodě $x \in (a, b)$ derivace $f'(x)$ nevlastní, existuje v tomto bodě podle poznámky 3 nevlastní derivace $\Phi'(x) = f'(x)$; je-li však v bodě $x \in (a, b)$ derivace $f'(x)$ vlastní, je podle (10) a podle věty o derivaci součtu (nebo rozdílu) v tomto bodě

$$(11) \qquad \Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Konečně je zřejmě $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$; podle Rolleovy věty existuje tedy v intervalu (a, b) číslo c tak, že $\Phi'(c) = 0$. Tedy je též derivace $f'(c)$ vlastní (kdyby bylo $f'(c)$ nevlastní, bylo by i $\Phi'(c)$ nevlastní) a tedy platí pro $x = c$ vzorec (11), tj. $0 = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$; odtud plyne (9).

Poznámka 5. Vzorce (9) zůstanou v platnosti, vyměním-li a s b, tj. počáteční bod intervalu s koncovým. Případ $f(a) = f(b) = 0$ vede ovšem k větě Rolleově.

Větu 133 ještě zobecníme:

Věta 134. *Buďte $f(x)$, $\varphi(x)$ dvě funkce mající tyto vlastnosti:*

A) Funkce $f(x)$, $\varphi(x)$ jsou spojité v intervalu $\langle a, b\rangle$.

B) V každém bodě x otevřeného intervalu (a, b) existuje derivace $f'(x)$ (vlastní nebo nevlastní) a vlastní derivace $\varphi'(x)$.

C) V každém bodě x intervalu (a, b) je $\varphi'(x) \neq 0$.

Potom existuje v intervalu (a, b) bod c tak, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{12}$$

Poznámka 6. Případ $\varphi(x) = x$ (tedy $\varphi'(x) = 1$) vede k větě 133.

Důkaz. Poznamenejme především: podle věty 133 existuje číslo $c_1 \in (a, b)$ tak, že $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c_1) . (b - a)$; ježto podle předpokladu C) je $\varphi'(c_1) \neq 0$, je

$$\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0. \tag{13}$$

Položme

$$F(x) = (f(x) - f(a))(\varphi(b) - \varphi(a)) - (\varphi(x) - \varphi(a))(f(b) - f(a)). \tag{14}$$

Funkce $F(x)$ je spojitá v $\langle a, b\rangle$; dále je $F(a) = F(b) = 0$. Konečně má $F(x)$ v každém bodě intervalu (a, b) derivaci: je-li v nějakém bodě $x \in (a, b)$ derivace $f'(x)$ nevlastní, je i $F'(x)$ nevlastní (viz cvičení 60, 61 v kap. VIII, § 2); je-li v nějakém bodě $x \in (a, b)$ derivace $f'(x)$ vlastní, je podle (14) též $F'(x)$ vlastní a platí rovnice

$$F'(x) = f'(x)(\varphi(b) - \varphi(a)) - \varphi'(x)(f(b) - f(a)). \tag{15}$$

Na funkci F smíme tedy užít věty Rolleovy: existuje číslo $c \in (a, b)$ tak, že $F'(c) = 0$. Derivace $f'(c)$ je tedy nutně vlastní, a tedy platí pro $x = c$ rovnice (15), tj.

$$0 = f'(c)(\varphi(b) - \varphi(a)) - \varphi'(c)(f(b) - f(a)). \tag{16}$$

Podle (13) a podle předpokladu C) je číslo $\varphi'(c) . (\varphi(b) - \varphi(a))$ různé od nuly; smím tedy rovnici (16) tímto číslem dělit, čímž dostanu rovnici (12).

Poznámka 7. Věty 132 až 134 ukazují podobnou zvláštnost jako věty § 2: z lokálních vlastností (ze spojitosti a z existence derivace) dovolují nám tyto věty činit důsledky o *celkovém* průběhu funkce. Např. věta o přírůstku funkce nám dovoluje odhadnout velikost rozdílu $f(b) - f(a)$, známe-li nějaký odhad pro derivaci $f'(x)$. Vezmu-li např.

$$f(x) = \lg x, \quad \text{je} \quad f'(x) = \frac{1}{x}\,; \quad \text{tedy} \quad \lg \tfrac{7}{5} = \lg 7 - \lg 5 = (7 - 5) \, . \, \frac{1}{c}\,,$$

kde $5 < c < 7$; tím dostáváme odhad (zatím dosti hrubý) $\frac{2}{7} < \lg \frac{7}{5} < \frac{2}{5}$. V dalších kapitolách vypracujeme právě na základě vět 133, 134 velmi vydatné metody jak pro diskusi průběhu funkcí, tak dokonce i pro číselný výpočet mnohých funkcí a čísel, např. e^x, $\lg x$, $\sin x$, e, π; význam vět 133, 134 se čtenáři v dalších kapitolách ozřejmí jistě měrou dostatečnou. Vzhledem k důležitosti vět 132 až 134 je nutné, aby si čtenář pamatoval dobře znění těchto vět, aby mu byl dokonale jasný jejich smysl i jejich důkazy.[13]) Podstatná je věta Rolleova; věty 133, 134 jsou její snadné početní důsledky.

Poznámka 8. O významu vět 127, 129 může čtenář aspoň prozatím nabýt představy z této poznámky: věty 127 jsme užili k důkazu věty 128 a věta 128 byla rozhodující pomůckou při důkazu základní věty Rolleovy; věty 129 jsme pak užili k důkazu věty 130, jež byla nutnou pomůckou při vyšetřování inverzních funkcí (věta 114). Věty § 3 jsou založeny na pojmu derivace a mají tedy podstatně odlišný ráz od vět § 2, jež užívají výhradně pojmu spojitosti; měl jsem tedy vlastně § 2 uvést již dříve, např. po kapitole V;[14]) neučinil jsem tak pouze z důvodů pedagogických.

Cvičení

Cvičení 1 až 5, 7 obsahují některé funkce, dané dosti jednoduchými výrazy, které přesto mají v blízkosti bodu $x = 0$ dosti složitý průběh. Načrtněte si zhruba průběh těchto funkcí.

1. Budiž $f_1(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $f_1(0) = 0$. Funkce je spojitá a má dokonce vlastní derivaci v každém bodě $x \neq 0$. V bodě 0 není spojitá a nemá ani limitu zprava ani zleva. V každém intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (ε kladné) nabývá $f_1(x)$ každé hodnoty v nekonečně mnoha bodech (všimněte si, že např. v intervalu $\left(\frac{1}{(2k+1)\pi}, \frac{1}{2k\pi}\right)$, $k = 1, 2, \ldots$ nabývá $f_1(x)$ podle věty 129 jistě všech hodnot intervalu $\langle -(2k+1)\pi, 2k\pi \rangle$.

2. Budiž $f_2(x) = \cos \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $f_2(0) = 0$. Funkce není spojitá, ba nemá ani limitu zprava ani zleva v bodě 0. Přesto má funkce tuto vlastnost: je-li $a < b$, nabývá funkce $f_2(x)$

[13]) Komu dělá v těchto větách obtíže nevlastní derivace, může o funkcích f, φ předpokládat existenci *vlastní* derivace: potom se důkazy trochu zjednoduší, neboť vzorce (11), (15) platí potom pro *všechna* $x \in (a, b)$. V této knize budeme nadále už téměř výhradně mluvit o vlastních derivacích.

[14]) To je patrné též z toho, že jsme se v kap. VII musili dovolávat věty 130.

v intervalu (a, b) všech hodnot ležících mezi $f_2(a), f_2(b)$. (Mají-li a, b stejná znamení, plyne to ze spojitosti; je-li $a \leqq 0$, $b \geqq 0$, plyne to odtud, že funkce f_2 nabývá v každém intervalu $(-\varepsilon, 0)$ nebo $(0, \varepsilon)$ (ε kladné) každé hodnoty intervalu $\langle -1, 1\rangle$, dokonce v nekonečně mnoha bodech.)

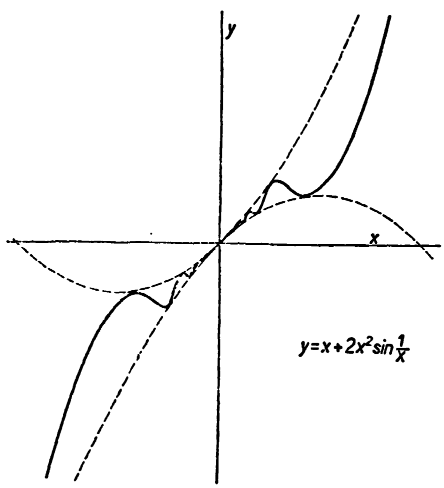
3. Budiž $f_3(x) = x \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $f_3(0) = 0$. Funkce f_3 je spojitá v $(-\infty, +\infty)$; v bodě 0 nemá derivaci zprava ani zleva (neboť $(f_3(h) - f_3(0)) : h = \sin \frac{1}{h}$ pro $h \neq 0$).

4. Budiž $f_4(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $f_4(0) = 0$. Funkce f_4 má vlastní derivaci v každém bodě $\left(\text{též v bodě 0, totiž } f_4'(0) = \lim_{h\to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0\right)$. Tato derivace však není spojitá, ba nemá ani limitu zprava ani zleva v bodě 0 $\left(\text{neboť pro } x \neq 0 \text{ je } f_4'(x) = -\cos \frac{1}{x} + 2x \sin \frac{1}{x}\right)$.

5. Budiž $f_5(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $f_5(0) = 0$. Funkce f_5 i f_5' jsou spojité v intervalu $(-\infty, +\infty)$.

6. Funkce f je rostoucí v intervalu (a, b) tehdy a jen tehdy, je-li rostoucí v každém bodě intervalu (a, b). Návod: I. Je-li rostoucí v intervalu (a, b), je zřejmě rostoucí v každém bodě intervalu (a, b). II. Nechť je rostoucí v každém bodě intervalu (a, b), ale není rostoucí v (a, b). Tedy existují c, d tak, že $a < c < d < b$, $f(c) \geqq f(d)$. Ježto f nemůže být v $\langle c, d\rangle$ konstantní (protože je rostoucí v každém bodě!), najdete snadno body α, β tak, že $c \leqq \alpha < \beta \leqq d$, $f(\alpha) > f(\beta)$. Z toho odvodím spor. Budiž M množina oněch $x \in \langle \alpha, \beta\rangle$, pro něž $f(x) \geqq f(\alpha)$, budiž $\xi = \sup M$. Je-li $\xi = \beta$, není zřejmě f rostoucí v bodě β — spor. Je-li $\alpha \leqq \xi < \beta$, existuje ke každému $\delta > 0$ číslo x_0 tak, že $f(x_0) \geqq f(\alpha)$, $\xi - \delta < x_0 \leqq \xi$, ale $f(x) < f(\alpha)$ pro $\xi < x \leqq \beta$. Z toho snadno zjistíte: ježto f je rostoucí v bodě ξ, plyne z první nerovnosti $f(\xi) \geqq f(\alpha)$, z druhé však současně $f(\xi) < f(\alpha)$, což je opět spor.

7. Existuje funkce $f_7(x)$, jež je rostoucí v bodě 0, ale není rostoucí v žádném intervalu $(-\delta, \delta)$, kde $\delta > 0$. Důkaz: budiž $f_7(x) = x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $f_7(0) = 0$. Pro $0 < |x| < \frac{1}{2}$ má $f_7(x)$ totéž znamení jako x, tedy je f_7 rostoucí v bodě 0 (dokonce je $f_7'(0) = 1$ a mohli jsme užít věty 131). V každém intervalu $(-\delta, +\delta)$ však existují body tvaru $x = \frac{1}{2k\pi}$ (k přirozené).



Obr. 39.

Pro tyto body je $f_7'(x) = 1 - 2\cos \frac{1}{x} + 4x \sin \frac{1}{x} \doteq -1$. Podle bodu I cvičení 6 a podle věty 131 nemůže tedy být f_7 rostoucí v intervalu $(-\delta, \delta)$. Načrtněte si průběh funkce f_7 (viz obr. 39).

8. Je-li f spojitá v $\langle a, b\rangle$ a má v každém vnitřním bodě intervalu $\langle a, b\rangle$ vlastní nebo nevlastní derivaci, existuje v intervalu (a, b) aspoň jedno číslo c, v němž má $f(x)$ *vlastní* derivaci (podle věty 133). Z toho plyne: je-li f spojitá v intervalu J a má-li v každém vnitřním bodě intervalu J derivaci (vlastní nebo nevlastní), leží ony body, v nichž $f'(x)$ je *vlastní*, hustě v intervalu J; to znamená: v každém intervalu $\langle a, b\rangle$ obsaženém v J leží aspoň jeden bod, v němž má $f(x)$ *vlastní* derivaci.