Diferenciální počet I

Kapitola VI. Goniometrické funkce

In: Vojtěch Jarník (author): Diferenciální počet I. (Czech). Praha: Academia, 1974. pp. 187--196.

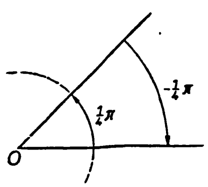
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401989

Kapitola VI

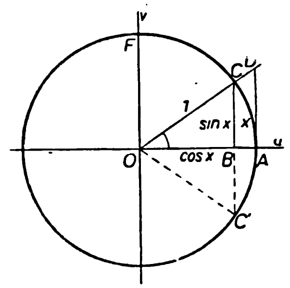
GONIOMETRICKÉ FUNKCE

§ **1. Základní vlastnosti funkcí sin x, cos x.** Zavedeme ještě další důležité funkce, tzv. *goniometrické* (nebo též *trigonometrické*) funkce sin x, cos x (čti sinus, kosinus). Jejich geometrickou definici znáte ze školy; připomenu ji, přičemž však prozatím v tomto paragrafu nebudu si činit nároků na přesnost.

Podotýkám, že úhly budeme zde vždy měřit v míře obloukové. Přechod od míry „stupňové" k míře obloukové je vám rovněž znám: sestrojím kružnici o jednotkovém poloměru, jejíž střed je ve vrcholu úhlu; délka oblouku této kružnice ležícího uvnitř úhlu (mezi oběma jeho rameny) jest „oblouková míra" tohoto úhlu. Ježto obvod celé kružnice (o poloměru 1) je 2π, mají úhly 180°, 90°, 60°, 45°, 30°, 1° po řadě



Obr. 20.



Obr. 21.

obloukovou míru π, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{180}\pi$; obecně úhel n stupňů má obloukovou míru $\frac{1}{180}n\pi$. Zavádíme též „orientaci" úhlů: úhlům probíhaným v „kladném" smyslu (proti ručičkám hodinovým) dáváme hodnotu kladnou, úhlům probíhaným ve smyslu „záporném" hodnotu zápornou.

Funkce sin x, cos x zavádíme pak takto (viz obr. 21). V rovině, opatřené pravoúhlými osami u, v (písmeno x si schovávám pro jiný účel) sestrojme kružnici o středu v počátku a o poloměru 1. Budiž nyní x libovolné reálné číslo; od bodu $A=[1,0]$ nanesme na kružnici oblouk délky x; koncový bod tohoto oblouku bude jistý bod C.[1]) Abscisu bodu C značím znakem cos x, ordinátu znakem sin x.[2]) Zvolíme li

[1]) Lépe řečeno: nanesu od bodu A na kružnici oblouk délky $|x|$, a to ve smyslu kladném, je-li x kladné, ve smyslu záporném, je-li x záporné. Délka oblouku AC je tedy $|x|$. Bodu D si zatím nevšímejte.

[2]) Je-li C bod uvnitř prvního kvadrantu, tj. je-li $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, má cos x, sin x skutečně význam, běžný z trigonometrie: v pravoúhlém trojúhelníku OBC je úhel při vrcholu O roven x, poměr protilehlé (popř. přilehlé) odvěsny ku přeponě (jejíž délka je 1) je sin x (popř. cos x).

nyní místo čísla x číslo $-x$, dospějeme místo k bodu C k bodu C' (viz obr. 21); z toho plyne

$$\cos(-x) = \cos x\,, \quad \sin(-x) = -\sin x\,.^{3)} \tag{1}$$

Z obr. 21 je vidět: roste-li x od nuly do $\frac{1}{2}\pi$, běží bod C od bodu A k bodu F, takže $\sin x$ (tj. ordináta bodu C) roste. Funkce $\sin x$ je tedy rostoucí v intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$; zřejmě je $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$.

Ukažme ještě, že $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Budiž především $0 < x < \frac{1}{2}\pi$. Z obr. 21 vidíte, že plocha výseče OAC (jež se rovná číslu $\frac{1}{2}x$, tj. polovičnímu součinu z oblouku x a z poloměru) je větší než plocha trojúhelníku OBC a menší než plocha trojúhelníku OAD. Je však $\overline{OB} = \cos x$, $\overline{BC} = \sin x$, $\overline{OA} = 1$ a z podobnosti plyne $\overline{AD} = = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \cdot \overline{BC} = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Tedy

$$\tfrac{1}{2}\sin x \cos x < \tfrac{1}{2}x < \tfrac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}\,,$$

$$\frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}\,, \quad \frac{\sin x}{x} > \cos x\,,$$

tedy

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x} \text{ pro } 0 < x < \tfrac{1}{2}\pi\,. \tag{2}$$

Je-li za druhé $-\frac{1}{2}\pi < x < 0$, položme $y = -x$, takže $0 < y < \frac{1}{2}\pi$ a tedy podle (2) $\cos y < \dfrac{\sin y}{y} < \dfrac{1}{\cos y}$; ale podle (1) je $\cos y = \cos x$, $\dfrac{\sin y}{y} = \dfrac{-\sin x}{-x} = \dfrac{\sin x}{x}$, takže nerovnosti (2) platí i v tomto případě, tj. nerovnosti (2) platí pro $0 < |x| < \frac{1}{2}\pi$. Z obrázku vidíte, že $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, takže $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1$; podle (2) a podle věty 105 a poznámky 2 na str. 170 je tedy vskutku $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Připomínám ještě dva vzorce, známé ze školy:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y\,,$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\,.$$

3) Připouštíme též čísla x, jejichž prostá hodnota je větší než 2π, a to v tomto smyslu: vezmu-li číslo x, dospěji do bodu C; vezmu-li místo toho číslo $2\pi + x$ nebo $-2\pi + x$, značí to, že — vycházeje z bodu A — mám napřed nanést v kladném nebo záporném smyslu oblouk délky 2π, čímž proběhnu právě jednou celou kružnici a dostanu se tak opět do bodu A, načež nanesu ještě oblouk x, čímž opět dospěji do bodu C; tedy $\cos(2\pi + x) = \cos x$, $\sin(2\pi + x) = = \sin x$.

Shrňme to, co jsme dosud řekli:

Základní vlastnosti funkcí sin x, cos x. *Funkce* sin x, cos x *mají tyto vlastnosti:*

1. *Jsou definovány pro všechna* x.

2. *Pro libovolná* x, y *je*

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y\,; \tag{3}$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\,;$$
$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x\,. \tag{4}$$

3. *Existuje kladné číslo, které označíme znakem* π, *takové, že funkce* sin x *je rostoucí v intervalu* $\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ *a že* $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$; *mimoto je* $\sin 0 = 0$.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1\,.$

Teď je však třeba učinit jednu poznámku. To, co jsme v tomto odstavci řekli, spočívá dosud na nesolidním základě. Způsob, jakým jsme zavedli sinus a kosinus, předpokládá znalost pojmu „délka oblouku (a to libovolného oblouku) kružnice". Pojem délky oblouku křivé čáry je však dosti složitý limitní pojem, kterým jste se ve škole nezabývali tak důkladně, abychom mohli tyto znalosti ze školy vzít za spolehlivý základ (totéž platí o obvodu *celé* kružnice, který vám ve škole sloužil k definici čísla π); pojmem délky oblouku křivé čáry se budeme zabývat až později. Mohl bych ovšem se zavedením goniometrických funkcí počkat až do té doby (a ušetřit si tím tuto poznámku), ale tím bych čtenáře zbavil na dlouhou dobu možnosti pracovat s těmito funkcemi, které mají mnoho jednoduchých vlastností a poskytují vhodnou látku ke cvičení. To jsem nepovažoval za účelné a proto zavádím tyto funkce již nyní.

V dalším budeme — pokud se funkcí sin x, cos x týče — postupovat takto: Budeme budovat *výhradně* na uvedených čtyřech „základních vlastnostech" a z nich budeme odvozovat (teď již zase přesně) další vlastnosti funkcí sin x, cos x, jakož i vlastnosti čísla π (které se vyskytuje ve vlastnosti 3). Po delší době se nám pak podaří v kap. XII zjistit, že existuje vskutku jedna a jen jedna dvojice funkcí, která má uvedené čtyři „základní vlastnosti". Označíme-li tedy tyto dvě funkce znaky sin x, cos x, bude tím dokázáno, že tyto funkce mají skutečně jmenované čtyři základní vlastnosti, čímž budou dokázány též všechny ostatní vlastnosti a věty, které do té doby ze čtyř „základních vlastností" odvodíme. Tak se ocitneme zase na pevné půdě.

§ 2. Další vlastnosti funkcí sin x, cos x. Ze základních vlastností funkcí sin x, cos x odvodíme některé další. Položme v prvním vzorci (3) $y = 0$; ježto $\sin 0 = 0$, obdržíme $\sin x = \sin x \,.\, \cos 0$; volme x tak, že $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ (třeba $x = \frac{1}{4}\pi$); podle vlastnosti 3 je $\sin x > 0$. Ježto $\sin x \,.\, (1 - \cos 0) = 0$, je

$$\cos 0 = 1\,. \tag{5}$$

Položme v druhé rovnici (3) $y = -x$; podle (4), (5) obdržíme

$$(6) \qquad 1 = \cos^2 x + \sin^2 x\,;$$ [4]

ježto $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$, plyne z (6)

$$(7) \qquad \cos \tfrac{1}{2}\pi = 0\,.$$

Položím-li v (3) $y = \frac{1}{2}\pi$, dostanu podle vlastnosti 3 a podle (7)

$$(8) \qquad \sin(\tfrac{1}{2}\pi + x) = \cos x\,, \quad \cos(\tfrac{1}{2}\pi + x) = -\sin x\,;$$

opětovným užitím těchto rovnic plyne

$$(9) \qquad \begin{aligned} \sin(\pi + x) &= \cos(\tfrac{1}{2}\pi + x) = -\sin x\,, \\ \cos(\pi + x) &= -\sin(\tfrac{1}{2}\pi + x) = -\cos x\,, \end{aligned}$$

a z (9) dále $\sin(2\pi + x) = -\sin(\pi + x) = \sin x$, $\cos(2\pi + x) = -\cos(\pi + x) = \cos x$. Slovy: hodnoty funkcí $\sin x$, $\cos x$ se nezmění, zvětším-li číslo x o 2π. Říkáme proto, že $\sin x$, $\cos x$ jsou *periodické funkce s periodou* 2π. Obecně: Budiž p kladné číslo a budiž $f(x)$ funkce mající tuto vlastnost: je-li tato funkce definována v bodě x, je definována též v bodech $x + p$, $x - p$ a platí $f(x) = f(x + p)$; o takové funkci budeme říkat, že je *periodická s periodou* p. Je-li $f(x)$ periodická s periodou p a je-li definována v nějakém bodě x, je definována též v bodě $x + p$, tedy též v bodě $(x + p) + p = x + 2p$, dále v bodě $x + 3p$ atd., jakož i v bodech $x - p$, $x - 2p$, $x - 3p, \ldots$ a platí $f(x) = f(x + p) = f(x + 2p) = f(x + 3p) = \ldots = f(x - p) = f(x - 2p) = \ldots$ Tedy platí speciálně pro každé x a pro každé celé k $(k = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots)$

$$(10) \qquad \sin(x + 2k\pi) = \sin x\,, \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x\,.$$

Píšete-li v (8), (9) $-x$ místo x, dostanete podle (4)

$$(11) \qquad \sin(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \cos x\,, \quad \cos(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \sin x\,,$$

$$(12) \qquad \sin(\pi - x) = \sin x\,, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x\,.$$

Rovnice (5) až (12) si snadno zapamatujete z obr. 21, z něhož snadno vyčtete, co se stane se souřadnicemi bodu C, zvětším-li x o $\frac{1}{2}\pi$ nebo o π atd.; my jsme ovšem tyto rovnice odvodili ze čtyř základních vlastností a ne z pohledu na obrázek. Podotkněme, že v intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$ je $\sin x > 0$, $\cos x > 0$. Pro funkci $\sin x$ je to patrno z vlastnosti 3; pro $\cos x$ je to patrno takto: je-li $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, je též $0 < \frac{1}{2}\pi - x < \frac{1}{2}\pi$ a tedy podle (11) $\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi - x) > 0$. Z rovnic (3) pro $y = x$ plyne (viz též rovnici (6))

$$(13) \qquad \begin{gathered} \sin 2x = 2 \sin x \cos x\,, \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1\,, \end{gathered}$$

---

[4]) Pro zkrácení píši $\cos^2 x$ místo $(\cos x)^2$ apod.; obecně místo $(f(x))^k$ píši často $f^k(x)$ (to tedy značí k-tou mocninu čísla $f(x)$); též $\lg^k x$ bude značit k-tou mocninu čísla $\lg x$ apod.

$$\text{(14)} \qquad \sin x = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}\,, \quad \cos x = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

(je-li $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, platí ovšem u odmocnin znamení $+$); např. pro $x = \frac{1}{4}\pi$ (ježto $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$)

$$\text{(15)} \qquad \sin \tfrac{1}{4}\pi = \cos \tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Pro $x = \frac{1}{6}\pi$ je $2x = \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{6}\pi$, tedy $\cos 2x = \sin x$ a rovnice $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ dává $\sin \frac{1}{6}\pi = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{6}\pi$; položíme-li $\sin \frac{1}{6}\pi = u$, je tedy $2u^2 + u - 1 = 0$; tato rovnice má dva kořeny $\frac{1}{2}$, -1; ježto $u > 0$, je $u = \sin \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$; podle (6) je $\cos \frac{1}{6}\pi = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; tedy celkem

$$\text{(16)} \qquad \sin \tfrac{1}{6}\pi = \cos \tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2}\,, \quad \cos \tfrac{1}{6}\pi = \sin \tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,.$$

Píšete-li v rovnicích (3) $-y$ místo y, dostanete podle (4)

$$\text{(17)} \qquad \begin{aligned} \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y\,, \\ \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y\,. \end{aligned}$$

Sečtením a odečtením rovnic (3) a (17) plyne

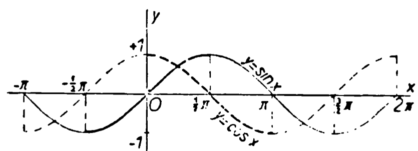
$$\text{(18)} \qquad \begin{aligned} \sin(x + y) + \sin(x - y) &= 2 \sin x \cos y\,, \\ \sin(x + y) - \sin(x - y) &= 2 \cos x \sin y\,, \\ \cos(x + y) + \cos(x - y) &= 2 \cos x \cos y\,, \\ \cos(x + y) - \cos(x - y) &= -2 \sin x \sin y\,. \end{aligned}$$

Buďte α, β dvě libovolná čísla; volme x, y tak, aby bylo $x + y = \alpha$, $x - y = \beta$, tj. $x = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $y = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$; potom plyne z (18)

$$\text{(19)} \qquad \begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}\,, \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}\,, \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}\,, \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}\,. \end{aligned}$$

Chceme-li studovat průběh funkce $\sin x$, stačí se omezit na interval $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$. V intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, 0 \rangle$ dostaneme totiž potom průběh funkce $\sin x$ z rovnice $\sin x = -\sin(-x)$; pro interval $\langle \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \rangle$ užijeme rovnice $\sin(\pi + x) = -\sin x$. Tím dostaneme průběh funkce $\sin x$ v intervalu délky 2π, tj. v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \rangle$; pro ostatní hodnoty x užijeme periodicity (tj. rovnice (10)). Zároveň je vidět: roste-li

x od $-\frac{1}{2}\pi$ do 0, klesá $-x$ od $\frac{1}{2}\pi$ do 0, tedy (vlastnost 3) $\sin(-x)$ klesá od 1 do 0, tj. $\sin x = -\sin(-x)$ roste od -1 do 0. Z toho je vidět, že funkce $\sin x$ je rostoucí v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$; z rovnice $\sin(\pi + x) = -\sin x$ je vidět, že funkce $\sin x$ je klesající v intervalu $\langle\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\rangle$; dále se stoupání a klesání střídá podle periodicity. Pro $x = 0$ a pro $x = \pi$ je $\sin x = 0$; pro žádné jiné hodnoty x intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\rangle$ není $\sin x = 0$, jak je vidět ze stoupání a klesání funkce. Ostatní hodnoty x, pro něž je $\sin x = 0$, dostaneme z periodičnosti a vidíme: *Rovnice* $\sin x = 0$ *platí tehdy a jen tehdy, je-li* $x = k\pi$, *k celé* ($k = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots$). Graf je načrtnut (plně) na obr. 22.[5]) Z rovnice $\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi + x)$ plyne, že kosinus má v bodě x touž hodnotu jako sinus v bodě $\frac{1}{2}\pi + x$ (posunutém o $\frac{1}{2}\pi$ doprava). Graf funkce $\cos x$ dostanu tedy tím, že graf funkce $\sin x$ „posunu o $\frac{1}{2}\pi$ vlevo"; viz čárkovanou čáru na obrázku 22. Z toho je speciálně vidět, že *rovnice* $\cos x = 0$ *platí tehdy a jen tehdy, je-li* $x = (k + \frac{1}{2})\,\pi$, *k celé* ($k = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots$).



Obr. 22.

Věta 111. *Funkce* $\sin x$, $\cos x$ *jsou spojité v každém bodě* (tj. jsou spojité v intervalu $(-\infty, +\infty)$).

Důkaz. Budiž x_0 libovolný bod; máme (podle věty 103) dokázat, že $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$, čili

$$\lim_{h\to 0} \sin(x_0 + h) = \sin x_0\,, \quad \lim_{h\to 0} \cos(x_0 + h) = \cos x_0\,,$$

čili

$$\lim_{h\to 0} (\sin(x_0 + h) - \sin x_0) = 0\,, \quad \lim_{h\to 0} (\cos(x_0 + h) - \cos x_0) = 0\,.^{6})$$

Jest podle (3), (13)

$$\sin(x_0 + h) - \sin x_0 = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0 =$$
$$= \sin x_0 (\cos h - 1) + \cos x_0 \sin h = -2 \sin x_0 \sin^2 \tfrac{1}{2}h + \cos x_0 \,.\, \sin h\,.$$

Ale $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$, tedy $\lim\limits_{h\to 0} \sin h = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h} \,.\, h = 1 \,.\, 0 = 0$, tedy též $\lim\limits_{h\to 0} \sin \frac{1}{2}h = 0$ (viz cvičení 2 v kap. V, § 5), takže

$$\lim_{h\to 0} (\sin(x_0 + h) - \sin x_0) =$$
$$= -2 \sin x_0 \lim_{h\to 0} \sin^2 \tfrac{1}{2}h + \cos x_0 \lim_{h\to 0} \sin h = 0\,.$$

[5]) K přesnějšímu narýsování „sinusoidy" $y = \sin x$ bylo by ovšem třeba znát větší počet bodů této křivky; prostředky k pohodlnému počítání funkce $\sin x$ získáme později. Mimoto nevíme vlastně, jaké měřítko jsme zvolili na ose x, poněvadž jsme dosud nestanovili hodnotu čísla π.

[6]) Zde je x_0 konstanta (pevně zvolené číslo), h proměnná.

Podobně

$$\cos(x_0 + h) - \cos x_0 = \cos x_0 (\cos h - 1) - \sin x_0 \sin h =$$
$$= -2 \cos x_0 \sin^2 \tfrac{1}{2}h - \sin x_0 \sin h$$

a limita tohoto výrazu je opět nula (jako dříve).

§ 3. **Funkce** $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$. Tyto funkce (čti: tangens, kotangens) jsou definovány takto: $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, pokud tyto výrazy mají smysl; tedy $\operatorname{tg} x$ je definována pro všechna $x \neq (k + \frac{1}{2})\,\pi$ $(k = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots)$, $\operatorname{cotg} x$ pro všechna $x \neq k\pi$ $(k = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots)$. Píši-li $-x$ místo x, nezmění se kosinus, kdežto sinus změní znamení; tedy $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$.

Podle věty 111 je funkce $\operatorname{tg} x$ spojitá v každém bodě, vyjma v těch bodech, v nichž je $\cos x = 0$; rovněž funkce $\operatorname{cotg} x$ je spojitá v každém bodě, vyjma v těch bodech, v nichž je $\sin x = 0$. Jest $\operatorname{tg}(x + \pi) = \dfrac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x$ a rovněž $\operatorname{cotg}(x + \pi) = \operatorname{cotg} x$ (přitom je ovšem nutno vyjmout ty body, kde jmenovatel je nula). Tedy: *funkce* $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ *jsou periodické s periodou* π. Stačí tedy vyšetřovat funkce $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ v nějakém intervalu délky π. Vyšetřujme např. funkci $\operatorname{tg} x$ v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.[7]) Je-li $0 < x_1 < x_2 < \frac{1}{2}\pi$, je $0 < \sin x_1 < \sin x_2$, $0 < \cos x_2 < \cos x_1$ ($\cos x$ je klesající funkcí v $(0, \frac{1}{2}\pi)$), tedy $0 < \dfrac{1}{\cos x_1} < \dfrac{1}{\cos x_2}$ a tedy $0 < \operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$, tj. $\operatorname{tg} x$ je rostoucí a kladná v intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$. Jak je to v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$? Budiž $-\frac{1}{2}\pi < x_1 < x_2 < 0$; potom je $0 < -x_2 < -x_1 < \frac{1}{2}\pi$, tedy $\operatorname{tg}(-x_2) < \operatorname{tg}(-x_1)$, tj. $-\operatorname{tg}(-x_1) < -\operatorname{tg}(-x_2)$, tj. $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$; tedy je $\operatorname{tg} x$ rostoucí a záporná v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$. Mimoto je $\operatorname{tg} 0 = 0$, takže je v celku vidět: *funkce* $\operatorname{tg} x$ *je rostoucí v intervalu* $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Dokažme dále, že $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi -} \operatorname{tg} x = +\infty$.

Budiž K libovolné číslo; máme ukázat, že existuje kladné číslo $\delta > 0$ tak, že pro všechna x intervalu $(\frac{1}{2}\pi - \delta, \frac{1}{2}\pi)$ je $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} > K$, přičemž se smíme omezit na hodnoty $K > 0$. Je $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} \sin x = \sin \frac{1}{2}\pi = 1$, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} \cos x = \cos \frac{1}{2}\pi = 0$. Existuje tedy především číslo $\delta_1 > 0$ tak, že pro $\frac{1}{2}\pi - \delta_1 < x < \frac{1}{2}\pi$ je $\sin x > \frac{1}{2}$; za druhé existuje číslo $\delta_2 > 0$ tak, že pro $\frac{1}{2}\pi - \delta_2 < x < \frac{1}{2}\pi$ je $0 < \cos x < \dfrac{1}{2K}$. Položme $\delta = \operatorname{Min}(\delta_1, \delta_2)$; je-li $\frac{1}{2}\pi - \delta < x < \frac{1}{2}\pi$, je $\sin x > \frac{1}{2}$, $\dfrac{1}{\cos x} > 2K$ a tedy $\operatorname{tg} x >$

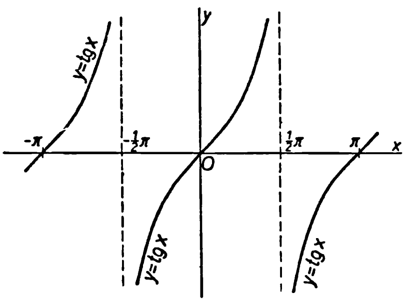
[7]) Beru *otevřený* interval, ježto v bodech $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ není funkce $\operatorname{tg} x$ definována.

$> \frac{1}{2} \cdot 2K = K$. Dále tvrdím: $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}\pi+} \operatorname{tg} x = -\infty$. Důkaz: budiž dáno K; existuje $\delta > 0$ tak, že pro $\frac{1}{2}\pi - \delta < y < \frac{1}{2}\pi$ je $\operatorname{tg} y > -K$ (ježto $\lim\limits_{y \to \frac{1}{2}\pi-} \operatorname{tg} y = +\infty$). Je-li $-\frac{1}{2}\pi < x < -\frac{1}{2}\pi + \delta$, položme $y = -x$, takže $\frac{1}{2}\pi - \delta < y < \frac{1}{2}\pi$, takže je $\operatorname{tg} y > -K$, $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} y < K$, čímž je důkaz proveden. Shrňme tyto výsledky:

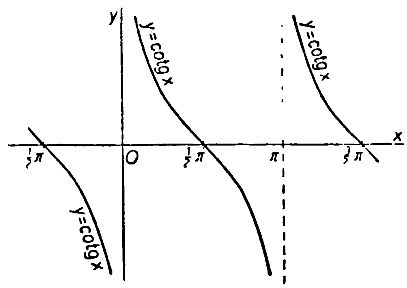
Věta 112. *Funkce* $\operatorname{tg} x$ *je rostoucí a spojitá v intervalu* $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. *Mimoto je*

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi-} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{x \to -\frac{1}{2}\pi+} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Z periodičnosti je patrno, že funkce $\operatorname{tg} x$ je např. také rostoucí v intervalu $(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$, v intervalu $(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi)$ atd.; dále že $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi+} \operatorname{tg} x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}\pi-} \operatorname{tg} x = +\infty$ atd.; viz obr. 23.



Obr. 23.



Obr. 24.

Podle (8) a podle periodičnosti je

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi + x)}{-\cos(\frac{1}{2}\pi + x)} = -\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi + x) = -\operatorname{tg}(x - \frac{1}{2}\pi);$$

fanction $\operatorname{cotg} x$ má v bodě x až na znamení touž hodnotu jako funkce $\operatorname{tg} x$ v bodě $x - \frac{1}{2}\pi$. Z věty 112 a z grafu funkce $\operatorname{tg} x$ dostáváme tedy ihned následující větu, jakož i graf funkce $\operatorname{cotg} x$ (obr. 24):

Věta 113. *Funkce* $\operatorname{cotg} x$ *je spojitá a klesající v intervalu* $(0, \pi)$. *Dále je*

$$\lim_{x \to \pi-} \operatorname{cotg} x = -\infty, \quad \lim_{x \to 0+} \operatorname{cotg} x = +\infty.$$

Z definice tangenty a kotangenty ihned plyne (použijeme-li výsledků § 2): $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{tg} \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg} \frac{1}{4}\pi = 1$, $\operatorname{tg} \frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg}(-\frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ atd.; příslušné hodnoty kotangenty obdržíme z rovnice $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$, platné pro všechny hodnoty x, pro něž je $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$ (poznamenejme ještě, že $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\pi = 0$).

Z rovnic (3) plynou ihned obdobné rovnice pro $\operatorname{tg}(x + y)$, $\operatorname{cotg}(x + y)$; např.

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y};$$

dělíme-li v posledním zlomku čitatel i jmenovatel číslem $\cos x \cos y$ (ovšem všechno za předpokladu $\cos(x + y) \neq 0$, $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$), dostaneme

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Podobně byste mohli ze vzorců § 1, 2 odvodit další vzorce (známé ze školy) pro tg a cotg; nebudu se tím zdržovat, pokud nebudu příslušné vzorce přímo potřebovat.

Ještě jedno pojmenování zavedeme. Funkce x^n při *lichém* n, dále funkce $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ mají tuto vlastnost: *je-li funkce f definována v nějakém bodě x, je definována též v bodě $-x$ a platí $f(-x) = -f(x)$; funkcím, jež mají tuto vlastnost, budeme říkat liché funkce.* Např. je vskutku $(-x)^n = -x^n$ (pro liché n), $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$, $\sin(-x) = -\sin x$ (pokud ovšem pravá strana příslušné rovnice má smysl). Podobně nazýváme *sudou funkcí* každou funkci f, jež má tuto vlastnost: *je-li funkce f definována v nějakém bodě x, je definována též v bodě $-x$ a platí $f(-x) = f(x)$.* Příklady sudých funkcí: x^n pro sudé n, $\cos x$, $x^6 + x^4 + 1$, $\operatorname{tg}^2 x$.

Cvičení

Často se vyskytují v aplikacích matematiky následující čtyři funkce, pro něž se zavádí proto zvláštní označení a název:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

(název: hyperbolický sinus, kosinus, tangens, kotangens — společný název hyperbolické funkce; místo znaků sinh x atd. se užívá leckdy jiných, např. Sh x, $\mathfrak{Sin}\, x$ apod.).

1. Všechny uvedené čtyři funkce jsou spojité v každém bodě, vyjma poslední, jež není spojitá v bodě 0.

2. cosh x je sudá funkce, ostatní jsou liché.

3. $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$;
$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$;

$$\operatorname{tgh}(x + y) = \frac{\operatorname{tgh} x + \operatorname{tgh} y}{1 + \operatorname{tgh} x \operatorname{tgh} y}.$$

Užijete-li cvičení 2, dostanete odtud výrazy pro cosh $(x - y)$ atd.

4. Sečtete-li a odečtete-li výrazy pro cosh $(x + y)$, cosh $(x - y)$ a položíte potom $x + y = \alpha$, $x - y = \beta$, obdržíte

$$\cosh\alpha + \cosh\beta = 2\cosh(\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\beta)\cosh(\tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\beta);$$
$$\cosh\alpha - \cosh\beta = 2\sinh(\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\beta)\sinh(\tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\beta).$$

Obdobně pro $\sinh\alpha \pm \sinh\beta$.

5. $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$.

6. Dosadíte-li do první rovnice cvičení 3 $y = x$, dostanete podle cvičení 5 snadno

$$\cosh x = \sqrt{\frac{\cosh 2x + 1}{2}}, \quad \sinh x = \pm\sqrt{\frac{\cosh 2x - 1}{2}}$$

(horní znamení pro $x \geqq 0$, dolní pro $x < 0$).

7. $(\cosh x)^2 = \dfrac{1}{1 - (\operatorname{tgh} x)^2}$; $(\sinh x)^2 = \dfrac{1}{(\operatorname{cotgh} x)^2 - 1}$ (druhý vzorec neplatí pro $x = 0$).

8. Z cvičení 6, 7 plyne $\cosh 2x = \dfrac{1 + (\operatorname{tgh} x)^2}{1 - (\operatorname{tgh} x)^2}$; z druhého vzorce cvičení 3 pro $y = x$ a z cvičení 7 plyne $\sinh 2x = 2 \operatorname{tgh} x (\cosh x)^2 = \dfrac{2 \operatorname{tgh} x}{1 - (\operatorname{tgh} x)^2}$.

9. Také pro goniometrické funkce platí vzorce obdobné k cvičení 7, 8:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}, \quad \cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

(tyto vzorce platí, pokud $\operatorname{tg} x$, popř. $\operatorname{cotg} x$ má smysl; odvoďte tyto vzorce).

Všimněte si obdoby mezi vzorci pro funkce goniometrické a hyperbolické. Všimněte si dále: je-li $x = \cos u$, $y = \sin u$, je $x^2 + y^2 = 1$, tj. bod $[x, y]$ leží (při libovolném u) na kružnici $x^2 + y^2 = 1$. Obdobně: je-li $x = \cosh u$, $y = \sinh u$, leží podle cvičení 5 bod $[x, y]$ na rovnoosé hyperbole $x^2 - y^2 = 1$. Odtud název „hyperbolické funkce“.