Libor Koudela
Problém rektifikace ve vývoji analýzy

In: Jindřich Bečvář (editor); Martina Bečvářová (author): Mathematics throughout the ages. VI. (Czech). , 2010. pp. 141–174.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401733

PROBLÉM REKTIFIKACE VE VÝVOJI ANALÝZY

LIBOR KOUDELA

Abstrakt

Rektifikací oblouku křivky rozumíme stanovení jeho délky. Matematická formulace předpokládá uplatnění nějaké formy limitního procesu a rektifikace je proto úlohou především analytickou. Článek pojednává o důležitých etapách v historii rektifikace na pozadí vývoje analýzy, od prvních úvah o rektifikaci kružnice ve starověku až po moderní teorii rektifikace formulovanou Duhamelem.

Úvod

Rektifikace je úloha, která vznikla z přirozené představy: chceme-li změřit délku křivky, musíme ji nejprve „narovnat“ (rektifikovat). Formulace úlohy i způsoby řešení se v průběhu vývoje matematiky měnily. První úvahy o rektifikaci se týkaly kružnice a souvisely se snahou vyřešit kvadraturu kruhu. Podle Aristotela se však jednalo o úlohu, ležící mimo rámec geometrie (patrně proto, že její řešení nebylo možné nalézt konstrukcí tvořenou konečným počtem úkonů).

U Archiméda se projevuje posun od metafyzického chápání problému k praktickému. Nemožnost nalézt délku kružnice geometrickými prostředky mu nebránila v tom, aby pro ni nestanovil alespoň horní a dolní odhad. Opíral se přitom o postulát (axiom), na jehož základě vůbec bylo možné délky čar porovnávat a který potom provázel úvahy o rektifikaci až do moderní doby.

Zájem o geometrii probuzený na počátku novověku přinesl i pokusy o rektifikaci dalších křivek, které byly dílem úspěšné, dílem neúspěšné a alespoň zpočátku neměly ohlas. Uplatňovaly se při nich kinematické úvahy, představa křivky jako infinitezimálně lomené čáry i klasická metoda důkazu pomocí *reductio ad absurdum*. Na konci 50. let 17. století se z rektifikace stal prestižní problém. Od dílčích úspěchů provázených spory o prvenství vedla cesta k obecné metodě a k postupnému nahrazování geometrických postupů analytickými. Praktická upotřebitelnost výsledků i metod jejich získávání vedly k akceptování numerických výpočtů. Jako úloha spojující určování tečen a kvadratur hrála rektifikace významnou úlohu při vytváření infinitezimálního počtu.

Pro křivku popsanou parametricky nebylo problémem sestavit integrál vyjadřující její délku, který v případě křivky představované grafem funkce $y = f(x)$ mezi přímkami $x = a$ a $x = b$ má tvar

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{1}$$

Úspěšnost řešení však byla závislá na možnosti určit daný integrál. Ukázalo se, že i rektifikace velmi jednoduchých křivek (např. elipsy) mohou vést na integrály, které nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

Devatenácté století přineslo úsilí o vybudování analýzy na pevných aritmetických základech a její emancipaci na geometrii. Původně intuitivně samozřejmá úloha přiřazení délky křivce a její stanovení pomocí integrálu (1) byla obrácena: zhruba řečeno, délkou křivky byl nazván právě integrál, který dříve byl pouze prostředkem pro její stanovení.

Rektifikace křivek se dotýká i některých jiných problémů. Vedle zmíněné kvadratury má blízko zejména k určování obsahu zakřivené plochy (představa jejího převedení na rovnou plochu vedla k méně užívanému pojmu komplanace). Historie rektifikace kružnice je těsně spjata s historií čísla π. S existencí integrálu (1) a pojmem rektifikovatelnosti úzce souvisí pojem konečné variace.

Historických prací věnovaných výlučně rektifikaci není mnoho; většinou si všímají vybraných etap v historii úlohy, přičemž zajímavé je zejména období prvních úspěšných rektifikací kolem poloviny 17. století (např. [Bo], [Hf], [Ko]). Nejzevrubnějším pojednáním o rektifikaci je více než čtyřsetstránková doktorská disertační práce Gilberta Trauba [Tr] z roku 1984, která bohužel nebyla publikována a je poměrně obtížně dostupná.

Rovné a křivé

V řecké filosofii byly *přímost* a *křivost* tradičně řazeny mezi základní protivy, které jsou počátkem jsoucna. Aristotelés (384 př. n. l.–322 př. n. l.), jeden z největších myslitelů starověku, v *Metafyzice* (I, 5, 986a) vyjmenovává deset základních protiv, na nichž je podle pythagorejců založen svět. Jednu dvojici tvoří i přímé a křivé. Ačkoliv Aristotelés zjevně považoval toto pojetí za primitivní, i on byl přesvědčen o rozdílném ontologickém statutu přímého a křivého.

Kvadratura kruhu, jeden ze tři klasických problémů starořecké geometrie, je úlohou, která obě protivy pojí dohromady. Samotný název kvadratura kruhu v sobě obsahuje představu přeměny, transmutace křivočarého útvaru v přímočarý. Přinejmenším od 5. st. př. n. l. byla v řeckém prostředí široce rozebírána a zmiňována je hned na několika místech Aristotelova díla.

V knize *O sofistických důkazech* (11, 172b) jmenuje Aristotelés vedle Hippokrata, který se zabýval určením obsahu obrazců ohraničených oblouky dvou kružnic (tzv. Hippokratových měsíčků), ještě sofisty Antifonta a Brysóna, kteří se pokusili problém kvadratury kruhu vyřešit. Jejich důkazy uvádí jako příklady eristické (klamné) argumentace. Brysónův postup je podle Aristotela nesprávný, protože používá pro řešení geometrického problému prostředků, které nepatří do geometrie. O Antifontově metodě se na jiném místě (*Fyzika* I, 2, 185a) zmiňuje pouze v tom smyslu, že zabývat se jí není úkolem matematika. O vlastní povaze postupu obou sofistů se více dozvídáme od Aristotelových pozdějších komentátorů Simplikia (*In Phys.* 55, 20 a n.) a Themistia (*In Phys.* 4, 2 a n.).

Antifontův postup je založen na postupných aproximacích obsahu kruhu pomocí obsahů vepsaných pravidelných mnohoúhelníků. Začneme např. s vepsaným čtvercem (jak ukazuje Simplikios). V dalším kroku zkonstruujeme nad každou stranou čtverce rovnoramenný trojúhelník s vrcholem uprostřed menšího oblouku kružnice nad příslušnou stranou, čímž dostaneme vepsaný osmiúhelník. Stejným způsobem pokračujeme dále. Postupné zvětšování počtu stran vepsaného mnohoúhelníku povede až k jeho splynutí s kruhem; tak budeme schopni najít čtverec, jehož obsah je roven obsahu kruhu.

Antifontova metoda předpokládá úplné vyčerpání plochy oddělující obvod kruhu od vepsaných mnohoúhelníků a vychází zřejmě z aplikace atomistických představ v geometrii ([Kn], s. 28). Protože splynutí kruhu a mnohoúhelníku nemohlo být dosaženo konečným počtem kroků, není podle Aristotela tato metoda předmětem zájmu matematiky. Thomas Heath ([He], sv. 1, s. 222) naproti tomu staví Antifonta na čestné místo v historii matematiky, neboť u něj se poprvé setkáváme s představou vyčerpání obsahu pomocí posloupnosti vepsaných mnohoúhelníků, která je základem Eudoxovy exhaustivní metody a která byla později virtuózně používána Archimédem. Wilbur Knorr ([Kn], s. 28) o původnosti Antifontova postupu pochybuje; Hippokratova metoda také předpokládá aplikaci nějaké formy limitního procesu a není pravděpodobné, že by geometr Hippokratés převzal techniku výpočtu od sofisty Antifonta; zdá se spíše pravděpodobné, že Antifón si pro svoje sofisma vypůjčil techniku, která byla v té době alespoň do jisté míry rozšířená.

Brysónovo řešení je založeno na předpokladu, že to, co může být větší nebo menší než něco jiného, může být také stejné. Existuje-li čtverec s obsahem větším, než má daný kruh (např. čtverec opsaný kruhu) a čtverec s obsahem menším (např. vepsaný čtverec), pak musí existovat i čtverec, který má stejný obsah jako daný kruh. Podle Aristotela se Brysón „odvolává na obecné mínění těch, kteří nevědí, co je možné a nemožné v daném oboru“ ([A2], s. 43).

Výklady Brysónova pojetí kvadratury se u různých komentátorů poměrně liší ([Kn], s. 76–77). Zjednodušený výklad vede např. k představě čtverce, jehož obsah je roven aritmetickému či geometrickému průměru obsahů vepsaného a opsaného čtverce. Podle některých autorů Brysón anticipoval Archimédovu metodu kvadratury založenou na posloupnosti vepsaných a opsaných mnohoúhelníků. I když nebudeme zapomínat, že Brysón byl, stejně jako Antifón, sofista, můžeme připustit, že jeho myšlenka stojí někde na počátku cesty, která mnohem později vedla v analýze k formulování věty o mezihodnotě.

Není úplně jisté, zda Aristotelés sám připouštěl možnost kvadratury kruhu; k Antifontově, Brysónově i Hippokratově metodě se stavěl kriticky, avšak podle některých zmínek se zdá, že v zásadě považoval úlohu za řešitelnou (*Kategorie* VII, 7b). Rektifikaci kružnice, tedy nalezení úsečky stejné délky jako obvod daného kruhu, což (jak bylo později dokázáno) znamená totéž jako provedení kvadratury kruhu, však považoval za nemožnou. Ve *Fyzice* (VII, 4) se zabývá srovnatelností kruhového a přímočarého pohybu a uvádí zde ([A1], s. 201):

Jak však tomu bude u kruhu a u přímky? Neboť by to bylo zvláštní, kdyby nebylo možné, aby se tato určitá věc pohybovala v kruhu a stejně také v přímce, *nýbrž musela se nutně pohybovat buď rychleji nebo pomaleji.* [...] *Mimoto, pokud se týká důvodu, nezáleží na tom, i kdyby někdo tvrdil, že se musí ihned pohybovat rychleji nebo pomaleji; neboť potom to bude tak, že kružnice jest větší a menší než přímka, a tedy zase také stejná. Jestliže totiž v čase a jedno proběhlo dráhu b a druhé dráhu c, bylo by asi b větší než c, ježto jsme v tom smyslu pojali to, co je rychlejší. Tedy jest také rychlejší, jestliže v kratším čase vykoná stejný pohyb. A tak bude jedna část času a, v níž těleso b proběhne stejnou část kruhu, jako je dráha* [*c*]*, kterou probíhá těleso c v celém čase a. Vskutku však, jsou-li srovnatelné, vyplývá to, co jsme právě řekli, že totiž některá přímka je stejná s kruhem. Ale nejsou ovšem srovnatelné, a tedy ani pohyby.* (překlad A. Kříž)

I když z praktického hlediska je rektifikace křivky přirozenou úlohou, její řešení leží pro Aristotela mimo rámec matematiky. Převládajícím pravidlem při dokazování existence geometrického objektu byla jeho konstruovatelnost. Konstrukce sestávající z konečného počtu úkonů, spolu s důkazem její oprávněnosti, sloužila Řekům jako důkaz existence konstruovaného objektu [Ze]. Je pravděpodobné, že Aristotelovo přesvědčení o nemožnosti porovnat kružnici a úsečku, tedy najít úsečku stejné délky jako obvod dané kružnice, má tento základ, a není nutné vyvozovat z něj snad Aristotelovo nepochopení geometrie, jak je občas naznačováno.

Archimédovo měření kružnice

Je-li obsah kruhu dělitelný bez omezení, jak byl Aristotelés přesvědčen, nemůže být vyčerpán vepisováním mnohoúhelníků s rostoucím počtem stran v konečném počtu kroků. To byla základní námitka proti Antifontově metodě popsané v předchozím odstavci.

Krokem směrem k našemu pojetí limity se stala exhaustivní metoda, objevená patrně Eudoxem a rozvinutá Eukleidem a Archimédem a určená ke stanovení obsahu rovinných obrazců a objemů prostorových těles. Exhaustivní metoda umožnila obejít výše uvedenou nesnáz logickou cestou, která předpokládala uhodnutí výsledku a jeho následné dokázání pomocí *reductio ad absurdum.* Eukleidés tuto metodu používá při dokazování vět obsažených ve XII. knize *Základů*, mezi něž patří i tvrzení XII, 2 stanovující souvislost mezi obsahem kruhu a jeho průměrem. Bartel van der Waerden ([Wa], s. 256) hodnotí jeho důkaz jako obdivuhodný úspěch vědy. Je v něm zcela zřetelně obsažen moderní pojem limity: obsahy vepsaných mnohoúhelníků konvergují k obsahu kruhu v tom smyslu, že rozdíl mezi nimi může být učiněn menším než libovolná zadaná hodnota.

V Archimédově knize *O kouli a válci* se objevují i obecná pravidla pro porovnávání délek oblouků křivek. Archimédés nejprve definuje vydutou (konkávní) křivku jako každou křivku, která má následující vlastnost: Spojíme-li libovolné dva její body úsečkou, pak všechny body křivky leží stále na téže straně úsečky nebo případně na úsečce samé, ale žádný na její druhé straně. Dále uvádí Archimédés pět axiomů, z nichž první dva jsou důležité pro porovnávání délek úsečky a oblouku křivky resp. pro porovnávání délek dvou konkávních oblouků ([Ar], s. 3–4):

(1) Ze všech linií, které mají společné koncové body, je rovná čára nejkratší.
(2) Z jiných linií ležících v jedné rovině, které mají společné koncové body a které jsou na jednu stranu společné tětivy vyduté (konkávní) a z nichž jedna buď celá leží uvnitř mezi druhou linií a společnou tětivou nebo má s druhou linií část společnou a část umístěnou uvnitř, je kratší ta, která leží uvnitř.

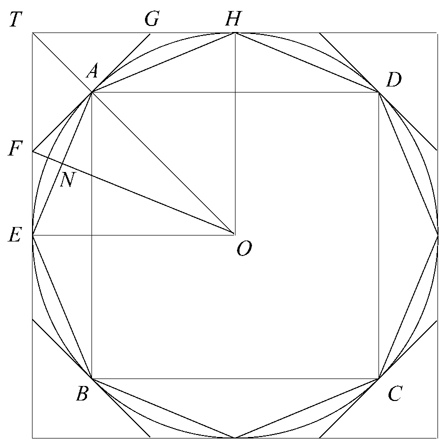
Dochovaná část Archimédovy knihy *Měření kruhu* ([Ar], s. 91–98) obsahuje tři tvrzení, které se opírají o výše uvedené postuláty. Dvě z nich se bezprostředně vztahují k rektifikaci kružnice.

První ukazuje, že problém rektifikace kružnice lze převést na problém kvadratury kruhu (a obráceně):

Obsah libovolného kruhu je roven obsahu pravoúhlého trojúhelníku, v němž délka jedné odvěsny je rovna poloměru kruhu a délka druhé jeho obvodu.

Důkaz je proveden exhaustivní metodou. Označme P obsah kruhu, K obsah trojúhelníku a předpokládejme, že $P \neq K$.

Nechť nejprve $P > K$. Kružnici vepíšeme čtverec $ABCD$ (obr. 1; značení i ilustrace jsou převzaty z [Ar]). Nad každou z jeho stran sestrojíme rovnoramenný trojúhelník s vrcholem uprostřed kratšího oblouku kružnice, čímž obdržíme vepsaný osmiúhelník. Stejným způsobem postupujeme tak dlouho, dokud rozdíl mezi obsahem vepsaného mnohoúhelníku nebude menší než rozdíl $P - K$, neboli dokud obsah vepsaného mnohoúhelníku nebude větší než K. Vezmeme poté jednu z jeho stran, např. AE, a kolmici ON k této straně procházející středem kružnice. Obsah vepsaného mnohoúhelníku o n stranách je stejný jako obsah trojúhelníku s výškou ON a základnou $n \cdot AE$, tedy $n \cdot AE \cdot ON/2$. Protože ON je menší než poloměr kruhu a $n \cdot AE$ je menší než jeho obvod, je obsah vepsaného n-úhelníku menší než K, což je spor.



Obr. 1. K důkazu tvrzení 1 z Archimédova *Měření kruhu.*

Nechť tedy $P < K$. Kružnici opíšeme čtverec a označíme T průsečík dvou jeho sousedních stran, které se dotýkají kružnice v bodech E a H. Oblouky kružnice mezi jejími průsečíky s opsaným čtvercem rozpůlíme a jejich středy vedeme tečny ke kružnici. Označíme A střed oblouku EH a FAG tečnu v A. Úhel $\angle TAG$ je ovšem pravý a platí $TG > GA$, $TG > GH$. Plocha trojúhelníku FTG je větší než poloviny plochy $TEAH$. Podobně rozdělíme-li oblouk AH napůl a sestrojíme tečnu v jeho středu, pak tato tečna „odstřihne" z plochy GAH více než jednu polovinu. Pokračujeme v dělení, až bude rozdíl obsahu opsaného mnohoúhelníku a kruhu menší než $K - P$. Protože kolmice ze středu O k libovolné straně mnohoúhelníku je rovná poloměru kruhu, avšak obvod mnohoúhelníku je delší než obvod kruhu, je obsah vepsaného n-úhelníku větší než K, což je opět v rozporu s předpokladem.

Protože neplatí ani $P > K$, ani $P < K$, musí platit $P = K$.

Třetí tvrzení knihy *Měření kruhu* stanovuje horní a dolní odhad pro poměr obvodu kruhu a jeho průměru. Archimédova metoda měření obvodu kruhu obsahuje inovaci: k jeho stanovení jsou použity jak vepsané, tak také opsané mnohoúhelníky.

Poměr obvodu libovolného kruhu k jeho průměru je menší než $3\frac{1}{7}$, *ale větší než* $3\frac{10}{71}$.

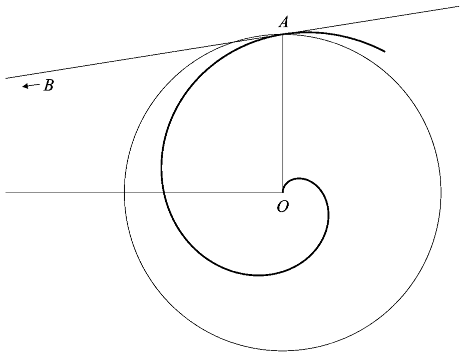
Archimédova rektifikace představuje vrcholnou ukázku starověké početní dovednosti. Vyznačuje se zároveň logickou přesností charakteristickou pro Archimédovy výpočty, která byla vzorem pro matematiky ještě v 17. století.

Rektifikace kružnice a mechanické křivky

V antické geometrii byly jako *geometrické* křivky (linie) chápány kružnice a přímka a s jistými výhradami ještě kuželosečky; ostatní křivky byly nazývány *mechanickými*, protože při jejich popisu se uplatňovala představa pohybu. René Descartes (1596–1650) posunul hranici mezi geometrickými a ostatními (mechanickými) křivkami dále. Mechanické křivky jsou podle Descarta ([D], sv. 6, s. 390) takové křivky, které jsou vytvářené dvěma nezávislými pohyby, mezi nimiž nelze určit přesný vztah. Příklady mechanických křivek podle Descartovy klasifikace jsou kvadratrix, Archimédova spirála a šroubovice. Všechny tyto křivky ve starověku posloužily k řešení problému kvadratury kruhu.

V knize *O spirálách* se Archimédés zabývá rovinnou křivkou, kterou opisuje bod pohybující se rovnoměrně po průvodiči otáčejícím se rovnoměrně kolem daného bodu (pólu). V polárních souřadnicích má tato křivka, nazývaná dnes *Archimédovou spirálou*, rovnici $\rho = a\varphi$, kde $a = r/(2\pi)$, přičemž r je vzdálenost konce prvního závitu spirály od pólu (poloměr tzv. „první kružnice" spirály). Archimédés ukazuje, že tato křivka může sloužit ke stanovení obvodu kružnice (a tím i ke kvadratuře kruhu, jak plyne z tvrzení 1 v *Měření kruhu*).

Archimédés nejprve dokazuje speciální případ: je-li A koncovým bodem prvního závitu spirály a sestrojíme-li v tomto bodě tečnu ke spirále, pak polární subtangenta OB bude rovna obvodu „první kružnice" (obr. 2).



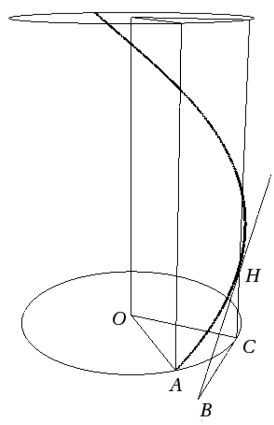
Obr. 2. Stanovení délky „první kružnice“ spirály.

Obecně pak platí: Je-li p obvod kružnice se středem O a poloměrem OA a protíná-li tato kružnice průvodič v počáteční poloze v K a je-li B průsečík tečny vedené ke spirále v bodě A a přímky kolmé k OA, pak

$$OB = (n-1)p + \overline{KA}, \tag{2}$$

přičemž oblouk $\overline{KA}$[1] je měřen „dopředu“. Toto tvrzení bychom v modernější podobě mohli formulovat takto: Je-li $\rho = a\varphi$ rovnice spirály v polárních souřadnicích, pak pro polární subtangentu OB platí $OB = \rho^2/a$.

Jinou křivkou definovanou pomocí dvou nezávislých pohybů je *šroubovice* (helix), prostorová křivka, kterou opisuje bod pohybující se rovnoměrně podél hrany obdélníku rotujícího kolem osy procházející protilehlou hranou.



Obr. 3. Šroubovice.

[1] Symbolem s vodorovnou linkou nahoře budeme v celém článku rozumět oblouk.

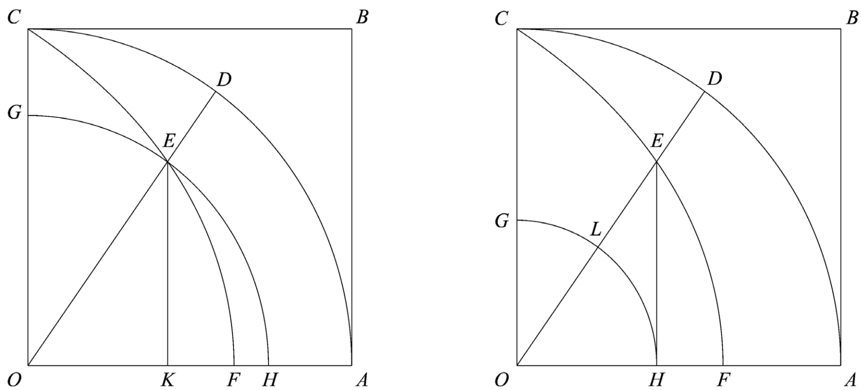
Způsob, jakým mohla být šroubovice použita k rektifikaci oblouku kružnice, je popsán v [He] (s. 232). Jestliže v libovolném bodě H šroubovice sestrojíme tečnu a označíme B její průsečík s rovinou OAC (ve které leží podstava válce, po jehož povrchu se pohybuje bod opisující šroubovici), pak průmět úsečky HB do roviny OAC má délku shodnou s délkou oblouku $\overline{AC}$ (obr. 3). Podle [Kn] (s. 166–167) posloužila šroubovice Archimédovi na heuristické úrovni k nalezení těch vlastností spirály, které se týkají rektifikace kružnice.

Další speciální křivkou, kterou lze využít k rektifikaci kružnice, je *kvadratrix.* Pappos uvádí ([Pa], díl 1, s. 252–253), že „ke kvadratuře kruhu použili Nikomédés, Deinostratos a někteří další geometři jistou křivku, která byla pojmenována podle této vlastnosti.“

Kvadraturu kruhu lze stejně jako v případě spirály provést na základě rektifikace oblouku kružnice. Dokážeme, že délka oblouku kružnice $\overline{ADC}$ je ve stejném poměru k délce úsečky OC, jako OC ku OF, tedy že platí

$$\frac{\overline{ADC}}{OA} = \frac{OA}{OF}. \tag{3}$$

Důkaz využívá *reductio ad absurdum* ([He], s. 227–229). Předpokládáme nejprve, že platí $\overline{ADC} : OA < OA : OF$, tedy že existuje bod H takový, že $\overline{ADC} : OA = OA : OH$, přičemž $OH > OF$ (obr. 4 vlevo). Kolem bodu O opíšeme kružnici s poloměrem OH, která protne kvadratrix v bodě E. Sestrojíme kolmici EK a protáhneme úsečku OE do bodu D. Protože obvody kruhu jsou ve stejném poměru jako jejich průměry, platí $\overline{ADC} : OA = OA : OH = \overline{ADC} : \overline{GEH}$. Z toho pak plyne, že $\overline{GEH} = OA$ a vzhledem k vlastnostem kvadratrix také platí, že $OC : EK = \overline{ADC} : \overline{AD} = \overline{GEH} : \overline{EH}$; to ale vede ke sporu, neboť pak by muselo platit také $\overline{EH} = EK$, což není možné.



Obr. 4. Rektifikace kružnice pomocí kvadratrix.

Předpokládejme nyní $\overline{ADC} : OA > OA : OF$, tedy že existuje bod H takový, že $\overline{ADC} : OA = OA : OH$, přičemž $OH < OF$ (obr. 4 vpravo). Opíšeme kolem bodu O opět kružnici s poloměrem OH, v bodě H vztyčíme kolmici, která protne kvadratrix v bodě E a úsečku OE prodloužíme do D. Stejně jako prve se ukáže, že musí platit $\overline{GLH} = OA$ a vzhledem k vlastnostem kvadratrix také $\overline{ADC} : \overline{AD} = OC : EH$ a tudíž i $\overline{LH} = EH$, což není možné. Jedinou zbývající možností je tedy $\overline{ADC} : OC = OC : OF$, což jsme měli dokázat.

Pappos podává zprávu i o námitkách jistého Spora, které ukazují na slabiny výše uvedeného postupu. První námitka je založena na tom, že k tomu, abychom nechali pohybovat jeden bod po kružnici a druhý po úsečce a tyto pohyby aby byly v takovém vzájemném poměru, že oba body dosáhnou konců svých drah ve stejném okamžiku, potřebovali bychom nejprve znát poměr poloměru kružnice ke čtvrtině jejího obvodu, tedy jinými slovy popis křivky předpokládá účel, pro který byla sestrojena. Druhá námitka se týká průsečíku kvadratrix s úsečkou CD, který není znám, neboť obě pohybující se úsečky na konci své dráhy splynou a neprotínají se tak v jednom bodě. Abychom jej mohli nalézt, museli bychom opět předpokládat znalost poměru poloměru kružnice ke čtvrtině jejího obvodu.

V první námitce zaznívá opět Aristotelovo tvrzení o nemožnosti porovnat přímočarý a křivočarý pohyb. Poloha bodu G, která je předmětem druhé námitky, by mohla být určena exhaustivní metodou s libovolnou zvolenou přesností, ale v tom případě se jedná opět o přibližnou metodu, jakou použil i Archimédés v *Měření kruhu*.

Na úsvitu moderní éry

Od konce 15. a začátku 16. století pozorujeme v evropském myšlení sílící opozici vůči aristotelismu a středověké scholastické filosofii. Souběžně s tím roste v matematice zájem o dílo Archiméda, jehož knihy jsou vydávány v latinských překladech. Stále významnější roli začínají hrát infinitní techniky, jejichž použití má, alespoň zpočátku, spíše heuristický charakter.

Postupně se v matematice rovněž prosazuje užívání analytických metod. Hlavním představitelem algebraizace geometrie je Descartes, jehož *Geometrie* vyšla nejprve francouzsky roku 1637 jako příloha *Rozpravy o metodě*. Rozšířila se především díky latinskému překladu van Schootena vydanému poprvé roku 1649 a podruhé o deset let později spolu s příspěvky dalších autorů.

Descartes byl především filosofem; jeho racionalismus se stal základem světového názoru opírajícího se o přírodní vědy, který na dlouhou dobu výrazně ovlivnil postoj člověka k přírodě a jejímu poznávání.

Descartova filosofie se v mnoha ohledech radikálně odlišovala od Aristotelovy; je proto možná poněkud překvapující, že autor *Rozpravy o metodě* a *Meditací o první filosofii* zřejmě přejal aristotelské dogma o nesouměřitelnosti křivky a přímky (resp. křivočarého a přímočarého pohybu). Ve druhé knize *Geometrie*, v odstavci zabývajícím se přípustností konstrukce křivky pomocí provázku (nitě), uvádí, že ne všechny takto vytvořené objekty lze považovat za geometrické ([D], sv. 6, s. 412):

Avšak nelze [v geometrii] *připustit linie, které jsou jako provázky, tzn. které jsou občas přímé a občas zakřivené, neboť poměr mezi přímými a zakřivenými liniemi není znám a já nevěřím, že může být člověkem poznán.*

Descartův výrok je vykládán různými způsoby (viz např. [Mn], s. 77–78). Descartes byl obeznámen s infinitními technikami, považoval je však (na rozdíl od algebraických metod) za nepřesné. Příkladem může být Descartovo řešení kvadratury kruhu, které je založeno na zkonstruování nekonečné posloupnosti obdélníků se stranami konvergujícími k úsečce, jejíž délku lze vyjádřit výrazem obsahujícím π ([Ca], díl 2, s. 851).

Je pravděpodobné, že Descartovo přesvědčení o nemožnosti nalézt poměr mezi rovnými a křivými liniemi se týká nemožnosti nalézt geometricky konstruovatelnou úsečku, jejíž délka by byla shodná s délkou daného oblouku. Jeho postoj tak lze chápat ve stejném kontextu jako v mnohem pozdější době názor Paula du Bois-Reymonda (1831–1889), pro nějž pojem délky křivky není pojmem geometrickým, nýbrž bytostně analytickým, neboť je založen na limitním přechodu [BR].

Nezdá se ostatně, že by Descartův názor měl vliv na pozdější pokusy o rektifikaci různých křivek; jednu z prvních úspěšných rektifikací provedl Hendrik van Heuräet (1633–1660), který byl Descartovým stoupencem. Souvisí-li Descartovo přesvědčení o rozdílné povaze křivek a přímek s jeho rozlišováním geometrických a negeometrických křivek (jak se domnívá autor [Bs]), pak za ozvěnu Descartova názoru lze považovat větu, kterou napsal René de Sluse (1622–1685) Pascalovi v dopise z 13. září 1658 ([P], sv. 8, s. 145):

Obdivuji řád přírody, který [...] *nedovoluje nalézt úsečku rovnou křivce, pokud jsme dříve nepředpokládali existenci jiné křivky, jak je tomu v případě prosté cykloidy, jejíž základna je rovna obvodu kruhu a oblouk jiné úsečce.*

Pascal se v dopise Huygensovi z následujícího roku o citované Slusově větě s uznáním zmiňuje ([P], sv. 9, s. 201); Wrenovu rektifikaci cykloidy nepovažuje za popření zákona, ale pouze za výjimku, danou způsobem definování cykloidy. Pierre de Fermat (1601–1665) v úvodu svého traktátu o rektifikaci ([F], sv. 1, s. 211) zmiňuje rovněž Wrenův výsledek a prohlašuje, že pokud je mu známo, křivka čistě geometrická nebyla dosud rektifikována. Stylem typickým pro jeho komunikaci s pařížskými matematiky píše o „nejučenějších geometrech“, kteří „vskutku myslí, že je zákonem a řádem přírody, že nelze najít úsečku rovnou křivce“ a poznamenává, že „je nebezpečné z jednoho či dvou případů činit hned závěr“.

Porovnání oblouků paraboly a spirály

Existuje zřejmě souvislost mezi rozvojem mechaniky, především v díle Galilea Galileiho (1564–1642), a mechanistickým přístupem ke zkoumání přírodních jevů typickým pro Descarta na jedné straně a prosazením kinematické analýzy jako základního prostředku ke zkoumání geometrických objektů (zejména křivek) v 17. století na straně druhé ([Mn], s. 95).

Příkladem úspěšného použití kinematické metody bylo např. řešení úlohy sestrojení tečen ke křivkám. Jiným příkladem je porovnání délky oblouku Archimédovy spirály a paraboly, které lze chápat i jako důležitý krok na cestě k prvním rektifikacím geometrických (v dnešní terminologii algebraických) křivek.

Jedním z matematiků, kteří využívali při studiu křivek představu dráhy pohybujícího se bodu jako výsledku skládání jednoduchých pohybů, byl Gilles Personne de Roberval (1602–1675). Roberval, který zastával prestižní postavení na Collège Royal, publikoval málo a svoje metody tajil. Jeho tvrzení, že délka prvního závitu Archimédovy spirály je rovna délce oblouku paraboly, jejíž základna je rovna poloměru a osa polovině obvodu „první kružnice", se objevilo ve spise *Cogitata physico-mathematica* ([Me], s. 129–131), jehož autorem byl minorita, vědec a spojující činitel evropských učených kruhů Marin Mersenne (1588–1648).

Autorem původní myšlenky byl však zřejmě Thomas Hobbes (1588–1689), anglický filosof, jehož názory na uspořádání společnosti měly později vliv na osvícenství. Roajalista Hobbes se v roce 1641 uchýlil do pařížského exilu, kde navázal kontakt s intelektuálními kruhy kolem Mersenna. Jeho zájmy zahrnovaly i geometrii a sám se pokusil formulovat metodu studia křivek na základě analýzy pohybů ([Je], s. 119 a n.). Zrod myšlenky popisuje ve svých *Six Lessons to the Professors of Mathematicks* z roku 1656 ([Ho], sv. 7, s. 343).

Říkáte (*jako geometr*), *že tvrzení o rovnosti spirály a paraboly jsem měl od Robervala: to je pravda. A pokud se pamatuji, převzal bych rovněž jeho důkaz; avšak jestliže bych vydal jeho, potlačil bych svůj. Ve svých myšlenkách jsem se zabýval porovnáváním těchto dvou křivek, spirály a paraboly, pomocí pohybů, jimiž byly popsány; a když jsem uvažoval tyto pohyby jako stejnoměrné* [...] *viděl jsem, že abych složil skutečný pohyb, který popisuje spirálu, musím mít jednu čáru rovnou polovině obvodu a druhou polovině průměru. O tom všem jsem však nenapsal jediné slovo. Když jsem ale byl s Mersennem a panem Robervallem v chodbě konventu* [minoritů], *nakreslil jsem obrazec na stěnu, a pan Robervall poslouchající mou dedukci řekl, že protože pohyby, které tvoří parabolu, jsou jeden rovnoměrný a druhý zrychlený, musí být takové i pohyby, které tvoří spirálu; což jsem nyní potvrdil; a příštího dne přinesl k Mersennovi důkaz jejich rovnosti právě touto metodou.*

Tato pasáž byla odpovědí na obvinění z plagiátorství, které proti Hobbesovi vznesl John Wallis (1616–1703); Hobbes podle něj „ukradl" uvedené tvrzení z citovaného Mersennova spisu. V něm je odůvodnění tvrzení připsáno Robervalovi, ale s poznámkou, že rozvíjí myšlenku jistého učence, kterým byl zřejmě právě Hobbes. Roberval musel pozadí sporu znát, přesto ale Wallisovo obvinění Hobbese akceptoval a opakoval ([Ma], s. 163). Problémem se zabýval také Torricelli, který se o něm dozvěděl v dopise od Mersenna. Korektní důkaz Robervalova tvrzení podal Pascal v roce 1658.

Existuje Fermatův dopis Mersennovi z 16. 2. 1643 ([Fe], sv. 2, s. 252–3), v němž Fermat reaguje na nedochovanou zprávu Mersenna o Robervalově objevu. Fermat soudil, že Roberval porovnával s Archimédovou spirálou půlkružnici, a ujišťuje Mersenna, že výsledek není správně. K problému se Fermat znovu vrátil po uveřejnění Pascalova důkazu a formuloval obecnější verzi tvrzení ([F], sv. 1, s. 206).

Dva Robervalovy rukopisy, publikované poměrně nedávno [MP], pojednávají o porovnání délky oblouku spirály a paraboly. Prvním je latinský autograf z roku 1642, který je pouze konceptem, druhým kopie francouzského textu, který je úplnější a od latinské verze se značně liší. Latinský text neobsahuje žádný důkaz a je spíše snahou o uchopení problému. Roberval přistupuje k oběma křivkám jako k drahám pohybujícího se bodu; v případě spirály je toto pojetí dobře známé, ale popsat podobným způsobem parabolu činilo potíže.

Ve francouzském textu Roberval uvažuje obě křivky jako výslednice dvou složených pohybů; v případě spirály rovnoměrného přímočarého pohybu po průvodiči a rovnoměrné rotace průvodiče kolem středu, v případě paraboly rovnoměrného přímočarého pohybu kolmého na osu a nerovnoměrného pohybu podél osy. Hlavní myšlenka Robervalova odůvodnění je postavena na tom, že v každém okamžiku jsou oba generující pohyby u obou křivek shodné a vzájemně kolmé, okamžitá rychlost bodu pohybujícícího se po každé křivce je stejná a stejné jsou tedy i vykonané dráhy. Autorka [MP] soudí, že k nalezení rychlosti bodu pohybujícího se po parabole použil Roberval svou metodu tečen.

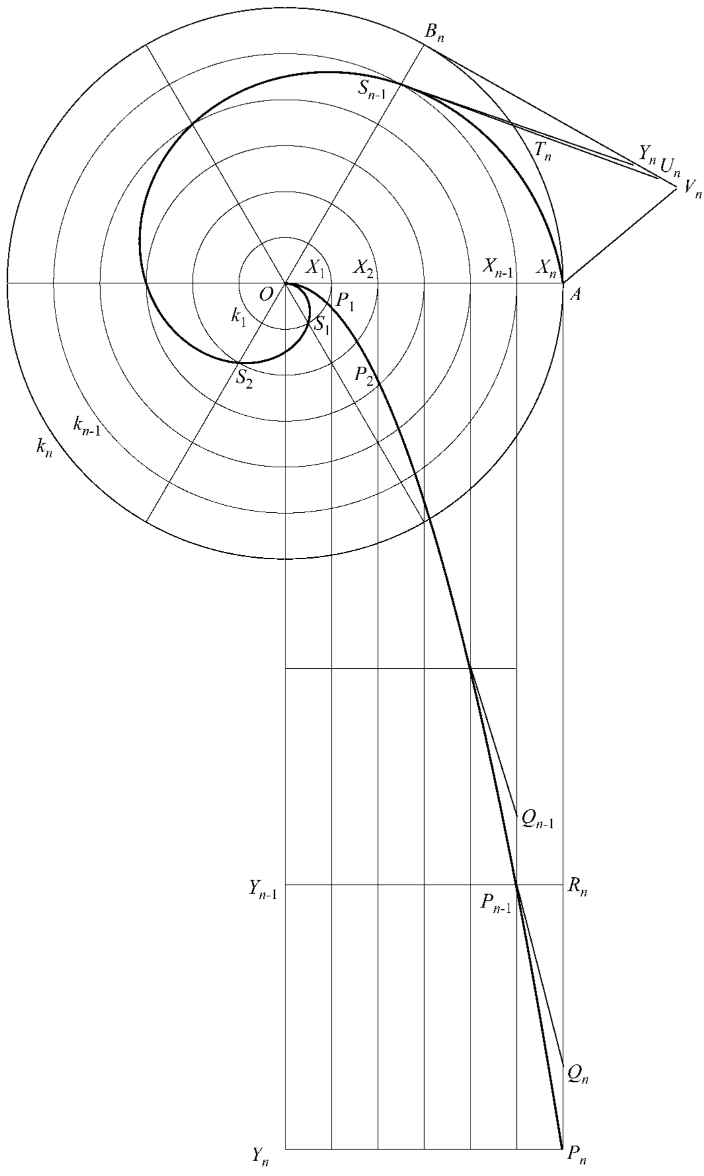
Pro Blaise Pascala (1623–1662), jednoho z nejvšestrannějších francouzských myslitelů 17. století, nebyla geometrie tím nejdůležitějším zájmem. Na konci 50. let se však začal intenzívně zabývat některými geometrickými problémy včetně porovnání oblouků paraboly a spirály. V dopise z roku 1658, jehož adresát byl uveden pouze iniciálami A. D. D. S. ([P], sv. 8, s. 255 a n.), Pascal připouští, že Robervalovo odůvodnění nebylo zcela přesvědčivé a dokazuje jeho tvrzení nezpochybnitelným způsobem „po způsobu starých“, bez použití kinematického přístupu i bez indivisibilií.

Pascalem dokazované tvrzení by se dalo moderním způsobem formulovat takto: Sestrojíme spirálu $\rho = \varphi$ s pólem v bodě O. „První kružnici“ s poloměrem r protne spirála v bodě A (viz obr. 5, který až na značení bodů odpovídá Pascalově konstrukci). Dále sestrojíme parabolu $y = x^2/2$ s vrcholem v bodě O (osa y je na obrázku orientována směrem dolů). Oblouk paraboly mezi body O a P má stejnou délku jako první závit spirály mezi body O a A.

Pascalův důkaz, který lze při znalosti příslušných integrálů provést na několika řádcích, je technicky značně náročný. K porovnání daných oblouků používá Pascal čáry opsané a vepsané oběma křivkám a ukazuje, že rozdíly jejich délek lze učinit menší než délka libovolné dané úsečky. Čárou vepsanou parabole je lomená čára procházející body $P_0, P_1, \ldots, P_n$, čára opsaná parabole je tvořena úseky tečen $P_{i-1}Q_i$ a úsečkami Q_iP_i, $i = 1, \ldots, n$. Čáru vepsanou spirále tvoří lomená čára procházející body $S_0, S_1, \ldots, S_n$, čára opsaná spirále se skládá z úseků tečen mezi body S_{i-1} a T_i a oblouků kružnic mezi body T_i a S_i, $i = 1, \ldots, n$.

Hlavní větu o rovnosti délek obou oblouků dokazuje Pascal pomocí *reductio ad absurdum.* Jeho důkaz obsahoval nesrovnalost, na kterou záhy upozornil

Huygens. Protože zdravotní důvody nedovolily Pascalovi reagovat, Huygens a nezávisle na něm také Fermat uvedli Pascalovu argumentaci do pořádku.



Obr. 5. Porovnání délky Archimédovy spirály a paraboly.

Fermatův zájem o otázky spojené s délkou křivek se tím nevyčerpal; jeho úspěšně vyřešená rektifikace semikubické paraboly z roku 1660, která bude popsána v následujícím odstavci, sice nebyla prvním úspěchem tohoto druhu, ale svou úrovní, odpovídající také „způsobům starých“, představovala vrcholnou ukázku matematického myšlení tehdejší doby.

Rektifikace semikubické paraboly

John Wallis (1616–1703), který déle než půl století zastával místo saviliánského profesora geometrie na oxfordské univerzitě, je bezesporu jednou z nejvýraznějších postav matematiky 17. století. Za jeho nejvýznamnější dílo je obecně považována *Arithmetica infinitorum* (1655) pojednávající o uplatnění aritmeticko-algebraických metod při řešení geometrických problémů, zejména kvadratury. Wallis věnoval pozornost i rektifikaci a naznačil, že cestou k jejímu řešení je chápání křivky jako lomené čáry tvořené nekonečně mnoha nekonečně krátkými úsečkami. Později Wallis uváděl, že někteří jeho krajané na tomto základě provedli úspěšné rektifikace.

V dopise Johnu Collinsovi (1625–1683) z března roku 1668 píše Wallis ([BS], sv. 2, s. 430):

Narovnání křivky [the streightening a Curve] *bylo provedeno panem Neilem* (*a po něm Dr. Wrenem a Lordem Brounkerem* [Brounckerem]) *dlouho před Heuratem* [van Heuräetem] (*a já předpokládám, že oba vycházeli ze zásad, které jsem zmínil ve své Arithm. Infinit.*).

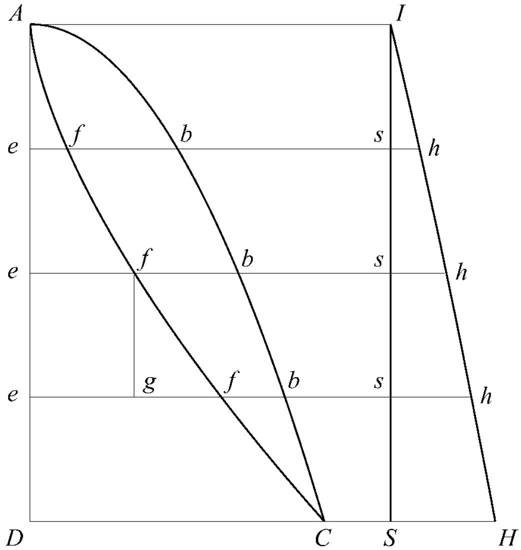
V září téhož roku píše Wallis Collinsovi ([BS], sv. 2, s. 599):

Celé tajemství rektifikování křivek [rectifying curve lines] *bylo položeno v mém scholiu k tvrzení 38 Arithm. Infin. a dále provedeno v mé Cycloide, s. 90, &c.*

Tyto věty z Wallisovy korespondence odrážejí spor, který se vedl o prvenství při určení délky oblouku semikubické paraboly (a jak se tehdy věřilo, obecně jakékoliv křivky). Kromě uvedené pasáže ze spisu *Arithmetica infinitorum*, která pojednává o aproximování délky oblouku dané křivky pomocí vepsané lomené čáry, je citován spis *Tractatus duo*, v němž je naznačený způsob rozpracován pro několik konkrétních křivek. Tam také Wallis poprvé používá (v analogii k pojmu kvadratura) pro určení délky oblouku pojem rektifikace (v řeckém tvaru *euthynsis*).

Rektifikaci semikubické paraboly (tedy křivky dané rovnicí $y^2 = ax^3$) připisuje Wallis ([W], sv. 1, s. 551–2, viz též [Ko]) svému žákovi Williamu Neilovi (1637–1670), který ji podle Wallise provedl roku 1657. Neilovo řešení je čistě geometrické. K dané parabole AbC se sestrojí křivka AfC, jejíž ordináta ef je úměrná ploše Aeb ohraničené danou parabolou (křivka AfC je tedy semikubická parabola). Dále se sestrojí úsečka IsS tak, aby obsah obdélníka $ADSI$ byl ve stejném poměru k ploše $ADCb$ jako úsečka AD k DC a křivka IhH tak, aby obsah čtverce nad eh byl roven součtu obsahů čtverců nad es a eb.

Neil dokazuje, že obsahy obrazců $ADHI$, $ADSI$ a $ADCb$ jsou ve stejném vzájemném poměru jako délky oblouku AfC a úseček AD, DC a křivka IhH je parabolou. Důkaz je založen na nalezení pomocné křivky IhH, jejíž kvadraturu umíme provést; obsah plochy ohraničené obloukem křivky chápe Neil jako součet obsahů obdélníků s nekonečně malou základnou a délku křivky jako jako součet nekonečně mnoha nekonečně krátkých úseček.



Obr. 6. Rektifikace semikubické paraboly podle Neila.

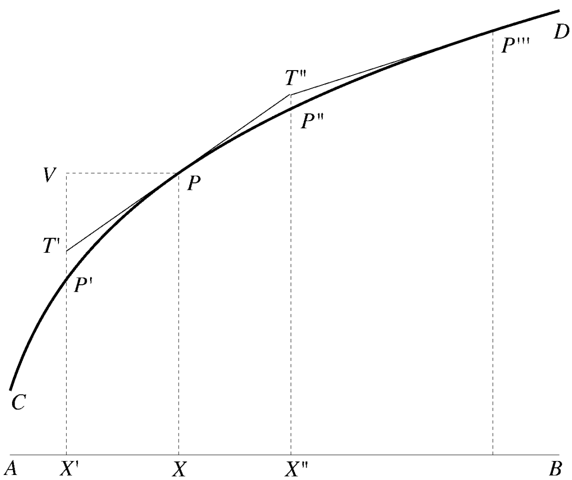
Descartovým myšlenkám se dostalo příznivého přijetí v Holandsku. Ve stejném roce, kdy vyšla Wallisova práce *Tractatus duo*, bylo publikováno i druhé vydání van Schootenova latinského překladu *Geometrie*. Toto vydání, kterým se Descartova metoda zřejmě definitivně prosadila, obsahovalo vedle van Schootenova komentáře i několik kratších pojednání, která rozvíjela metodu studia křivek a jejich vlastností algebraickými prostředky. Mezi jejich autory byl rovněž Hendrik van Heuräet (1633–1660), který v pojednání *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas* ([DG], s. 517–520) ukázal obecnou metodu rektifikace konkávní křivky a příkladem, na němž svou metodu demonstroval, byla opět semikubická parabola.

Van Heuräetova metoda je založena podobně jako Neilovo řešení na představě křivky jako infinitezimálně lomené čáry a převedení problému rektifikace na problém kvadratury pomocné křivky. Van Heuräetův postup má však obecný charakter a při hledání délky oblouku semikubické paraboly jsou využívány algebraické prostředky. Jak uvádí autorka [Ba] (s. 226), van Heuräetův postup je typickou ukázkou matematického myšlení druhé poloviny 17. století, kdy hledání nových algoritmů mělo přednost před logickou strukturou předkládaných tvrzení.

Jen o málo později vyšlo (bez souhlasu autora jako příloha k Lalouvèrovu *Veterum geometria promota in septem de cycloide libris*) Fermatovo pojednání *De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione dissertatio geometrica* ([F], sv. 1, s. 211–254) obsahující obecnou metodu rektifikace konkávních křivek. Příkladem, na němž je metoda ilustrována, je opět semikubická parabola.

Fermatova práce neobsahuje ani zmínku o Neilově rektifikaci ani o van Heuräetově práci, která musela být poměrně známá. Fermatova metoda se každopádně od prací obou jeho předchůdců značně liší. Je patrné, že Fermatův traktát o rektifikaci je především reakcí na Pascalovo pojednání týkající se porovnání oblouků paraboly a Archimédovy spirály. Nevyužívá algebraických prostředků a délku úsečky a oblouku porovnává pomocí *reductio ad absurdum* rovněž „po způsobu starých“.

Fermat se však záměrně odchyluje od Archimédovy metody rektifikace kružnice, která pracuje s opsanou a vepsanou linií, a ukazuje, že jeho postup je v daném případě výhodnější. Dané křivce *opíše* dva systémy úseček tvořených úseky tečen a pomocí Archimédova postulátu dokáže, že délka prvního je větší než délka daného oblouku a délka druhého menší, přičemž rozdíly mezi délkou obou systémů úseček a daného oblouku lze učinit menší než je délka libovolné dané úsečky.



Obr. 7. K Fermatově metodě rektifikace.

Nechť CD je oblouk konkávní křivky nad úsečkou AB (obr. 7). Mezi body A a B zvolíme bod X, sestrojíme v něm kolmici k základně AB a v jejím průsečíku P s křivkou sestrojíme tečnu ke křivce. Dále zvolíme bod X' resp. X'' mezi A a X resp. X a B a sestrojíme v těchto bodech kolmice. Jejich průsečíky s křivkou označíme P' a P'' a průsečíky s tečnou T' a T''. Platí

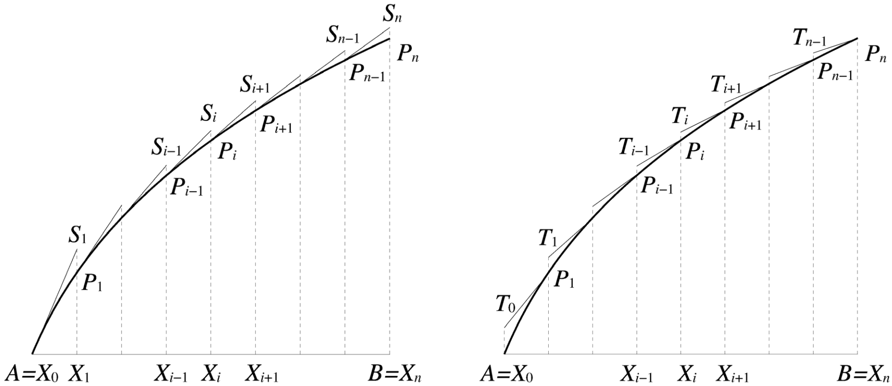
$$T'P < \overline{P'P},$$

neboť délka úsečky PV je menší než délka PT' a ta je menší než délka úsečky PP', která je podle Archimédova postulátu kratší než oblouk $P'P$. Dále platí

$$PT'' > \overline{PP''},$$

neboť $T''P''' < \overline{P''P'''}$ (ze stejného důvodu jako v předchozím případě) a $PT'' + T''P''' > \overline{PP'''}$ (podle Archimédova postulátu).

Rozdělíme nyní úsečku AB pomocí bodů $X_0 = A, X_1, X_2, \ldots, X_n = B$ na n stejných dílů. V každém z dělících bodů $X_i, i = 1, \ldots, n$ sestrojíme kolmice k základně AB a v jejích průsečících s křivkou, které označíme P_i, sestrojíme tečny. Bod, ve kterém tečna v bodě P_i protne kolmici v bodě X_{i+1}, označíme S_{i+1}. Podobně označíme T_{i-1} bod, ve kterém tečna v bodě P_i protne kolmici v bodě X_{i-1} (obr. 8).



Obr. 8. Systémy úseček opsané konkávnímu oblouku.

Protože $P_iS_{i+1} = T_{i-1}P_i$, dostaneme s pomocí dokázaných nerovností

$$P_0S_1 + P_1S_2 + \cdots + P_{n-1}S_n > \overline{P_0P_n} > T_0P_1 + T_1P_2 + \cdots + T_{n-1}P_n.$$

Protože platí

$$T_0P_1 = P_1S_2, \ldots, T_{n-2}P_{n-1} = P_{n-1}S_n,$$

bude rozdíl délek obou opsaných čar roven $P_0S_1 + T_{n-1}P_n$. Při dostatečném počtu dělících bodů tak bude rozdíl délek obou opsaných čar a tím spíše i rozdíl mezi délkou delší z obou čar a obloukem jakož i obloukem a kratší z obou čar menší než délka libovolné dané úsečky.

Rektifikaci Fermat demonstruje na příkladu semikubické paraboly. „Proč se tak dlouho setrvávalo u otázky tak jednoduché, když lze bezprostředně dospět k Archimédově metodě?“, ptá se Fermat v narážce na domněnky o neproveditelnosti rektifikace ([F], sv. 1, s. 221).

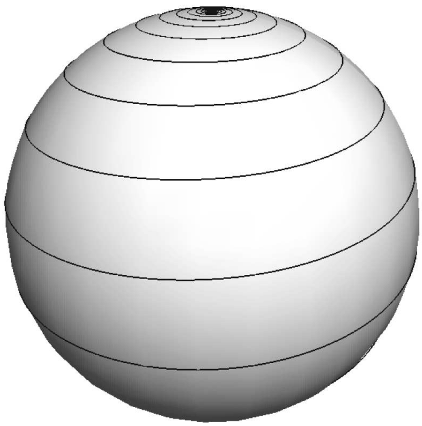
Případ logaritmické spirály

Dlouho se věřilo, že semikubická parabola byla (po kružnici) první rektifikovanou křivkou. Gino Loria (1862–1954) však na konci 19. století zjistil, že se Evangelista Torricelli (1608–1647) zabýval vlastnostmi logaritmické spirály a provedl i její rektifikaci a kvadraturu [Lo]. Logaritmická spirála tak musela být rektifikována určitě ještě před semikubickou parabolou.

Ani Torricellimu však prvenství nezůstalo; ukázalo se totiž (viz [Pe]), že logaritmickou spirálou se zabýval několik desetiletí před Torricellim Thomas

Harriot (1560–1621), který se pokusil i o stanovení její délky. Harriot se v 80. letech 16. století zúčastnil Raleighovy výpravy do Nového světa a strávil nějakou dobu v anglické kolonii na ostrově Roanoke. K zájmu o logaritmickou spirálu jej přivedlo studium problémů souvisejících s navigací při mořeplavbě.

Zvláštní význam pro navigaci měla tzv. *loxodroma*, dráha, při níž zůstává azimut konstantní (obr. 9). Loxodroma je prostorová křivka, která protíná poledníky na kulové ploše pod stejným úhlem. Harriot rozpoznal, že stereografickou projekcí loxodromy je spirála, která v důsledku konformity stereografické projekce svírá v každém bodě s průvodičem tentýž úhel (Harriot nazýval tuto křivku *helix*, název logaritmická spirála se začal používat později). Jeho studium logaritmické spirály přesáhlo rámec problematiky navigace a má v historii matematiky samostatný význam.



Obr. 9. Loxodroma.

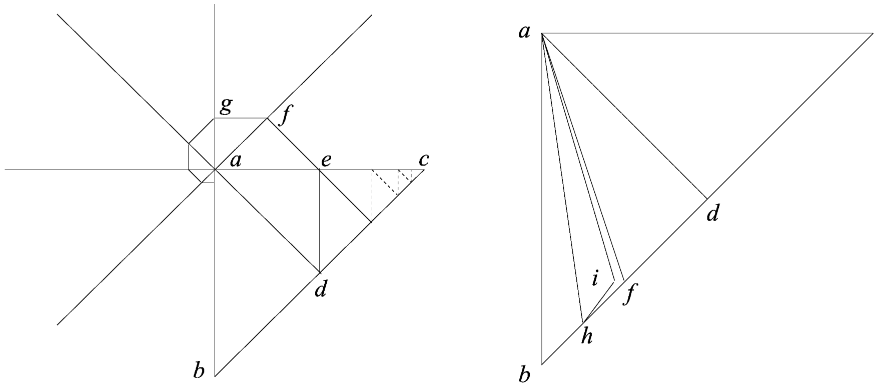
Harriot, podobně jako řada dalších učenců na úsvitu moderní éry, zastával v matematice i ve fyzice atomistické pojetí, které v přírodovědě začalo nahrazovat Aristotelovu přírodní filosofii. Problematikou konečného a nekonečného se zabýval v rukopise *De infinitis*, který se však zachoval jen v neúplné podobě. Přijal představu matematických indivisibilií a klíčem k pochopení toho, jak konečný objekt může být tvořen nekonečným počtem matematických „atomů“, mu byl rozbor nekonečných konvergentních číselných řad (viz [Ka]).

Označíme-li α úhel, pod kterým spirála protíná polopřímky vedené z pólu O, má rovnice logaritmické spirály v polárních souřadnicích tvar

$$\rho = Ce^{\operatorname{cotg}\alpha\varphi}, \tag{4}$$

kde C je konstanta. Pól O se nazývá asymptotickým bodem spirály.

Podle [Pe] se Harriot zabýval rektifikací logaritmické spirály již v devadesátých letech 16. století. Zajímal jej především případ spirály s $\alpha = \pi/4$, ale dospěl zřejmě i k obecnému řešení odpovídajícímu rovnici $l = r/\cos\alpha$ pro délku l oblouku spirály mezi daným bodem s průvodičem r a pólem. Ukázky rukopisů, které jsou připojeny k článku [Pe], obsahují numerické výpočty a geometrické konstrukce, z nichž je patrné, že Harriot aproximoval spirálu lomenou čarou (dva příklady jsou uvedeny na obr. 10).



Obr. 10. Harriotovy aproximace logaritmické spirály.

Autor [Pe] uvádí rekonstrukci Harriotova postupu, která vychází ze situace na obr. 10 vpravo. Bod f je středem úsečky bd, která je kolmá na ad a bod h je středem bf. Úhly $\measuredangle abh$ a $\measuredangle ahi$ jsou stejné a trojúhelník ahi je podobný trojúhelníku abh. Lomená čára bhi je aproximací oblouku spirály. Připojováním dalších podobných trojúhelníků dostaneme aproximaci oblouku spirály mezi bodem a a pólem pomocí lomené čáry, jejíž délku můžeme při znalosti součtu geometrické řady určit (obr. 10 odpovídá $\alpha = \pi/4$, ale to není při výpočtu důležité). V tomto případě je bh rovno $(1/4)bd$; obecně lomená čára s počátečním úsekem délky $(1/2^n)bd$ aproximuje spirálu tím lépe, čím větší je n. Zvolíme-li $ab = 1$ a bude-li $\alpha = \measuredangle abd$ a s_n délka lomené čáry s počátečním úsekem $(1/2^n)bd$, vychází $s_n \to 1/\cos\alpha$ pro $n \to \infty$.

Vlastnosti logaritmické spirály popisuje rovněž Descartes v dopise Mersennovi z 12. září 1638 ([D], sv. 2, s. 360); díky tomu byl po dlouhou dobu považován za jejího objevitele. Descartes si povšiml, že poměr délky oblouku mezi pólem a daným bodem spirály a délky průvodiče tohoto bodu je konstantní a dále že úhel, který svírá tečna s průvodičem, je také konstantní.

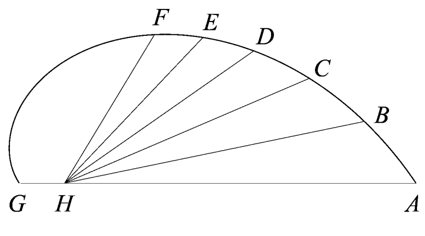
Patrně nezávisle dospěl k objevu logaritmické spirály Torricelli. Svědčí o tom jeho nedatovaný dopis, jehož adresátem byl Pierre de Carcavi (1600–1684), matematik amatér z Toulouse, který udržoval písemný styk s předními učenci své doby. Torricelli v dopise dokonce oznamuje provedení rektifikace, ale tato zmínka neměla ohlas. Píše ([Gh], s. 53):

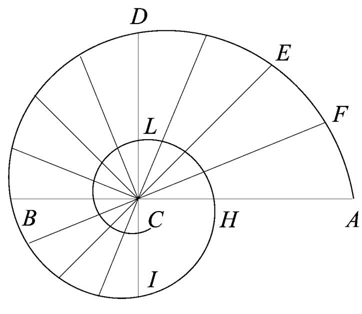
Již od p. Mersenna jsem se dozvěděl, že parabola je rovna Archimédově spirále. Tu jsem přemýšlel a nalezl jsem důkaz. [...] *Objevil jsem však ještě jiný druh spirál* (*které se popíší nejjednodušším způsobem*), *o nichž mohu ukázat, že jsou stejné jako rovné čáry* [tj. rektifikované].

Pouze tři práce Torricelliho o geometrii byly publikovány za jeho života pod titulem *Opera geometrica* (1644). Řada jeho prací zůstala v rukopise a byla vydána až mnohem později. Spis *De infinitis spiralibus* je obsažen v Torricelliho spisech vydaných při příležitosti třístého výročí narození „toskánského Archiméda“ ([T], sv. 1, s. 349–359, revidovaná verze vyšla znovu se souběžným italským překladem a komentářem Ernesta Carruccia v roce 1955 [TC].).

V citovaném dopise Carcavimu Torricelli uvádí, že umí novou spirálu definovat třemi způsoby. Ve spise *De infinitis spiralibus* pracuje především s následující definicí: Je dána křivka $ABCDEFG$ a bod H (obr. 11 vlevo). Sestrojíme posloupnost stejných úhlů BHC, CHD, DHE atd. s vrcholem v H takovou, že každé dva po sobě jdoucí úhly mají společné rameno. Pokud platí $HB : HC = HC : HD = HD : HE$ atd., budeme křivku $ABCDEFG$ zvát logaritmickou spirálou a bod H jejím pólem (Torricelli používá název geometrická spirála, aby ji odlišil od spirály Archimédovy, u níž tvoří délky průvodičů aritmetickou posloupnost; bod H nazývá středem spirály).

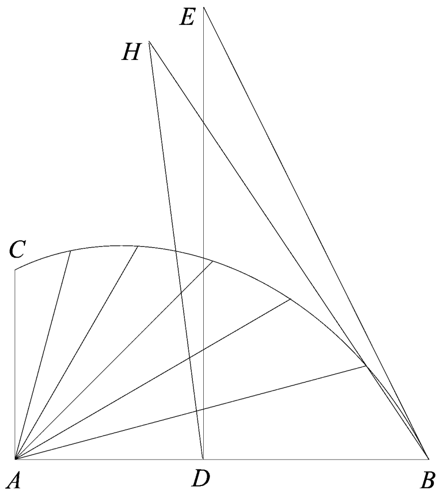
Z předchozí definice vychází následující bodová konstrukce spirály (obr. 11 vpravo). Zvolíme úsečku AB a na ní bod C. V bodě C vztyčíme kolmici a na ní sestrojíme bod D tak, aby úsečka CD byla střední geometrickou úměrnou mezi úsečkami AC a CB. Rozpůlíme úhel ACD a na jeho ose vyneseme bod E tak, aby úsečka CE byla střední úměrnou mezi úsečkami AC a CD. Stejným způsobem najdeme body spirály ležící na osách úhlů ACE, ECD, BCD atd. Bod I ležící na polopřímce DC stanovíme tak, aby platilo $DC : CB = CB : CI$. Takto můžeme sestrojit nekonečně mnoho bodů spirály (přesně vzato hustou podmnožinu množiny bodů spirály). Spirála obtáčí pól nekonečným počtem závitů (předpokládáme, že bod C neleží uprostřed úsečky AB; kdyby tomu tak bylo, ležely by všechny sestrojené body na kružnici).





Obr. 11. Definice a bodová konstrukce logaritmické spirály.

Při určování délky oblouku pracuje Torricelli s lomenou čárou vepsanou a opsanou spirále, z nichž první je kratší a druhá delší než odpovídající oblouk spirály (na základě Archimédova postulátu, který Torricelli explicitně nezmiňuje). Protože rozdíl mezi délkou opsané čáry a vepsané čáry může být menší než délka libovolné zadané úsečky, tím spíše to platí o délce oblouku spirály a délce vepsané čáry, kterou Torricelli dokáže určit. Na obr. 12 je délka vepsané lomené čáry mezi body B a C rovna délce úsečky BH a délka odpovídajícího oblouku spirály délce úseku tečny BE. Výsledek Torricelli dokazuje pomocí *reductio ad absurdum*, přesně v duchu důkazů prováděných starořeckými geometry.



Obr. 12. Délka oblouku logaritmické spirály a délka vepsané lomené čáry.

Torricelliho práce o spirále vyšla až ve 20. století a Descartův dopis Mersennovi byl vydán tiskem poprvé v roce 1667. Prvním, kdo o logaritmické spirále něco publikoval, byl Wallis ve spise *Tractatus duo* z roku 1659 ([W], sv. 1, s. 560–562). Wallis uvádí i výsledek rektifikace logaritmické spirály (tedy že spirála může být narovnána roztažením podél tečny až po její subtangentu). Jeho řešení je další ukázkou aplikace obecných zásad uvedených v jeho spise *Arithmetica infinitorum*.

Logaritmickou spirálu studovala i řada dalších významných učenců 17. století: geometrickými vlastnostmi křivky včetně délky oblouku se zabýval Isaac Barrow (1630–1677), z hlediska mechaniky ji zkoumal Isaac Newton (1643–1727). Kromě nich to byl především Jakob Bernoulli (1654–1705), jenž jí věnoval na začátku devadesátých let několik příspěvků pro *Acta eruditorum* ([B], s. 441, 492, 554). V prvním z nich rekapituloval, částečně s použitím *nové metody*, výsledky Wallisovy a Barrowovy týkající se rektifikace a kvadratury; další příspěvky obsahovaly nové poznatky.

Vlastnosti této křivky fascinovaly Jakoba Bernoulliho natolik, že druhý ze zmíněných příspěvků pro *Acta eruditorum* zakončil tímto pozoruhodným odstavcem ([B], s. 502).

Protože tato podivuhodná spirála mně svou ojedinělou a úžasnou zvláštností působí takové potěšení, [...] *pomyslel jsem, že by neměla být nevhodně použita jako symbolické znázornění různých věcí. Protože vždy rodí spirálu podobnou a stejnou, jako je ona sama, ať svinutím, rozvinutím či zrcadlením* [tj. jako svou involutu, evolutu, či kaustiku] *může být symbolem potomka podobného všude rodiči; Simillima Filia Matri. Nebo* (*není-li zakázáno srovnávat věčnou pravdu s mystérii víry*) *věčného rození Syna, který je obrazem Otce, emanujícího z něj jako světlo ze světla a zůstávajícího ὁμοούσιος s ním, třebaže zastíněný.*

Nebo, chcete-li, protože naše spira mirabilis zůstává přes všechny změny trvale a stále stejná, může být použita jako symbol stálosti a odolnosti; nebo naší tělesné schránky, která po všech změnách a dokonce smrti bude znovuzrozena; takže, kdyby bylo možno napodobit Archiméda, s potěšením bych měl na svém náhrobku spirálu s epigrafem: Eadem numero mutata resurget [ač změněna, znovuzrodí se stejná].

Délka oblouku cykloidy

Málokterá křivka se v 17. století těšila takové pozornosti jako cykloida. Cykloida patří mezi první křivky, u kterých byla úspěšně určena jak délka oblouku, tak i obsah obrazce ohraničeného celým jedním jejím obloukem. Bylo navíc ukázáno, že právě cykloida je řešením úlohy o tautochroně i brachystochroně. Protože byla příčinou vážných sporů mezi předními matematiky té doby, nazval ji Jean-Étienne Montucla (1725–1799), autor *Histoire des mathématiques*, první významné knihy o historii matematiky, „jablkem sváru“ ([Mo], sv. 2, s. 42).

V roce 1658 rozeslal Pascal anonymně francouzským i zahraničním matematikům okružní listy s výzvou k soutěži v řešení problémů týkajících se vlastností cykloidy. Jeho listy se dostaly i do Anglie, odkud Pascal obdržel mimo soutěž dopis, o kterém píše o něco později ve své *Histoire de la Roulette* ([P], sv. 8, s. 204).

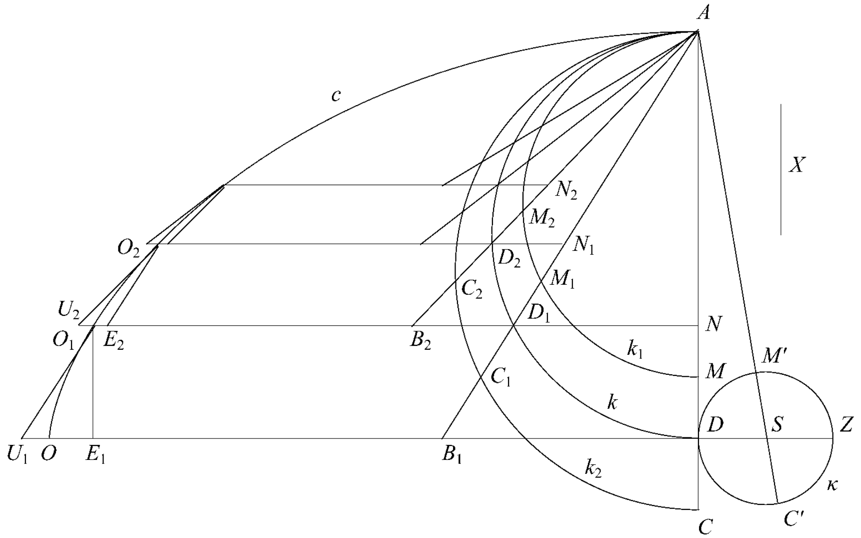
Mezi všemi zprávami tohoto druhu, které jsem obdržel, není krásnější nad tu, jež byla poslána p. Wrenem, neboť vedle krásného způsobu měření plochy uvádí porovnání celé křivky i jejích částí s rovnou čárou. Podle jeho tvrzení, které zaslal bez důkazu, je linie cykloidy rovna čtyřnásobku své osy.

Christopher Wren (1632–1723) se do historie zapsal především jako architekt, matematice se věnoval spíše okrajově. Rektifikací cykloidy si však vysloužil uznání předních matematiků své doby, ať už to byli Pascal či Wallis nebo později Newton, který Wrena spolu s Wallisem a Huygensem zařadil mezi nejvýznamnější geometry své doby ([N], s. 20).

Wrenův postup uveřejnil Wallis roku 1659 ve svém *Tractatus duo*; jedná se zajímavou ukázku použití exhaustivní metody.

Kružnice k s průměrem $AD = d$ je tvořící kružnicí cykloidy c (obr. 13). Sestrojíme k ní další dvě kružnice k_1 a k_2 dotýkající se k v bodě A s průměry AM, resp. AC tak, aby úsečka AD byla střední úměrnou mezi úsečkami AM a AC. Při tom musí být splněna podmínka, že rozdíl $AC - AM = MC$ bude roven danému X.

Řešení tohoto problému je čistě geometrické. Sestrojíme úsečku DZ o délce X kolmou k AD a kružnici $\varkappa$ se středem S uprostřed úsečky DZ a poloměrem DS. Protože AD je tečnou kružnice $\varkappa$, platí $AD^2 = AM' \cdot AC'$. Zvolíme-li $AM = AM'$ a $AC = AC'$, bude $AD : AM = AC : AD$ a MC bude rovno X, jak je požadováno.



Obr. 13. Rektifikace oblouku cykloidy podle Wrena.

Na kružnici k nyní vyznačíme bod D_1 tak, aby platilo $AD_1 = AM$. Průsečíky kružnic k_1 a k_2 s přímkou AD_1 označíme M_1 a C_1. Podobně vyznačíme bod D_2, pro který platí $AD_2 = AM_1$ a označíme M_2 a C_2 průsečíky kružnic k_1 a k_2 s přímkou AD_2 (délky úseček AD, AD_1, $AD_2, \dots$ tak budou tvořit geometrickou posloupnost s kvocientem $q = AM/AD$). Označíme dále B_1 průsečík přímky AD_1 se základnou OD, B_2 průsečík přímky AD_2 s přímkou vedenou bodem D_1 rovnoběžně se základnou, atd. Podobně označíme N průsečík rovnoběžky vedené bodem D_1 s přímkou AD, N_1 průsečík přímky AD_1 s rovnoběžkou vedenou bodem D_2, atd.

Pilovitou lomenou čárou (*polygonum serratum*) vepsanou kružnici k budeme nazývat lomenou čáru procházející body $D, N, D_1, N_1, D_2, N_2, \dots$. Pilovitou lomenou čárou opsanou kružnici k budeme nazývat lomenou čáru procházející body $D, B_1, D_1, B_2, \dots$.

Ukážeme nyní, že délka kolmého úseku vepsané čáry ND (značeného také jako N_0D_0) a šikmých úseků $D_1N_1, D_2N_2, \dots$ je rovna dvojnásobku průměru AD zmenšenému o DM, tedy $\sum_{n=0}^{\infty} D_nN_n = 2AD - DM$. Pro každé $n \geq 0$ zřejmě platí

$$M_nN_n = D_{n+1}M_{n+1}, \tag{5}$$

neboť $AD_n = dq^n$, $AM_n = dq^{n+1}$ a $AN_n = dq^{n+2}$. Dále $D_nN_n = D_nM_n + M_nN_n = 2D_nM_n - (D_nM_n - M_nN_n)$ a tudíž

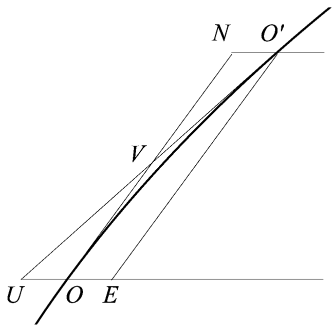
$$\sum_{n=0}^{\infty} D_nN_n = \sum_{n=0}^{\infty} 2D_nM_n - \sum_{n=0}^{\infty} (D_nM_n - M_nN_n). \tag{6}$$

První člen na pravé straně je (s ohledem na (5)) roven $2AD$. Wallis dokazuje, že (řečeno moderním způsobem) je-li a_n klesající posloupnost a $\lim a_n = 0$, pak

$\sum(a_n - a_{n+1}) = a_1$. Proto druhý člen na pravé straně (6) je roven DM. (Wallisův/Wrenův výsledek lze zapsat i takto: $\sum D_nN_n = \sum(dq^n - dq^{n+2}) = d(1-q^2)\sum q^n = d(1+q)$.)

Podobným způsobem se ukáže, že délka šikmých úseků opsané čáry je rovna dvojnásobku průměru AD zvětšenému o DC. Dané půlkružnici je tedy opsána pilovitá čára, která je delší než dvojnásobek průměru, a vepsána jiná podobná čára, která je kratší než polovina průměru, přičemž rozdíl délek obou čar je roven danému X.

Důkaz hlavního tvrzení, že oblouk $\overline{OA}$ cykloidy c má délku rovnou dvojnásobku průměru tvořící kružnice, se provede sporem. Tvořící kružnici vepíšeme a opíšeme pilovitou čáru způsobem popsaným výše. Rovnoběžku se základnou procházející bodem D_1 protáhneme až do jejího průsečíku O_1 s cykloidou a podobně sestrojíme body O_2, O_3 atd. V každém bodě O_n $(n \geq 1)$ sestrojíme tečnu k cykloidě (jedná se o přímku rovnoběžnou s přímkou AD_n). Úseky tečen O_nU_n tvoří pilovitou čáru opsanou cykloidě. Každým bodem O_n vedeme dále rovnoběžku s AD_{n-1}. Úseky O_nE_n těchto rovnoběžek budou tvořit čáru vepsanou cykloidě. S ohledem na rovnoběžnost je zřejmé, že šikmé úseky čáry opsané cykloidě a čáry opsané kružnici mají stejnou délku; totéž platí i pro obě vepsané čáry.



Obr. 14. Úseky čáry opsané a vepsané cykloidě.

Pro každé n přirozené platí $O_nU_n > \overline{O_{n-1}O_n} > O_nE_n$ (délka úseku čáry opsané cykloidě je větší než délka odpovídajícího oblouku cykloidy a ten je delší než příslušný úsek vepsané čáry). Situace je (bez indexů) rozkreslena na obr. 14. Oblouku cykloidy mezi body O a O' odpovídá opsaná čára UO' a vepsaná čára EO'. Úsečka ON je částí tečny k cykloidě v bodě O a je rovnoběžná s úsečkou EO'. Úhel $\measuredangle OEO'$ je tupý a $EO' < OO' < \overline{OO'}$. I úhel $\measuredangle UON$ je tupý, takže $OV < UV$ a tudíž $UO' > OV + VO' > \overline{OO'}$ (podle Archimédova postulátu).

Jak bylo ukázáno, délka šikmých úseků čáry opsané kružnici, které jsou stejně dlouhé jako úseky čáry opsané cykloidě, přesahuje dvojnásobek průměru tvořící kružnice o DC. Délka oblouku cykloidy mezi body O a A bude tedy menší než délka čáry opsané tomuto oblouku, přičemž rozdíl obou délek bude menší než dané X. Rozdíl délky oblouku a délky čáry vepsané bude rovněž menší než X. Protože X bylo voleno libovolně, nemůže být délka oblouku OA ani větší ani menší než $2AD$.

Cykloida nebyla první rektifikovanou křivkou, byla však první křivkou, jejíž rektifikace vstoupila díky Pascalově *Histoire de la Roulette* v obecnou známost. Jedním z matematiků, na které Wrenův výsledek učinil silný dojem, byl Christiaan Huygens (1629–1695), jenž se s latinskou verzí Pascalovy práce seznámil již na začátku roku 1659. Svědčí o tom Huygensovy dopisy Slusovi, Carcavimu, Wallisovi a van Schootenovi z ledna a února 1659 ([H], sv. 2, s. 313, 315–316, 329–330, 343). Wrenovým výsledkem byl zaujat natolik, že jej sám vlastním způsobem odvodil ([H], sv. 14, s. 366–367).

Huygensův postup je do značné míry založen na geometrické intuici. Jeho odvození mu nicméně umožnilo hlubší vhled do problematiky a znamenalo důležitý předpoklad nalezení dalších výsledků, zejména pokud jde o evolutu cykloidy ([Yo], s. 82).

Huygens nebyl jediným, u koho uveřejnění Wrenova výsledku podnítilo zájem o rektifikaci cykloidy. Již v lednu 1659 poslal Huygensovi vlastní odvození Claude Mylon (1618–1660) ([H], sv. 2, s. 335–336). Pascal sám se v této souvislosti zmiňuje o Fermatovi a Robervalovi ([P], sv. 8, s. 204–205). Délka oblouku byla údajně jedním z prvních výsledků, které Roberval o cykloidě odvodil (stalo by se tak tedy již mezi roky 1634 a 1638), neuveřejnil jej však a jeho spis o cykloidě, obsahující i odvození délky oblouku, vyšel až roku 1693 ([R], s. 274 a n.). Rektifikací cykloidy se zabýval i Newton, který elegantní, ale poměrně komplikovaný Wrenův důkaz zjednodušil ([NM], sv. 2, s. 192–193).

Rektifikace a evoluty

Pro vývoj evropského myšlení v 17. století je charakteristický proces matematizace přírodovědy, k němuž koncepční rámec tvořila Descartova filosofie. Sbližování mechaniky a geometrie spolu se zdůrazněním praktické využitelnosti poznatků jsou typické pro dílo Huygense. Huygens znal Descarta i jeho analytickou geometrii, studoval však i geometrii starých Řeků, zabýval se mechanikou a disponoval značnou technickou invencí. Pro 17. století je však typická i Huygensova malá ochota publikovat metody a postupy, spojená s hájením vlastních zásluh.

Huygensovo magnum opus *Horologium oscillatorium*, které bylo publikováno roku 1673, obsahuje plody Huygensovy mnohaleté práce. Třetí část pojednává o výsledcích Huygensova výzkumu délek křivek a najdeme v ní i jeho vlastní verzi historie prvních rektifikací. Vysoce v ní hodnotí Wrenovu práci, Neilův příspěvek naopak podceňuje (což vyvolalo rozhořčenou reakci Wallise hájícího prvenství svého krajana). Huygens vyzdvihuje také van Heuräetovu práci a zdůrazňuje i svůj vlastní podíl.

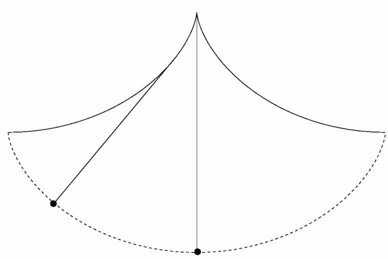
Roku 1657 dospěl Huygens ke dvěma výsledkům, které měly k problematice rektifikace vztah. Prvním byla souvislost mezi rektifikací paraboly a kvadraturou hyperboly, druhým převedení obsahu parabolického konoidu na obsah kruhu. S těmito výsledky seznámil svého někdejšího učitele van Schootena, jehož prostřednictvím se zpráva o nich dostala i k van Heuräetovi a údajně pro něj znamenala inspiraci pro jeho práci o rektifikaci. Někteří moderní autoři tuto hypotézu přejímají; dnes je však obtížné takové tvrzení ověřit.

Van Heuräetova práce měla nicméně obecný charakter a obsahovala první z uvedených Huygensových poznatků jako důsledek. Huygens sám na konci 50. let cítil, že musí přinést významnější výsledek, chce-li se rovnat Wrenovi a van Heuräetovi ([Yo], s. 127). K tomu mu poskytl materiál jeho objev evolut.

Huygensův vhled do světa geometrie mu umožnil přetvářet podněty přicházející ze světa mechaniky v geometrické teorie samostatného významu. Úsilí o konstrukci přesných kyvadlových hodin přivedla Huygense k problému, který jej zaměstnával na konci 50. let: k problému izochronního (tautochronního) kyvadla. Kyvadlo opisující oblouk kružnice není izochronní; doba kmitu závisí na poloze, v níž je závaží uvolněno. Při hledání izochrony se Huygensovi nejprve podařilo vyřešit přidružený „infinitezimální“ problém: vyjádřit závislost doby kmitu kyvadla na délce ramene při dostatečně malé amplitudě, kdy lze zanedbat odchylky od izochronního pohybu. Tento výsledek jej poté dovedl k velkému úspěchu, kterým byl objev izochronie cykloidy.

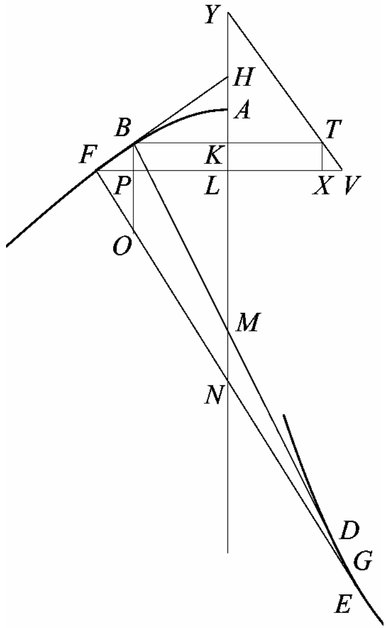
Důkaz, který se později objevil v *Horologiu oscillatoriu*, měl Huygens sestaven v zásadě již na konci roku 1659. Jeho odvození naznačuje jasně jeho schopnost používat infinitní metody a najdeme v něm i použití charakteristického trojúhelníku, který se stal později jedním ze základních stavebních prvků Leibnizovy *nové metody*. Huygens si byl dobře vědom významu svého objevu a připsal ke svému důkazu citát z Ovidia: „Velké věci, v něž předků nevnikl důvtip“ ([Yo], s. 59–61).

Při konstrukci izochronních kyvadlových hodin bylo třeba umístit kyvadlo (vlákno se závažím) mezi překážky tvarované tak, aby se závaží pohybovalo po cykloidě. Řešení tohoto praktického problému přivedlo Huygense k dalšímu významnému geometrickému objevu: teorii evolut. Úkolem bylo k dané (převrácené) cykloidě najít křivku (tzv. evolutu), na kterou se má vlákno navíjet a jejíž tečna v každém bodě bude kolmá k dané cykloidě a jejíž oblouk bude mít délku rovnou délce vlákna. Huygens měl v té době již hotov důkaz tvrzení o délce oblouku cykloidy, k němuž dospěl ještě před vydáním *Tractatus duo*, a rozpoznal, že hledanou křivkou je opět cykloida.



Obr. 15. Kyvadlo pohybující se po cykloidě.

Ačkoliv tento výsledek vyplynul z řešení konkrétního problému souvisejícího s pohybem kyvadla, nalezená technika měla obecný charakter. Huygens se neomezil jen na hledání evoluty cykloidy; tutéž techniku, kombinující infinitezimální úvahy s algebraickým odvozením, vyzkoušel i na parabole a zjistil, že evolutou paraboly je semikubická parabola, jejíž *latus rectum* je rovno 27/16-násobku téže veličiny dané paraboly. Další studovanou křivkou byla elipsa a zdá se, že Huygens již v této době (v roce 1659) odvodil obecný vztah, který je obsažen v *Horologiu oscillatoriu.*



Obr. 16. K odvození obecné rovnice pro evolutu.

V bodech B a F dané křivky ABF (obr. 16) sestrojíme normály, které budou tečnami její evoluty v bodech B a D. Leží-li body B a F dostatečně blízko, můžeme považovat jejich průsečík G za bod jejich dotyku s evolutou, tedy bod ležící na evolutě. Oblouk mezi body B a F nahradíme úsečkou a z podobnosti trojúhelníků BOG a MNG resp. BOF a HNF dostaneme rovnici

$$\frac{BG}{MG} = \frac{HN}{HL} \cdot \frac{KL}{MN}, \tag{7}$$

která umožňuje na základě vlastností křivky ABF určit bod G její evoluty.

Využití evolut k rektifikaci bylo nasnadě. Vlákno odvíjející se z překážky má stejnou délku jako oblouk křivky, podle níž je překážka vytvarována. Huygensovo odvození rovnice pro evolutu není vlastně ničím jiným než stanovením délky oblouku evoluty. Tvrzení 11 z třetí části knihy *Horologium oscillatorium*, které obsahuje odvození rovnice pro evolutu, spojuje přímo její určení s rektifikací:

Pro danou křivku najít jinou křivku, která popisuje danou křivku jako svou evolutu; a ukázat, jak z každé geometrické křivky může být nalezena jiná křivka stejně geometrická. kterou je možné položit rovnou úsečce.

Huygensova metoda se stala matematickým vyjádřením praktického a přímočarého řešení problému rektifikace.

Nová metoda

Autorka [Yo] cituje Huygensův dopis, který odráží rivalitu mezi ním a van Heuräetem při hledání obecné metody rektifikace. „Troufám si tvrdit, že tento objev uspokojí i velmi náročného van Heuräeta; neboť pro mne je zajisté nejvybranějším ze všech objevů, na které jsem kdy narazil," píše Huygens van Schootenovi (s. 130). Huygensova metoda byla v dané době efektivnější, neboť úspěšnost van Heuraäetovy metody závisela na schopnosti provést kvadraturu pomocné křivky. Ve van Heuräetově metodě s jejím spojením problematiky tečen a kvadratur však můžeme vidět zárodek obecného pravidla, které se stalo základem nové metody – základní věty infinitezimálního počtu.

Jméno skotského matematika Jamese Gregoryho (1638–1675) není zdaleka tak známé jako jména Newtona a Leibnize; myšlenky obsažené v jeho díle z něj však činí jejich přímého předchůdce. Jednu z prvních verzí základní věty infinitezimálního počtu obsahuje spis *Geometriæ pars universalis*, který Gregory napsal v době svého pobytu v Itálii v letech 1664–1668. Toto dílo bylo zamýšleno jako shrnutí, sjednocení a zobecnění výsledků dosažených při řešení problémů kvadratur, rektifikací, konstrukce tečen. Sám Gregory připouští v úvodu, že všechny předkládané výsledky nejsou jeho vlastní; jeho schopnost najít obecnou zákonitost skrytou za jednotlivými případy však činí jeho dílo originálním. Jeho důkazy jsou vedeny v duchu Archimédovy (exhaustivní) metody; Gregory se nevyhýbá ani Cavalieriho metodě (indivisibilií), přičemž poukazuje na to, že ji lze převést na předchozí způsob. Obecné pravidlo spojující délku oblouku dané křivky s obsahem obrazce ohraničeného pomocnou křivkou je obsaženo ve druhém tvrzení. Předpokládá se jednoduchá, nezavinutá (non sinuosa) křivka, která má v každém bodě tečnu. Gregory, podobně jako v citovaném pojednání Fermat, s jehož dílem se v Itálii rovněž seznámil, používá geometrický jazyk a dospívá k výsledku odpovídajícímu vzorci (1).

Vývoj základů infinitezimálního počtu završili nezávisle na sobě Isaac Newton (1643–1727) a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) a otevřeli tak cestu k metodickému zkoumání problémů rektifikace, kvadratury a dalších úloh souvisejících s vlastnostmi křivek.

Nová teorie byla poprvé představena v Leibnizově pojednání *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus*, které v roce 1684 přinesl časopis *Acta eruditorum*. Všeobecně se soudí, že Newton dospěl k hlavním výsledkům již na přelomu 60. a 70. let; tiskem je však publikoval až mnohem později.

První učebnici infinitezimálního počtu napsal Guillaume François Antoine markýz de l'Hospital (1661–1704). Kniha nesla název *Analyse des infiniments petits, pour l'intelligence des lignes courbes* a vyšla v roce 1696; na jejím obsahu měl velký podíl Johann Bernoulli, jehož si l'Hospital najal jako svého učitele.

Kniha byla obecně považována za prezentaci Leibnizovy nové metody. Jedním ze základních východisek byla pro l'Hospitala představa křivky jako lomené čáry tvořené nekonečně mnoha nekonečně malými rovnými úseky ([LH], s. 3):

Křivka může být považována za soubor nekonečně mnoha nekonečně krátkých rovných čar, nebo (což je totéž) za lomenou čáru s nekonečným počtem stran, z nichž každá má nekonečně malou délku a které určují zakřivení prostřednictvím úhlů, jež svírají mezi sebou navzájem.

Ani vynikající výsledky, které nová metoda přinášela, nedokázaly úplně rozptýlit pochybnosti o legitimitě jejích postupů. Kritikové infinitezimálního počtu poukazovali na logické nedostatky v jeho základech – na nejasné a rozporuplné definice základních pojmů a především na problematický pojem nekonečně malé veličiny. Sami objevitelé nové metody si byli slabých míst své teorie vědomi, avšak výsledky zastínily potřebu jejich úplného vyjasnění.

Nejznámějším odpůrcem nové metody se stal anglikánský biskup George Berkeley (1685–1753). Jeho kritika jak Newtonovy, tak Leibnizovy teorie obsažená ve spise *The Analyst* z roku 1734 byla založena pouze na rozboru jejich vnitřní konzistence a vycházela z požadavků na přesnost, které nebyly nijak nové. Berkeley poukazoval na to, že nekonečně malé veličiny nejen nejsou nutné, ale jsou dokonce v řádně budované teorii nepřijatelné.

Pevné základy

Analýza v 18. století na jedné straně přinášela nové poznatky a nemalým dílem přispěla k úspěchům přírodovědy, z nichž pramenil optimistický pohled na možnost racionálního porozumění světu, na druhé straně byla stále silněji pociťována existence slabých míst v jejích základech. Tento stav ilustruje Diderotova *Encyclopédie* (vycházela v letech 1751–1766), která měla představovat souhrn lidského vědění v polovině 18. století. Koeditorem a autorem většiny hesel z oblasti matematiky byl Jean le Rond d'Alembert (1717–1783). Heslo LIMITE je pojato vcelku moderním způsobem; na příkladu kružnice s opsaným a vepsaným pravidelným mnohoúhelníkem je ukázáno, že ačkoliv lomené čáry tvořící obvody takových mnohoúhelníků nebudou nikdy stejně dlouhé jako kružnice, lze její délku chápat jako limitu délek těchto lomených čar. D'Alembert však toto pojetí dále nerozpracoval a stejně jako ostatní používal jinak běžně nekonečně malé veličiny. Heslo RECTIFICATION bylo naproti tomu víceméně převzato z Chambersovy *Cyclopædie*, která byla pro francouzské encyklopedisty inspirací. Křivka je zde výslovně chápána jako lomená čára tvořená nekonečně krátkými úsečkami s délkami $\sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Vybudovat novou teorii, která by dokázala totéž co infinitezimální počet, ale neobsahovala jeho slabiny a splňovala požadavky na přesnost odpovídající geometrii starých Řeků, se pokusil na přelomu 18. a 19. století Joseph-Louis Lagrange (1736–1813). Jeho *Théorie des fonctions analytiques* vyšla roku 1797 a obsahovala pojmy derivované a primitivní funkce, s jejichž pomocí byly vyjadřovány operace derivování a integrování. Derivace funkce byla chápána jako koeficient u lineárního členu v mocninné řadě odpovídající dané nekonečně hladké funkci.

Lagrangeovo řešení problému rektifikace oblouku konkávní křivky, která je grafem funkce $f(x)$, se opírá o Archimédův postulát ([L], sv. 9, s. 241 a n.). Na jeho základě Lagrange dokazuje, že délka oblouku mezi x a $x+i$ je ohraničena délkami úseků tečen v koncových bodech oblouku mezi přímkami x a $x+i$, neboli

$$i\sqrt{1+[f'(x)]^2} \leq l \leq i\sqrt{1+[f'(x+i)]^2}$$

Označíme-li $\varphi(x) = \sqrt{1+[f'(x)]^2}$ a $\Phi(x)$ délku křivky, pak délka oblouku $\Phi(x+i) - \Phi(x) = i\varphi(x) - i\varphi(x+i)$. Odtud plyne $\Phi'(x) = \varphi(x)$ a k nalezení délky oblouku křivky tedy potřebujeme najít primitivní funkci k funkci $\varphi(x) = \sqrt{1+[f'(x)]^2}$. Hodnotu integrační konstanty určíme z podmínky, že $\Phi(x) = 0$ v počátečním bodě oblouku.

Lagrangeova teorie analytických funkcí představovala pokus o vybudování analýzy na algebraickém základě a v analýze „určovala tón" zhruba po dobu dvou desetiletí na přelomu 18. a 19. století. Pojetí blízké Lagrangeovu se objevuje rovněž v kompendiu poznatků z diferenciálního a integrálního počtu *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (1797–8), jehož autorem byl Silvestre François Lacroix (1765–1843). Lacroix převzal Lagrangeův formalismus, ale příležitostně používá i pojem limity. Při důkazu, že limita poměru délky oblouku konkávní křivky a délky tětivy vedené koncovými body oblouku je rovna jedné, blíží-li se přírůstek nezávisle proměnné nule, volí Lacroix „nejanalytičtěiší způsob": používá Taylorovu větu a rovněž, byť ne výslovně, Archimédův postulát.

V první polovině 19. století začala být stále více pociťována potřeba přebudovat analýzu na spolehlivých základech, na aritmetických pojmech a bez odkazů na geometrickou intuici. Úsilí o přeformulování základů analýzy je v tomto období spojeno především se jménem Augustin-Louis Cauchy (1789–1857). V Lagrangeově i Lacroixově díle můžeme zaznamenat posun v chápání pojmu funkce směrem k modernímu pojetí. Pojem funkce přestává být spojován s algebraickým výrazem, připouští se i funkce definované pomocí mocninné řady nebo funkce, pro které není exlicitní předpis znám. Cauchyho *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique* z roku 1821 se od zmíněných prací jeho předchůdců významně liší především v odlišném chápání spojitosti funkce. Negeometrický přístup vyžadoval také nové pojetí čísla.

Cauchyho nová analýza rozvíjená dále ve spise *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal a la géométrie* byla založena na zdůraznění limity pro definování derivací a integrálů. Radikální změnou ve srovnání s ustálenou praxí byla Cauchyova definice integrálu jako limity posloupnosti integrálních součtů.

Určením diferenciálu oblouku křivky a problémem rektifikace se Cauchy zabývá v díle *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal a la géométrie.* Myšlenkově je Cauchyho odvození podobné Lacroixovu, předpokládá se spojitá konkávní křivka a alespoň implicitně je při postupu použit i Archimédův postulát; vychází známý transformační vzoreček $ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$, kde y' je derivace chápaná ve smyslu limity diferenčních podílů.

Větší pozornost než Cauchy věnoval problému rektifikace horlivý berlínský stoupenec nové analýzy Enne Heeren Dirksen (1788–1850). V pojednání *Über* *die Anwendung der Analysis auf die Rectification der Curven, die Quadratur der Flächen und die Cubatur der Körper* si Dirksen položil otázku, zda obvyklý postup určení diferenciálu a následně primitivní funkce vyjadřující délku je správný a jaké je v teorii rektifikace místo Archimédova postulátu. Nahradil Archimédův postulát *definicí* délky křivky, která staví na známém pojmu délky úsečky a na integrálu jako limitě integrálních součtů.

Oblouk (prostorové) křivky s koncovými body A a B rozdělíme soustavou $n+1$ ekvidistantních rovnoběžných rovin tak, aby první a poslední procházely koncovými body oblouku. Průsečíky křivky $M_i, i = 0, \dots, n$ s rovinami spojíme úsečkami, které dohromady budou tvořit lomenou čáru délky

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{i+1}.$$

Číslo

$$L = \lim_{n \to \infty} L_n$$

pak nazýváme délkou oblouku AB.

Bernard Bolzano (1781–1848) byl ke studiu základů analýzy veden spíše filosofickými pohnutkami. Uvědomoval si možná jasněji než kdokoliv z jeho současníků, jaká jsou slabá místa tehdejší analýzy a jaké postupy je třeba volit, aby teorie z přísně logického hlediska obstála. V roce 1817 Bolzano publikoval vedle známého pojednání *Rhein analytischer Beweis* také spis *Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung*, v němž se pokusil o obecné řešení problému rektifikace nejen bez použití nekonečně malých veličin, ale i bez Archimédova postulátu.

Bolzano se ve své teorii rektifikace nechtěl opírat o nic jiného než o Taylorovu větu. Uvažuje jednoduchou rovinnou křivku popsanou rovnicí $y = f(x)$; hledaná délka křivky je dána rovnicí $y = F(x)$. Přírůstku Δx pak bude odpovídat přírůstek délky $F(x+\Delta x) - F(x)$, který lze vyjádřit podle Taylorovy věty rozvojem $\Delta x(\frac{dF(x)}{dx} + \frac{\Delta x}{2}\frac{d^2F(x)}{dx^2} + \dots)$. Tento výraz vyjadřuje délku oblouku odpovídajícího úsečce Δx a je určen hodnotami $f(x + m\Delta x)$, když za m dosadíme „všechny myslitelné vlastní zlomky nebo 0 nebo 1“. Bolzano dále ukazuje, že hodnoty $F(x + \Delta x) - F(x)$ jsou určeny pouze hodnotami výrazu $f(x + m\Delta x) - f(x)$.

Stojí-li pro dvě nebo více křivek výraz $f(x + \Delta x) - f(x)$ k Δx ve stejném poměru a navíc podíl $\frac{f(x+m\Delta x)-f(x)}{m\Delta x}$ nabývá stejných hodnot pro každé výše uvedené m, pak oblouky těchto křivek odpovídající Δx jsou *podobné* a z teorie podobnosti plyne, že rovněž $F(x + \Delta x) - F(x)$ jsou k Δx ve stejném poměru. Výraz $\frac{F(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ tak závisí pouze na hodnotách $\frac{f(x+m\Delta x)-f(x)}{m\Delta x}$ pro výše uvedená m.

Uvažujme dále dvě křivky popsané rovnicemi $y = f(x)$ a $y = \varphi(x)$. Funkce $F(x)$ resp. $\Phi(x)$ vyjadřující jejich délku bude podle Bolzana nepochybně možné z funkcí $f(x)$ resp. $\varphi(x)$ odvodit stejným způsobem. Funkce $\frac{dF(x)}{dx}$ a $\frac{d\Phi(x)}{dx}$ jsou ale určeny pouze $\frac{df(x)}{dx}$ a $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ a musí být z nich odvoditelné stejným způsobem.

Dobová kritika vytýkala Bolzanovi, že jeho důkazy nejsou důkazy v matematickém slova smyslu, ale že jsou promíchány s diskurzívní výplní připouštějící pochybnosti. Z hlediska moderní analýzy bylo problematické Bolzanovo přiřazení nějakého čísla každému oblouku křivky. O více než půlstoletí později se Bolzanovou prací zabýval Otto Stolz [St] a upozornil, že problematický předpoklad možnosti rozvinutí funkce $F(x)$ není nutný, neboť by stačilo předpokládat existenci $\frac{dF}{dx}$.

Zajímavější než jeho řešení problému rektifikace bylo z hlediska dalšího vývoje matematiky Bolzanovo vymezení pojmu křivky, plochy a tělesa, které přitom nebylo, jak Bolzano sám poznamenává, pro řešení uvažovaného problému potřeba. Bolzanovy myšlenky týkající se souvislosti a dimenze předběhly úsilí o definování těchto pojmů z hlediska teorie množin a topologie.

Jean-Marie Constant Duhamel (1797–1872) se zabýval otázkou rektifikace ve druhém svazku díla *Des méthods dans les sciences de raisonnement*, který vyšel v roce 1866. Duhamel si uvědomoval nemožnost srovávat oblouky různých křivek, případně oblouky s úsečkami geometrickými prostředky a podává zcela moderně znějící definici délky oblouku ([Du], s. 412).

Délkou oblouku křivky je definována jako limita, k níž se blíží délka lomené čáry vepsané danému oblouku, když se délky stran lomené čáry vesměs blíží nule.

Aby tato definice měla smysl, dokazuje Duhamel, že tato limita existuje a je jednoznačně určena bez ohledu na to, jakým způsobem je dělení vepsané lomené čáry realizováno.

Závěr

Duhamelova teorie rektifikace má v podstatě stejnou podobu, v jaké se dnes rektifikace přednáší studentům v základním kursu integrálního počtu. Původně intuitivně samozřejmá úloha přiřazení délky křivce a její stanovení pomocí integrálu (1) byla obrácena: délkou křivky byl nazván právě integrál, který dříve byl pouze prostředkem pro její stanovení. Historie rektifikace ovšem Duhamelem nekončí. Zprvu nebylo mnoho pozornosti věnováno otázkám platnosti vzorce (1) a existence integrálu v něm obsaženého. Další pokrok při řešení těchto otázek byl podmíněn formulováním obecnější teorie integrálu.

S hledáním podmínek rektifikovatelnosti získala důležitost i otázka nerektifikovatelných křivek. Úsilí vyjádřit v analogii k měření délky rektifikovatelné křivky nějakým způsobem, „jakou část prostoru“ křivka zaujímá, vedl k pojmům lineární míry a neceločíselné dimenze.

LITERATURA

[Ar] Archimedes, *The Works of Archimedes, edited in modern notation with introductory chapters by T. L. Heath*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1897.

[A1] Aristotelés, *Fyzika*, Rezek, Praha, 1996.

[A2] Aristotelés, *O sofistických důkazech*, Academia, Praha, 1978.

[Ba] Baron M. E., *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Dover, New York, 1987.

[BS] Beeley P., Scriba C. J. (ed.), *The Correspondence of John Wallis*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2005.

[B] Bernoulli Jakob, *Jacobi Bernoulli Basileensis Opera*, Sumptibus haeredum Cramer & fratrum Philibert, Genevæ, 1744.

[BR] du Bois-Reynold P., *Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung*, Mathematische Annalen **15** (1879), 283–314.

[Bs] Bos H. J. M., *On the Representation of Curves in Descartes' Géométrie*, Archive for the History of Exact Sciences **24** (1981), 295–338.

[Bo] Boyer C. B., *Early Rectifications of Curves*, s. 30–39, in Mélanges Alexandre Koyré, tome I, Paris, Hermann, 1964.

[Ca] Cantor M., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, B. G. Teubner, Leipzig, 1894–1908.

[D] Descartes R., *Œuvres de Descartes / Publiées par Charles Adam et Paul Tannery*, L. Cerf, Paris, 1897–1910.

[DG] Descartes R., *Geometria, a Renato des Cartes anno 1637 gallica edita*, Apud Ludovicum et Danielem Elzevirios, Amstelodami, 1659.

[Du] Duhamel J.-M. C., *Des méthodes dans les sciences du raisonnement*, Gauthier-Villars, Paris, 1866.

[F] Fermat P. de, *Œuvres de Fermat, publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry sous les auspices du Ministère de l'Instruction*, Gauthier-Villars, Paris, 1891–1922.

[Gh] Ghinassi G., *Lettere fin qui inedite di Evangelista Torricelli*, Dalla Tipografia di Pietro Conti, Faenza, 1864.

[He] Heath T. L., *A History of Greek Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1921.

[Ho] Hobbes T., *The English works of Thomas Hobbes of Malmesbury*, Longman, Brown, Green and Longmans, London, 1839–1845.

[Hf] Hofmann J., *Über die ersten logarithmischen Rektifikationen. Eine historisch-kritische Studie in vergleichender Darstellung*, Deutsche Mathematik **6** (1941), 283–303.

[LH] L'Hospital G. de, *Analyse des infiniments petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, 2. éd., François Montalant, Paris, 1716.

[H] Huygens C., *Œuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la Société Hollandaise des Sciences*, Martinus Nijhoff, La Haye, 1888–1950.

[Je] Jesseph D. M., *Squaring the Circle: the War between Hobbes and Wallis*, Chicago Univ. Press, Chicago, 1999.

[Ka] Kargon R., *Thomas Hariot, the Northumberland Circle and Early Atomism in England*, Journal of the History of Ideas **27** (1966), 128–136.

[Kn] Knorr W. R., *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Birkhäuser, Boston, 1986.

[Ko] Koudela L., *První rektifikace algebraických křivek*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **55** (2010), 139–147.

[L] Lagrange J.-L., *Œuvres complètes*, Gauthier-Villars, Paris, 1887–1892.

[Lo] Loria G., *Evangelista Torricelli e la prima rettificazione di una curva*, Atti della Reale Accademia dei Lincei **6** (1897), 318–323.

[Ma] Malcolm N., *Aspects of Hobbes*, Clarendon Press, Oxford, 2002.

[Mn] Mancosu P., *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, Oxford Univ. Press, New York, 1996.

[Me] Mersenne M., *Cogitata physico-mathematica*, Sumptibus Antonii Bertier, Parisiis, 1644.

[MP] Møller Pedersen K., *Roberval's Comparison of the Arclength of a Spiral and a Parabola*, Centaurus **15** (1970), 26–43.

[Mo] Montucla J.-E., *Histoire des mathématiques, dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours*, C. A. Jombert, Paris, 1758.

[N] Newton I., *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, Typis Josephi Straeter, Londini, 1686.

[NM] Newton I., *The Mathematical Papers of Isaac Newton, edited by D. T. Whiteside with the assistance in publication of M. A. Hoskin*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1967–1974.

[Pa] Pappos, *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manuscriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch*, Apud Weidmannos, Berolini, 1876–1878.

[P] Pascal B., *Œuvres complètes, éd. L. Brunschvicg, P. Boutroux, F. Gazier*, Hachette, Paris, 1908–1928.

[Pe] Pepper J. V., *Harriot's Calculation of the Meridional Parts as Logarithmic Tangents*, Archive for History of Exact Sciences **4** (1968), 359–413.

[R] Roberval G. Personne de, *Divers ouvrages de mathématiques et de physiques*, Académie Royale des Sciences, Paris, 1693 (reprint *Divers ouvrages de M. de Roberval = Mémoires de l'Académie Royale des Sciences depuis 1666–1699*, Vol. VI, Paris, 1730).

[St] Stolz O., *B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung*, Mathematische Annalen **18** (1881), 255–279.

[T] Torricelli E., *Opere di Evangelista Torricelli – Edite in occasione del III centennario della nascita col concorso del comune di Faenza, da Gino Loria e Giuseppe Vassura*, G. Montanari, Faenza, 1919–1944.

[TC] Torricelli E., *De infinitis spiralibus*, Domus Galileana, Pisa, 1955.

[Tr] Traub G., *The development of the mathematical analysis of curve length from Archimedes to Lebesgue*, New York University, New York, 1984.

[Wa] Van der Waerden B. L., *Probuždajuščajasja nauka*, GIFML, Moskva, 1959 (překlad z holandského originálu *Ontwakende Wetenschap*, P. Noordhoff, Groningen, 1950).

[W] Wallis J., *Johannis Wallis … Opera Mathematica …*, E theatro Sheldoniano, Oxoniæ, 1695–1699.

[Yo] Yoder J. G., *Unrolling time. Christiaan Huygens and the mathematization of nature*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[Ze] Zeuthen H. G., *Die geometrische Construction als „Existenzbeweis“ in der antiken Geometrie*, Mathematische Annalen **17** (1881), 222–228.