O SOBOTKOVĚ UČEBNICI DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE PROMÍTÁNÍ PARALLELNÍHO

Zbyněk Nádeník

Tento příspěvek je zcela ve smyslu mých programových přednášek [15] a [16] z let 1993 a 1994 na seminářích skupiny JČMF pro deskriptivní geometrii a počítačovou grafiku. Nabádal jsem jednak k připomínání starší literatury o deskriptivní geometrii, jednak k jejímu spojení s analytickou geometrií. – Po celou dobu svého působení na pražské technice až do roku 1997 jsem nikdy deskriptivní geometrii nepřednášel, teprve v zimním semestru 1999–2000 jsem na pražské pedagogické fakultě konal přednášku *Zobrazovací metody* (promítání kótované a Mongeovo). Pracoval jsem v ní s analytickou geometrií.

— — —

Kniha vyšla v Praze roku 1906. Má XVIII + 643 stran a 471 obrázků, které vzorně vyrýsoval F. Císař.

Na prostějovské reálce jsem se učil deskriptivní geometrii z učebnic, které v prvním desetiletí dvacátého století napsali Josef Pithardt a Ladislav Seifert [20]. Díly III a IV jsem měl (a dosud mám) ve 4. vydání z roku 1933. V jejich závěru na str. 143 jsou k dalšímu studiu doporučeny tyto spisy: F. Kadeřávek – J. Klíma – J. Kounovský [8], V. Jarolímek – B. Procházka [6] a Sobotkova učebnice. Vypůjčil jsem si ji, ale jejího studia jsem za čas zanechal a obrátil jsem se k prvnímu dílu učebnice [8] trojice autorů.

Pokusím se nyní – po více než 55 letech – zodpovědět otázku, proč jsem nezůstal více u Sobotkovy knihy.

Pithardtovy a Seifertovy učebnice mi rychle otvíraly poznání deskriptivní geometrie, a toho se mi u Sobotkovy knihy nedostávalo. Je – zvláště při svém zaměření jen na jeden směr v deskriptivní geometrii, totiž na rovnoběžné promítání – příliš rozsáhlá a nové obzory otevírá pomaleji. To byl patrně důvod, pro který jsem začal studovat učebnici [8]. Ta mi umožňovala poznání mnohem rychleji; dnes už ovšem dávno vím, že s nemalým skřípáním.[1] K podrobnému studiu Sobotkovy knihy jsem se už později nikdy nevrátil. Ale byl jsem rád, když jsem ji koupil v antikvariátu. Mnohokrát mi posloužila – dlouhý čas to obrátil – právě svou výjimečnou důkladností, pro kterou má v celé literatuře o deskriptivní geometrii dominantní postavení. Kdyby byla vyšla francouzsky nebo německy, byla by se jistě dočkala uznání v cizině.

— — —

[1] Skupina JČMF se dosud nezmohla, aby učebnici trojice autorů [8], která je nejdůležitější v celé české literatuře o deskriptivní geometrii, analyzovala, připomenula si její přednosti i její chyby a vyvodila z toho důsledky pro svou práci. Srv. recenzi V. Hlavatého a stanoviska autorů v Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky 62(1933), 252–258.

SBORNÍK
JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ
V PRAZE.

Číslo X.

J. SOBOTKY

DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

PROMÍTÁNÍ PARALLELNÍHO.

V PRAZE.
NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ A ČESKÉ MATICE TECHNICKÉ.

Shrnu ohlasy na Sobotkovu učebnici, předně české, pak cizí. Překvapuje, že v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky z let 1906 až 1910 není její recenze. J. Kounovský – F. Vyčichlo [12, str. 524 v 2. vyd. 1951], 1948 píší:

> *Nejdůležitější přehled příslušné literatury je obsažen v Poznámkách ke spisu Jana Sobotky: Deskriptivní geometrie promítání parallelního (Praha 1906); jest veliká škoda, že vynikající autor neodhodlal se k soustavnému zpracování celého oboru deskriptivní geometrie.*

J. Klapka [10, str. 391], 1949 je velmi stručný:

> *Obšírné, nikoliv však ukončené dílo theoretického zaměření.*

E. Kraemer [13, díl I., str. 7], 1991 se rozepsal víc:

> *Rovnoběžné promítání a celá s tím související problematika se v knize* [tj. [13]] *chápe jako součást matematiky (speciálně geometrie). Poslední naší takto pojatou monografickou prací o rovnoběžném promítání byla kniha profesora Sobotky nazvaná Deskriptivní geometrie promítání parallelního. Vyšla v Praze roku 1906 a byla to tehdy publikace velmi hodnotná a podnětná; pochopitelně však zastarala. Učebnice, kterou nyní předkládám, navazuje na Sobotkovu koncepci zejména v tom, že se v ní uplatňuje důkladný teoretický základ spočívající v důsledném užití afinních zobrazení.*

Ze všech českých učebnic na Sobotkovu nejvíce navazuje Kraemerova. Už jen vnějšně se to projevuje: Z celkem 460 stran v ní patří kapitole 3 *Afinní zobrazení v deskriptivní geometrii* přibližně jedna šestina (75 stran); tato kapitola je odrazem ústřední části Sobotkovy knihy, totiž kapitoly VII *Affinita; affinní poloha dvou soustav rovinných*, která z celkových 643 stran má 170 stran, tedy jednu čtvrtinu.

F. Kadeřávek v článku [7, str. 4] k Sobotkovým šedesátinám:

> *Rovněž by si bylo velmi přáti, aby profesor Sobotka mohl dokončiti své velké dílo tak slibně započaté Deskriptivní geometrii promítání parallelního r. 1906 vydanou. Jest to první vzorné, naprosto vědecké a systematické kompendium deskriptivní geometrie v jazyce českém vůbec.*

B. Bydžovský v Sobotkově nekrologu [2, str. 28]:

> *Za dlouhá léta učitelské činnosti nashromáždil si S. mnoho rukopisného materiálu, jenž mohl sloužiti za podklad pro zpracování mnoha dobrých učebnic. Z tohoto materiálu vyšly jednak litografované přednášky o diferenciální geometrii (1909, nákladem Jednoty českých mathematiků), jednak první díl velké učebnice deskriptivní geometrie, která vyšla (1906) nákladem téže Jednoty a Matice technické.*

J. Klapka také v Sobotkově nekrologu [9, str. 35]:

> *Rovněž dílo Deskriptivní geometrie promítání parallelního – bohužel nikoliv úplné – vyniká množstvím originálních detailů konstruktivních i širokým založením a lze je vřele doporučiti k studiu teoretických základů deskriptivní geometrie.*

A. Urban v slavnostní řeči [23, str. 357] k stému výročí Sobotkova narození:

> *V rozsáhle koncipované vysokoškolské učebnici Deskriptivní geometrie promítání parallelního na téměř 650 stránkách podává v mnoha částech zcela původní výklad základních zobrazovacích metod založených na rovnoběžném promítání. Její obsah a zpracování svědčí o moderní koncepci, která ve své době neměla obdoby v jiných dílech tohoto druhu. Ani dnes, více než půl století od svého vzniku, neztrácí na svém významu.*

A. Urban a Z. Vančura v článku [24] rovněž k stému výročí Sobotkova narození:

> *Velmi významné místo v souboru Sobotkových prací ze zobrazovacích metod zaujímá i jeho vysokoškolská učebnice Deskriptivní geometrie promítání parallelního, rozsáhlé dílo, které ani dnes, po více než půl století od svého vzniku, neztrácí na svém významu. Podává metodický výklad základních zobrazovacích metod založených na rovnoběžném promítání. Na téměř 650 stránkách probírá kótované promítání, základy cyklografie, pravoúhlé promítání s užitím distanční roviny, kosoúhlé promítání s užitím distance a pravoúhlé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny. Značné místo věnuje afinitě jako základní příbuznosti souvisící právě s rovnoběžným promítáním, a grafickému provádění konstrukcí. Jak obsah, tak i zpracování svědčí o moderní koncepci, která ve své době neměla obdoby v jiných dílech tohoto druhu.*

K. Havlíček – A. Urban – Z. Vančura – B. Kepr ve zprávě [5, str. 31][2] z roku 1963 píší:

> *Do souboru Sobotkových prací ze zobrazovacích metod patří i jeho vysokoškolská učebnice Deskriptivní geometrie promítání parallelního, rozsáhlé dílo, které ani dnes, po více než padesáti letech, neztrácí na svém významu. Je v ní podán metodický výklad základních zobrazovacích metod založených na rovnoběžném promítání.*

V citované zprávě se však objevují i kritické tóny. Oddíl *Práce z deskriptivní geometrie* končí (str. 32) způsobem, který je třeba vztáhnout i přímo na ty partie Sobotkovy učebnice (nejvíce na druhou polovinu kap. X), v nichž se setkáváme se syntetickými infinitesimálními úvahami:

> *Témata konstruktivní geometrie křivek a ploch zpracovává Sobotka prostředky v jeho době obvyklými; v mnohém by potřebovaly doplnění, jednak ve formulaci, ale také v metodách důkazu.*

V oddílu *Práce z projektivní geometrie* se vyjadřují podobně; rozšiřuji platnost jejich vyjádření i pro Sobotkovu učebnici:

> *Analytického aparátu užívá méně* [doplňuji: v učebnici vůbec ne]*: dokonce i mnohé úvahy limitní, spadající svou povahou do geometrie diferenciální, provádí synteticky* [doplňuji: v učebnici hlavně zmíněná už druhá polovina

[2] Tato zpráva je přetištěním závěrů ze studia Sobotkových prací vykonaného v letech 1954 až 1957: F. Vyčichlo a kolektiv: *Studium a hodnocení díla prof. J. Sobotky*, rozmnoženo v MÚ ČSAV, Praha, 1958, stran 258. Tento materiál mi zůstal nepřístupný. Viz též [24, str. 382, pozn. pod čarou].

> kap. X]. *To ovšem neodpovídá dnešním požadavkům, které klademe na přesnost důkazů v matematice. Zároveň je dobře si všimnout toho, že Sobotka probírá obvykle jen případy obecné, jak bylo v jeho době zvykem. Nezabývá se diskusí jednotlivých případů a možností.*

J. Folta v analýze české geometrické školy [3] z roku 1982 se o Sobotkově učebnici zmiňuje jen zcela letmo, ačkoliv je velmi významným produktem právě této školy. J. Sobotku s jeho velkým zájmem o axonometrii je třeba považovat za pokračovatele Rudolfa Skuherského (1828–1863), jednoho ze zakladatelů české geometrické školy, který stál u počátků axonometrie. J. Folta na str. 45 (v odd. 5.3. Důsledky působení české geometrické školy) píše:

> *I v oblasti deskriptivní geometrie pak se objevilo několik obsáhlých vysokoškolských učebnic* [169]*), problematicky shrnujících obrovské množství výsledků, jež se ani nemohly ve výuce uplatnit, jako např. dvoudílná Deskriptivní geometrie F. Kadeřávka, J. Klímy a J. Kounovského, . . .*

V pozn. 169 na str. 78 je Sobotkova učebnice pouze citována (spolu s učebnicí Jarolímkovou a Procházkovou, viz výše).[3]

— — —

Ohlasů v cizí literatuře je nezaslouženě málo. Jistě to způsobila okolnost, že kniha vyšla v češtině. Ale přesto byla příležitost na ni upozornit, bohužel zůstala nevyužita.

V referativním časopisu *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* o literatuře vyšlé v roce 1906 (sv. 37 uveřejněný r. 1909) je v odd. VIII, kap. 4 *Deskriptivní geometrie* na str. 546 tato zpráva:

> *J. Sobotka: Darstellende Geometrie der Parallelprojektion. . . . XVIII u. 644 S. (Böhmisch)*
> *Inhalt des Werkes, das der erste Teil eines Lehrbuchs der darstellenden Geometrie ist. 1. Einige Grundbegriffe und Vereinbarungen. . . . 10. Graphische Durchführung der Konstruktionen. Pe.*[4]

Podle seznamu referentů byl autorem této zprávy Sobotkův univerzitní kolega Karel Petr (1868–1950), který byl deskriptivní geometrii značně vzdálen (pracoval v algebře a analýze). Svým referátem Sobotkově knize ublížil. Zpráva, která vypočítává pouze názvy kapitol, odpovídá málo významné knize; jí však Sobotkova kniha nebyla. Ve zprávě je úplná absence alespoň stručné zmínky, v čem je učebnice důležitá a v čem se odlišuje od ostatních. I kdybych dnes o téměř 100 let staré Sobotkově knize měl napsat stručný referát, nemohl bych v něm opomenout, co Sobotkovu knihu výrazně odlišuje od ostatní literatury z deskriptivní geometrie vůbec: nepřehlédnutelné zdůraznění afinity pro rovnoběžné promítání. Dokonce bych psal o jisté analogii: Wilhelm Fiedler

[3] Nesouhlasím s tím, že Sobotkova učebnice a [6] a [8] *problematicky shrnují obrovské množství výsledků, jež se ani nemohly ve výuce uplatnit*; nepovažuji to za správné hodnocení. Na začátku 80. let byly zmíněné tři učebnice hodně přes 50 let staré; byly napsány v době, která ještě deskriptivní geometrii přála. Dnešní cena těchto učebnic je právě v tom, že nikoliv problematicky, ale účelně **shrnují obrovské množství výsledků**, které by jinak pro dnešek byly ztraceny.

[4] *Obsah díla, které je první částí učebnice deskriptivní geometrie.* Následují překlady názvů deseti kapitol.

(1832–1912) spojil deskriptivní geometrii s projektivní geometrií,[5] J. Sobotka velice prohloubil spojení deskriptivní geometrie s afinní geometrií. Ačkoliv je W. Fiedler v této souvislosti mnohokrát citován, o Sobotkovi to neplatí.

Petrův zcela povrchní referát patrně způsobil, že se Sobotkova učebnice nedostala do povědomí deskriptivních geometrů v cizině. Samozřejmě působila i neznalost češtiny. Ta však nemohla být nepřekonatelnou překážkou pro deskriptivního geometra, který víc než text potřebuje obrázky či rysy.

V cizí knižní literatuře znám jediný – a pozitivní – ohlas na Sobotkovu knihu. Gino Loria (1862–1953, profesor vyšší geometrie na univerzitě v Janově) ve *Vorlesungen über darstellende Geometrie*, díl I, Leipzig-Berlin, 1907, v pozn. [3]) ke str. IV úvodu píše:

> *Dieses System, die darstellende Geometrie mit der vor etwa einem Jahrzehnte ins Leben gerufenen Geometrographie zu verknüpfen findet sich auch in der vorzüglichen Deskriptivní geometrie promítání parallelního von Prof. J. Sobotka (Prag 1906), die während des Druckes des vorliegenden Werkes erschien.*[6]

Viz k tomu dále kap. X.

Do *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* napsal obsáhlý přehled nazvaný *Darstellende Geometrie* (III–A–B–6, str. 517–595) Erwin Papperitz (1857–1938); rok dokončení je 1909. V seznamu učebnic na str. 519–520 Sobotkova kniha z roku 1906 není. Jsou však citovány německy psané knihy Rudolfa Skuherského (1828–1863) a Františka Tilšera (1825–1913).

Gino Loria se ve své knize *Storia della Geometria Descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri*, Milano, 1921, o Sobotkově učebnici rovněž nezmiňuje. Sobotku však zařazuje mezi významné deskriptivní geometry. Cituje celkem asi 700 jmen, z nich asi 35 nejméně 10 krát. Sobotka je citován 12 krát.[7]

— — —

Porovnám Sobotkovu učebnici s některými cizími učebnicemi, které vyšly v době od roku 1875 (ve třech desetiletích před Sobotkovou knihou). Budeme přitom pamatovat, že z jejího celkového rozsahu téměř 650 stran ústřední témata – totiž kolmé promítání na jednu nebo na dvě průmětny a afinita – zaujímají asi dvě třetiny, afinitě samé patří víc než jedna čtvrtina.

W. Fiedler: *Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage*, Leipzig, 2. vyd. 1875 (3. vyd. ve 3 dílech 1883–85–88) – z celkem více než 750 stran patří ortogonálnímu rovnoběžnému promítání (včetně axonometrie) necelých 60 stran.

G. Peschka: *Kotirte Ebenen (Kotirte Projektionen) und deren Anwendung*, Brno, 1877 – z téměř 200 stran je necelá polovina věnována teorii kótovaného promítání a zbytek praktickým aplikacím, hlavně topografickým plochám.

[5] *Die darstellende Geometrie*, Leipzig, 1871; 2. vyd. *Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage*, tamtéž 1875; 3. vyd. ve 3 dílech tamtéž 1883–85–88.

[6] *Tento systém, spojující deskriptivní geometrii s geometrografií, vzniklou asi před jedním desetiletím, je také v* ***znamenité*** *Deskriptivní geometrii promítání parallelního od prof. J. Sobotky (Praha 1906), která vyšla v době tisku tohoto díla.*

[7] Novější protějšek k Loriově přehledu – René Taton: L'histoire de la géométrie descriptive, Paris, 1954 – mi zůstal nepřístupný.

G. Peschka: *Darstellende und projektive Geometrie*, Wien, 1. díl 1882, 2. díl 1887 – podobně jako Fiedlerovo dílo syntéza deskriptivní a projektivní geometrie. Oba svazky mají po 575 stranách, jen první svazek má styčné partie se Sobotkovou učebnicí: část II s šikmou projekcí a afinitou, část III s Mongeovým promítáním, dohromady 150 stran.

A. Mannheim: *Cours de géométrie descriptive*, Paris (1. vyd. 1880), 2. vyd. 1886 – celkem 480 stran zaměřených úplně jinak než Sobotkova učebnice, totiž na perspektivní promítání a kinematickou geometrii.

Ch. Wiener: *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, Leipzig, 1. díl 1884, 2. díl 1887 – z celkem asi 1150 stran patří vlastnímu výkladu kolmého promítání na jednu a na dvě průmětny necelých 100 stran.

K. Rohn – E. Papperitz: *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, Berlin-Leipzig, 1. vyd. I. díl 1893, II. díl 1896 (4. vyd. ve 3 dílech 1932) – z celkem 700 stran náleží promítání na jednu průmětnu sice jen několik málo stránek, pak však následuje afinita (s nadpisy *Affine und affingelegene Figuren einer Ebene, Die Ellipse als affine Kurve zum Kreise und ihre Konstruktion*) s asi 15 stranami a kolmé promítání na dvě průmětny s asi 50 stranami. K dílům jsou připojeny literární a historické poznámky o celkovém rozsahu 15 stran.

Vidíme, že Sobotkova kniha svým rozsahem věnovaným kolmému promítání na jednu či dvě průmětny – a hlavně samostatnou kapitolou o afinitě a jejím využití – byla v literatuře o deskriptivní geometrii unikát. Jakýsi – ale velmi slabý – vzor pro afinitu mohl mít J. Sobotka v Rohnově a Papperitzově učebnici. Ta poskytovala příklad i pro Sobotkovy závěrečné *Poznámky* na str. 625–643. Pro kótované promítání mohl mít J. Sobotka vzor v učebnici Peschkově.

Pozornost, kterou J. Sobotka při rovnoběžném promítání věnoval afinitě, zůstala nedoceněna.

— — —

Jako protějšek k rozsáhlé symbióze deskriptivní geometrie s afinní příbuzností je v Sobotkově knize naprostá absence analytické geometrie.

Jakou měl G. Monge (1746–1818) představu o vzájemnosti deskriptivní a analytické geometrie, popsal jsem v [17, str. 159–160]. Po 50 letech od vydání Mongeových přednášek – v roce 1845 – se pro spojení obou disciplín vyslovil Leopold Mossbrugger (1796–1864); viz opět [17, str. 160]. Po dalších téměř 60 letech – v roce 1904, těsně před Sobotkovou knihou – se o tomto spojení vyjádřil Friedrich Schilling[8] (1868–1950) v přednáškách pro učitele matematiky a fyziky [22, str. 14] takto:

> *Anders steht es mit der analytischen Geometrie, deren Verknüpfung mit der darstellenden Geometrie bisher noch nicht so weit durchgeführt zu sein scheint, wie ich es wünschen möchte.*[9]

F. Schilling pak připojuje [22, str. 14–23] řadu příkladů řešených deskriptivní geometrií i analytickou geometrií.

[8] F. Schilling, člen Göttingenské matematické společnosti. Viz C. Reid: *Hilbert*, Berlin, 1970; ruský překlad Moskva, 1977; R. Tobies: *Felix Klein*, Leipzig, 1981.

[9] *Jinak je tomu s analytickou geometrií, jejíž spojení s deskriptivní geometrií se zatím nezdá uskutečněno tak daleko, jak bych si přál.*

Rok po Sobotkově knize vydal G. Loria učebnici [14], v níž zřetelně straní spojení deskriptivní geometrie s analytickou geometrií. Jak G. Loria, tak J. Sobotka psali své učebnice přednostně pro univerzitní – nikoliv technické – studium. Právě proto je poučné všimnout si jejich rozdílů.

Svým poměrem k analytické geometrii se J. Sobotka velmi podobá W. Fiedlerovi. Ten sice z deskriptivní geometrie vylučoval metody analytické geometrie a pracoval v ní pouze synteticky – ale na druhé straně známé Salmonovy učebnice analytické geometrie překládal do němčiny a přepracovával je ve tvar, z něhož se analytické geometrii učily generace matematiků.

Podobně J. Sobotka. Na str. 8 své knihy píše:

> *Deskriptivní geometrie zabývá se též vyjadřováním a určováním metrických vlastností, přináležejících útvarům prostorovým, tak že analytické relace míry předem nevylučuje, ... Užívání analytických relací omezuje se tu však jen na relace jednoduché a na případy, v nichž to jest přiměřeno povaze úlohy, která se řeší. Jinak užívá se těch relací jen mimochodem.*

Z toho je zřetelně cítit, jak chtěl mít J. Sobotka deskriptivní geometrii *čistou*, s minimem *analytických relací míry*. Analytická geometrie je mu při této příležitosti tak vzdálená, že se o ní ani nezmiňuje.

Ale – stejně jako W. Fiedler – mimo deskriptivní geometrii jí vzdálen naprosto nebyl. B. Bydžovský v nekrologu [2, str. 23–24] charakterizoval v tomto směru Sobotku takto:

> *Zkoumáme-li pak podrobněji pracovní metodu Sobotkovu, seznáme snadno, že celým svým založením byl syntetik a že konstrukce je nejvlastnější předmět jeho vědeckého snažení a konečným cílem jeho hledání. Ale na rozdíl od jiných geometrů doby, ze které vyšel, neomezuje se na úlohy syntetické, nýbrž právě naopak hojně a obratně užívá také metod analytických, ovšem s konstruktivním cílem. Touto metodou vyhýbá se tomu, co u ryzích syntetiků působí někdy dojmem umělosti a hledanosti a znamená často jen zveličování metodických obtíží problému absolutně vzato dosti snadného. K zásluhám Sobotkovým právě náleží, že mnohý problém řešený před ním důsledně synteticky metodou analytickou teprve náležitě osvětlil a uvedl v souvislost s obory širšími.*[10]

Zcela souhlasím se slovy B. Bydžovského – ale s výjimkou Sobotkovy učebnice deskriptivní geometrie. Je to zvláštní úkaz s dlouhou tradicí, který zdaleka není omezen na W. Fiedlera a J. Sobotku: Deskriptivní geometrie jen synteticky, zcela bez analytické geometrie.[11]

— — —

[10] Dokladem pro správnost tohoto hodnocení jsou Sobotkovy práce o rovinném a prostorovém Apolloniově problému, v nichž mistrně uplatnil analytickou geometrii: Čas. pro pěst. math. a fys. 41(1912); Rozpravy II. tř. České ak. věd a umění 21(1912) (3 práce) a 39(1929). Práce v Rozpravách vyšly též v německém a francouzském překladu v Bulletin international, který vydávala rovněž Česká akademie věd a umění. Doporučuji srovnat, co po 85 letech od Sobotkových prací publikovala k stejnému námětu M. Kargerová: *Geometrie GPS*, Sborník 17. semináře odborné skupiny pro geometrii a počítačovou grafiku, Plzeň, 1997, 61–64, zvláště str. 62. Srovnání objasní, proč vládne taková nechuť připomínat práci našich předchůdců.

[11] Na semináři skupiny JČMF pro geometrii a počítačovou grafiku v roce 1986 jsem se přimlouval za spojení deskriptivní geometrie s analytickou. Příští seminář v roce 1987 začal požadavkem Františka Machaly z přírodovědecké fakulty v Olomouci, aby skupina výslovně odmítla, co jsem před rokem navrhoval.

J. Sobotka dokončil vysokoškolské studium v roce 1886 a až do roku 1904 působil – s výjimkou studijních pobytů v Curychu a Vratislavi a dvou let na vídeňské reálce – na vysokých školách technických v Praze, Vídni a Brně, celkem tedy téměř 15 let. Odrazil se tento dlouhý styk s technickými obory na Sobotkově učebnici?

V předmluvě (str. V) J. Sobotka píše, že k sepsání učebnice ho vybídla Jednota českých matematiků, a pokračuje:

> *Úplná volnost, již mi ponechala ve výběru látky a ve způsobu jejího uspořádání, práci mi usnadnila a mnohé chvíle mého pobytu brněnského, do kteréžto doby většinou vypracování připadá, zpříjemnila.*

Ačkoliv tedy J. Sobotka z větší části napsal svou učebnici jako profesor technického učiliště, její zaměření technické není. Přímou technickou aplikací je totiž jen část nazvaná *Upotřebení* (str. 42–55) v kap. II s oddíly:

> *35. Plošina horizontální a přímá cesta k ní vedoucí;*
> *36.–40. Vyšetřování různých ploch střechových a okapů.*

V kótovaném promítání řeší J. Sobotka několik topografických úloh pro terénní úpravy, a pak se obsáhleji zabývá konstrukcí střech.

Ze Sobotkovy knihy čiší přesvědčení, že deskriptivní geometrie je matematická vědecká disciplína; na tom nic nemění, že má mnoho aplikací. Samozřejmě je toto zaměření nejvíce cítit z obsahu, ale ukazuje na ně i vnější znak: Mnohokrát J. Sobotka neváhá jednu úlohu řešit několika – třeba i pěti způsoby a vést tak čtenáře k porovnávání různých postupů. To je ovšem úkol pro vědecké, nikoliv technicky zaměřené studium.

— — —

Pokusím se o dva pohledy na Sobotkovu učebnici; jeden z doby prvního desetiletí dvacátého století, kdy kniha vyšla, druhý z doby posledního desetiletí.

Už jsem se zmínil, že Gino Loria k Sobotkově učebnici připojuje adjektivum „výborná“ (vorzüglich). Učinil tak po mém soudu právem – vyjmeme-li ovšem partie, v nichž se Sobotka nevyhnul tomu, co se v syntetické geometrii označuje jako infinitesimální metody (soumezné či nekonečně blízké body, soumezné přímky a jejich průsečík, kružnice křivosti jako soumezná poloha dotýkajících se kružnic atp.). Tyto partie byly zcela poplatné ještě 19. století a knize by už tehdy bývalo prospělo, kdyby je byl J. Sobotka vynechal. Naproti tomu Loriovo adjektivum patří beze sporu těmto pěti rozsáhlým úsekům:

a) *Promítání kótované* (kap. II, str. 12–55), *Použití roviny distanční a zavádění nových průměten* (kap. IV, str. 79–143).

b) *Affinita; affinní poloha dvou soustav rovinných* (kap. VII, str. 190–357).

c) *Průměty orthogonální do dvou k sobě kolmých průměten (Mongeova projekce* (kap. VIII, str. 358–498).

Samozřejmě jsem ihned reagoval. K diskusi o spojení či nespojení deskriptivní a analytické geometrie nedošlo, natož aby se přijalo nějaké stanovisko. To se přihodilo v době, kdy teoretický základ počítačové grafiky je ve sblížení deskriptivní geometrie s analytickými metodami. Viz [16, str. 7], s názorem Václava Medka (1923–1992), který dlouho přednášel deskriptivní geometrii na stavební fakultě v Bratislavě.

d) *Grafické provádění konstrukcí* (kap. X) – jen části o teorii grafických konstrukcí (str. 535–544) a o pomocných konstrukcích (str. 544–579); na valnou část zbytku kap. X se pak vztahuje výše uvedená kritika „soumezných elementů".

e) *Poznámky* (str. 625–643) tvoří skvělý literární a historický doprovod k celé učebnici.

Nejpůvodnější je nepochybně úsek z b). Neznám v literatuře o deskriptivní geometrii knihu s tak rozsáhlou kapitolou věnovanou využití afinity v nejrůznějších konstrukcích, hlavně ovšem o elipse. Rozsah úseku b) by vystačil na samostatnou knihu (téměř 170 stran).

Úseky a) – e) zabírají asi 470 stran, tedy zhruba tři čtvrtiny celkového rozsahu. Kdyby byl J. Sobotka zůstal u těchto úseků a knihu asi o jednu čtvrtinu zkrátil, byl by jí prospěl.

Svůj retrospektivní pohled na ni ze začátku minulého století shrnu takto:

Sobotkova učebnice byla první – a až na hořejší výhrady zdařilou a důkladnou – českou učebnicí deskriptivní geometrie, chápané jako vědecká disciplína bez většího zřetele k technickým aplikacím.[12] Kdyby byla Sobotkova kniha vyšla německy, byla by patřila k nejlepším a nejvýznamnějším učebnicím deskriptivní geometrie v německé jazykové oblasti.

Současný pohled na Sobotkovu učebnici bude ovšem méně lesklý. Způsobuje to též skutečnost, že deskriptivní geometrie velmi, velmi ustoupila do pozadí. Konstrukce jí převzala počítačová grafika a své způsobila i ztrnulost, s níž generace našich deskriptivních geometrů lpěly na syntetických metodách a analytickou geometrii vylučovaly jako téměř znečištění své vědy. Ani dnes není tento archaický poměr v českém prostředí překonán.[13]

Partie se soumeznými prvky knihu výrazně poškozují. Naopak však úsek e) *Poznámky* po odstupu téměř 100 let nabyl na významu. Je to dosud jediný důkladný přehled v českém jazyce o literatuře z deskriptivní geometrie do přelomu 19. a 20. století.[14] Počítačová grafika zatlačila úsek d) ovšem do pozadí. Ale důkladnost úseků a) – c) zůstává nepřekonána, zvláště to platí o stále vynikajícím úseku b) s ohromným množstvím úloh a jejich řešení stereometrických a konstruktivních. Z učebnice se stala vítaná příručka, která rychle poučí.

Setkal jsem se s absolventy vysokoškolského studia učitelství deskriptivní geometrii, kteří o Sobotkově učebnici nevěděli, natož aby ji měli v ruce nebo dokonce některou její část přečetli. Je to velká chyba jejich učitelů, že jim Sobotkovu učebnici nepřiblížili; je velká chyba studentů, že se k ní nedostali sami.

— — —

[12] Projevilo se to i tím, že brzy vyšla učebnice pro techniky V. Jarolímek – B. Procházka [6], Praha, 1909.

[13] Viz pozn. [11]). Ve skupině JČMF pro geometrii a počítačovou grafiku by mělo být samozřejmostí sledovat zahraniční literaturu a uveřejňovat recenze nových učebnic. Ale např. nevím o české recenzi co do obsahu zcela nově pojaté učebnice G. Bär (profesor drážďanské Technické univerzity): *Geometrie – Eine Einführung in die analytische und konstruktive Geometrie*, Stuttgart-Leipzig, 1996, str. 216.

[14] Bylo by velmi vděčným úkolem skupiny JČMF pro geometrii a počítačovou grafiku, aby – místo článků, které ve svých sbornících publikuje, ač toho nejsou vůbec hodny – zpracovala Sobotkovy *Poznámky* a doplnila je přehledem nejdůležitějších knih o deskriptivní geometrii v posledních 100 letech s krátkými charakteristikami. Viz [16, str. 11].

Přecházím k jednotlivým kapitolám I – X. Za jejich pojmenováním zpravidla reprodukuji Sobotkovy názvy skupin příbuzných oddílů z velmi podrobného obsahu.

Poznámky k Sobotkovým výlučně syntetickým postupům budu kombinovat s analytickou geometrií.

Kapitola I. Některé pojmy a základní úmluvy (str. 1 – 11); odd. 1–8.

Tato kapitola obsahuje vesměs věci úvodního charakteru. Ocituji její první řádky:

> *Deskriptivní geometrie jest věda, která na základě konstrukce a pomocí rysův určuje útvary prostorové dle tvaru, velikosti a polohy jinými útvary prostorovými, vzájemné vztahy jejich zkoumá a úlohy k nim se vztahující řeší.*

J. Sobotka formuluje úkol deskriptivní geometrie velmi obecně a hned na počátku upozorňuje na rozdíl mezi pomyslnou konstrukcí a jejím grafickým provedením tak důrazně, jak není v učebnicích deskriptivní geometrie pravidlem. V odd. 7 o označování se k tomuto rozdílu znovu – sice jen jednou větou, ale naprosto zřetelně – vrací, když píše:

> *Tak jsou průmět útvaru a grafický jeho obraz pojmy docela různé, které však bez závady zpravidla lze označiti stejnými symboly;. . .*

V podobném duchu pokračuje i v odd. 8. Aby odlišil od ideálních pojmů bod, přímka, křivka jejich grafické obrazy, zavádí pro ně názvy tečka a čáry. Toto metodicky jistě správné rozlišení se však neujalo.

Kapitola II. Promítání kotované (str. 12 – 55)

Průmět bodu, měřítko a obecné vlastnosti (odd. 9–13). – Promítání přímky (odd. 14–19). – Promítání roviny (odd. 20-28). – Stanovení délek, odchylek a sklápění roviny (odd. 29–34). – Upotřebení (odd. 35–40).

V kótovaném promítání přiřazujeme bodu B z prostoru dvojici tvořenou bodem B_1 a číslem z_B; bod B_1 je kolmý průmět bodu B na průmětnu π a číslo z_B – kóta bodu B – je při $B \in \pi$ nula a při $B \notin \pi$ orientovaná vzdálenost bodů B a B_1 (pro body z jednoho otevřeného poloprostoru vyťatého průmětnou je $z_B > 0$, pro body B z druhého je $z_B < 0$). Zvolme v průmětně soustavu pravoúhlých souřadnic $x,\ y$ a pro prostor ji doplňme osou z orientovanou souhlasně s orientací vzdálenosti bodů B a B_1. Jestliže průmět $B_1[x_B, y_B]$ je opatřen kótou z_B, pak ovšem $B[x_B, y_B, z_B]$; naopak bodu $B[x_B, y_B, z_B]$ přísluší dvojice $B_1[x_B, y_B] \in \pi$ a kóta z_B. Toto jednoduché zobrazení umožňuje řešit úlohy z kótovaného promítání také analytickou geometrií.

V odd. 9–34 je 21 podrobně řešených úloh. Abychom si uvědomili Sobotkův vliv na první díl Kadeřávkovy–Klímovy–Kounovského učebnice [8] z roku 1929, stačí uvést, že v její kap. III o kolmém promítání na jednu průmětnu, části A o promítání kótovaném (str. 142–182), je ze Sobotkových úloh probráno 14, tedy právě dvě třetiny.

Kótovanému promítání bez aplikací věnoval J. Sobotka str. 12–42, trojice autorů v [8] str. 142–155. Už jen z těchto hrubých údajů můžeme soudit, že J. Sobotka psal podrobněji a trojice autorů sevřeněji. Str. 42–55 Sobotkovy II. kapitoly patří aplikacím, totiž zobrazení terénních tvarů a řešení střech; tomu náleží v učebnici trojice autorů [8] samostatná kapitola na str. 233–248. Str. 155–182 v [8], které se zmíněnými už str. 142–155 tvoří pasáž o kótovaném promítání, obsahují řešení trojhranu a rovinné řezy válcové a kuželové rotační plochy včetně paraboly a hyperboly.

Sobotkův vliv na výběr a uspořádání látky je patrný i na učebnici J. Kounovského – F. Vyčichla [12] z roku 1948 [byla velmi úspěšná, v dalších deseti letech se dočkala až 5. vydání]. Kótovanému promítání v ní patří str. 24–62, tedy asi 40 stránek jako v učebnici Sobotkově nebo tří autorů [8]. Také J. Kounovský a F. Vyčichlo zařadili do kapitoly o kótovaném promítání pasáže, které v kap. II Sobotkovy učebnice nejsou, např. afinitu a její využití (viz kap. VII Sobotkovy knihy).

— — —

Z různých příležitostí, jak kótované promítání spojit s analytickou geometrií, vyberu krycí přímku při konstrukci průsečíku přímky p s rovinou ϱ. Budu analyticky sledovat grafické – tj. deskriptivně geometrické – řešení. Až v závěru je opustím.

Rovina ϱ nikoliv kolmá k průmětně $z = 0$ má rovnici

$$ax + by + cz + d = 0;\ c \neq 0 \tag{2.1}$$

s vektorem normály $\mathbf{n} = (a, b, c)$. Přímka p určená bodem o souřadnicích $[x_0, y_0, z_0]$ a vektorem $\mathbf{u} = (u, v, w)$ má parametrické rovnice

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tu, \\ y &= y_0 + tv, \qquad t \in (-\infty, \infty) \\ z &= z_0 + tw; \end{aligned} \tag{2.2}$$

její nerovnoběžnost nebo neincidentnost s rovinou ϱ je vyjádřena nerovností $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \neq 0$.

První dvě rovnice v (2.2) jsou parametrickým vyjádřením promítací roviny přímky p. Pro třetí souřadnice bodů na průsečnici roviny ϱ s promítací rovinou přímky p – tj. na krycí přímce q přímky p – tak z (2.1) a z prvních dvou rovnic v (2.2) dostáváme

$$\begin{aligned} a(x_0 + tu) + b(y_0 + tv) + cz + d = 0, \\ z = -\frac{ax_0 + by_0 + d}{c} - t\frac{au + bv}{c}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Krycí přímka $q \subset \varrho$ přímky p je tak dána parametricky prvními dvěma rovnicemi v (2.2) a rovnicí (2.3). Průsečík P této krycí přímky q s přímkou p z (2.2) – tj. průsečík P přímky p z (2.2) s rovinou ϱ – má parametr t určený srovnáním třetí rovnice v (2.2) s (2.3):

$$\begin{aligned} z_o + tw = -\frac{ax_0 + by_0 + d}{c} - t\frac{au + bv}{c}, \\ t = -\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0 + d}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Učinili jsme dva kroky: Předně jsme z prvních dvou rovnic (2.2) dosadili za $x,\ y$ do (2.1) a vypočítali z; za druhé jsme toto z srovnali se z z třetí rovnice (2.2) a vypočítali parametr t průsečíku P. Oba kroky můžeme ovšem spojit v jeden tak, že z (2.2) dozadíme za $x,\ y$ i z do (2.1) a opět vypočítáme (2.4). Při tomto algebraickém postupu zcela obvyklém v analytické geometrii zůstává úloha krycí přímky z deskriptivně geometrického řešení skryta.

Kapitola III. Promítání kruhové (str. 56 – 78)

Průmět bodu (odd. 41). – Průmět přímky (odd. 42–43). – Průmět roviny (odd. 44–48). – O kuželi rotačním (odd. 49–51). – Některé úlohy (odd. 52). – Transformace průmětny (odd. 53–55).

O důvodu, proč zařadil do své knihy i cyklografii, která ovšem není rovnoběžnou projekcí, píše J. Sobotka už v úvodu (str. V.). Zmiňuje se, že začíná promítáním kótovaným, a pokračuje:

> *Přirozený přechod soustavný k dalším methodám poskytlo mi promítání kruhové, jehož důležitost i plodnost v deskriptivní geometrii vůbec a v geometrii metrické zvlášť původce jeho W. Fiedler sám v pracích svých prokázal.*

Nejdříve malou korekci k W. Fiedlerovi jako původci cyklografie. V poznámkách ke kap. III., str. 628 J. Sobotka píše, že W. Fiedler ji *vyvodil z konstrukcí, které se spojují s určeními středu při promítání centrálním pomocí kružnice distanční.* Ale toto spojení je stará myšlenka, kterou v syntetické formě vyslovil už B. Cousinery 1828 a v analytické formě N. Druckenmüller 1842 (viz Enc. der math. Wiss. III AB6, str. 595 a L. Seifert [21, str. 5]).

Sobotkův důvod pro zařazení cyklografie má jistou oprávněnost:

V kótovaném promítání se bod B z prostoru zobrazuje na dvojici tvořenou ortogonálním průmětem B_1 bodu B na průmětnu a kótou z_B bodu B vůči této průmětně.

V cyklografii se bod B z prostoru zobrazuje na dvojici tvořenou zase ortogonálním průmětem B_1 bodu B na průmětnu a cyklem (B), tj. orientovanou kružnicí se středem B_1 a poloměrem $|z_B|$; orientace je pozitivní při $z_B > 0$ a negativní při $z_B < 0$, při $z_B = 0$ je nulový cykl tvořen dvojicí isotropických přímek s reálným průsečíkem B.

V Mongeově projekci se bod B z prostoru zobrazuje na dvojici tvořenou půdorysným průmětem B_1 bodu B a nárysným průmětem B_2 bodu B.

Ve smyslu těchto zobrazení je vsunutí cyklografie mezi promítání kótované a Mongeovo pochopitelné. Sotva však lze z dnešního hlediska přijmout další Sobotkův argument [str. 15, odd. 12]:

> *S geometrického hlediska methoda promítání kótovaného, operujíc s čísly, jest nedokonalá; konstrukcí, vztahujících se k útvarům prostorovým, neřeší bezprostředně.*

Tím myslí Sobotka kombinaci geometrických konstrukcí s kótami jakožto čísly, v níž vidí pramen chyb při odměřování z měřítka. Sobotkova argumentace by byla na místě, kdyby samo faktické provedení konstrukce (nikoliv idealizovaný myšlenkový postup) bylo bez grafických chyb (přiložení pravítka, zabodnutí hrotu kružítka). Těch si byl J. Sobotka dobře vědom, jak ukazuje část *Theorie grafických konstrukcí* (str. 535–544) v kap. X.[15]

Sobotkova kapitola III odpovídá pojetí, které vytvořil W. Fiedler v 80. letech 19. století. U něho nemá ještě orientace kružnic tak významnou úlohu. Tím je odůvodněn i název kapitoly, v němž není náznak cyklu (ale adjektivum by mělo být změněno na „kružnicové".)

Cyklografie přímo vyzývá k řešení Apolloniovy úlohy (a úloh z jejího okruhu ovšem): Sestrojit cykl, který se dotýká tří daných cyklů. L. Seifert [21] se jí zabývá na str. 42–44, J. Sobotka ji neprobírá. L. Seifert [21, str. 57] ukazuje dokonce konstrukci cyklu, který dané tři cykly protíná v daných úhlech.[16]

Kapitola IV. Použití roviny distanční a zavádění nových průměten (str. 79 – 143)

Průmět přímky, roviny a bodu (odd. 56). – Průseky. Vzájemné určování bodů, přímek a rovin (odd. 57–62). – Věty Desarguesovy o dvou trojúhelnících (odd. 63). – Hesseova konfigurace (odd. 64). – Určení vzdáleností a odchylek; sklopení (odd. 65–67). – O ploše kulové (odd. 68). – Některé úlohy (odd. 69–70). – Transformace průmětny (odd. 71–80). – O promítání do dvou průměten (odd. 81–90). – Přechod od průměten P_I, R_{II} libovolně k sobě nakloněných k průmětnám na sobě kolmým (odd. 91). – Užití transformace průmětny k řešení úloh stereometrických (odd. 92–96).

F. Kadeřávek – J. Klíma – J. Kounovský [8] jsou vůči distanční rovině daleko skromnější. V dílu I, v kap. III jí věnují jen část B, str. 182–192. Místo Sobotkových transformací průměten se zabývají řezy těles.

V kótovaném promítání se pracuje s kótami bodů vůči průmětně π. Aby se odstranila čísla jako cizorodý prvek pro deskriptivní geometrii, zavádí se distanční rovina π' rovnoběžná (v jisté nenulové vzdálenosti) s průmětnou π. Přímka q nikoliv kolmá k průmětně π je pak určena stopníkem Q na průmětně π a ortogonálním průmětem Q'_1 na π průsečíku Q' přímky q s rovinou distanční π'. Rovina ϱ nikoliv kolmá k průmětně π je určena stopou p na průmětně π a kolmým průmětem p'_1 na π své průsečnice p' s rovinou distanční π'; ovšem $p \parallel p'_1$. Bod B je určen svým kolmým průmětem B_1 a průmětem své nositelky (tj. přímky nebo roviny jdoucí bodem B).

K práci s distanční rovinou přímo vyzývají úlohy s komolým jehlanem, který má rovnoběžné základny. Rovina jedné z nich se zvolí za průmětnu, rovina druhé za rovinu distanční. Takto postupuje J. Sobotka v úloze z odd. 62 [str. 88–90], v níž se má šestiboký pravidelný komolý jehlan seříznout danou rovinou protínající obě základny jehlanu. Je to jedna z nemnoha Sobotkových úloh o řezech polyedrů.

V odd. 61 (str. 85–88) se třemi body A, B, C prokládá rovina; v prvním případě jsou nositelkami bodů A, B, C přímky, ve druhém roviny. Tento druhý případ vede

[15] Srov. k tomu [8] díl I., odd. 86, str. 142–143.

[16] V letním semestru 1946/47 jsem na brněnské přírodovědecké fakultě poslouchal Seifertovy přednášky o cyklografii a i z nich si na posledně zmíněnou úlohu matně vzpomínám.

J. Sobotku jednak k Desarguesově větě o perspektivních trojúhelnících a tím ke konfiguraci $(10_3,\ 10_3)$, jednak ke konfiguraci $(20_3,\ 15_4)$. J. Sobotka ji nazývá Hesseovou a pojmenování odůvodňuje v pozn. k odd. 64 na str. 629–30:

> *Hesse upozornil na konfiguraci tuto v pojednání: Eine Bemerkung zum Pascal'schen Theorem, v Crelle–ově Journal für reine und angewandte Math. Bd. 41, a ukázal, že se vyskytuje při Steinerově rozšíření věty Pascalovy.*

Hesseovou konfigurací se obvykle rozumí konfigurace $(9_4,\ 12_3)$ devíti inflexních bodů a dvanácti inflexních spojnic (každá spojuje 3 inflexní body) kubiky rodu 1. Konfigurace, kterou J. Sobotka nazývá Hesseovou, je tvořena Salmonovými body a Cayleyovými přímkami ze Steinerova rozšíření Pascalovy věty, známého jako *hexagrammum mysticum*.

Mnoho místa věnuje J. Sobotka transformaci průmětny (přechodu od průmětny π s rovnoběžnou s ní rovinou distanční π' k průmětně π^* s rovnoběžnou s ní rovinou distanční $\pi^{*\prime}$) a zavádění nových průměten, speciálně pak přechodu od dvou průměten nikoliv k sobě kolmých k ortogonálním průmětnám.

— — —

Kapitolu uzavírá osa dvou mimoběžek[17]. V odd. 95 [str. 141–142] je její stereometrické vyšetření. Sobotka nerozlišuje důsledně mezi osou jako přímkou a osou jako úsečkou a dospívá k těmto poznatkům:

> *Osa dvou mimoběžek má následující vlastnosti:*
> *1. Jest nejkratší příčkou jejich;*
> *2. stojí kolmo k nim a ke každé rovině s nimi stejnosměrné;*
> *3. jest stejnosměrná s průsečnicí libovolných dvou rovin k nim normálních;*
> *4. jest průsekem rovin jimi kolmo položených k rovině s oběma stejnosměrné.*

V odd. 96 [str. 142–143] je konstruktivní řešení, které už není tak jednoduché. V promítání s distanční rovinou zavádí J. Sobotka druhou průmětnu rovnoběžnou s oběma mimoběžkami; průsečíkem jejich kolmých průmětů do této druhé průmětny kolmo k ní jde hledaná osa.

Opět se přímo vnucuje analytická geometrie. Dejme tomu, že ve dvojici mimoběžek je přímka p_i $(i = 1, 2)$ dána bodem X_i a vektorem $\mathbf{u}_i$, takže jejich parametrické vyjádření zní

$$X = X_1 + t_1\mathbf{u}_1,\ X = X_2 + t_2\mathbf{u}_2. \tag{4.1}$$

Čtverec vzdálenosti v bodu přímky p_1 od bodu přímky p_2 je

$$v^2(t_1, t_2) = [X_2 - X_1 + t_2\mathbf{u}_2 - t_1\mathbf{u}_1] \cdot [X_2 - X_1 + t_2\mathbf{u}_2 - t_1\mathbf{u}_1] > 0.$$

Tudíž

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^2}{\partial t_1} &= -2[X_2 - X_1 + t_2\mathbf{u}_2 - t_1\mathbf{u}_1] \cdot \mathbf{u}_1, \\ \frac{\partial v^2}{\partial t_2} &= 2[X_2 - X_1 + t_2\mathbf{u}_2 - t_1\mathbf{u}_1] \cdot \mathbf{u}_2, \end{aligned} \tag{4.2}$$

[17] Podle osnov pro reálky z roku 1909 (srv. Z. Nádeník [18, str. 4]) byla osa mimoběžek zařazena do 5. tř. reálek. Viz J. Pithardt – L. Seifert [20], díl II., 1. vyd. 1910, str. 62–63.

$$\frac{\partial^2 v^2}{\partial t_1^2} = 2\,\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1,\ \frac{\partial^2 v^2}{\partial t_1 \partial t_2} = -2\,\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2,\ \frac{\partial^2 v^2}{\partial t_2^2} = 2\,\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 v^2}{\partial t_1^2} & \frac{\partial^2 v^2}{\partial t_1 \partial t_2} \\ \frac{\partial^2 v^2}{\partial t_2 \partial t_1} & \frac{\partial^2 v^2}{\partial t_2^2} \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1 & -\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2 \\ -\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2 \end{vmatrix} > 0;$$

poslední nerovnost je důsledkem nerovnoběžnosti vektorů $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$. Anulování prvních parciálních derivací (4.2) tak vede pro parametry t_1, t_2 k hodnotám poskytujícím minimum vzdálenosti v. Současně je anulování prvních derivací (4.2) ekvivalentní s požadavkem, aby spojnice bodů (4.1) přímek p_1, p_2 byla kolmá na každou z nich.

K ose mimoběžek se J. Sobotka ještě několikrát vrací, viz zvláště kap. VIII.

Kapitola V. Promítání kosoúhlé na jednu průmětnu (str. 144 – 162); odd. 97–109.

V této kratší kapitole se J. Sobotka zabývá rovnoběžnými průměty v různých směrech, sklopením roviny, otáčením roviny kolem přímky v ní ležící (speciálně kolem hlavní přímky), úhlem dvou přímek nebo dvou rovin, vzdáleností bodu od přímky nebo roviny.

V odd. 99 [str. 146–147] řeší J. Sobotka tuto stereometrickou úlohu: Čtyřmi body B_1, B_2, B_3, B_4 v prostoru libovolně danými proložiti čtyři rovnoběžné roviny ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 tak, aby poměr vzdálenosti rovin ϱ_1, ϱ_2 ku vzdálenosti rovin ϱ_2, ϱ_3 ku vzdálenosti rovin ϱ_3, ϱ_4 měl danou hodnotu $m : n : p$. Ačkoliv píše o „libovolně“ daných čtyřech bodech, mlčky předpokládá, že neleží v rovině. Také se nezmiňuje o orientaci uvedených vzdáleností. Graficky řeší úlohu pro situaci, v níž vzdálenosti jsou si rovny. Jak podcenil význam jejich orientace, ukazuje toto téměř triviální řešení, kterého se však vůbec nedotýká: Veďme roviny $\varrho_1 \equiv \varrho_3$ body B_1, B_3 a půlícím bodem úsečky B_2B_4; rovinu ϱ_2 resp. ϱ_4 proložme bodem B_2 resp. B_4 rovnoběžně s $\varrho_1 \equiv \varrho_3$. Pak je vzdálenost mezi rovinami ϱ_1, ϱ_2 rovna vzdálenosti mezi rovinami ϱ_2, ϱ_3 a rovna vzdálenosti mezi rovinami ϱ_3, ϱ_4.

Vidíme, že citovaná už kritická poznámka čtveřice autorů K. Havlíček – A. Urban – Z. Vančura – B. Kepr [5] nebyla neoprávněná.

Kapitola VI. Základní prvky a základní útvary; některé způsoby určování prvků (str. 163 – 189)

Základní prvky a útvary geometrické (odd. 110). – Smysl úseček a úhlů (odd. 111). – Dělící čili určující poměr (odd. 112–117). – Harmonické prvky v útvarech prvního řádu (odd. 118–127). – Rozšíření pojmu o určujícím poměru (odd. 128–129).

Metrické vztahy jsou východiskem pro zavedení projektivních pojmů; Sobotkovým vzorem byla patrně učebnice Eduarda Weyra *Projektivná geometrie základních útvarů prvního řádu*, Praha, 1898. Cituje ji na začátku *Poznámek* (str. 627) ve výčtu knih o projektivní geometrii.

V trojúhelníku ABC označme A' průsečík spojnice BC s přímkou q neprocházející žádným vrcholem trojúhelníka; a cykl. Nechť A^* je čtvrtý harmonický bod k bodu A' vůči dvojici B, C; a cykl. Pak spojnice AA^*, BB^*, CC^* se protínají v bodě

Q. A obráceně: Nechť A^* je průmět bodu Q (neležícího na přímkách AB, BC, CA) z vrcholu A na spojnici BC; a cykl. Čtvrtý harmonický bod k bodu A^* vůči dvojici B, C označíme A'; a cykl. Pak body A', B', C' leží na přímce q. (Mezi body A', B', C', A^*, B^*, C^* připouštíme i nevlastní; též bod Q nebo přímka q mohou být nevlastní.) Sobotka dokazuje tato tvrzení pomocí věty o perspektivních trojúhelnících, aniž by aspoň poznamenal, že obě jsou bezprostředním důsledkem věty Cevovy a věty Menelaovy a jejich obrácení spolu s konstrukcí čtvrtého harmonického bodu.

Na str. 186 uvádí J. Sobotka toto sestrojení tečen ke kružnici k z bodu P ležícího vně kruhu s hranicí k: Bodem P vede dvě sečny s_1 a s_2 kružnice k, které ji protínají v bodech A_1, B_1 a A_2, B_2. Spojnice A_1A_2 a B_1B_2 a spojnice A_1B_2 a A_2B_1 se protínají ve dvou bodech, jejichž spojnici p nazývá J. Sobotka tětivou *styčnou bodu* P, tj. přímkou, protínající kružnici k v bodech dotyku tečen z bodu P. O dvojici pól P – polára p ani slovo, také žádná zmínka, zda konstrukce platí třeba i pro elipsu místo kružnice k.

———

V závěru kapitoly J. Sobotka synteticky odvozuje prostorovou analogii Apolloniovy kružnice, tj. množiny bodů v rovině, které od dvou jejích bodů mají konstantní poměr vzdáleností. Mlčky nepřipouští, že tento poměr je roven 1. Prostorovou analogií rozumí množinu přímek p, které procházejí průsečíkem dvou pevných různoběžek p_1, p_2 tak, že

$$\sin\widehat{p_1p} : \sin\widehat{p_2p} = \text{konst.} = k \neq 1. \tag{6.1}$$

Analytický protějšek k Sobotkově postupu je opět krátký a průhledný. Přímky p_1 a p_2 zvolme v rovině (x, y) a jejich průsečík v počátku; určit je můžeme jednotkovými vektory:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_1(u_1, v_1, 0) \qquad \text{a} \qquad &&\mathbf{u}_2(u_2, v_2, 0), \\ &u_1^2 + v_1^2 = 1, &&u_2^2 + v_2^2 = 1. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Přímka p procházející počátkem nechť je nositelkou vektoru $\mathbf{u}(x, y, z) \neq \mathbf{o}$. Pak pro $i = 1, 2$

$$\cos\widehat{p_ip} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_i}{|\mathbf{u}|}, \qquad \sin\widehat{p_ip} = \frac{1}{|\mathbf{u}|}\sqrt{|\mathbf{u}|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_i)^2}$$

$$k^2 = \left(\frac{\sin\widehat{p_1p}}{\sin\widehat{p_2p}}\right)^2 = \frac{|\mathbf{u}|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_1)^2}{|\mathbf{u}|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_2)^2}. \tag{6.3}$$

Co při $k^2 \neq 1$ vytvoří nositelka p vektoru $\mathbf{u}$ podrobeného podmínce (6.3)? Z (6.3) ihned nahlédneme, že kuželovou plochu

$$(1 - k^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (u_1x + v_1y)^2 + k^2(u_2x + v_2y)^2 = 0. \tag{6.4}$$

Můžeme předpokládat, že osa x určená vektorem $\mathbf{e}(1, 0, 0)$ je jednou z hledaných přímek. Pak podle (6.3) s $\mathbf{u} = \mathbf{e}$ a podle (6.2) vychází

$$k^2 = \frac{1 - u_1^2}{1 - u_2^2} = \frac{v_1^2}{v_2^2}, \tag{6.5}$$

což je ovšem okamžitě patrné i geometricky.

Tedy $-u_1^2 + k^2u_2^2 = -(1-k^2)$, $-v_1^2 + k^2v_2^2 = 0$ a (6.4) se přepíše takto:

$$(1-k^2)(y^2+z^2) + 2(-u_1v_1 + k^2u_2v_2)xy = 0. \tag{6.6}$$

Vidíme, že rovina $x =$ konst. protíná nalezenou kuželovou plochu (6.6) v kružnici.

Kuželová plocha (6.6) protíná rovinu (x, y) v přímkách $y = 0$ (v ose x podle hořejší volby) a v přímce $y = \frac{2}{1-k^2}(u_1v_1 - k^2u_2v_2)x$. Proložme každou z těchto přímek rovinu; jejich rovnice budou

$$\begin{aligned} \lambda y + z =& 0, \\ 2(u_1v_1 - k^2u_2v_2)x - (1-k^2)y + \mu z =& 0 \end{aligned} \tag{6.7}$$

s λ a μ jako libovolnými parametry. Požadujme, aby uvažované roviny byly kolmé; to vede k

$$\mu = \lambda(1-k^2). \tag{6.8}$$

Pro body průsečnice rovin (6.7) při (6.8) je

$$x : y : z = (1-k^2)(1+\lambda^2) : 2(u_1v_1 - k^2u_2v_2) : -2\lambda(u_1v_1 - k^2u_2v_2).$$

Jednoduchým výpočtem se přesvědčíme, že tyto body leží na kuželové ploše (6.6).

Shrneme: Množina přímek p, které jdou průsečíkem daných různoběžek p_1 a p_2 a vyhovují podmínce (6.1), vytvoří kvadratickou kuželovou plochu. Buďte q_1 a q_2 její přímky v rovině různoběžek p_1 a p_2. Roviny kolmé k povrchovým přímkám q_1 nebo q_2 protínají kuželovou plochu v kružnicích. Dvojice rovin, které procházejí povrchovými přímkami q_1 a q_2 a jsou na sebe kolmé, se protínají v povrchové přímce kuželové plochy. Proto se jí říká ortogonální.

Kapitola VII. Affinita; affinní poloha dvou soustav rovinných (str. 190 – 357)

Průměty parallelních řad bodových a soustavy rovinné (odd. 130–134). – Affinní poloha v rovině (odd. 135–138). – Různé určení polohy affinní v rovině (odd. 139–140). – O stejných úhlech a úsečkách affinně položených (odd. 141–147). – Parallelní průměty kružnice; některé konstrukce a vlastnosti ellipsy (odd. 148–159). – O bodech průsečných kružnice s ellipsou; sestrojení předepsaných úhlů affinně položených (odd. 160–165) – Další konstrukce vztahující se k ellipse (odd. 166–176). – Obecné průměty parallelní kružnice a ellipsy; konstrukce na nich založené (odd. 177–212). – Obecná affinita útvarů rovinných (odd. 213–218). – Upotřebení affinity při řešení metrických úloh v parallelním promítání (odd. 219–223). – Sestrojování rovinných útvarů shodných (odd. 224–228). – Prostorová poloha affinní (odd. 229–232). – Affinita obecná dvou soustav prostorových (odd. 233–236). – O prostorových útvarech shodných (odd. 237–246).

Centrálním motivem je vztah kružnice – elipsa a afinita mezi nimi. Téměř na 170 stranách shrnul J. Sobotka mnoho vlastností elipsy a konstruktivních úloh o ní. Takové shrnutí nemá obdobu v celé české literatuře o deskriptivní geometrii. Z německy psané literatury o tomto oboru jsem měl v ruce jistě všechny významnější učebnice – ani v nich nemá kapitola VII rovnocenný protějšek.

K odd. 172 *Sestrojení os ellipsy ze dvou sdružených průměrů* (str. 239–242) s pěti konstrukcemi patří na str. 632 poznámka, kterou celou ocituji:

Konstrukci 1. uvádí Mossbrugger ve svých Grösstenteils neue Aufgaben aus dem Gebiete der Géométrie descriptive, Zürich 1845, podotýkaje, že ji má od Rytze, pročež Wiener[18] *konstrukci tu nazývá Rytzovou. Ke konstrukci 2. viz Frézier: La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois,* 2^e^ *édition, t. 1, 1754.*

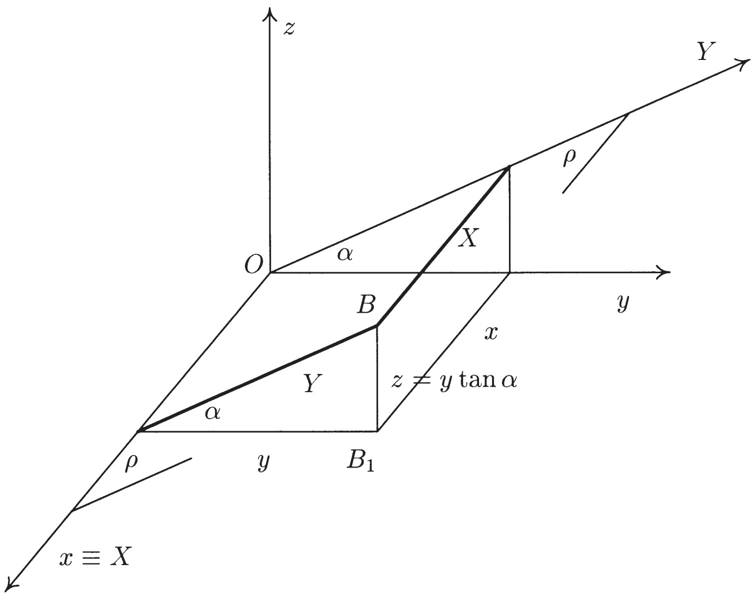
Tato poznámka dokládá, jak důkladně znal Sobotka prameny. V české knižní literatuře je jediný, kdo v souvislosti s Rytzovou konstrukcí cituje jména Mossbrugger a Frézier. D. Rytz konstrukci vymyslil; odůvodnil ji (početně) L. Mossbrugger. Frézierova konstrukce se jen zcela nepodstatně liší od Rytzovy, Fréziérův důkaz však selhává. Podrobně se těmto konstrukcím věnuji v článku *O konstrukci os elipsy z jejích sdružených průměrů* [19].

— — —

V části *Parallelní průměty kružnice* je takto nadepsán odd. 156: *Průmětem ortogonálním kružnice jest ellipsa*. Analytický důkaz tohoto základního poznatku je kratší a průhlednější než syntetický důkaz Sobotkův.

V soustavě pravoúhlých souřadnic x, y, z s počátkem O si mysleme rovinu ϱ mající rovnici

$$y \sin\alpha - z\cos\alpha = 0, \quad 0 < \alpha < 90^\circ, \tag{7.1}$$



Obrázek 1

tj. procházející osou x a s průmětnou (x, y) nikoliv totožnou nebo k ní kolmou (viz obr. 1). Do roviny ϱ zaveďme pravoúhlé souřadnice X, Y s počátkem zase O, s osou X splývající i co do smyslu s osou x a s osou Y (spádovou přímkou roviny ϱ) orientovanou tak, že pozitivní části os y a Y leží v témže poloprostoru vyťatém

[18] Viz Christian Wiener [25, díl I, str. 293].

souřadnicovou rovinou (x, z). Mezi souřadnicemi X, Y bodu $B \in \varrho$ a souřadnicemi x, y průmětu B_1 bodu B do roviny (x, y) pak platí

$$X = x, \quad Y = \tfrac{1}{\cos\alpha} y. \tag{7.2}$$

Zvolme v rovině ϱ kružnici se středem O a poloměrem R; její rovnice je

$$X^2 + Y^2 = R^2. \tag{7.3}$$

Ortogonální projekcí do souřadnicové roviny (x, y) přejde v čáru, jejíž rovnici dostaneme dosazením z (7.2) do (7.3):

$$x^2 + \frac{y^2}{\cos^2\alpha} = R^2. \tag{7.4}$$

Vidíme, že se jedná o elipsu s hlavní poloosou o délce R v ose $X \equiv x$ a s vedlejší poloosou o délce $R\cos\alpha$ v ose y (tj. v průmětu osy Y, která je spádovou přímkou roviny ϱ).

Podobně dokážeme i obecnější tvrzení: Ortogonálním průmětem elipsy je elipsa (samozřejmě zase za vyloučení triviálního případu, kdy rovina promítané elipsy je k průmětně kolmá; promítnutou elipsou rozumíme případně i kružnici). Místo od kružnice (7.3) vyjdeme od (reálné) elipsy

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 = 1; \quad a > 0,\ ac - b^2 > 0 \tag{7.5}$$

v rovině ϱ. Promítnutím do roviny (x, y) dostaneme podle (7.2) křivku o rovnici

$$ax^2 + \frac{2b}{\cos\alpha} xy + \frac{c}{\cos^2\alpha} y^2 = 1.$$

Protože

$$a \cdot \frac{c}{\cos^2\alpha} - \left(\frac{b}{\cos\alpha}\right)^2 = \frac{ac - b^2}{\cos^2\alpha} > 0$$

při nerovnosti z (7.5), jedná se o elipsu (speciálně o kružnici při $b = 0,\ a = \frac{c}{\cos^2\alpha}$).

V části *Obecné průměty parallelní kružnice a ellipsy* je podobně touto větou nadepsán odd. 179: *Průmětem parallelním ellipsy jest zase ellipsa*. Sobotkův syntetický důkaz je dosti dlouhý (str. 251–255) a je založen na kombinaci předcházejícího oddílu 177: *Průmětem parallelním kružnice jest ellipsa* a odd. 178: *Promítnouti parallelně ellipsu do dané roviny v kružnici*. Tvrzení v odd. 177 a úloha z odd. 178 nám vyjdou jako speciální případy věty z odd. 179, kterou dokážeme analyticky zobecněním hořejšího postupu při analytickém důkazu poznatku z odd. 156.

Směr promítání určíme vektorem $\mathbf{u}(u, v, w)$, který není rovnoběžný ani s průmětnou (x, y) ani s rovinou ϱ o rovnici (7.1), v níž připouštíme i $\alpha = 90°$, takže

$$w \neq 0, \qquad v\sin\alpha - w\cos\alpha \neq 0. \tag{7.6}$$

Bodem $B \in \varrho$ o souřadnicích (viz obr. 1) $x = X$, $y = Y\cos\alpha$, $z = Y\sin\alpha$ vedeme promítací paprsek; jeho parametrické rovnice jsou

$$x = X + tu, \quad y = Y\cos\alpha + tv, \quad z = Y\sin\alpha + tw.$$

Průsečíku s průmětnou (x, y) přísluší parametr t anulující třetí souřadnici z. Průmět B_1 bodu B do průmětny (x, y) má tak souřadnice

$$x = X - \frac{u \sin \alpha}{w} Y, \quad y = Y \cos \alpha - \frac{v \sin \alpha}{w} Y;$$

třetí je ovšem nula. Tedy naopak

$$X = x + \frac{u \sin \alpha}{w \cos \alpha - v \sin \alpha}\, y, \qquad Y = \frac{w}{w \cos \alpha - v \sin \alpha}\, y. \tag{7.7}$$

Vrátíme se k elipse (7.5) v rovině ϱ ze (7.1). Vyšetřit průmět této elipsy (ve směru $\mathbf{u}$) do roviny (x, y) znamená dosadit do (7.5) za X a Y z (7.7). Po zcela elementární úpravě tak dostaneme

$$ax^2 + 2 \cdot \frac{au \sin \alpha + bw}{w \cos \alpha - v \sin \alpha}\, xy + \frac{au^2 \sin^2 \alpha + 2buw \sin \alpha + cw^2}{(w \cos \alpha - v \sin \alpha)^2}\, y^2 = 1. \tag{7.8}$$

Diskriminant této rovnice je

$$\begin{aligned} a \cdot \frac{au^2 \sin^2 \alpha + 2buw \sin \alpha + cw^2}{(w \cos \alpha - v \sin \alpha)^2} - \left(\frac{au \sin \alpha + bw}{w \cos \alpha - v \sin \alpha} \right)^2 &= \\ = (ac - b^2) \cdot \left(\frac{w}{w \cos \alpha - v \sin \alpha} \right)^2 &> 0 \end{aligned} \tag{7.9}$$

v důsledku nerovností v (7.5) a (7.6). Průmět (7.8) do roviny (x, y) – ve směru vektoru $\mathbf{u}$ – elipsy (7.5) v rovině ϱ z (7.1) je tedy opět elipsa. Stručně: Rovnoběžným (tj. nikoliv nutně kolmým) průmětem elipsy je zase elipsa.

S malými změnami bychom dostali zcela analogický poznatek i pro hyperbolu.

K výše zmíněnému odd. 177: Je-li kuželosečka (7.5) kružnice, takže

$$b = 0, \qquad a = c > 0, \tag{7.10}$$

je její rovnoběžný průmět ve směru vektoru $\mathbf{u}$ do roviny (x, y) kuželosečka (7.8) s (7.10), tedy podle (7.9) zase elipsa (případně speciálně kružnice).

K výše zmíněnému odd. 178: Má-li průmět (7.8) do roviny (x, y) elipsy (7.5) v rovině ϱ býti kružnice, musí

$$au \sin \alpha + bw = 0, \qquad a = \frac{au^2 \sin^2 \alpha + 2buw \sin \alpha + cw^2}{(w \cos \alpha - v \sin \alpha)^2}. \tag{7.11}$$

Z těchto dvou rovnic se snadno eliminuje $u \sin \alpha$ a dospěje se tak ke kvadratické rovnici

$$(a \sin^2 \alpha) v^2 - 2(a \cos \alpha \sin \alpha) vw + (a \cos^2 \alpha + \tfrac{b^2}{a} - c) w^2 = 0 \tag{7.12}$$

pro poměr $v : w$ (poměr $u : w$ plyne z první rovnice v (7.11)). Protože její diskriminant

$$\begin{aligned} (-a \cos \alpha \sin \alpha)^2 - (a \sin^2 \alpha)(a \cos^2 \alpha + \tfrac{b^2}{a} - c) &= \\ = (ac - b^2) \sin^2 \alpha &> 0, \end{aligned}$$

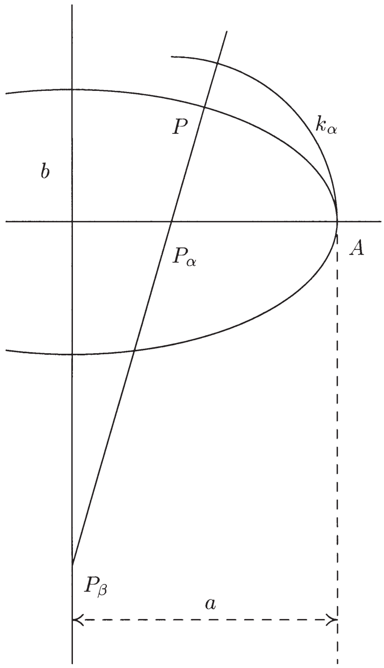
má kvadratická rovnice (7.12) dva reálné různé kořeny $v : w$. Jinými slovy: Existují právě dva různé směry, jimiž se elipsa v rovině ϱ nerovnoběžné s (x, y) promítá jako kružnice do roviny (x, y).

— — —

V odd. 166 (str. 231–235) odvozuje J. Sobotka několik vlastností elipsy, z nichž jedna tvrdí:

Označme P_α a P_β průsečíky hlavní a vedlejší osy elipsy (o délkách a a b poloos) s její normálou v bodě P různém od jejích vrcholů. Pak (viz obr. 2)

$$|PP_\alpha| : |PP_\beta| = b^2 : a^2. \tag{7.13}$$



Obrázek 2

Analytický důkaz je velmi průhledný. Při elipse v základní poloze vůči souřadnicovému systému vektor normály v jejím bodě $P[x_0, y_0]$ je $(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2})$ a normála sama má parametrické rovnice

$$x = x_0 + \frac{x_0}{a^2}t, \quad y = y_0 + \frac{y_0}{b^2}t.$$

Pro její průsečík P_α s osou x při našem $y_0 \neq 0$ je $t = -b^2$, a tudíž

$$P_\alpha \left[\frac{a^2 - b^2}{a^2}\, x_0, 0\right]. \tag{7.14}$$

Pro průsečík P_β normály s osou y při našem $x_0 \neq 0$ je $t = -a^2$, a tudíž

$$P_\beta \left[0, \frac{b^2 - a^2}{b^2}\, y_0\right].$$

Po zcela prostinkém výpočtu zjistíme, že

$$|PP_\alpha|^2 = \tfrac{1}{a^4}(b^4x_0^2 + a^4y_0^2),\ |PP_\beta|^2 = \tfrac{1}{b^4}(b^4x_0^2 + a^4y_0^2).$$

Z toho ihned vychází (7.13).

Konstrukci středů křivosti elipsy v jejích vrcholech dokazuje J. Sobotka na základě (7.13); ke své syntetické úvaze, v níž se nevyhnul „nekonečně blízkým“ bodům, potřebuje celou stránku. Analyticky lze jeho postup krátce zachytit takto:

Při $x_0 < a$ je průsečík P_α z (7.14) střed kružnice k_α, která se ve vrcholu $A[a, 0]$ dotýká elipsy a kolmo protíná její normálu v bodě $P[x_0, y_0]$ (viz obr. 2). Označme

$$K = \lim_{x_0 \to\, a^-} P_\alpha; \qquad \text{podle (7.14) je} \quad K \equiv \left[\frac{a^2 - b^2}{a}, 0\right]. \tag{7.15}$$

Tomuto bodu se říká střed křivosti elipsy ve vrcholu A. Ihned vidíme, že

$$|AK| = \frac{b^2}{a}. \tag{7.16}$$

Zopakujeme: Sestrojili jsme kružnici k_α, která se elipsy dotýká v jejím hlavním vrcholu A a protíná kolmo její normálu v bodě $P \not\equiv A$. Zjistili jsme pro $P \to A$ limitní polohu K středu a limitu poloměru této kružnice.

To je Sobotkův postup, ovšem nikoliv v Sobotkově syntetickém rouše.

Místo kružnice k_α si můžeme myslit kružnici l_α, která se elipsy dotýká v jejím hlavním vrcholu A a prochází bodem P; a pak při $P \to A$ vyšetřit limitní polohu L středu a limitu poloměru této kružnice. Učiníme to v krátkosti opět analyticky.

Snadno se přesvědčíme, že kružnice l_α má střed

$$L_\alpha \left[\frac{a^2 - b^2}{2a^2}(a + x_0), 0\right], \text{ tedy } L = \lim_{x_0 \to\, a^-} L_\alpha \equiv \left[\frac{a^2 - b^2}{a}, 0\right].$$

Vidíme, že střed L je totožný se středem K z (7.15).

K oběma kružnicím můžeme dojít i jinak: Rovnicí kružnice, která se elipsy dotýká v jejím vrcholu A, leží s ní v téže polorovině vyťaté tečnou v bodě A a která má poloměr κ, je

$$(x - \overline{a - \kappa})^2 + y^2 = \kappa^2. \tag{7.17}$$

Tato kružnice protíná elipsu mimo vrchol A ještě ve dvou bodech s touž první souřadnicí; dostaneme rovnici pro ni, když z (7.17) a z rovnice elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ vyloučíme y^2:

$$x^2 - 2a^2\frac{a - \kappa}{a^2 - b^2}x + \frac{a^4 - 2a^3\kappa + a^2b^2}{a^2 - b^2} = 0\,. \tag{7.18}$$

Rovnice (7.18) má ovšem kořen a; dělíme-li ji kořenovým činitelem $x - a$, dostaneme lineární rovnici

$$x - \frac{a^3 - 2a^2\kappa + ab^2}{a^2 - b^2} = 0$$

a z ní

$$\kappa = \frac{-(a^2 - b^2)x + a(a^2 + b^2)}{2a^2}.$$

Tudíž

$$\lim_{x\to a^-} \kappa = \frac{b^2}{a}.$$

K tomuto výsledku lze dojít i takto: Rovnice (7.18) má – jak víme – kořen a. Jestliže i její druhý kořen má být roven a, tak podle známých vztahů mezi koeficienty kvadratické rovnice a jejími kořeny musí platit pro koeficient lineárního členu

$$2a^2\frac{a-\kappa}{a^2-b^2} = a + a, \quad \text{tj.} \quad \kappa = \frac{b^2}{a},$$

a pro absolutní člen

$$\frac{a^4 - 2a^3\kappa + a^2b^2}{a^2-b^2} = a\cdot a, \quad \text{tj.} \quad \kappa = \frac{b^2}{a}.$$

K témuž výsledku bychom opět dospěli, kdybychom anulovali diskriminant rovnice (7.18), tj. vyjádřili, že má jediný – dvojnásobný – kořen a.

Dostáváme tak stále podíl $\frac{b^2}{a}$, který se známou konstrukcí rychle sestrojí.

— — —

Část *Obecné průměty parallelní kružnice a ellipsy* (str. 251–297) patří vztahům mezi elipsou a kružnicí a mnoha konstruktivním úlohám o elipse. V těchto úlohách velmi často a významně vystupují sdružené průměry. J. Sobotka několika způsoby ukazuje bodovou konstrukci elipsy při zadaných jejích sdružených průměrech a znovu se dvěma způsoby založenými na afinitě vrací ke konstrukci os elipsy z jejích sdružených průměrů (odd. 183 a 203). V odd. 210 řeší úlohu: *V rovině dvěma body položiti ellipsu tak, aby k dané kružnici ležela affinně pro danou osu affinity*. S výsledkem této úlohy přistupuje v odd. 211 k sestrojení elipsy procházející danými 5 body (pokud je to ovšem vůbec možné).

Část *Obecná affinita útvarů rovinných* začíná aplikací známého poznatku:

Dva rovinné řezy hranolu jsou v afinním vztahu, v němž osou je průsečnice sekoucích rovin. Využívaje této afinity, řeší J. Sobotka v odd. 213 tento problém:

Je dán trojboký hranol s normálním řezem $A_0B_0C_0$ a trojúhelník ABC. Na hraně jdoucí bodem A_0 resp. B_0 resp. C_0 má se zvolit bod A^* resp. B^* resp. C^* tak, aby trojúhelník $A^*B^*C^*$ byl podobný trojúhelníku ABC.

V pozn. k odd. 213 (viz str. 633) J. Sobotka píše, že první řešení této úlohy podal B. Gugler [4] 1841. Stejnou poznámku mají F. Kadeřávek – J. Klíma – J. Kounovský [8, díl I, str. 165], kteří na str. 164–165 probírají úlohu dvěma způsoby, z nichž první je Guglerův. Guglerovu knihu [4] jsem měl v ruce v přepracovaném 2. vydání z roku 1857; dotyčná úloha s čís. 180 je na str. 131–132 a její řešení je založeno na téměř identické úloze 145 ze str. 103, v níž je normální řez $A_0B_0C_0$ považován za kolmý průmět a hledaný trojúhelník $A^*B^*C^*$ má dané dva (a tedy všechny tři) úhly. H. Brauner [1, str. 84] 1986 řeší úlohu afinitou jako Sobotka, ale připisuje ji S. L'Huillierovi (1750–1840) 1811. F. Kadeřávek – J. Klíma – J. Kounovský [8, díl I, str. 165] se dotýkají i analogické úlohy pro čtyřboký hranol s normálním řezem $A_0B_0C_0D_0$ a daný čtyřúhelník $ABCD$, k němuž podobný se má na hranol položiti. Podotýkají zřejmou věc, že úloha je možná jen tehdy, když průsečík úhlopříček čtyřúhelníka $A_0B_0C_0D_0$ dělí úhlopříčky ve stejném poměru, v jakém dělí průsečík úhlopříček čtyřúhelníka $ABCD$ úhlopříčky. Vychází to okamžitě z poznatku, že při rovnoběžném promítání se nemění dělící poměr (stejně tak ovšem při podobnosti). B. Gugler [4] v úloze 181 (str. 132) si všímá jedině hranolu se základnou v rovnoběžníku $A_0B_0C_0D_0$ a při rovnoběžníku $ABCD$. V této situaci průsečíky úhlopříček je půlí. Jako speciální případ vychází, že jakýkoliv rovnoběžník lze považovat za kolmý průmět čtverce.

Od Guglerovy úlohy přechází J. Sobotka k dalšímu studiu afinity útvarů rovinných a pak i prostorových. Na základě prostorové afinity dokazuje v odd. 245 (str. 351–352) známou větu, že *každý útvar prostorový neproměnný lze převésti jediným pohybem helikálním z libovolné polohy jedné do libovolné polohy jiné.* Odd. 246 (str. 352–357) obsahuje dva způsoby, jak nalézti šroubový pohyb, který převádí trojúhelník z jedné polohy do druhé.

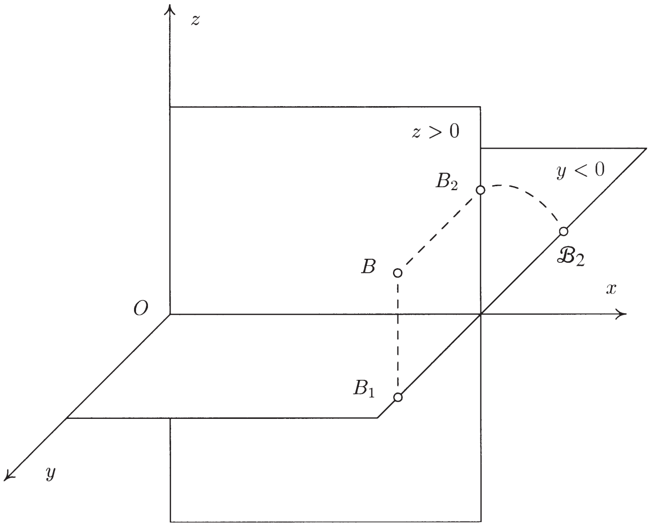
Kapitola VIII. Průměty ortogonální do dvou k sobě kolmých průměten (str. 358 – 498)

Uspořádání průmětů a průměty bodů (odd. 247–251). – Sdružené průměty přímky (odd. 252–255). – Vyjádření roviny (odd. 256–257). – Vzájemná poloha dvou přímek, dvou rovin, přímky a roviny (odd. 258–265). – Některé základní úlohy, vztahující se k rovinám (odd. 266–270). – Průseky rovin s rovinami a s přímkami (odd. 271–276). – Posunování a vynechávání základnice (odd. 277–282). – Sestrojování délek a odchylek; sklápění (odd. 283–302). – Sdružené průseky kružnice a několik úloh (odd. 303–308). – Transformace průměten (odd. 309–316). – Otáčení kolem dané osy (odd. 317–323). – Souvislost sklopení a sdružených průmětů pro útvar rovinný (odd. 324–325). – Souvislost mezi dvěma sdruženými průměty útvaru rovinného (odd. 326–328). – Souvislost mezi třemi sdruženými průměty útvaru rovinného (odd. 329–331). – O průmětech nesdružených (odd. 332–344).

Tato kapitola obsahuje tradiční – ale rozšířenou – látku o Mongeově promítání. V několika případech naznačím, jak je možno tuto projekci doprovázet analytickou geometrií.

Zvolme první průmětnu – půdorysnu – v souřadnicové rovině (x, y) a druhou průmětnu – nárysnu – v souřadnicové rovině (x, z). Bod $B[x, y, z]$ v prostoru má první průmět – půdorys – $B_1[x, y, 0]$ a druhý průmět – nárys – $B_2[x, 0, z]$. Otočme druhou průmětnu kolem osy x tak, aby pozitivní polorovina $z > 0$ této průmětny splynula s negativní polorovinou $y < 0$ první průmětny; druhý průmět $B_2[x, 0, z]$ tak přejde v bod $\mathcal{B}_2[x, -z, 0]$ (viz obr. 3 na následující straně). Takto ztotožněné půdorysně s nárysnou budeme též říkat nákresna. Dále se dohodneme, že mezi body B_2 a $\mathcal{B}_2$ nebudeme zpravidla rozlišovat ani v označení ani v pojmenování; zůstaneme u B_2 a nárysu bodu B. Ze souvislosti bude vždy zřejmé, zda pracujeme v prostoru nebo jen v nákresně.

Všimneme si základních věcí o rovině: Předně přímek hlavních, spádových a k rovině kolmých, za druhé bodu v rovině.



Obrázek 3

———

V prostoru rovina ϱ o rovnici

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (a^2 + b^2 \neq 0,\ a^2 + c^2 \neq 0) \tag{8.1}$$

– nerovnosti vyjadřují, že není rovnoběžná ani s první průmětnou (x, y) ani s druhou průmětnou (x, z) – má půdorysnou stopu

$$ax + by + d = 0,\ z = 0 \tag{8.2}$$

a nárysnou stopu

$$ax + cz + d = 0,\ y = 0. \tag{8.3}$$

V nákresně má tedy půdorysná stopa rovnici

$$ax + by + d = 0 \tag{8.4}$$

a nárysná stopa rovnici

$$ax - cy + d = 0. \tag{8.5}$$

V nákresně se obě stopy ztotožní právě jen při $b + c = 0$, tj. když rovina ϱ je kolmá k vektoru $(a, b, c = -b)$, což při $b = 0$ zahrnuje i rovinu kolmou k ose x.

Opět nejdříve v prostoru:

Hlavní přímky první osnovy roviny ϱ – jakožto přímky roviny ϱ, které jsou rovnoběžné s půdorysnou stopou (8.2) roviny ϱ – jsou určeny vektorem

$$(b, -a, 0). \tag{8.6}$$

Spádové přímky první osnovy roviny ϱ – jakožto přímky roviny ϱ, které jsou kolmé k půdorysné stopě (8.2) roviny ϱ – jsou určeny vektorem

$$(ac, bc, -a^2 - b^2). \tag{8.7}$$

Vektory (8.6) a (8.7) jsou ovšem kolmé a oba jsou kolmé k vektoru

$$(a, b, c) \tag{8.8}$$

kolmému k rovině (8.1).

Hlavní přímky druhé osnovy roviny ϱ – jakožto přímky roviny ϱ, které jsou rovnoběžné s nárysnou stopou (8.3) roviny ϱ – jsou určeny vektorem

$$(c, 0, -a). \tag{8.9}$$

Spádové přímky druhé osnovy roviny ϱ – jakožto přímky roviny ϱ, které jsou kolmé k nárysné stopě (8.3) roviny ϱ – jsou určeny vektorem

$$(ab, -a^2 - c^2, bc). \tag{8.10}$$

Vektory (8.8) – (8.10) jsou ovšem zase vzájemně kolmé.

A nyní opět v nákresně:

Půdorys hlavní přímky první osnovy je – jakožto rovnoběžný s půdorysnou stopou (8.4) – určen vektorem $(b, -a)$; nárys je rovnoběžný s osou x. Nárys hlavní přímky druhé osnovy je – jakožto rovnoběžný s nárysnou stopou (8.5) – určen vektorem (c, a); půdorys je rovnoběžný s osou x.

Půdorys spádové přímky první osnovy je – jakožto kolmý k půdorysné stopě (8.4) – určen vektorem (a, b); nárys spádové přímky druhé osnovy je – jakožto kolmý k nárysné stopě (8.5) – určen vektorem $(a, -c)$.

— — —

V rovině o rovnici (8.1) s $a \neq 0,\ c \neq 0$ má se určit bod B s daným půdorysem $B_1[x_1, y_1, 0]$. Řešení v prostoru dostaneme okamžitě: První promítací paprsek bodu B je

$$x = x_1,\ y = y_1 \tag{8.11}$$

a pro třetí souřadnici jeho průsečíku s rovinou (8.1) – tj. pro třetí souřadnici bodu B – z (8.1) a (8.11) ihned dostáváme

$$z = -\frac{ax_1 + by_1 + d}{c}. \tag{8.12}$$

Nyní budeme pracovat jen v nákresně a analyticky sledovat známou grafickou konstrukci nárysu B_2 bodu $B \in \varrho$ při jeho daném půdorysu $B_1[x_1, y_1]$ (viz obr. 4).

Půdorys h_1^I té hlavní přímky první osnovy roviny ϱ, která jde bodem $B_1[x_1, y_1]$, má podle (8.4) rovnici

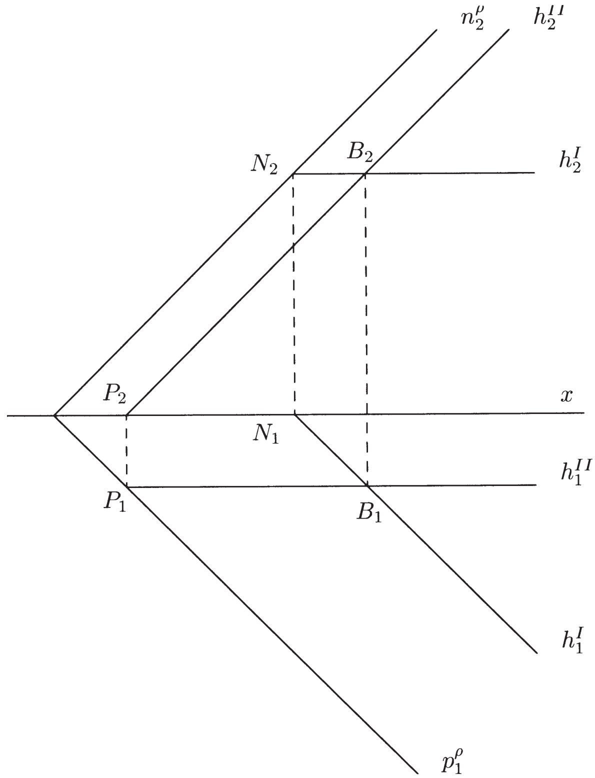
$$ax + by - (ax_1 + by_1) = 0.$$

Zjistíme nárys této hlavní přímky; na něm (a na ordinále) je druhý průmět B_2 bodu B. Půdorys N_1 nárysného stopníku N naší hlavní přímky je její průsečík s osou x; je to bod o souřadnicích

$$x = \frac{ax_1 + by_1}{a},\ y = 0.$$

Nárys N_2 nárysného stopníku leží na nárysné stopě (8.5) roviny ϱ, je to tedy průsečík přímek

$$x = \frac{ax_1 + by_1}{a},\ ax - cy + d = 0.$$



Obrázek 4

Tímto průsečíkem rovnoběžně s osou x jde nárys h_2^I naší hlavní přímky; její rovnice tedy je

$$y = \frac{ax_1 + by_1 + d}{c}, \tag{8.13}$$

takže určuje v souladu s (8.12) (vzhledem k $y \leftrightarrow -z$ při známém ztotožnění nárysny s půdorysnou) druhý průmět B_2 bodu B.

Půdorys h_1^{II} té hlavní přímky druhé osnovy roviny ϱ, která jde bodem $B_1[x_1, y_1]$, má rovnici $y = y_1$. Půdorys P_1 jejího půdorysného stopníku leží ovšem na půdorysné stopě (8.4) roviny ϱ. Nárys P_2 tohoto stopníku je tedy bod $[-\frac{by_1+d}{a}, 0]$ a jím jde nárys h_2^{II} naší hlavní přímky rovnoběžné s nárysnou stopou; tento nárys má podle (8.5) rovnici

$$ax - cy - \left[a \cdot \left(-\frac{by_1 + d}{a}\right) - c \cdot 0\right] = 0.$$

Průsečík s ordinálou $x = x_1$ poskytuje pro druhou souřadnici bodu B_2 zase (8.13).

———

V odd. 305 (str. 433–435) řeší Sobotka tuto úlohu:

Dána jest ellipsa k_1 jakožto průmět první kružnice k; jest 1. odvoditi sdružený průmět druhý k_2 kružnice té, je-li dán průmět S_2 středu jejího; 2. stanoviti rovinu ϱ, v níž kružnice ta leží, a její odchylky α, β od průměten.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že středy elipsy k_1 a kružnice k splývají v počátku.

Kružnici k určíme jako řez kulové plochy

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{8.14}$$

rovinou nikoliv kolmou k půdorysně (x, y):

$$ax + by \pm cz = 0; \quad c > 0. \tag{8.15}$$

Válcová plocha, která půdorysně promítá kružnici k, má rovnici, která vznikne vyloučením z z (8.14) a (8.15):

$$(a^2 + c^2)x^2 + 2abxy + (b^2 + c^2)y^2 - c^2r^2 = 0. \tag{8.16}$$

V půdorysně znamená tato rovnice první průmět k_1 kružnice k; protože

$$\begin{vmatrix} a^2 + c^2 & ab \\ ab & b^2 + c^2 \end{vmatrix} = c^2(a^2 + b^2 + c^2) > 0,$$

jedná se o elipsu. Znovu jsme krátce dokázali, že kolmým průmětem kružnice je elipsa.

Zvolme naopak v půdorysně elipsu k_1 se středem v počátku

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + D = 0, \tag{8.17}$$

$$AC - B^2 > 0. \tag{8.18}$$

Při reálné elipse k_1 lze tedy dosáhnout toho, že

$$A, C > 0, \ D < 0. \tag{8.19}$$

Pokusíme se nalézt kulovou plochu (8.14) a rovinu (8.15) tak, aby kružnice, která je jejich řezem, se půdorysně promítala do elipsy k_1 z (8.17). Pro přehlednost tak učiníme jen při $a \geqq 0$, $b \geqq 0$. Srovnáním (8.16) s (8.17) dostáváme

$$a^2 + c^2 = A, \qquad ab = B, \qquad b^2 + c^2 = C, \qquad -c^2r^2 = D.$$

Tuto soustavu 4 rovnic pro 4 neznámé a, b, c, r snadno rozřešíme:

$$a^2 - b^2 = A - C,$$

$$\begin{array}{r} a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = (A - C)^2 \\ 4a^2b^2 = 4B^2 \\ \hline \end{array}$$

$$a^2 + b^2 = \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2} = \sqrt{\Delta} \geqq |A - C|$$

$$a^2 = \tfrac{1}{2}[\ A - C + \sqrt{\Delta}] \geqq 0 \tag{8.20}$$

$$b^2 = \tfrac{1}{2}[-A + C + \sqrt{\Delta}] \geqq 0$$

$$c^2 = \tfrac{1}{2}[\ A + C - \sqrt{\Delta}] > 0 \text{ v důsledku (8.18),}$$

$$r^2 = -\frac{1}{2}\, D \cdot \frac{A + C + \sqrt{\Delta}}{AC - B^2} > 0 \text{ v důsledku (8.19) a (8.18).}$$

Dosaďme pak z (8.20) do (8.14) a (8.15): Kulová plocha

$$x^2 + y^2 + z^2 = -\frac{1}{2}D \cdot \frac{A + C + \sqrt{\Delta}}{AC - B^2} \tag{8.21}$$

a rovina

$$\sqrt{A - C + \sqrt{\Delta}}x + \sqrt{-A + C + \sqrt{\Delta}}y \pm \sqrt{A + C - \sqrt{\Delta}}z = 0 \tag{8.22}$$

se protínají v kružnici k, která se do půdorysny promítá jako elipsa k_1 z (8.17).

Získáme válcovou plochu, která nárysně promítá kružnici k, když z (8.21) a (8.22) vyloučíme y. Určit odchylky roviny (8.22) od průměten je elementární úloha.

— — —

O zcela výjimečné Sobotkově důkladnosti svědčí, kolikrát se vrací k ose mimoběžek. Zmínil jsem se, že se jí zabýval už v kap. IV., odd. 95, 96. Znovu se jí věnuje v odd. 295 (str. 419–422), v odd. 315 (str. 449–451) a v odd. 323 (str. 465–467).

V odd. 295 probírá postupně čtyři způsoby:

1. V prvním vychází od roviny, která jde mimoběžkou p rovnoběžně s mimoběžkou q; k této rovině je osa mimoběžek kolmá. – 2. V druhém konstruuje rovinu kolmou k mimoběžce p a rovinu kolmou k mimoběžce q; s průsečnicí těchto rovin je osa mimoběžek rovnoběžná. – 3. V třetím je stereometrické řešení jako v druhém, ale grafické provedení je pozměněno. – 4. Čtvrtý způsob přechází k řešení z odd. 95, 96. Mimoběžky p, q určené průměty p_1, q_1 a p_2, q_2 v Mongeově promítání se protnou dvěma rovnoběžnými rovinami rovnoběžnými s první nebo druhou průmětnou. Jedna z těchto rovnoběžných rovin se vezme za průmětnu, druhá za rovinu distanční (viz kap. IV).

V odd. 315 jsou dvě řešení založená na transformaci průměten. V odd. 323 spočívá řešení v otočení: Převedeme-li mimoběžky p, q vhodným otočením do polohy rovnoběžné s první nebo druhou průmětnou, je průsečík jejich půdorysů p_1 a q_1 nebo nárysů p_2 a q_2 prvním nebo druhým průmětem osy mimoběžek.

J. Sobotka se však jen zcela letmo dotýká otázky, které řešení je pro grafické provedení výhodné a které nikoliv a proč.

Sestrojit osu dvou mimoběžek je ovšem úloha traktovaná v mnoha učebnicích. J. Sobotka ji doplňuje příbuznými problémy, které nemají takový ohlas v literatuře. Tak v odd. 296 (str. 422–423) a v odd. 316 (str. 451–453) se setkáváme s těmito úlohami:

Mimoběžné přímky p a q se mají spojit úsečkou, která a) má být rovnoběžná s danou rovinou a mít danou délku; b) má být rovnoběžná s danou rovinou a mít nejkratší délku; c) má mít danou délku a být rozdělena danou rovinou v daném poměru.

Úlohy a) a b) lze snadno řešit také metodami analytické geometrie nebo analýzy. O úloze c) píše J. Sobotka (str. 452), že má obecně dvě řešení. K tomu je třeba připojit jistou výhradu.

Vyberme na úsečce PQ dané délky bod B s daným dělícím poměrem $(P, Q; B)$ vůči bodům P, Q. Pohybuje-li se pak úsečka PQ tak, že bod P postupuje po přímce p a bod Q po přímce q, vytváří bod B elipsu ε v rovině rovnoběžné s přímkami p, q – to ihned nahlédneme, když si celou situaci včetně pohybu úsečky PQ promítneme do roviny rovnoběžné s mimoběžkami p, q (viz odd. 188, str. 267). Bod B hledané polohy úsečky PQ je pak průsečík dané roviny s elipsou ε. Ihned tak vidíme: Úloha má nejvýš dvě řešení. Jestliže se elipsa ε s danou rovinou neprotínají, úloha nemá řešení.

— — —

Z obvyklého obsahu Mongeova promítání zvláště se vymyká poslední část nadepsaná *O průmětech nesdružených* (str. 477–498). Jimi rozumí J. Sobotka situaci, při níž půdorys B_1 a nárys B_2 – oba v nákresně – bodu B neleží na ordinále, tj. na kolmici k ose x, kolem níž se v prostoru nárysna otočením ztotožnila s půdorysnou (pokud by průměty B_1 a B_2 ležely na ordinále, jsou průměty sdruženými).

J. Sobotka píše (odd. 332, str. 477):

> *Promítáme-li orthogonálně do dvou k sobě kolmých průměten, jest nejjednodušší a nejúčelnější vyjádření průmětů těch, sdružíme-li je v rovině strojné podle jejich společné osy, jak jsme dosud činili. Někdy však nelze graficky obraz takových sdružených průmětů na nákresně umístiti, a někdy povaha úlohy toho vyžaduje, abychom vyjádřili oba průměty v poloze nesdružené, a dokonce jest i někdy žádoucno vyjádřiti každý z průmětů obrazem podobným dle různých modulů podobnosti; při čemž není nutno, aby obrazy obou průmětů byly umístěny v téže rovině obrazné. Tím se konstrukce, jež jsme seznali, stávají sice značně složitějšími, avšak zásadně se nemění.*

— — —

Odd. 281 (str. 399–400) patří této úloze: Jsou dány dvě mimoběžky r, s a bod B neležící na nich. Má se jím vést příčka p obou mimoběžek. J. Sobotka sestrojuje žádanou příčku jako průsečnici rovin $\varrho \equiv (B, r)$ a $\sigma \equiv (B, s)$ a popisuje několik způsobů, jak to učinit. Jeden je založen na využití roviny totožnosti τ (průsečnice roviny s rovinou totožnosti τ je probrána v odd. 274).

V učebnicích deskriptivní geometrie se s rovinou totožnosti pracuje málo. Proto ukáži, jak s touto rovinou lze řešit hořejší úlohu i jinak, než to učinil J. Sobotka. Označme P a Σ průsečíky přímky p s mimoběžkami r a s.

Stereometrické řešení můžeme uspořádat takto: Zvolme rovinu τ (nikoliv nutně rovinu totožnosti) nerovnoběžnou s přímkou r, a pak ve směru přímky r do roviny τ promítněme a) přímku r do jejího stopníku $R^\tau \equiv r^\tau$; b) bod B do bodu B^τ; c) přímku s do přímky s^τ. Spojnice $B^\tau R^\tau$ je průmět (do roviny τ ve směru přímky r) hledané příčky a průsečík $B^\tau R^\tau \times s^\tau$ je průmět Σ^τ bodu $\Sigma \equiv p \times s$; ovšem $B\Sigma \times r \equiv P$.

Grafické řešení využije výhodně za rovinu τ rovinu totožnosti, pokud s ní aspoň jedna z mimoběžek – dejme tomu r – není rovnoběžná. Bod B a mimoběžky r, s nechť jsou dány svými prvními a druhými průměty B_1, B_2 a r_1, r_2; s_1, s_2. a) Průmět R^τ přímky r je $R^\tau \equiv r^\tau \equiv r_1 \times r_2$. b) Bodem B_1 resp. B_2 vedeme rovnoběžku r_1' resp. r_2' s r_1 resp. r_2 a průmět B^τ bodu B je $B^\tau \equiv r_1' \times r_2'$. c) Stopník přímky s je $S^\tau \equiv s_1 \times s_2$. Další bod na průmětu s^τ přímky s dostaneme takto: Na přímce s zvolíme bod A a z jeho průmětů A_1, A_2 dostaneme – jako v b) – průmět A^τ. Hledaný průmět přímky s je potom $s^\tau \equiv A^\tau S^\tau$. Pak $B^\tau R^\tau \times s^\tau \equiv \Sigma^\tau$. Bodem Σ^τ vedeme rovnoběžku r_1'' resp. r_2'' s r_1 resp. r_2 a dostaneme $\Sigma_1 \equiv s_1 \times r_1''$ resp. $\Sigma_2 \equiv s_2 \times r_2''$. Body Σ_1 a Σ_2 jakožto půdorys a nárys bodu Σ leží ovšem na ordinále.

Kapitola IX. Perspektivní nazírání na prostor. Dualita. (str. 499 – 534)

Perspektivní nazírání na prostor (odd. 345–356). – Dualita (odd. 357–369).

Perspektivním nazíráním rozumí J. Sobotka připuštění nevlastních elementů. Úlohy, které dříve řešil výhradně pro vlastní prvky, rozšiřuje i pro případ, že některé z nich jsou „v nekonečnu". Např. úlohu z odd. 349 (str. 505–506) *Sestrojiti máme příčku* p *dvou přímek* a, b *mimoběžných, procházející daným bodem* C formuluje J. Sobotka pro nevlastní bod C nebo pro jednu z přímek a, b nevlastní. Podobně diskutuje v odd. 352–353 (str. 507–511) úlohu

Plocha kuželová dána jest rovinnou křivkou řídící k *a vrcholem* V*; ku ploše má se položiti daným bodem* P *rovina tečná* T i v případech, kdy v nekonečnu je bod P nebo vrchol V nebo bod P i vrchol V.

Při řešení této úlohy na str. 508 J. Sobotka píše, že postačující podmínka k tomu, aby dané elipsy ε_1 a ε_2 byly průměty (v Mongeově projekci) nějaké elipsy ε, zní takto: S ordinálami rovnoběžné tečny jedné z elips ε_1, ε_2 jsou současně tečnami druhé. Na str. 509 toto tvrzení dokazuje. Zkonstruuje jistou elipsu ε, o níž říká: *. . . ; i jest patrno, že průmět první této elipsy bude* ε_1*, průmět druhý* ε_2. Je to „patrno" tomu, kdo má s prostorovou představivostí jisté zkušenosti; pochybuji, že by to bylo „patrno" čtenáři, na kterého J. Sobotka myslil, když často psal velmi podrobně i o situacích zcela průhledných. Kdo je obeznámen se základy teorie prostorové křivky 4. stupně 1. druhu (průniku dvou kvadrik), ví, že pokud má dva singulární body, degeneruje ve dvě kuželosečky. Z předepsané polohy elips ε_1 a ε_2 bezprostředně vyplývá, že první promítací válcová plocha elipsy ε_1 a druhá promítací válcová plocha elipsy ε_2 mají dva společné dotykové body (jsou to vzory dotykových bodů těch tečen elips ε_1 a ε_2, které jsou kolmé k ose x). Tyto dotykové body jsou singulárními body průniku obou promítacích válcových ploch. Průnik – jak už jsme připomenuli – degeneruje ve dvě kuželosečky, tedy nutně elipsy.

Ale na tak jednoduchou věc není zapotřebí aplikovat výsledky teorie, která jistě není elementární. Analytický důkaz lze vytvořit jednoduše:

Bez jakékoliv újmy mohu elipsy ε_1 a ε_2 posunout v půdorysně a nárysně ve směru kolmém na osu x tak, aby jejich středy splynuly v bodě osy x, který vezmu za počátek; rovnice elips ε_1 a ε_2 pak budou mít tvar

$$a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 - 1 = 0,\ z = 0;\quad a_1c_1 - b_1^2 > 0;\ a_1,\ c_1 > 0, \tag{9.1}$$

$$a_2x^2 + 2b_2xz + c_2z^2 - 1 = 0,\ y = 0;\quad a_2c_2 - b_2^2 > 0;\ a_2,\ c_2 > 0. \tag{9.2}$$

Souřadnice x bodů elipsy ε_1 z (9.1) s tečnami rovnoběžnými s osou y jsou dány rovnicí (tj. anulováním diskriminantu rovnice (9.1) kvadratické v y)

$$(a_1c_1 - b_1^2)x^2 - c_1 = 0.$$

Analogicky souřadnice x bodů elipsy ε_2 z (9.2) s tečnami rovnoběžnými s osou z jsou dány rovnicí

$$(a_2c_2 - b_2^2)x^2 - c_2 = 0.$$

Z podmínky společných tečných ordinál v nákresně tak vychází

$$(a_1c_1 - b_1^2) : (a_2c_2 - b_2^2) = c_1 : c_2. \tag{9.3}$$

Ve svazku kvadrik určeném promítacími válcovými plochami se stopami v elipsách ε_1 a ε_2 hledejme kvadriku procházející počátkem. Z prvních rovnic v (9.1) a (9.2) je vidět, že je to jedině kuželová plocha, jejíž rovnice vzniká odečtením rovnic (9.1) a (9.2):

$$(a_1 - a_2)x^2 + c_1y^2 - c_2z^2 + 2b_1xy - 2b_2xz = 0. \tag{9.4}$$

Diskriminant této kvadriky – poněvadž

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 & -b_2 \\ b_1 & c_1 & 0 \\ -b_2 & 0 & -c_2 \end{vmatrix} = -c_2(a_1c_1 - b_1^2) + c_1(a_2c_2 - b_2^2) = 0$$

v důsledku (9.3) – má hodnost 2. Tedy kuželová plocha (9.4) degeneruje ve dvě různé roviny. Jejich průsečnici jako množinu singulárních bodů dostaneme řešením soustavy (viz druhý a třetí řádek vypsaného determinantu)

$$\begin{aligned} b_1x + c_1y \qquad\quad &= 0, \\ -b_2x \qquad\quad - c_2z &= 0. \end{aligned}$$

Tedy

$$x : y : z = -c_1c_2 : b_1c_2 : b_2c_1 \qquad (c_1, c_2 > 0) \tag{9.5}$$

určuje průsečnici dvou rovin (9.4). Z nich každá protíná promítací válcové plochy elips (9.1) a (9.2) v elipse, která se do půdorysny (x, y) promítá jako elipsa ε_1 a do nárysny (x, z) jako elipsa ε_2.

Najdeme ještě rovnice oněch dvou rovin. Dvojice rovin (9.4) protíná rovinu (y, z) v přímkách

$$x = 0,\ c_1y^2 - c_2z^2 = 0;$$

protože podle nerovností v (9.1) a (9.2) je $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, můžeme ty přímky vyjádřit takto:

$$x : y : z = 0 : \varepsilon\sqrt{c_2} : \sqrt{c_1} \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{9.6}$$

Hledané roviny pak mají rovnice – viz (9.5) a (9.6) –

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & \varepsilon\sqrt{c_2} & \sqrt{c_1} \\ -c_1c_2 & b_1c_2 & b_2c_1 \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$\begin{aligned} \left(\frac{b_1}{\sqrt{c_1}} - \frac{b_2}{\sqrt{c_2}}\right)x + \sqrt{c_1}y - \sqrt{c_2}z &= 0, \qquad (9.7) \\ \left(\frac{b_1}{\sqrt{c_1}} + \frac{b_2}{\sqrt{c_2}}\right)x + \sqrt{c_1}y + \sqrt{c_2}z &= 0. \end{aligned}$$

Elementárním vynásobením spojeným s (9.3) se snadno přesvědčíme, že součin levých stran v (9.7) je vskutku levá strana v (9.4).

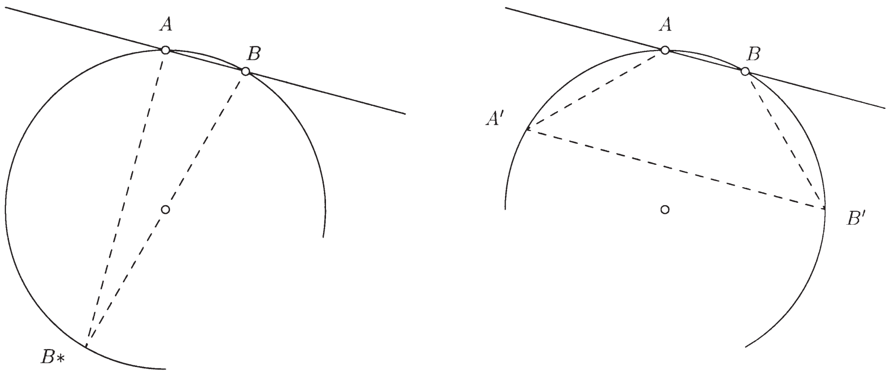
Kapitola X. Grafické provádění konstrukcí (str. 535 – 624)

Theorie grafických konstrukcí (odd. 370–376). – Pomocné konstrukce (odd. 377–412). – O konstrukcích, vztahujících se ke křivkám vyjádřeným čarami, a o čarách strojných (odd. 413–421). – O kružnicích křivosti dvou křivek affinních v bodech sdružených (odd. 422–435).– O rektifikaci a dělení oblouků (odd. 436–442).

J. Sobotka zdůrazňuje rozdíl mezi konstrukcí ideální a grafickou, tj. mezi konstrukcí myšlenkovou s abstraktními pojmy (bod – který „jest co nemá dílu“[19], přímka, atp.) a reálnou konstrukcí provedenou na papíře kružítkem a pravítkem (přímka jako přímý, velmi úzký pruh vytažený tužkou, bod jako velmi malý kruh vzniklý zabodnutím tužky nebo jako kosodélníček velmi malých rozměrů vytvořený průnikem dvou přímek, tj. pruhů).

Pak připomíná geometrografii, kterou vytvořil Émile Lemoine (1840–1912) počínaje 80. léty 19. století; právě v souvislosti s ní cituje G. Loria Sobotkovu knihu, viz [14, díl I, str. IV]. E. Lemoine se pokoušel klasifikovat geometrické konstrukce podle počtu základních operací (položení pravítka bodem – tečkou, zabodnutí hrotu kružítka do bodu – tečky apod.). Většího rozvinutí se geometrografie nedočkala. Tak setrval tento nedostatek deskriptivní geometrie: Nebyl v ní vytvořen protějšek k tomu, co získala geodézie ve vyrovnávacím počtu, vznikajícím už v 18. století.[20]

Je to vskutku podivné: Po tisících opakovali deskriptivní geometři Rytzovu konstrukci os elipsy z jejích sdružených průměrů, ale přesnost této konstrukce jako kdyby je nezajímala. Stačí letmý pohled, abychom viděli, že když se dané sdružené průměry délkami příliš neliší a jejich úhel se příliš neliší od pravého (výsledná elipsa je blízká kružnici), je Rytzova konstrukce velmi nepřesná, protože je v ní třeba dva blízké body spojit přímkou a rozpůlit jejich vzdálenost.



Obrázek 5

[19] Eukleidovy *Základy*, přeložil F. Servít, Praha, 1907, str. 1.

[20] Ruder Bosković (1711–1787) s minimem absolutních hodnot, Adrien Marie Legendre (1752–1833) s minimem čtverců.

Část o pomocných konstrukcích obsahuje mnoho praktických rad pro situace, které se mohou při rýsování objevit. Ilustrativním příkladem je spojení dvou blízkých bodů A, B na kružnici (viz obr. 5). Bod B^* diametrálně protilehlý k bodu B se spojí s bodem A a na spojnici AB^* se z bodu B spustí kolmice; ta je – podle Thaletovy věty – spojnicí AB. Nebo se sestrojí rovnoramenný lichoběžník $ABB'A'$ s rameny AA' a BB' vepsaný do kružnice, a pak požadovaná spojnice AB je rovnoběžná se spojnicí $A'B'$.

Část *O konstrukcích, vztahujících se ke křivkám vyjádřeným čarami, a o čarách strojných* obsahuje syntetické infinitesimální úvahy a – mírně řečeno – je nešťastná. Začíná tímto odstavcem (odd. 413, str. 580):

> *Myslíme-li si křivku vůbec vytvořenu zákonitým idealisovaným pohybem bodu, tu pohyb ten, dokud je nepřetržitý, představujeme si tak, že ke každé poloze A bodu hybného přináleží určitá poloha soumezná A_1, bezprostředně předcházející, a určitá poloha A_2 soumezná, bezprostředně následující, a pravíme v případě takovém, že křivka je v bodě A spojitou na rozdíl od bodů, v nichž se pohyb končí, v kterémžto případě pravíme, že křivka má v bodech takových volné zakončení, čili že jest v bodech těch přetržitá.*

To je vyjadřování, které i před téměř sto lety, kdy Sobotkova kniha vyšla, bylo archaické.

V stejném duchu a rozvláčně píše J. Sobotka (str. 581–582) o kružnici křivosti křivky v jejím bodě B a o vzájemném průběhu v okolí bodu B: Má-li v bodě B křivka se svou oskulační kružnicí 3 soumezné body společné, přechází z jedné strany kružnice v druhou; má-li 4 soumezné body společné, zůstává po téže straně kružnice (rozumí se ovšem v jistém okolí bodu B). Situace je složitější, než ji popisuje J. Sobotka, ale lze ji nahlédnout jednodušeji, než ji zdlouhavě líčí.

Mysleme si graf funkce f, která má v okolí počátku derivace dostatečně vysokého řádu a

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 0,\ f''(0) > 0, \tag{10.1}$$

tj. graf jde počátkem, má v něm osu x za obyčejnou tečnu a v jeho okolí leží v polorovině $y > 0$. V okolí počátku je

$$f(x) = \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{V}(0)}{5!}x^5 + (6); \tag{10.2}$$

symbol (6) znamená členy obsahující x v mocnině alespoň 6.

Kružnice křivosti našeho grafu v počátku je při (10.1)

$$x^2 + \left[y - \frac{1}{f''(0)}\right]^2 = \left[\frac{1}{f''(0)}\right]^2.$$

Pro body na této kružnici v dostatečně malém okolí počátku je pak

$$
\begin{aligned}
y =& \frac{1}{f''(0)} - \sqrt{\left[\frac{1}{f''(0)}\right]^2 - x^2} = \frac{1}{f''(0)} - \frac{1}{f''(0)}\left\{1 - [f''(0)x]^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \\
=& \frac{1}{f''(0)} - \frac{1}{f''(0)}\left\{1 - \tfrac{1}{2}[f''(0)x]^2 - \tfrac{1}{8}[f''(0)x]^4 + (6)\right\} = \\
=& \tfrac{1}{2}f''(0)x^2 + \tfrac{1}{8}f''^3(0)x^4 + (6).
\end{aligned}
$$

Vzhledem k (10.2)

$$
f(x) - y = \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \left\{\frac{f^{IV}(0)}{24} - \frac{f''^3(0)}{8}\right\}x^4 + \frac{f^V(0)}{120}x^5 + (6).
$$

Vidíme, že při $f'''(0) \neq 0$ dochází k této situaci: Přejde-li argument x počátek, pak (v jeho dostatečně malém okolí) rozdíl $f(x) - y$ mění znaménko, tj. křivka přechází z jedné strany oskulační kružnice na druhou. Je-li

$$
f'''(0) = 0,\ f^{IV}(0) - 3f''^3(0) \neq 0,
$$

zůstává křivka po téže straně oskulační kružnice. Jestliže

$$
f'''(0) = 0,\ f^{IV}(0) - 3f''^3(0) = 0,\ f^V(0) \neq 0,
$$

přechází křivka zase z jedné strany oskulační kružnice na druhou stranu. Atd.

S nesrozumitelností hraničí Sobotkův popis *křivky strojné neboli chyboznačné* (odd. 416, str. 583):

> *Sestrojování tečen a kružnic křivosti lze odvoditi ze zákona výtvarného křivky. Je-li však grafické vyjádření konstrukcí těch složité nebo obtížné, . . . , můžeme přechod, jímž jsme dospěli od sečny k tečně a od kružnice, dotýkající se křivky v daném bodě, ke kružnici křivosti bodu toho, graficky vyjádřiti spojitou čarou, na níž jednotlivé tečky vyjadřují jednotlivé polohy sečen, pokud se týče kružnic dotyčných.*
>
> *Nazýváme pak vůbec každou křivku, která vyjadřuje nějaký přechod útvaru proměnlivého k určité poloze mezní, křivkou strojnou neboli chyboznačnou, grafické její vyjádření pak čarou strojnou čili chyboznačnou. Každá poloha útvaru měnlivého jest vyjádřena určitou tečkou na čáře té a naopak každou tečkou příslušná poloha jest stanovena.*

Oč jde, objasním na příkladech.

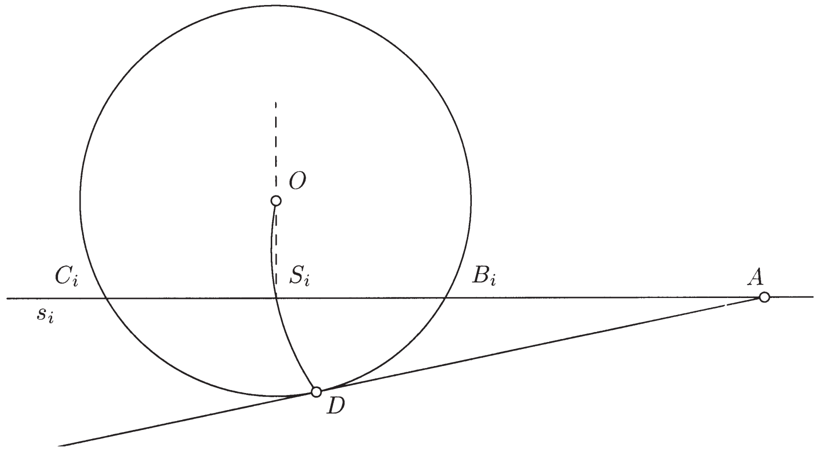
Mysleme si vejčitou křivku a v její rovině bod A vně oblasti jí omezené. Přiložením pravítka můžeme z bodu A – s vyloučením významnější chyby – ke křivce vésti tečnu; v poloze dotykového bodu však může vzniknout nejistota. Odstraní se takto: Veďme bodem A sečny $s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_n$ naší křivky, které s tečnou svírají úhly $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots > \alpha_n$; sečna s_i nechť křivku protíná v bodech $B_i,\ C_i$. Označme S_i střed úsečky B_iC_i. Čára vhodně proložená body $S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_n$ a prodloužená za bod S_n protne původní křivku v dotykovém bodě tečny z bodu A. Tuto čáru nazývá J. Sobotka čárou strojnou.

Nic nového, s takovou čarou se setkáváme už v nejelementárnějších konstrukcích. Máme-li z bodu A vést tečny ke kružnici o středu O (a ovšem poloměru $< |AO|$), víme, že dotykové body jsou v průsečících dané kružnice s kružnicí nad průměrem AO. V tomto případě leží – podle Thaletovy věty – bod S_i na kružnici nad průměrem AO, a tedy oblouk této kružnice v blízkosti dotykového bodu D je Sobotkovou čarou strojnou. (Viz obr. 6.)

Bod S_i bychom též mohli určit požadavkem $(B_i, C_i; A, S_i) = -1$. V tom případě by Sobotkovou čarou strojnou byla polára bodu A ke kružnici.

J. Sobotka vymýšlí a popisuje strojné čáry – někdy dosti komplikovaně – nejen pro konstrukce dotykových bodů, ale též pro sestrojení středů křivosti.

Strojnou křivkou J. Sobotka znovu odvozuje poloměry křivosti elipsy v jejích vrcholech (odd. 421, str. 589–590). Jeho myšlenkový postup zachovám, ale vyložím jej analytickou geometrií (výjimečně pracuje J. Sobotka s výpočtem délek úseček, který se analytické metodě blíží).



Obrázek 6

Na elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

leží bod $Q[x_Q, y_Q]$ o souřadnicích

$$x_Q = a - \delta,\ y_Q = \frac{b}{a}\sqrt{2a\delta - \delta^2};\ 0 < \delta < a. \tag{10.3}$$

Čtverec jeho vzdálenosti od hlavního vrcholu $A[a, 0]$ elipsy je

$$|AQ|^2 = \frac{b^2}{a^2}(2a\delta - \delta^2) + \delta^2. \tag{10.4}$$

Kružnice, která se v hlavním vrcholu elipsy dotýká, má rovnici

$$x^2 + y^2 + Mx - (a^2 + Ma) = 0;$$

má-li procházet bodem Q o souřadnicích (10.3), je její střed v bodě o první souřadnici

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2a^2}(2a - \delta). \tag{10.5}$$

Bod s první souřadnicí (10.5) a druhou $y = |AQ|$ z (10.4) vytvoří při měnícím se δ strojnou čáru pro střed křivosti elipsy v jejím hlavním vrcholu A; ihned je zřejmé, že

$$\lim_{\delta \to 0^+} x = \frac{a^2 - b^2}{a}, \qquad \lim_{\delta \to 0^+} y = 0.$$

V této limitě vskutku dostáváme střed křivosti elipsy v jejím hlavním vrcholu $A[a, 0]$ neboť

$$a - \frac{a^2 - b^2}{a} = \frac{b^2}{a},$$

což je známý poloměr křivosti. Současně je vidět, jak zbytečná je tady „strojná čára“. Stačí vyšetřit limitu souřadnice (10.5).

— — —

Na oddíl *O kružnicích křivosti dvou křivek affinních v bodech sdružených* upozorňuje J. Sobotka už v úvodu s tím, že se vymyká z obsahu kapitoly X. J. Sobotka v něm odvozuje vztah mezi kružnicemi křivosti v korespondujících si bodech dvou křivek, které jsou ve vztahu afinním. Specializuje jej pro křivosti křivky a jejího rovnoběžného průmětu. Pro elipsu jako paralelní projekci kružnice tak dostává řadu vět. Aniž bych Sobotkovy syntetické úvahy podrobně pročítal, troufám si tvrdit, že analytický postup by byl podstatně kratší a průhlednější.

— — —

Oddíl *O rektifikaci a dělení oblouku* začíná definicí délky oblouku pomocí vepsaných lomených čar. Upustím od kritiky Sobotkovy definice; jak se věci mají, je dnes už součástí běžných přednášek.

Kromě známé Kochańskiho rektifikace kružnice uvádí J. Sobotka geometrické rektifikace založené na

$$\frac{355}{113} = 3 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{16}} = 3,1415929\ldots$$

$$\frac{13}{50}\sqrt{146} = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{25}\sqrt{5^2 + 11^2} = 3,1415919\ldots$$

Chyby vůči

$$\pi = 3,1415926\ldots$$

jsou nepatrné.

Poznámky (str. 625 – 643)

Poznámky rozdělené podle kapitol jsou i z dnešního hlediska velmi cennou partií Sobotkovy knihy. Obsahují ohromné množství literárních a historických údajů.

Z českých knih o deskriptivní geometrii má Sobotkova kniha daleko nejrozsáhlejší poznámkový aparát. V učebnici F. Kadeřávek – J. Klíma – J. Kounovský [8] s téměř 1 000 stranami je literatuře – a to velmi nesourodé – věnována jediná strana 956 bez jakékoliv poznámky, zda jde o knihu začátečnickou či pokročilejší, zda tak či onak zaměřenou. Sobotkova kniha je uvedena jen názvem a rokem vydání. Kdo učebnici [8] zná, ví, jak skromné jsou literární a historické poznámky v textu. Učebnice J. Kounovský – F. Vyčichlo [12] končí dvěma a půl stranami přehledu o výlučně české literatuře z deskriptivní geometrie (s výjimkou Mongeových přednášek z roku 1795).

— — —

V poznámkách ke kap. I (str. 625–628) uvádí J. Sobotka literaturu o deskriptivní geometrii. Pro historii deskriptivní geometrie cituje předně z prvního dílu Wienerova [25] z roku 1884 část I: Geschichte der darstellenden Geometrie, str. 5–61, která dodnes poskytuje výborný přehled. Z doby po roce 1906, kdy vyšla Sobotkova kniha, se historií deskriptivní geometrie zabývají tato díla:

- M. Cantor: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, sv. IV, Leipzig, 1908 – odd. XXV, 579–637;
- E. Papperitz: *Darstellende Geometrie*. Enc. der math. Wissenschaften III AB6, Leipzig, 517–595 (článek dokončen 1909);
- G. Loria: *Storia della Geometria Descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri*. Milano, 1921, XXIV + 584.

Velmi obsáhlou recenzi o Loriově knize napsal Q. Vetter [Časopis pro pěst. math. a fys. 51(1922), 40–45]; na několika místech se zmiňuje i o J. Sobotkovi.

- K. Rohn – E. Papperitz: *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, 4. vyd. Leipzig, 1932, díl I, 494–502, díl II, 189–194;
- R. Taton: *L'histoire de la géométrie descriptive*, Paris, 1954.

Poslední kniha mi zůstala nepřístupná. Stručný přehled podávají

- K. Andersen – I. Grattan-Guinness: *Descriptive Geometry*, 887–896, in I. Grattan-Guinness, Ed.: *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, London – New York, 1994.

— — —

V poznámkách ke kap. VII připojuje J. Sobotka k odd. 172 (str. 239–242) s pěti konstrukcemi elipsy z jejích sdružených průměrů doplnění, které jsem citoval už na začátku kap. VII.

Neznám českou učebnici, v níž by o Rytzově konstrukci bylo napsáno víc. Dokonce se zdá, že v celé české literatuře o deskriptivní geometrii byl J. Sobotka vůbec první, kdo v souvislosti se zmíněnou konstrukcí upozornil na A.-F. Fréziera. Je to doklad, jak důkladně byl J. Sobotka seznámen s literaturou o deskriptivní geometrii.

Podrobně o historii konstrukce jedná Z. Nádeník [19].

— — —

V poznámkách ke kap. VIII (str. 633–636) nastiňuje J. Sobotka vývoj promítání na dvě kolmé průmětny od jeho počátku ještě ve starověku. Z Mongeových předchůdců v novém věku ze zmiňuje o A. Dürerovi a A.-F. Frézierovi – o něm, pokud vím, v české literatuře nejvíc.[21] Na str. 634 píše:

> *Z předchůdců jeho zvláště dlužno se zmíniti o Frézierovi, který před Mongem získal sobě největších zásluh o rozvoj řečené methody svým dílem, dříve již jmenovaným: La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, ou traité de la stéréotomie, Strassbourg 1738 et 1739; nouvelle édition Paris t. I, 1754, t. II, 1768, t. III, 1769; Frézier první pojednává samostatně nejprv o konstruktivní geometrii v prostoru, bez ohledu na upotřebení její k účelům praktickým, používaje ovšem půdorysu a nárysu, a to tak, že veškeré konstrukce odůvodňuje, což se před ním nedělo; těmto theoretickým úvahám jest 1. svazek díla věnován úplně.*

— — —

Nejrozsáhlejší jsou poznámky ke kap. X (str. 637–643). Ke geometrografii patří doplnění k odd. 371, v němž J. Sobotka jmenuje čtyři Lemoineovy spisy – u posledního neuvádí název. Protože citace Lemoineových prací bývají neúplné nebo nepřesné, uvádím dvě knižní, které jsem našel v Praze a které mají shrnující charakter:

E. Lemoine: *La Géométrographie ou l'art des constructions géométriques.* Assotiation Française pour l'avancement des sciences, Congrès du Pau, Paris, 1892, stran 66.

E. Lemoine: *Géométrographie ou art des constructions géométriques*, Paris, 1902, (sbírka Scientia, Phys.-Math. č. 18), stran 87.

Druhý spis obsáhle recenzoval R. Güntsche, Archiv der Math. und Physik, III. Reihe, 4(1903), 336–342. Do třetice časopisecká práce téměř stejného názvu:

E. Lemoine: *Principes de Géométrographie ou art des constructions géométriques*. Archiv der Math. und Physik, III. Reihe, 1(1901), 99–115.

Kriticky se k Lemoineově geometrografii postavil R. Mehmke: *Bemerkungen zur Geometrographie von M. E. Lemoine*, Jber. deutsch. Math.-Verein. 12(1903), 113–116; oponoval mu R. Güntsche: *Zu Herrn R. Mehmkes Bemerkungen zur Geometrographie von M. E. Lemoine*, ib. 12(1903), 289–295; téhož autora *Beiträge zur Geometrographie I–III*, Archiv der Math. und Physik, III. Reihe, 3(1902), 191–194; 6(1904), 133–146; 9(1905), 253–266. Obsáhlé pojednání je K. Nitz: *Beiträge zu einer Fehlertheorie der geometrischen Konstruktionen*, Z. Math. und Phys. 53(1906), 1–37; začíná podrobnějšími historickými poznámkami. Viz též A. Adler: *Theorie der geometrischen Konstruktionen*, Leipzig, 1906, Abschn. X a T. Vahlen: *Konstruktionen und Approximationen*, Leipzig, 1911, Teil 4, Kap. IV. V novější době na geometrografii v souvislosti s algoritmy ukázal P. Schreiber: *Grundlagen der konstruktiven Geometrie*, Berlin, 1984, Kap. 4.

---

[21] J. Pithardt – L. Seifert [20, str. 143], díl IV., 4. vyd. 1933, píší: *V kamenořezu (stereotomii) byly řešeny některé úlohy o pronicích ploch, o rozvinování a plochách zborcených. V tomto oboru sluší jmenovati důstojníka a inženýra Fréziera (Strassburg 1682–1773).*
E. Kraemer [13, str. 450] poznamenává: *Z pracovníků, kteří se zabývali stereotomií, vynikl francouzský ženijní důstojník Amédée-François Frézier (1682–1773), jehož spis o stereotomii vyšel v Paříži roku 1760.*
V teorii zborcených ploch se udržel název „Frézierův cylindroid", viz F. Kadeřávek – J. Klíma – J. Kounovský [8, str. 737–740] a J. Kounovský [11, str. 69–73].
Viz rovněž Z. Nádeník [17, str. 154–156].

LITERATURA

[1] Brauner H., *Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie,* Wien, New York, 1986.

[2] Bydžovský B., *Jan Sobotka*, Praha, 1932.

[3] Folta J., *Česká geometrická škola. Historická analýza*, Praha, 1982.

[4] Gugler B., *Lehrbuch der descriptiven Geometrie,* Nürnberg, 1841, 4. vyd. 1880.

[5] Havlíček K., Urban A., Vančura Z., Kepr B., *K hodnocení díla J. Sobotky,* Zprávy Komise pro dějiny přírodních, lékařských a technických věd ČSAV **13**(1963), str. 29–34.

[6] Jarolímek V., Procházka B., *Deskriptivní geometrie pro vysoké školy technické,* Praha, 1909, 3. vyd. 1922.

[7] Kadeřávek F., *Jan Sobotka, profesor matematiky na universitě Karlově, šedesátníkem.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **52**(1923), str. 1–9.

[8] Kadeřávek F., Klíma J., Kounovský J., *Deskriptivní geometrie,* díl I. a II., Praha, 1929 a 1932; 2. vyd. 1954.

[9] Klapka J., *Sobotkův nekrolog,* Naše věda **8**(1932), str. 34–36.

[10] Klapka J., *Deskriptivní geometrie,* Praha, 1949, 2. vyd. 1951.

[11] Kounovský J., *Zborcené plochy*, Praha, 1947.

[12] Kounovský J., Vyčichlo F., *Deskriptivní geometrie pro samouky*, Praha, 1948; 5. vyd. 1959.

[13] Kraemer E., *Zobrazovací metody (promítání rovnoběžné)*, díl I. a II., Praha, 1991.

[14] Loria G., *Vorlesungen über darstellende Geometrie*, Leipzig, Berlin, díl I., 1907, díl II., 1913.

[15] Nádeník Z., *Minulost a budoucnost deskriptivní geometrie*, Sborník 13. semináře skupiny JČMF pro deskriptivní geometrii a počítačovou grafiku, Pernink, 1993, str. 5–14.

[16] Nádeník Z., *Současnost a budoucnost deskriptivní geometrie*, Sborník 14. semináře skupiny JČMF pro deskriptivní geometrii a počítačovou grafiku, Bílá, 1994, str. 6–12.

[17] Nádeník Z., *200 let Mongeovy „Géométrie descriptive“*, in Bečvář J., Fuchs E. (ed.), Matematika v proměnách věků I, edice Dějiny matematiky, sv. 11, Prometheus, Praha, 1998, str. 147–162.

[18] Nádeník Z., *Bohumil Bydžovský 1880–1969*, Ovlivnili vyučování matematiky, sv. 1, Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Praha, 1998, 16 stran.

[19] Nádeník Z., *O konstrukci os elipsy z jejích sdružených průměrů*, následující článek této monografie.

[20] Pithardt J., Seifert L., *Základy deskriptivní geometrie*, díl I., II., III. a IV., Praha, 1910, řada dalších vydání.

[21] Seifert L., *Cyklografie*, Praha, 1949.

[22] Schilling F., *Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie*, Leipzig, Berlin, 1904.

[23] Urban A., *O životě a díle profesora Jana Sobotky*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **7**(1962), str. 355–359.

[24] Urban A., Vančura Z., *Sté výročí narození Jana Sobotky*, Časopis pro pěstování matematiky **87**(1962), str. 382–386.

[25] Wiener Ch., *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, díl I. a II., Leipzig, 1884.

Dokončeno v červnu roku 2000.