

Počátky počtu pravděpodobnosti

III. část: Úloha o rozdělení sázky v Pascalově „Pojednání o aritmetickém trojúhelníku“

In: Karel Mačák (author): Počátky počtu pravděpodobnosti. (Czech). Praha: Prometheus, 1997. pp. 66–81.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/401660>

Terms of use:

© Mačák, Karel

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

III.část

Úloha o rozdělení sázky v Pascalově

*Pojednání o aritmetickém trojúhelníku*¹

1 Úvod ke III.části

Mluví-li se o Pascalově *Pojednání o aritmetickém trojúhelníku* (*Traité du triangle arithmétique*), je vhodné na začátku upřesnit, o čem vlastně bude řeč, protože uvedený název může být chápán (přinejmenším) ve dvojm smyslu.

Aritmetický trojúhelník (v dnešní terminologii: Pascalův trojúhelník) je problematika s dlouhou historií (viz např. [2], str. 42 a násl.) a Pascal určitě nebyl jeho objevitelem, není ale jasné, které práce jiných matematiků o aritmetickém trojúhelníku znal. Je jisté, že se touto problematikou zabýval v r. 1654, tj. v době, kdy si dopisoval s Fermatem o úloze o rozdělení sázky. Fermat v dopisu Pascalovi z 29. srpna 1654 totiž píše ([5], str. 417)²:

Naše výměna názorů stále pokračuje a stejně jako vy se obdivuji tomu, že se naše myšlenky shodují tak přesně, jako by šly stejnou cestou a došly stejného cíle. Vaše poslední pojednání (v originálu plurál!) o aritmetickém trojúhelníku a jeho použití jsou toho autentickým důkazem; a jestliže mě můj výpočet neklame, váš dvanáctý důsledek šel poštou z Paříže do Toulouse, zatímco mé tvrzení o figurálních číslech, které je ve skutečnosti totéž, šlo z Toulouse do Paříže

Je tedy zřejmé, že nějaká varianta Pascalova *Pojednání* existovala už v létě 1654, Pascal ji ale neuveřejnil. Po jeho smrti (1662) vyšlo r. 1665 v Paříži vydání jeho spisů, obsahující *Pojednání o aritmetickém trojúhelníku s několika dalšími malými pojednáními o téže látce*³, které vydavatel uvedl následujícím *Upozorněním*:

Tato pojednání dosud nebyla vydána, třebaže byla napsána už před delší dobou. Byla nalezena vytištěná mezi listinami pana Pascala, což svědčí o tom,

¹Protože existuje několik edicí Pascalových spisů, které se od sebe poněkud liší, považujeme za nutné hned na začátku znovu připomenout, že v celé naší práci vycházíme z vydání [5].

²*Nos coups fourrez continuent toujours et je suis aussi bien que vous dans l'admiration de quoy nos pensées s'ajustent si exactement qu'il semble qu'elles ayent pris une mesme route et fait un mesme chemin. Vos derniers Traitez du Triangle arithmetique et de son application en sont une preuve authentique: et si mon calcul ne me trompe, votre douz consequence courroit la poste de Paris à Toloze, pendant que ma proposition des nombres figurez, qui en effet est la mesme, alloit de Toloze à Paris.*

³*Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matiere par Monsieur Pascal.* A Paris, chez Guillaume Desprez, rue Saint-Jacques, à Saint-Prosper, MDCLXV.

že je zamýšlel publikovat. Když ale krátce poté opustil zcela tento druh studií, nedbal na vydání těch děl, která posoudil jako vhodná ke zveřejnění po své smrti, aby si ponechal možnost, že se k nim bude moci vrátit. To je jediný důvod, proč jsou v této publikaci; neboť třebaže tato pojednání byla obdivována všemi, kteří je četli, nebyla nicméně považována za způsobila ke zvýšení vážnosti, kterou pan Pascal získal mezi všemi učenými muži svými znamenitějšími díly, která jsme od něj viděli. A prosíme čtenáře, aby se na ně také díval jako na věc, na kterou (pan Pascal) sám nedbal a které si hleděl jen lehce, spíše k zotavení ducha než k jeho zaměstnání, záležitost nehodnou vážné a silné pozornosti, kterou byl zvyklý věnovat důležitějším věcem, o kterých často říkal, že pouze ony si zaslouží zaměstnávat ducha lidí rozumných a křesťanských ⁴.

Jedná se tedy o soubor pojednání, která nebyla napsána jako souvislý celek; některá jsou napsána francouzsky, některá latinsky, obsahově se částečně překrývají a na některých místech není ani zcela jasné, zda se jedná o dvě různá pojednání nebo o dvě části téhož pojednání. Protože ani přístup francouzských editorů Pascalových spisů k této otázce není stejný, uvedeme zde přehled názvů a rozsahu všech pojednání celého souboru podle vydání [5] a tento přehled doplníme malými komentáři:

<i>I. Traité du triangle arithmétique</i>	20 str.
<i>II. Divers usages du triangle arithmétique dont le generateur est l'unité.</i>	
<i>II.1 Usage du triangle arithmétique pour les ordres numériques</i>	3 str.
<i>II.2 Usage du triangle arithmétique pour les combinaisons</i>	8 str.
<i>II.3 Usage du triangle arithmétique pour déterminer les partys qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties</i>	20 str.
<i>II.4 Usages du triangle arithmétique pour trouver les puissances des binomes et des apotomes</i>	4 str.

KOMENTÁŘ: Celá tato část má ve vydání [5] stejné stránkové záhlaví *Traité du triangle arithmétique*, vydavatel ji tedy považuje za jeden celek; část II má ale samostatnou titulní stránku, takže je asi považována za relativně samostatnou část onoho celku.

<i>III. Traité des ordres numériques</i>	8 str.
--	--------

⁴*L'Avertissement: Ces traités n'ont point encore paru, quoy qu'il y ait desjà longtemps qu'ils soient composez. On les a trouvez tous imprimez parmi les papiers de Monsieur Pascal, ce qui fait voir qu'il avoit eu dessein de les publier. Mais ayant, peu de temps apres, entierement quitté ces sortes d'estudes, il negligea de faire paroistre ces ouvrages, que l'on a jugé à propos de donner au public apres sa mort, pour ne le pas priver de l'avantage qu'il en pourra retirer. C'est l'unique but que l'on a eu dans cette publication; car quoy que ces traités aient esté admirez par toutes les personnes qui les ont lues, on ne les juge pas neantmoins capables de pouvoir beaucoup adjouter à la reputation que Monsieur Pascal s'est acquise parmi toutes les personnes savantes par les ouvrages plus considerables qu'on a veus de lui. Et l'on supplie le lecteur de les regarder aussi comme une chose qu'il a negligée lui-mesme, et à laquelle il ne s'est appliqué que legerement, et plutost pour delasser son esprit que pour l'employer, la jugeant indigne de cette application forte et serieuse qu'il avoit accoutumé d'apporter dans les choses plus importantes, et qui meritent seules, comme il le disoit souvent, d'occuper l'esprit des personnes raisonnables et chretiennes.*

IV. <i>De numericis ordinibus tractatus</i>	8 str.
V. <i>De numerorum continuorum productis seu de numeris qui productuntur ex multiplicatione numerorum serie naturali procedentium</i>	8 str.
VI. <i>Numericarum potestatum generalis resolutio</i>	6 str.
VII. <i>Combinaciones</i>	23 str.

KOMENTÁŘ: Následující dvě pojednání byla zahrnuta do vydání r. 1665, ve vydání [5] jsou ale uvedena na jiném místě, protože byla napsána dříve než pojednání I.

VIII. <i>Potestatum numericarum summa</i>	11 str.
IX. <i>De numeris multiplicibus ex sola characterum numericorum additione agnoscendis</i>	13 str.

KOMENTÁŘ: Následující tři pojednání byla nalezena dodatečně v rukopise, protože se však týkají stejné problematiky, jsou ve vydání [5] připojena jako dodatky.

X. <i>Triangulus arithmeticus</i>	15 str.
XI. <i>Numeri figurati seu ordines numerici</i>	7 str.
XII. <i>De numericorum ordinum compositione</i>	3 str.

Nyní se můžeme vrátit k otázce, kterou jsme naznačili na začátku: co je vlastně třeba rozumět pod názvem *Pojednání o aritmetickém trojúhelníku*. Mohlo by to být pouze úvodní pojednání (v našem přehledu označené jako I) celého souboru, může to ale být i větší celek (v našem přehledu I + II) a mohlo by to být i označení pro celý současně publikovaný soubor pojednání.

V této naší práci se budeme věnovat pojednání, které je v uvedeném přehledu označeno II.3; pouze v tomto pojednání se Pascal věnuje úloze o rozdělení sázky, tj. pravděpodobnostní problematice. Protože Pascal zde řeší úlohu o rozdělení sázky užitím aritmetického trojúhelníka, uvedeme nejprve Pascalovu definici tohoto pojmu, kterou začíná pojednání I, dál se ale vlastním aritmetickým trojúhelníkem nebudeme zabývat; z hlediska historické zajímavosti si povšimneme pouze důkazu jednoho tvrzení, na jehož základě je Pascal považován za objevitele metody úplné indukce. Pro lepší orientaci je v následujících částech překlad Pascalova textu tištěn kurzivou, náš komentář obyčejným typem písma.

2 Aritmetický trojúhelník

2.1 Definice

ARITMETICKÝM TROJÚHELNÍKEM nazývám obrazec utvořený takto:

Z nějakého bodu G vedu dvě navzájem kolmé přímky GV , $G\zeta$ a na každé z nich vezmu libovolný počet stejných a navazujících částí začínajících bodem G , které označím 1, 2, 3, 4 atd.; tato čísla jsou UKAZATELI rozdělení oněch

přímek.

Dále spojím body prvního dělení, které jsou na každé z obou přímek, jinou přímkou, která utvoří trojúhelník, jehož je základnou.

Spojím takto dva body druhého dělení jinou přímkou, která utvoří druhý trojúhelník, jehož je základnou.

Z	1	2	3	4	5	6	7	L	8	9	10
1	G 1	σ 1	π 1	λ 1	μ 1	δ 1	ζ 1				
2	φ 1	ψ 2	θ 3	R 4	S 5	N 6					
3	A 1	B 3	C 6	ω 10	ξ 15						
4	D 1	E 4	F 10	ρ 20	Y 35						
5	H 1	M 5	K 15								
6	P 1	Q 6									
7	V 1										
8	T 1										
9											
10											

Takovým spojením všech dělicích bodů, které mají stejné ukazatele, z nich utvořím TROJÚHELNÍKY a ZÁKLADNY.

Každým dělicím bodem vedu přímky rovnoběžné s bočními, tvořící svými průsečíky malé čtverce, které nazvu BUŇKAMI.

Buňky, které jsou mezi dvěma rovnoběžkami jdoucími zleva doprava, se nazývají BUŇKAMI STEJNÉHO ŘÁDKU ⁵, jako například buňky G, σ , π atd. nebo φ , ψ , θ atd.

⁵V originálu: „d'un mesme rang parallele“; viz též následující poznámku.

Buňky, které jsou mezi dvěma přímkami jdoucími shora dolů, se nazývají BUŇKAMI STEJNÉHO SLOUPCE ⁶, jako například buňky G, φ, A, D atd. a σ, ψ, B atd.

Buňky, kterými úhlopříčně prochází stejná základna, se nazývají BUŇKAMI STEJNÉ ZÁKLADNY, jako například D, B, θ, λ a A, ψ, π .

Buňky stejné základny stejně vzdálené od okrajů se nazývají OPAČNÉ, jako například E, R a B, θ , protože ukazatel řádku jedné z nich je stejný jako ukazatel sloupce druhé, jak je vidět na uvedeném příkladu, kde E je ve druhém sloupci a čtvrtém řádku, a R jako buňka opačná k E je naopak ve druhém řádku a čtvrtém sloupci; snadno lze ukázat, že buňky s opačně uspořádanými ukazateli mají stejnou základnu a jsou stejně vzdálené od okrajů.

Snadno lze také ukázat, že ukazatel sloupce kterékoli buňky sečtený s ukazatelem jejího řádku převyšuje o jedničku ukazatele její základny ⁷. Například buňka F je ve třetím sloupci, čtvrtém řádku a leží na šesté základně, a součet obou jejích ukazatelů $3+4$ převyšuje o jedničku ukazatele základny 6 , což plyne z toho, že obě strany trojúhelníka jsou rozděleny na stejný počet dílů; snadněji se to ale pochopí než dokáže.

Stejně povahy je i poznámka, že každá základna má o jednu buňku více než předešlá a má jich právě tolik, čemu se rovná její ukazatel; takže druhá $\varphi\sigma$ má dvě buňky, třetí $A\psi\pi$ má tři buňky atd.

Čísla, umístěná do každé buňky, se najdou touto metodou:

Číslo v první buňce, která je v pravém úhlu ⁸, je libovolné, ale jakmile je v ní umístěno, jsou určena všechna ostatní; z tohoto důvodu je nazýváno GENERÁTOREM trojúhelníka. Všechna další čísla jsou určena tímto jediným pravidlem:

Číslo v každé buňce je rovno součtu čísla v buňce v předešlém sloupci s číslem v buňce v předešlém řádku. Tedy buňka F , tj. číslo v buňce F , je rovno buňce C plus buňka E , a stejně v dalších buňkách.

KOMENTÁŘ

Porovnáme-li Pascalovu definici aritmetického trojúhelníka s dnešním pojetím Pascalova trojúhelníka, zjišťujeme (kromě rozdílu v symbolice a v „natočení“ trojúhelníka) některé další rozdíly.

Zásadní rozdíl spočívá v tom, že dnes se Pascalův trojúhelník definuje jako jisté schéma utvořené z kombinačních čísel (binomických koeficientů), zatímco Pascal definuje aritmetický trojúhelník zcela obecně pomocí pravidla jeho postupného vytváření z jednoho zvoleného čísla (generátoru); souvislost takto vytvořeného schématu s binomickými koeficienty a kombinačními čísly je odhalena teprve v dalším zkoumání vlastností tohoto schématu.

Z možnosti volby generátoru aritmetického trojúhelníka plyne další rozdíl. Dnes je Pascalův trojúhelník určen jednoznačně, ale u Pascala existuje neko-

⁶ V originálu: „d'un mesme rang perpendiculaire“; k přeložení Pascalovy terminologie bylo použito termínů, které jsou dnes obvyklé v teorii matic.

⁷ Pojem UKAZATEL ZÁKLADNY Pascal nedefinuje, ale jedná se zřejmě o ukazatele krajních bodů základny.

⁸ Zřejmě je míněna buňka u vrcholu Z , tj. buňka G .

nečně mnoho aritmetických trojúhelníků podle toho, z jakého čísla (generátoru) se při jeho vytváření vychází. Všechny tyto trojúhelníky mají sice stejné vlastnosti a Pascal v dalších pojednáních na toto téma pracuje snad bez výjimky pouze s „dnešním“ aritmetickým trojúhelníkem, tj. s trojúhelníkem, jehož generátorem je jednička, přesto ale považujeme za vhodné tento fakt připomenout.

Z dnešního hlediska by bylo zcela přirozené využít „pootočené“ polohy aritmetického trojúhelníka k „maticovému“ popisu jeho prvků pomocí dvojice indexů (u Pascala *ukazatelů*). Pascal místo toho užívá označení každého prvku jedním písmenem (latinským nebo řeckým), což další práci s aritmetickým trojúhelníkem rozhodně neusnadňuje. To se projevuje v celém dalším obsahu pojednání, kde je postupně odvozeno osmnáct tvrzení⁹ týkajících se vztahů mezi čísly v aritmetickém trojúhelníku; z dnešního hlediska se vlastně nejedná o obecné důkazy, nýbrž o pouhé ilustrace daných tvrzení na příkladech. Tento názor budeme dokumentovat v následující části citací jednoho Pascalova důkazu, který je považován za první důkaz provedený metodou úplné indukce.

2.2 Metoda úplné indukce

DVANÁCTÝ DŮSLEDEK

V každém aritmetickém trojúhelníku pro dvě sousední buňky téže základny platí, že vyšší ku nižší je ve stejném poměru jako počet buněk od vyšší až k vrcholu základny ku počtu buněk od nižší až k patě základny, včetně těchto buněk.

Uvažujme například dvě sousední buňky na téže základně E, C . Pravím, že

E	je ku	C	jako	2	ku	3
$\underbrace{\hspace{1em}}$		$\underbrace{\hspace{1em}}$		$\underbrace{\hspace{2em}}$		$\underbrace{\hspace{2em}}$
nižší		vyšší		protože		protože jsou tři
				jsou dvě buňky od		buňky od C k vr-
				E k patě, totiž $E,$		cholu, totiž $C, R,$
				$H;$		$\mu.$

Protože toto tvrzení by mělo nekonečně mnoho případů, podal jsem kratší důkaz vycházející ze dvou lemm.

První, které je zcela zřejmé, že tato úměra se vyskytuje na druhé základně, protože je vidět, že φ je ku σ jako 1 ku 1.

Druhé, že nachází-li se tato úměra na některé základně, nachází se nutně také na následující základně.

Z toho je vidět, že tato úměra je nutně na všech základnách: protože je na druhé základně podle první lemma, je podle druhé lemma na třetí základně, tedy i na čtvrté, a tak do nekonečna.

⁹V originálu se mluví o důsledcích (*Consequence*) plynoucích z definice aritmetického trojúhelníka

Stačí tedy dokázat pouze druhou lemmu. Nachází-li se tato úměra na některé základně, například na čtvrté $D\lambda$, tj. jestliže D je ku B jako 1 ku 3, a B ku θ jako 2 ku 2, a θ ku λ jako 3 ku 1, atd., pravím, že stejná úměra se nalézá na následující základně $H\mu$ a že například E je ku C jako 2 ku 3.

Neboť D je ku B jako 1 ku 3 podle předpokladu.

Pak $\underbrace{D+B}$ je ku B jako $\underbrace{1+3}$ ku 3
 E je ku B jako 4 ku 3.

Stejně B je ku θ jako 2 ku 2 podle předpokladu.

Pak $\underbrace{B+\theta}$ je ku B jako $\underbrace{2+2}$ ku 2
 C je ku B jako 4 ku 2.

Ale B je ku E jako 3 ku 4. Tedy C je ku E jako 3 ku 2, což mělo být dokázáno.

Tím je dokázáno totéž pro vše zbývající, neboť tento důkaz není založen na ničem jiném než na tom, že se tato úměra nachází na předešlé základně a že každá buňka je rovna součtu té, která ji předchází, s onou, která je nad ní, což je pravda vždy.

KOMENTÁŘ

Právě ocitovaný důkaz lze považovat za typickou ukázkou způsobu, kterým Pascal v *Pojednání o aritmetickém trojúhelníku* pracuje. Není pochyb o tom, že Pascalův důkaz by bylo možné provést zcela obecně, ale v Pascalově pojednání tyto obecné důkazy chybí.

Při dnešní definici Pascalova trojúhelníku pomocí kombinačních čísel by uvedený dvanáctý důsledek měl tvar

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{n+1-k}{k},$$

což je samozřejmě pravda.

3 Úloha o rozdělení sázky

V této části naší práce ukážeme, jak Pascal řešil úlohu o rozdělení sázky ve svém pojednání *Použití aritmetického trojúhelníka pro stanovení rozdělení sázky mezi dvěma hráči hrajícími na více her*. Protože jsme formulaci úlohy uvedli už v kap.I.1.2 a základní myšlenku Pascalova řešení v kap.I.2.2.2, považujeme za možné přikročit přímo k překladu Pascalova textu, který pouze na dvou místech doplníme komentářem.

Dle našeho názoru by bylo možné Pascalovo pojednání rozdělit do několika částí:

1. část: Formulace problému a základního principu řešení.
2. část: Použití uvedeného principu při řešení konkrétních úloh.

3. část: Přechod k obecnému řešení: důkaz pomocného tvrzení.

4. část: Obecný návod k řešení úlohy o rozdělení sázky.

Toto naše členění uvádíme po straně textu. Připomínáme ještě, že všechny Pascalovy úvahy se týkají hry dvou „stejně dobrých“ hráčů, tj. (v dnešní terminologii) pravděpodobnost výhry v každé jednotlivé hře je pro oba hráče stejná.

POUŽITÍ ARITMETICKÉHO TROJÚHELNÍKA
PRO STANOVENÍ ROZDĚLENÍ SÁZKY MEZI DVĚMA HRÁČI
HRAJÍCÍMI NA VÍCE HER

Pro pochopení pravidel rozdělení je třeba v první řadě uvážít, že peníze, které hráči vsadili do hry, jim už nepatří, protože se vzdali jejich vlastnictví; na oplátku ale získali právo očekávat to, co jim může přinést náhoda¹⁰ podle podmínek, na kterých se předem dohodli. 1. část

Protože je to však dobrovolně přijatý zákon, mohou ho dohodou zrušit; tedy - ať se hra nachází v jakémkoli stavu - mohou ji zanechat a jako opak k tomu, co učinili na začátku, mohou se vzdát očekávání na náhodu a vzít si každý něco do vlastnictví. V takovém případě vyrovnání toho, co jim má náležet, má být takovým způsobem úměrné tomu, co právem očekávali od náhody, že každý z nich shledá zcela stejným vzít to, co mu je určeno, nebo pokračovat v dobrodružství hry; a toto spravedlivé rozdělení se nazývá rozdělením sázky.¹¹

První zásada, kterou je třeba vědět o tom, jakým způsobem má být dělena sázka, je následující.

Je-li jeden z hráčů v takové situaci, že - ať se stane cokoli - jistá částka mu má připadnout v případě prohry i výhry bez toho, že by ho o ní mohla připravit náhoda, pak nemá provádět žádné dělení sázky, ale vzít vše jako jisté, protože dělení sázky má být úměrné náhodě, a vzhledem k tomu, že zde není žádné nebezpečí prohry, má vzít vše bez dělení.

Druhá zásada je následující: Jsou-li dva hráči v takové situaci, že vyhraje-li jeden, připadne mu jistá částka, a prohraje-li, připadne druhému, a je-li hra zcela náhodná, takže je stejná náhoda pro jednoho jako pro druhého a není tedy žádný důvod pro výhru spíše jednoho než druhého, pak - chtějí-li se rozejít bez hraní a vzít si, co každému spravedlivě náleží - dělení sázky je takové, že částka podléhající náhodě se rozdělí napůl a každý si vezme svou polovinu.

¹⁰V originálu „le hazard“; toto slovo je v dalším textu velice frekventované a vždy ho budeme překládat slovem *náhoda*, i když na některých místech bychom dnes dali přednost slovu jinému.

¹¹Protože tento názor je klíčovým pro řešení této úlohy v celé další historii počtu pravděpodobnosti, uvedeme zde originální znění poslední věty: *Et en ce cas, le reglement de ce qui doit leur appartenir doit estre tellement proportionné à ce qu'ils avoient droit d'esperer de la fortune, que chacun d'eux trouve entierement egal de prendre ce qu'on luy assigne ou de continuer l'aventure du jeu: et cette juste distribution s'appelle le Party.* Slovo *le party* se v této souvislosti stalo matematickým termínem, který nelze do češtiny přeložit jedním slovem; v češtině se pro tuto úlohu vžil název *úloha o rozdělení sázky*.

DŮSLEDEK PRVNÍ

Hrají-li dva hráči zcela náhodnou hru za podmínky, že vyhraje-li první, připadne mu jistá částka, a prohraje-li, připadne mu menší; chtějí-li se rozejít bez hraní a vzít si každý, co mu náleží, pak dělení sázky je takové, že první si vezme to, co mu připadne v případě prohry a navíc polovinu toho, oč získaná částka v případě výhry přesahuje to, co mu připadne v případě prohry.

Hrají-li například dva hráči za podmínky, že vyhraje-li první, získá 8 pistolí a prohraje-li, získá 2 pistole, pak tvrdím, že rozdělení sázky je takové, že první dostane ony 2 pistole plus polovinu toho, oč 8 přesahuje 2, tj. plus 3, neboť 8 přesahuje 2 o 6, tedy polovina jsou 3.

Neboť - podle předpokladu - vyhraje-li první, získá 8, tj. $6 + 2$, a prohraje-li, získá 2; tedy 2 mu připadne v případě prohry i výhry a podle první zásady nemá provádět žádné dělení, ale vzít vše. Pro dalších 6 ale záleží na náhodě; bude-li mu příznivá, vyhraje je, jinak případnou druhému, a podle předpokladu není žádný důvod pro to, aby připadly spíše jednomu než druhému: dělení sázky je tedy takové, že se rozdělí napůl a každý si vezme svoji polovinu, což je to, co bylo navrženo.

Řekneme-li totéž jinými slovy, přísluší mu případ prohry a polovina rozdílu mezi případem prohry a výhry. Tedy připadne-li mu v případě prohry A a v případě výhry $A + B$, při dělení sázky bere $A + \frac{B}{2}$.

DŮSLEDEK DRUHÝ

Jsou-li dva hráči v takové situaci, o jaké jsme právě mluvili, pak tvrdím, že dělení sázky lze provést následujícím způsobem, který vede k témuž výsledku: sečtou se částky odpovídající výhře a prohře a první si vezme polovinu tohoto součtu; tj. například když sečteme 2 a 8, bude to 10, tedy polovina 5 bude patřit prvnímu.

Polovina součtu dvou čísel je totiž totéž jako součet menšího s polovinou jejich rozdílu. Dokáže se to takto:

Nechť A je to, co se získá v případě prohry, a $A + B$ to, co se získá v případě výhry. Tvrdím, že rozdělení sázky se provede sečtením těchto dvou čísel, což je $A + A + B$ a odevzdáním poloviny prvnímu hráči, což je $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$. Ale tento součet je roven $A + \frac{1}{2}B$, o čemž bylo dokázáno, že je to spravedlivé rozdělení sázky.

Když jsme stanovili tato základní pravidla, snadno přejdeme ke stanovení rozdělení sázky mezi dvěma hráči, hrajícími na libovolný počet her a nalézajícími se v libovolném stavu, například hrají-li na dvě hry a první už jednu hru vyhrál, nebo hrají-li na tři hry a první už vyhrál jednu hru nebo dvě hry nebo první už vyhrál dvě a druhý jednu hru; a obecně, hrají-li na libovolný počet her a první i druhý už vyhráli jakýkoli počet her.

V první řadě je třeba upozornit na to, že dva hráči hrající na dvě hry, z nichž první už vyhrál jednu hru, jsou ve stejné situaci jako dva jiní hrající na tři hry, z nichž první vyhrál dvě a druhý jednu hru; mají společně to, že k výhře chybí prvnímu hráči jen jedna hra a druhému dvě, a to je ono, v čem spočívá rozdíl ve vyhlídkách a co musí rozhodnout o rozdělení sázky. Stačí tedy mít na zřeteli jenom počet her, které zbývá vyhrát jednomu a druhému hráči, a ne počet her, který už vyhráli, protože - jak jsme už řekli - dva hráči hrající na dvě hry, z nichž jeden už jednu hru vyhrál, se nalézají ve stejné situaci jako dva hráči hrající na dvanáct her, z nichž jeden už vyhrál jedenáct her a druhý deset.

Otázku tedy lze vyslovit v této podobě:

Jsou dáni dva hráči, z nichž každému chybí jistý počet her k výhře, a má být provedeno rozdělení sázky.

K tomu zde podám metodu, kterou předvedu jenom na dvou nebo třech příkladech, v nichž bude tak snadné pokračovat, že víc už nebude třeba uvádět. Aby vše bylo obecné a nic nebylo opomenuto, začnu prvním příkladem, který je trochu nevhodný, protože je příliš jasný; přesto ho uvedu, abych začal od začátku. Je to tento příklad:

2. část

První případ

Když jednomu z hráčů nechybí žádná hra a druhému nějaká hra chybí, celá částka náleží prvnímu; vyhrál ji, protože mu nechybí žádná z her, které měl vyhrát.

Druhý případ

Když jednomu z hráčů chybí jedna hra a druhému také jedna, pak dělení sázky spočívá v tom, že se peníze rozdělí napůl a každý si vezme svůj díl; to je zřejmé podle druhého principu. Je to totéž, jako když jednomu i druhému chybí dvě hry a totéž, jako když prvnímu chybí jakýkoli počet her, jestliže chybí také druhému.

Třetí případ

Když jednomu hráči chybí jedna hra a druhému dvě hry, lze nalézt rozdělení sázky následujícím způsobem.

Uvažujme, co by náleželo prvnímu hráči (kterému chybí jen jedna hra) v případě výhry následující hry, a pak uvažujme, co by mu náleželo v případě prohry.

Je zřejmé, že vyhraje-li ten, kterému chybí jen jedna hra, pak mu už nebude chybět nic; náleží mu tedy vše podle prvního případu. Jestliže ale naopak následující hru vyhraje ten, kterému chybí dvě hry, bude mu chybět už jen jedna; budou tedy v situaci, kdy jednomu chybí jedna hra a druhému chybí také jedna hra. Pak by tedy měli rozdělit peníze napůl podle druhého případu.

Když tedy první vyhraje následující hru, náleží mu vše, a když ji prohraje, náleží mu polovina; kdyby se tedy chtěli rozejít bez hraní této hry, náleží mu $\frac{3}{4}$ podle druhého důsledku.

Bude-li dán příklad částky, o kterou hrají, věc bude ještě jasnější. Nechť je to 8 pistolí; pak první v případě výhry má dostat vše, což je 8 pistolí, a v případě prohry má dostat polovinu, což jsou 4 pistole. V případě dělení sázky mu tedy náleží polovina z $8 + 4$, tj. 6 pistolí z 8, neboť $8 + 4$ je 12, z čehož polovina je 6.

Čtvrtý případ

Když jednomu z hráčů chybí jedna hra a druhému tři, dělení sázky se nalezne opět vyšetřením toho, co náleží prvnímu v případě výhry a prohry.

Vyhraje-li první, bude mít všechny hry a tudíž všechny peníze, což je např. 8.

Prohraje-li první, bude druhý, který potřeboval tři hry, potřebovat už jen dvě. Budou tedy ve stavu, kdy první bude potřebovat jednu hru a druhý dvě, a prvnímu tedy dle předešlého bude náležet 6 pistolí.

V případě výhry tedy první má dostat 8 a v případě prohry 6, v případě dělení sázky mu tedy přísluší polovina těchto dvou částek, tj. 7; neboť $6 + 8$ je 14, z čehož polovina je 7.

Pátý případ

Když jednomu z hráčů chybí jedna hra a druhému čtyři, vše je stejné.

První v případě výhry vyhrává vše, což je např. 8, v případě prohry prvnímu chybí jedna hra a druhému tři, tedy mu náleží 7 pistolí z 8 a tedy v případě dělení sázky mu náleží polovina z osmi plus polovina ze sedmi, tj. $7\frac{1}{2}$.

Šestý případ

Stejně je tomu, chybí-li jednomu jedna hra a druhému pět her, a tak do nekonečna.

Sedmý případ

Stejně je tomu, chybí-li prvnímu dvě hry a druhému tři, protože vždy je třeba vyšetřit případ výhry a prohry.

Jestliže první vyhraje, bude mu chybět jedna hra a druhému tři, tedy podle čtvrtého případu mu náleží 7 z 8.

Jestliže první prohraje, budou mu chybět dvě hry a druhému dvě, tedy podle druhého případu každému náleží polovina, což jsou 4; tedy v případě výhry první bude mít 7 a v případě prohry bude mít 4, takže v případě dělení sázky bude mít polovinu těchto dvou zároveň, tj. $5\frac{1}{2}$.

Touto metodou se provede dělení sázky za všech podmínek, vezme-li se vždy to, co přísluší v případě výhry, a to, co přísluší v případě prohry, a stanoví-li se k výplatě v případě rozdělení sázky polovina těchto dvou částek.

To je tedy jeden způsob, jak provést rozdělení sázky. Jsou ještě dva další, jeden pomocí aritmetického trojúhelníka, další pomocí kombinací.

METODA ROZDĚLENÍ SÁZKY MEZI DVA HRÁČE,
HRAJÍCÍ NA VÍCE HER,
POMOCÍ ARITMETICKÉHO TROJÚHELNÍKA.

Dříve než bude podána tato metoda, je třeba uvést následující lemmu.

3. část

LEMMA

Hrají-li dva hráči zcela náhodnou hru za podmínky, že vyhraje-li první, připadne mu jistý díl částky, o kterou hraje, vyjádřený nějakým zlomkem, a prohraje-li, připadne mu menší díl stejné částky, vyjádřený jiným zlomkem, a chtějí-li se rozejít bez hraní, pak podmínka pro rozdělení sázky se nalezne následujícím způsobem. Uvedeme oba zlomky na společného jmenovatele (nemají-li ho) a utvoříme zlomek, jeho čitatelem je součet obou čitatelek a jmenovatelem dvojnásobek předešlého jmenovatele; tento zlomek vyjadřuje, jaký díl částky, o kterou se hraje, přísluší prvnímu.

Kdyby mu například v případě výhry příslušely $\frac{3}{5}$ částky, o kterou se hraje, a v případě prohry by mu příslušela $\frac{1}{5}$, pak tvrdím, že to, co mu přísluší v případě dělení sázky, se nalezne tak, že se vezme součet čitatelek, což je 4, a dvojnásobek jmenovatele, což je 10, a utvoří se z toho zlomek $\frac{4}{10}$.

Protože podle toho, co bylo dokázáno ve 2. důsledku, je třeba sečíst případ výhry a prohry a vzít polovinu; součet našich dvou zlomků $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}$ je $\frac{4}{5}$, což se získá součtem čitatelek, a polovina se nalezne zdvojnásobením jmenovatele, a tedy je $\frac{4}{10}$. Což bylo třeba dokázat.

Tato pravidla jsou obecná a bez výjimky, ať se v případě výhry nebo prohry stane cokoli; neboť například když v případě výhry obdrží $\frac{1}{2}$ a v případě prohry nic, pak převedením obou zlomků na společného jmenovatele bude $\frac{1}{2}$ pro případ výhry a $\frac{0}{2}$ pro případ prohry, takže v případě dělení sázky je třeba vzít zlomek $\frac{1}{4}$, jehož čítec je součtem obou čitatelek a jmenovatel je dvojnásobkem předešlého jmenovatele.

Stejně, když v případě výhry obdrží vše a v případě prohry $\frac{1}{3}$, pak převedením těchto zlomků na společného jmenovatele budou $\frac{3}{3}$ pro případ výhry a $\frac{1}{3}$ pro případ prohry, takže v případě dělení sázky mu přísluší $\frac{4}{6}$.

Stejně, když v případě výhry obdrží vše a v případě prohry nic, dělení sázky bude zřejmě $\frac{1}{2}$, neboť případ výhry je $\frac{1}{1}$ a případ prohry je $\frac{0}{1}$, tedy dělení sázky je $\frac{1}{2}$. A stejně ve všech možných případech.

KOMENTÁŘ

Až do této chvíle nebylo nutné Pascalův text nijak komentovat (s výjimkou drobných poznámek týkajících se překladů některých termínů), před další částí Pascalova textu ale musíme učinit několik doplňujících poznámek.

Pokračování překladu (*Úloha 1. Tvrzení 1.*) obsahuje řešení úlohy o rozdělení sázky, které jsme uvedli už v kap.I.2.2.2. Následující Pascalův text je uspořádán tak, že v prvním odstavci je formulována úloha, další odstavec obsahuje řešení úlohy a celý zbytek citátu je důkaz správnosti tohoto řešení. V důkazu je opět použito úplné indukce; pro celkový styl důkazu platí to, co už bylo řečeno v předešlé části: je to ilustrace obecného tvrzení na konkrétním číselném příkladu, nikoli obecný důkaz.

V závěru důkazu se Pascal odvolává na sedmý a desátý důsledek z *Pojednání o aritmetickém trojúhelníku*, jejichž znění je následující:

DŮSLEDEK SEDMÝ. *V každém aritmetickém trojúhelníku je součet buněk každé základny dvojnásobkem součtu buněk předešlé základny.*

Z dnešního hlediska je to známé tvrzení

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n .$$

DŮSLEDEK DESÁTÝ. *V každém aritmetickém trojúhelníku je součet libovolného počtu sousedních buněk téže základny, začínající od okrajové buňky, roven témuž součtu buněk na předešlé základně plus ještě jednou tento součet zmenšený o poslední buňku.*

Pascal ilustruje toto tvrzení příkladem $D + B + \theta = 2A + 2\psi + \pi$. Z dnešního hlediska je to důsledek známé vlastnosti kombinačních čísel

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} .$$

Nyní můžeme pokračovat v překladu Pascalova textu.

ÚLOHA 1. TVRZENÍ 1.

4. část

Předpokládejme dva hráče, z nichž každému chybí jistý počet her k dokončení. Pomocí aritmetického trojúhelníka má být nalezeno rozdělení sázky, které je třeba udělat (chtějí-li se rozejít bez hraní) s ohledem na hry, které každému chybí.

Vezměme v trojúhelníku základnu, na které je tolik buněk, kolik chybí oběma hráčům dohromady. Potom vezměme na této základně tolik buněk za sebou počínaje první, kolik chybí her prvnímu hráči, a stanovíme součet jejich čísel. Zůstane právě tolik buněk, kolik her chybí druhému hráči. Stanovíme také součet

jejich čísel. Tyto součty jsou jeden ke druhému ve stejném poměru, jako převrácené hodnoty výhod¹² hráčů. Jestliže tedy částka, o kterou hrají, je rovna součtu čísel ve všech buňkách základny, pak každému náleží to, co je obsaženo v tolika buňkách, kolik her chybí druhému; hrají-li o jinou částku, bude mu náležet poměrná část.

Nechť jsou například dva hráči, z nichž prvnímu chybí dvě hry a druhému čtyři; je třeba najít rozdělení sázky.

Jsou tedy dána dvě čísla 2 a 4 a jejich součet 6; vezmeme šestou základnu aritmetického trojúhelníka $P\delta$, na které je po řadě šest buněk $P, M, F, \omega, S, \delta$. Vezmeme tolik buněk počínaje první P , kolik her chybí prvnímu hráči, tj. dvě první P, M ; zbývá jíh tedy právě tolik, kolik her chybí druhému, tj. čtyři F, ω, S, δ .

Tvrdím, že výhoda prvního je k výhodě druhého ve stejném poměru, jako $F + \omega + S + \delta$ ku $P + M$, tj. je-li částka, o níž se hraje, rovna $P + M + F + \omega + S + \delta$, pak onomu, kterému chybí dvě hry, náleží součet čtyř buněk $\delta + S + \omega + F$, a onomu, kterému chybí čtyři hry, náleží součet dvou buněk $P + M$. Hrají-li o nějakou jinou částku, náleží jim poměrné části.

A aby to bylo řečeno obecně, ať hrají o jakoukoli částku, prvnímu náleží část vyjádřená zlomkem

$$\frac{F + \omega + S + \delta}{P + M + F + \omega + S + \delta}$$

, jehož číselník je součet čtyř buněk druhého hráče a jmenovatel je součet všech buněk; a druhému náleží část vyjádřená zlomkem

$$\frac{P + M}{P + M + F + \omega + S + \delta}$$

, jehož číselník je součet dvou buněk prvního hráče a jmenovatelem je stejný součet všech buněk.

Chybí-li prvnímu jedna hra a druhému pět, náleží prvnímu součet prvních pěti buněk $P + M + F + \omega + S$ a druhému obsah buňky δ .

A chybí-li šest her jednomu a dvě hry druhému, pak se dělení sázky nalezne na osmé základně, na které prvních šest buněk obsahuje to, co náleží hráči, kterému chybí dvě hry, a další dvě obsahují to, co náleží hráči, kterému chybí šest her; a tak do nekonečna.

Ačkoli toto turzení má nekonečně mnoho případů, dokážu ho krátce pomoci dvou lemm.

První lemma říká, že druhá základna obsahuje dělení sázky pro hráče, kterým chybí celkem dvě hry.

Druhá lemma říká, že obsahuje-li některá základna dělení sázky pro hráče, kterým chybí právě tolik her, kolik je buněk na základně, pak následující základna bude také taková, tj. bude obsahovat dělení sázky pro hráče, kterým chybí právě tolik her, kolik je buněk na základně.

Z čehož činím závěr, krátce řečeno, že všechny základny aritmetického trojúhelníka mají tuto vlastnost; protože druhá základna jí má podle první lemma,

¹²V originálu: *les avantages*.

pak třetí základna ji má také podle druhé lemmy, v důsledku čehož ji má i čtvrtá základna, a tak do nekonečna. Což bylo třeba dokázat.

Zbývá tedy pouze dokázat ony dvě lemmy.

První je zřejmá sama o sobě, protože chybí-li jedna hra jednomu a jedna hra druhému, pak zřejmě jejich podmínky jsou jako φ ku σ , tj. jako 1 ku 1, a každému náleží zlomek

$$\frac{\sigma}{\varphi + \sigma}, \text{ což je } \frac{1}{2}.$$

Druhá se dokáže takto.

Jestliže nějaká základna, například čtvrtá $D\lambda$, obsahuje rozdělení sázky pro hráče, kterým chybí čtyři hry, tj. chybí-li prvnímu hráči jedna hra a druhému tři hry, pak prvnímu náleží z celé částky, o kterou se hraje, díl vyjádřený zlomkem

$$\frac{D + B + \theta}{D + B + \theta + \lambda},$$

který má ve jmenovateli součet všech buněk na oné základně a v čitateli má tři první buňky; chybí-li prvnímu hráči dvě hry a druhému hráči dvě hry, pak část náležející prvnímu bude

$$\frac{D + B}{D + B + \theta + \lambda},$$

chybí-li prvnímu hráči tři hry a druhému jedna hra, pak část náležející prvnímu bude

$$\frac{D}{D + B + \theta + \lambda},$$

atd.

Právím, že pátá základna obsahuje také rozdělení sázky pro hráče, kterým chybí pět her, a že jestliže chybí například prvnímu hráči dvě hry a druhému tři hry, pak prvnímu náleží z celé částky, o kterou se hraje, díl vyjádřený zlomkem

$$\frac{H + E + C}{H + E + C + R + \mu}.$$

Abychom totiž zjistili, co náleží každému ze dvou hráčů, když mu chybí několik her, je podle předešlé lemmy třeba vzít zlomek, který by příslušel prvnímu v případě výhry a zlomek, který by mu příslušel v případě prohry, uvést je na společného jmenovatele (nemají-li ho) a utvořit zlomek, jeho čitatelem je součet obou čitateľů a jmenovatelem dvojnásobek předešlého jmenovatele.

Prozkoumejme tedy zlomky, které by příslušely našemu prvnímu hráči v případě výhry a prohry.

Jestliže první, kterému chybí dvě hry, vyhraje tu hru, kterou právě mají hrát, bude mu už chybět jen jedna hra a druhému hráči stále tři, oběma dohromady tedy chybí čtyři hry; podle předpokladu se tedy jejich hra nachází na čtvrté základně a prvnímu přísluší zlomek

$$\frac{D + B + \theta}{D + B + \theta + \lambda}.$$

Když naopak první hráč prohraje, budou mu stále chybět dvě hry a druhému také dvě hry; podle předpokladu tedy prvnímu bude příslušet zlomek

$$\frac{D + B}{D + B + \theta + \lambda}$$

V případě dělení sázky tedy prvnímu bude náležet zlomek

$$\frac{D + B + \theta + D + B}{2D + 2B + 2\theta + 2\lambda}, \text{ to jest } \frac{H + E + C}{H + E + C + R + \mu},$$

což bylo třeba dokázat.

Totéž se dokáže mezi všemi dalšími základnami bez jakéhokoli rozdílu, protože podstatou tohoto důkazu je, že nějaká základna je vždy dvojnásobkem předešlé podle sedmého důsledku, a podle desátého důsledku libovolný počet buněk na nějaké základně je roven právě tolika buňkám na předešlé základně (což je vždy čítec zlomku v případě výhry) plus ještě jednou tyto buňky kromě jedné (což je vždy čítec zlomku v případě prohry); protože to má obecnou platnost, bude důkaz vždy obecný a bez námitek.

KOMENTÁŘ.

Pascalův výsledek by se v dnešní symbolice zapsal takto: Chybí-li jednomu hráči do celkové výhry m her a druhému n her, pak sázku je třeba rozdělit v poměru

$$\sum_{i=m}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{i} : \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m+n-1}{j} .$$

Tento výsledek se sice formálně liší od našeho výsledku uvedeného v kap.I.2.2.2, uvážíme-li ale známou vlastnost kombinačních čísel

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} ,$$

vidíme, že oba výsledky jsou stejné.

Pascal ještě pokračuje dále řešením tří úloh, které však dle našeho názoru nejsou zajímavé a nebudeme se jimi zde zabývat. Celé toto pojednání končí Pascal následujícím závěrem:

Z tohoto výkladu o užití aritmetického trojúhelníka na rozdělení sázky, které má být učiněno mezi dvěma hráči, můžeme snadno učinit závěr, že úměry mezi buňkami, které byly podány v pojednání o aritmetickém trojúhelníku, mají důsledky vztahující se k hodnotám rozdělení sázky, které lze zcela snadno získat, a že malá rozprava, ve které jsem pojednal o rozdělení sázky, podává dovednosti a prostředky k jejich dalšímu rozvinutí.

