Jaroslav Drábek
Démokritova atomistická metoda

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v proměnách věků. I. Sborník. (Czech). Praha: Prometheus, 1998. pp. 175–180.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401619

DÉMOKRITOVA ATOMISTICKÁ METODA

JAROSLAV DRÁBEK

V 30. letech našeho století S. J. Lurija v monografii *Těorija beskoněčno malych u drevnych atomistov* [Izd-vo AN SSSR, M.-L. 1935] provedl historickou rekonstrukci Démokritova matematického atomismu. Démokritův matematický atomismus od jeho fyzikálního atomismu poprvé oddělil E. Frank v roce 1923. Fyzikální atomismus se stává matematickým atomismem, když částice není dělitelná ani myšlenkově. Na scénu vystupuje matematická nedělitelnost podmíněná neexistencí částí. Simplicius výstižně říká: *Malost je zde rozuměna absolutně, je ztotožněna s nepřítomností částí.*

Démokritův matematický atomismus představuje jednu z linií antické matematiky a zřejmě se konstituoval pod vlivem Zénonových aporií, hlavně pod vlivem aporie *Dichotomie.* V této aporii filozofové spatřovali důkaz neexistence pohybu. Matematikové jsou však jiného názoru. Z jakého předpokladu vycházel Zénon ve své aporii *Dichotomie.* Základním předpokladem byla realizace nekonečného dělení úsečky. Vyjděme z faktu, že eleatská škola, jejímž čelným představitelem byl právě Zénon, jako první formulovala důkaz sporem? Nebyla tedy Zénonova aporie Dichotomie důkazem nemožnosti nekonečného dělení geometrických útvarů a to důkazem sporem. Z předpokladu nekonečné dělitelnosti úsečky byla vyvozena nemožnost pohybu, což je spor.

Nebyla Zénonova aporie Dichotomie, ale i některé další aporie útokem na nekonečnou dělitelnost geometrických útvarů? Nebyl Démokritův matematický atomismus přirozenou reakcí na Zénonovy aporie? Za chvíli poznáme, že v Démokritově atomistické geometrii nemají Zénonovy aporie místo.

Démokritův matematický atomismus lze interpretovat jako světonázorový a metodologický systém vzniklý bezprostřední aplikací obecných filozofických principů atomistického učení na proces matematického poznání.

Jaké jsou základní gnozeologické téze Démokritova matematického atomismu?

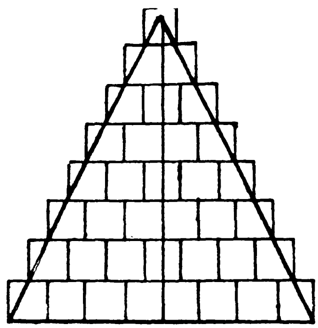
1. Odmítnutí idealizovaných matematických objektů (neexistují ideální body, přímky a roviny, jejichž jeden či více rozměrů je rovno nule).
2. Všechny matematické objekty mají přímé materiální vzory.
3. Striktní odmítnutí možnosti nekonečné dělitelnosti geometrických útvarů. Každý proces dělení geometrického útvaru končí po konečném počtu kroků u **matematického atomu**, který je dále již nedělitelný. Matematická nedělitelná je materiálním bodem. Jde o nenulovou veličinu, která je rozprostraněná a vyplněná hmotou. Je odmítnuta představa o tom, že konečná veličina je souborem nekonečného počtu nekonečně malých bezrozměrných částic. V Démokritově systému v němž neexistují bezrozměrné nerozprostraněné veličiny a v němž neexistuje nekonečná dělitelnost omezených veličin, nemohou vzniknout Zénonovy aporie.
4. Základní metodou je rozkládání geometrických těles na destičky (šupinky) o tloušťce rovné průměru atomu, čar na nejdrobnější zrníčka

(atomy), která již mají neobyčejně malou, ale nenulovou velikost a jsou již dále nedělitelná. Počet šupinek v tělese a počet atomů v čarách není nekonečný, i když je tak velký, že jejich počet není dostupný našim smyslům. Délka čáry, obsah rovinného útvaru, objem tělesa je potom roven počtu v něm obsažených matematických atomů.

Pokusíme se nyní aplikovat základní téze Démokritova atomismu v konkrétních situacích.

1. Atomistický vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníka, jehož základna je rovna výšce.

Jaká je atomistická představa trojúhelníka? Rameno trojúhelníka nevytváří čára, ale „schodiště" s velkým počtem stupňů. Toto „schodiště" s velkým počtem stupňů ve smyslovém nazírání je ztotožněno s čárou. Budiž dán trojúhelník, jehož základna je rovna výšce a předpokládejme, že na této základně a výšce se nachází n geometrických atomů. Na obr. 1 je znázorněno pro $n = 8$.



Obr. 1

Obsah tohoto trojúhelníka je potom dán součtem $1 + 2 + \cdots + n$. Tento součet představuje celkový počet nedělitelných, které mají podobu čtverců, z nichž je trojúhelník vytvořen.

Již babylonští matematikové věděli, že součet této řady je roven zlomku $n \cdot (n + 1)/2$. V Démokritově matematickém atomismu je tedy udáván vzorec pro obsah trojúhelníka, jehož základna je rovna jeho výšce, ve tvaru

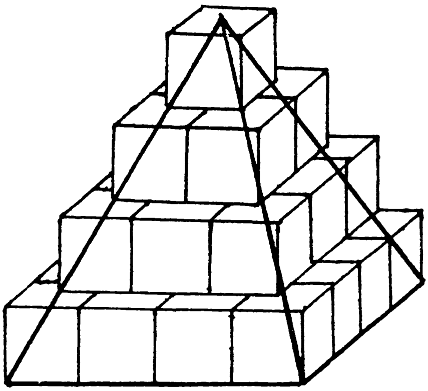
$$P = n \cdot (n + 1)/2.$$

Z tohoto výkladu bezprostředně plyne, proč číslo $n \cdot (n + 1)/2$ bylo nazváno trojúhelníkovým číslem.

Atomisté nikterak neodmítali použitelnost oficiálního vzorce $P = n^2/2$. Tvrdili však, že má nižší gnozeologickou hodnotu, protože platí ve světě smyslového poznání. Jeho platnost odmítli ve světě rozumu. Ukazovali, že jejich atomistický vzorec ve světě smyslů přechází v běžně používanou formuli. Při velkém množství matematických atomů, můžeme na základě smyslové nepostižitelnosti jejich počtu psát $n = n + 1$. Atomistický vzorec potom přechází v oficiální vzorec.

2. Atomistický vzorec pro výpočet objemu pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož hrana je rovna výšce.

Atomistická představa jehlanu je představa pyramidy o velkém počtu výstupků nevnímatelných našimi smysly. Objem pyramidy je potom roven celkovému počtu nedělitelných, které mají podobu krychlí, z nichž je pyramida vytvořena. Předpokládejme tedy jehlan, který má na hraně n nedělitelných. Na obr. 2 je znázorněna pro $n = 4$.



Obr. 2

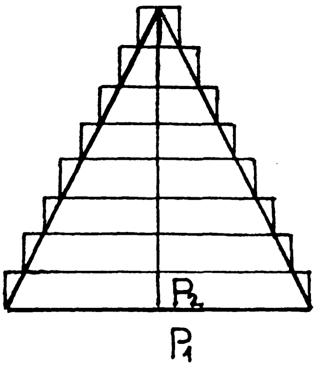
Objem tohoto jehlanu bude potom roven součtu $1^2+2^2+\cdots+n^2$. Již babyloňané znali vzorec pro součet čtverců prvních n přirozených čísel. Tento součet je roven $2n + 1/3 \cdot (1 + 2 + \cdots + n)$, kde součet $1 + 2 + \cdots + n$ označovali jako trojúhelníkové číslo. Po jednoduchých algebraických úpravách bychom zjistili, že objem jehlanu je roven

$$n^2 \cdot (n + 1) + (1 + 2 + \cdots + n)/3,$$

což je atomistický vzorec pro výpočet objemu pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož hrana je rovna výšce.

Oficiální geometrie však tvrdí, že tento objem je roven $n^3/3$. Atomisté opět využívají rovnostin $= n + 1$ platící ve světě smyslů, pro dostatečně velké n a zanedbávají druhý sčítanec vůči prvnímu. Tím atomistický vzorec přechází ve vzorec oficiální geometrie. Je patrné, že atomistická geometrie se snažila být důsledná ve svých tvrzeních. Ta byla vnitřně bezesporná a měla jistou vnitřní harmonii. Bez nadsázky můžeme říci, že byla jakousi „neeukleidovskou diskrétní geometrií“, která byla v opozici vůči oficiální kontinuální geometrii spojitých veličin. Dochází ke „gnozeologické inverzi“. To, co oficiální geometrie považovala za zhrubené a přibližné, atomisté považovali za správné a pravdivé v rovině rozumového poznání a naopak přesné vzorce, které dostáváme jako výsledek limitního procesu, považovali za klamné, protože platí v nižší složce poznání, kterou je smyslové poznání.

Bude užitečné, když stručně nastíníme odvození vzorce pro objem jehlanu, které můžeme nalézt v učebnici geometrie pro jedenáctileté střední školy z roku 1953 (autoři Vyšín, J. a Dlouhý, Z.). Je dán jehlan, jehož obsah podstavy je P_1 a jehož výška je v. Nechť číslo n vyjadřuje na kolik částí rozdělíme výšku jehlanu při vytvoření opsané pyramidy. Číslo n můžeme interpretovat v atomistickém smyslu jako počet nedělitelných, které se nalézají na výšce jehlanu. Viz obr. 3.



Obr. 3

Výšky všech hranolů, které vytvářejí opsanou pyramidu, jsou rovny v/n. Předpokládejme, že jednotlivé hranoly mají při daném rozdělení obsahy základen postupně rovny $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Objem opsaného pyramidového tělesa je potom roven $v/n \cdot (P_1 + P_2 + \cdots + P_n)$. Na základě podobnosti však platí $P_2 = (n - 1/n)^2 \cdot P_1$, $P_3 = (n - 2/n)^2 \cdot P_1, \ldots, P_n = (1.n)^2 \cdot P_1$. Snadným výpočtem dospějeme k závěru, že objem pyramidálního tělesa je roven $P_1 \cdot v/n^3 \cdot [1^2 + 2^2 + \cdots + n^2]$. Ejhle, objevuje se již známý součet prvních n přirozených čísel, který je roven výrazu $1/6 \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$. Objem pyramidálního tělesa je tak roven

$$P_1 \cdot v/n^3 \cdot 1/6 \cdot n(n+1) \cdot (2n+1). \tag{1}$$

Zde by Démokritos odvozování objemu jehlanu ukončil, protože opsané pyramidální těleso je v atomistickém pojetí ztotožněno s jehlanem, je-li na výšce n geometrických atomů. V oficiální matematice však musí být odstartován limitní proces. Objem jehlanu je totiž roven limitě objemů opisovaných pyramidálních těles. Jednoduchým limitním procesem se přesvědčíme o tom, že limita výrazu (1) pro $n \to \infty$ je rovna $1/3 \cdot P_1$, což představuje známý vzorec pro výpočet objemu jehlanu. Jak by postupovali atomisté, aby získali oficiální vzorec pro výpočet objemu jehlanu z atomistického vzorce (1). Především (1) se dá zapsat ve tvaru

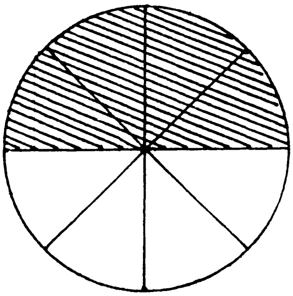
$$1/3 \cdot P_1 v \cdot [n + 1/n + n + 1/2n^2]. \tag{2}$$

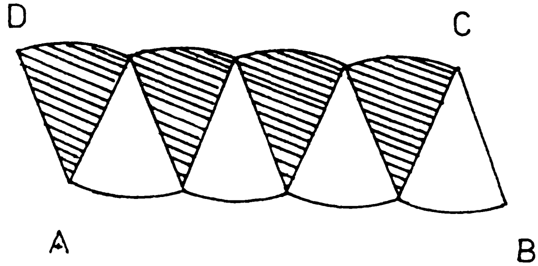
Atomisté by položili $n+1 = n$ a druhý sčítanec v hranaté závorce by zanedbali vůči prvnímu. Co vlastně provedli? Nic více než nekorektní operace simulující limitní proces. Rovnost $n+1 = n$ simuluje skutečnost, že $\lim(n + 1/n) = 1$ a zanedbání druhého sčítance simuluje skutečnost, že $\lim(n + 1/2n^2) = 0$.

Co tedy chybělo atomistické metodě? Neomezené dělení výšky jehlanu a limitní proces. Přesto je ale patrné, že v učebnicích geometrie při odvozování objemů „špičatých“ těles (kužel, jehlan) se vyskytují etapy, které jsou výrazem matematického atomismu.

3. Školské odvození vzorce pro obsah kruhu vycházející z atomistického pojetí kruhu.

Jedná se o postup, který nalézáme při heuristickém odvození vzorce pro obsah kruhu v učebnici geometrie pro 7. třídu z roku 1962. Je dán kruh, který je rozdělen na 8 shodných výsečí (viz obr. 4 a).





Obr. 4 a,b

Jednotlivé výseče sestavíme do obrazce $ABCD$, který je znázorněn na obr. 4 b. Obsahy těchto dvou rovinných útvarů se sobě rovnají. Rozdělíme-li kruh na velký sudý počet shodných výsečí, pak obrazec z nich sestavený má přibližně tvar rovnoběžníka. Jeho „strana“ AB je polovina délky kružnice, tj. $AB = \pi \cdot r$ a příslušná „výška“ je rovna poloměru r. Obsah tohoto rovnoběžníka je potom $(\pi \cdot r) \cdot r = \pi \cdot r^2$.

Atomisté považovali kruh za mnohoúhelník o velkém množství stran. Počet těchto stran byl dán počtem geometrických atomů vytvářejících kružnici. Této představy využil Kepler při důkazu věty: Obsah kruhu je ke čtverci jeho průměru v přibližném poměru 11:14.

Výše uvedený příklad z učebnic školské geometrie, svědčící o heuristické potenci atomistické metody není ojedinělý. V učebnici geometrie pro 8. třídu z roku 1963 můžeme číst následující odstavec.

Na obrázku jsou znázorněny dva čtyřboké jehlany, které mají shodné podstavy a shodné výšky. Mysleme si, že obě tělesa jsou složena ze stejného počtu velmi mnoha tenkých kovových destiček. potom jsou kovové destičky, které leží u obou těles v téže výši nad podstavou shodné a mají stejný objem. Obě tělesa jsou tedy sestavena ze stejného počtu destiček o stejném objemu a mají proto stejný objem. Platí tedy věta: Dva jehlany, které mají shodné podstavy a shodné výšky, mají týž objem. Tato úvaha je striktní atomistickou metodou, která je navíc „materializována“ pomocí kovových destiček.

Jaký byl osud Démokritovy atomistické metody? Objev nesouměřitelnosti jako obecné charakteristiky geometrických objektů znamenal nejen pád pýthagorejské školy, ale i pád matematického atomismu. V atomistické geometrii není místo pro nesouměřitelnost. Souměřitelnost úseček znamená existenci jejich společné míry a matematická nedělitelná (geometrický atom) je vždy takovou společnou mírou. Tento pád atomistické metody způsobený objevem nesouměřitelnosti, byl ještě umocněn tvrdým ideologickým tlakem Platónových přívrženců proti Démokritovu učení. Na scénu přichází oficiální kontinuální (spojitá) geometrie, která se rozvíjela v linii Eudoxos → Eukleidés → Archimédes. Hlavní metodou této geometrie byla Eudoxova exhaustivní metoda, která byla polární metodou vůči atomistické metodě. Tato metoda však již používala logiku, její hlavní osnovou byl důkaz sporem.

Démokritovým pokračovatelem byl Archimédes, který spojil atomistickou metodu s tzv. mechanickou metodou. Další oživení zájmu o Démokritovu metodu nacházíme v renezanci. Keplerova infinitezimální metoda a Cavalieriho metoda indivisibilií (nedělitelných) v sobě obsahuje prvky Démokritova matematického atomismu. Učebnice geometrie dokazují, že myšlenky matematického atomismu lze pro jejich heuristickou potenci využít v didaktice matematiky.