I. MENGEN

§ 1. Grundbegriffe über Mengen

Einleitend wollen wir einige allererste Begriffe aus der Mengenlehre zusammenstellen, um eine Grundlage für die weiteren Ausführungen zu schaffen und den Leser zu ermutigen.

1. Begriff einer Menge. Unter einer *Menge* verstehen wir einen Komplex von unterscheidbaren Dingen. Diese Dinge, von denen die Menge gebildet wird, nennen wir *Elemente* oder auch *Punkte* der Menge. *Eine Menge ist durch ihre Elemente eindeutig bestimmt.* Zwei Mengen, die von denselben Elementen gebildet sind, werden als *identisch* betrachtet.

Überall in der Umwelt sehen wir Beispiele von Mengen. Wir führen die folgenden an:

[1] Die von dem Zeichen a gebildete Menge;
[2] die Menge aller Wörter, die in diesem Buch vorkommen;
[3] die Menge aller natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$.

In unseren Betrachtungen werden wir oft mit Mengen, deren Elemente selbst Mengen sind, also mit Mengen von Mengen, zu tun haben. Aus Sprachgründen ziehen wir vor, von *Systemen von Mengen* anstatt von Mengen von Mengen zu sprechen. Im Fall eines Systems von Mengen kommen einerseits Elemente des Systems, also Mengen, andererseits Elemente dieser Mengen vor. In solchen Fällen sprechen wir im allgemeinen von Elementen des Systems und von Punkten dieser Elemente. Ein Beispiel eines Systems von Mengen ist folgendes:

[4] Ein Element des Systems besteht aus allen Primzahlen, die weiteren Elemente aus allen Produkten von je zwei bzw. drei, vier usw. Primzahlen.

2. Bezeichnungen von Mengen. Mengen werden wir gewöhnlich mit großen und ihre Elemente mit kleinen lateinischen Buchstaben, z. B. A, a, bezeichnen. Für Systeme von Mengen gibt diese Regel keine eindeutige Vorschrift für die Bezeichnung ihrer Elemente. Wir wollen daher unsere Verabredung dahin erweitern, daß wir Systeme von Mengen und ihre Elemente in der Regel mit großen bzw. kleinen lateinischen Buchstaben mit Querstrich, z. B. $\bar{A}$, $\bar{a}$, bezeichnen werden; gelegentlich werden wir auch andere Bezeichnungen, z. B. $\bar{\bar{A}}$, $\bar{\bar{a}}$; $\mathring{A}$, $\mathring{a}$, verwenden.

Wenn a, b dasselbe Ding bedeuten, so nennen wir die Dinge a, b *einander gleich* und schreiben $a = b$ oder $b = a$. Das Gegenteil, also die Ungleichheit der Dinge a, b drücken wir durch die Formel $a \neq b$ oder $b \neq a$ aus. Wenn z. B. die Mengen A, B von denselben Elementen gebildet sind, so ist $A = B$, im entgegengesetzten Fall $A \neq B$. Ist das Ding a ein Element der Menge A, so schreiben wir $a \in A$. Wenn die Menge A den von den Dingen $a, b, c, \ldots$ gebildeten Komplex darstellt, so schreiben wir $A = \{a, b, c, \ldots\}$. Zum Beispiel ist $\{a\}$ das Symbol der obigen Menge [1] und $\{1, 2, 3, \ldots\}$ dasjenige der Menge [3]. Wir wollen auch verabreden, daß wir die eingeführten Ausdrucksweisen nicht immer wörtlich einhalten werden, sondern aus stilistischen Gründen Abweichungen zulassen, soweit natürlich diese die Klarheit unserer Ausführungen nicht beeinträchtigen. Zum Beispiel können wir gleichberechtigt die folgenden Ausdrucksweisen anwenden: „Die Menge A ist der Komplex von Elementen $a, b, c, \ldots$“ oder „die Menge A besteht aus den Elementen $a, b, c, \ldots$“ oder „die Menge A hat die einzigen Elemente $a, b, c, \ldots$“. Statt „a ist ein Element der Menge A“ können wir sagen „a ist ein Element in der Menge A“ oder „a gehört zur Menge A“ usw.

3. Weitere Begriffe. Als Menge führen wir auch die sogenannte *Nullmenge* oder *leere Menge* ein. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß sie von keinem Element gebildet wird. Da eine Menge durch ihre Elemente eindeutig bestimmt ist, gibt es nur *eine* Nullmenge, die mit $\emptyset$ bezeichnet wird.

Eine Menge, deren Elemente Zeichen sind, über deren Bedeutung nichts ausgesagt wird, heißt *abstrakt*. Zum Beispiel ist [1] eine abstrakte Menge.

Wenn eine Menge aus endlich vielen Elementen besteht, heißt sie *endlich*, im entgegengesetzten Fall *unendlich*. Zum Beispiel sind die Mengen [1], [2] endlich, dagegen die Mengen [3], [4] unendlich. Die Nullmenge wird zu den endlichen Mengen gerechnet.

Unter der *Ordnung* einer endlichen, nicht leeren Menge wird die Anzahl ihrer Elemente verstanden. Zum Beispiel ist [1] eine Menge von der Ordnung 1. Für unsere Zwecke ist es angepaßt, einer unendlichen Menge die Ordnung 0 zuzuschreiben. Für die Nullmenge wird die Ordnung nicht definiert.

4. Untermenge und Obermenge. Es seien A, B beliebige Mengen. Wenn jedes Element von A zugleich Element von B ist, so wird A *Untermenge* oder *Teilmenge in* B (oder *von* B) und B *Obermenge auf* A genannt, und wir schreiben $A \subset B$ oder $B \supset A$. Die Nullmenge wird als Untermenge in jeder Menge, insbesondere auch in sich selbst, angesehen.

Wenn $A \subset B$ ist, so kommt jedes Element von A als Element in B vor, aber nicht notwendigerweise jedes Element von B in A. Wir nennen die Untermenge A (Obermenge B) *echt* in B (auf A), wenn in B Elemente vorkommen, die in A nicht enthalten sind. Anderenfalls ist A (bzw. B) die *unechte* Untermenge (Obermenge) in B (auf A), und man sieht, daß sie der Menge B (bzw. A) gleich ist: $A = B$ (bzw. $B = A$). Zum Beispiel ist die Menge aller Primzahlen eine echte Untermenge in der obigen Menge [3], da jede Primzahl in der Menge [3] als Element vorkommt, nicht aber jedes Element von [3] eine Primzahl ist.

Wir wollen beachten, daß die Gleichheit $A = B$ mit den beiden Beziehungen $A \subset B$, $B \subset A$ äquivalent ist, und zwar so, daß die Gleichheit und die beiden Beziehungen gleichzeitig gelten oder nicht. Am häufigsten stellt man die Gleichheit zweier Mengen fest, indem man sich überzeugt, daß jede von ihnen in der anderen enthalten ist.

5. Summe von Mengen. Unter der *Summe* oder *Vereinigungsmenge* der Menge A und der Menge B verstehen wir die Menge derjenigen Elemente, die in der Menge A oder in B als Elemente vorkommen.

Durch diese Definition ist genau eine Summe der Menge A und der Menge B bestimmt, da die Elemente der Summe wohlbeschrieben sind und jede Menge durch ihre Elemente eindeutig bestimmt ist. Die Summe der Menge A und der Menge B bezeichnen wir mit $A \cup B$. Aus der Definition sehen wir, daß $A \cup B = B \cup A$ ist. Mit Hinsicht auf diese Symmetrie sprechen wir im allgemeinen von der *Summe* oder *Vereinigungsmenge der Mengen A, B*. Wir sehen, daß die Summe der Mengen A, B den Komplex derjenigen Elemente darstellt, die mindestens einer der beiden Mengen als Elemente angehören. Jede der Mengen A, B ist eine Teilmenge von $A \cup B$, da jedes Element von A (bzw. B) mindestens einer der beiden Mengen, und zwar A (bzw. B) angehört. Somit gelten die Beziehungen $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$. Zum Beispiel ist die Summe der Menge aller natürlichen geraden und der Menge aller natürlichen ungeraden Zahlen die obige Menge [3]:

$$\{2, 4, 6, \ldots\} \cup \{1, 3, 5, \ldots\} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Die Summe der aus dem einzigen Wort *und* bestehenden Menge und der Menge [2] ist wiederum die Menge [2].

Der Begriff der Summe von zwei Mengen kann unmittelbar auf Systeme von Mengen erweitert werden: Unter der *Summe* oder *Vereinigungsmenge* eines Systems $\bar{A}$ von Mengen verstehen wir die Menge derjenigen Elemente, die als Punkte mindestens einem Element des Systems $\bar{A}$ angehören.

In diesem allgemeinen Fall gibt es wieder genau eine Summe des Systems $\bar{A}$, und jedes Element von $\bar{A}$ stellt eine Teilmenge der Summe dieses Systems dar. Die Summe des Systems $\bar{A}$ bezeichnen wir mit $\mathbf{s}\bar{A}$ oder, falls die Elemente von $\bar{A}$ mit $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$ bezeichnet werden, mit $\bar{a}_1 \cup \bar{a}_2 \cup \ldots$ oder $\bigcup \bar{a}$, u. ä.

6. Durchschnitt von Mengen. Inzidente und disjunkte Mengen. Unter dem *Durchschnitt* der Menge A und der Menge B verstehen wir die Menge derjenigen Elemente, die in der Menge A und zugleich in der Menge B vorkommen.

Die für die Summe von Mengen angestellten Betrachtungen können sinngemäß auf den Durchschnitt übertragen werden. Es gibt genau einen Durchschnitt der Menge A und der Menge B, der mit $A \cap B$ bezeichnet wird. Aus der Definition sehen wir, daß $A \cap B = B \cap A$ ist. In Hinsicht auf diese Symmetrie sprechen wir im allgemeinen von dem *Durchschnitt der Mengen A, B*. Wir sehen, daß der Durchschnitt der Mengen A, B den Komplex derjenigen Elemente darstellt, die den beiden Mengen angehören. $A \cap B$ ist eine Teilmenge jeder der Mengen A, B, da jedes Element von $A \cap B$ der Menge A (bzw. B) angehört. Somit gelten die Beziehungen $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$. Wir wollen beachten, daß der Begriff des Durchschnitts von A, B auch dann einen Sinn hat, wenn die Mengen A, B keine gemeinsamen Elemente haben. In diesem Fall stellt der Durchschnitt $A \cap B$ die Nullmenge dar. Wir sehen, daß auf Grund des Begriffs der Nullmenge der Durchschnitt für alle Paare von Mengen definiert ist.

Im Hinblick auf die weiteren Betrachtungen ist es zweckmäßig, Mengen mit und ohne gemeinsame Elemente eigens zu benennen. Die Mengen A, B werden *inzident* oder *disjunkt* genannt, je nachdem, ob sie gemeinsame Elemente besitzen oder nicht. Wir sagen auch, daß *die Menge* A (bzw. B) *mit der Menge* B (bzw. A) *inzident bzw. disjunkt ist*. Die inzidenten bzw. disjunkten Mengen A, B sind durch die Beziehung $A \cap B \neq \emptyset$ bzw. $A \cap B = \emptyset$ gekennzeichnet. Zum Beispiel ist die aus dem Wort *und* bestehende Menge mit der obigen Menge [2] inzident und mit der Menge [3] disjunkt.

Der Begriff des Durchschnitts zweier Mengen kann unmittelbar auf Systeme von Mengen erweitert werden: Unter dem *Durchschnitt* eines Systems $\bar{A}$ von Mengen verstehen wir die Menge derjenigen Elemente, die als Punkte jedem Element des Systems $\bar{A}$ angehören.

In diesem allgemeinen Fall gibt es wieder genau einen Durchschnitt des Systems $\bar{A}$, der eine Teilmenge von jedem Element des Systems $\bar{A}$ ist. Den Durchschnitt des Systems $\bar{A}$ bezeichnen wir mit $\boldsymbol{p}\bar{A}$ oder, falls die Elemente von $\bar{A}$ mit $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$ bezeichnet werden, mit $\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2 \cap \ldots$ oder $\bigcap \bar{a}$, u. ä.

7. Folgen. Unter einer *Folge* verstehen wir eine nicht leere Menge A, für deren Elemente eine Numerierung erklärt ist. Es ist also genau ein Element der Menge A als erstes, genau eines als zweites usw. erklärt; dabei wird jedes Element von A wenigstens einmal numeriert. Das mit der natürlichen Zahl γ numerierte Element der Menge A heißt das *γ-te Glied* der Folge oder das *Glied vom Index* oder auch *vom Rang* γ. In der Bezeichnung wird der Rang eines Gliedes stets durch den entsprechenden Index angegeben; z. B. $a_1, a_2, \ldots$ für die Anfangsglieder. Wir wollen beachten, daß zwei verschiedene Glieder der Folge, also Glieder mit verschiedenen Indizes, etwa a_1, a_2, dasselbe Element von A darstellen können.

Wenn es in einer Folge ein letztes Glied a_α gibt, so heißt die Folge *endlich* oder *α-gliedrig*, und die Zahl α heißt die *Länge* der Folge. In diesem Fall ist jeder Zahl γ der Menge $\{1, 2, \ldots, \alpha\}$ genau ein Glied a_γ vom Rang γ zugeordnet, aber Glieder von einem größeren Rang als α gibt es nicht. Dementsprechend werden für die Folge Bezeichnungen wie $(a_\gamma)_{\gamma=1}^{\alpha}$ oder $(a_1, \ldots, a_\alpha)$ u. ä. angewendet. Wenn es in der Folge kein letztes Glied gibt, so heißt die Folge *unendlich*; wir drücken dies auch so aus, daß die Länge der Folge unendlich ist. In diesem Fall ist jeder natürlichen Zahl γ genau ein Glied vom Rang γ zugeordnet, und wir schreiben $(a_\gamma)_{\gamma=1}^{\infty}$, $(a_1, a_2, \ldots)$, u. ä. Wenn eine Folge nur endlich viele voneinander verschiedene Elemente enthält, so ist sie endlich oder unendlich; anderenfalls ist sie immer unendlich.

Es sei $(a) = (a_1, a_2, \ldots)$ eine endliche oder unendliche Folge. Wenn die Folge $(a'_1, a'_2, \ldots)$ aus (a) durch Streichung gewisser a_γ entsteht, so wird sie eine *Teilfolge* oder ein *Teil* von (a) genannt. Die Folge (a) selbst wird auch zu ihren Teilen mitgezählt. Die von den ersten γ Gliedern von (a) gebildete Teilfolge $(a_1, \ldots, a_\gamma)$ heißt die *γ-te Hauptteilfolge* oder der *γ-te Hauptteil* von (a); γ bedeutet eine beliebige natürliche Zahl, die im Fall einer α-gliedrigen Folge die Zahl α nicht überschreitet. Ist (a) eine α-gliedrige Folge, so gehört für $\gamma < \alpha$ zu jedem Hauptteil $(a_1, \ldots, a_\gamma)$ genau ein *Nachfolger*, d. h. der um die

Einheit längere Hauptteil $(a_1, \ldots, a_\gamma, a_{\gamma+1})$ von (a); der α-te Hauptteil von (a) fällt natürlich mit (a) zusammen. Ist die Folge (a) unendlich, so hat jeder Hauptteil von (a) genau einen Nachfolger.

Zwei Folgen $(a) = (a_1, a_2, \ldots)$, $(b) = (b_1, b_2, \ldots)$ werden dann und nur dann als *gleich* erklärt, wenn sie dieselbe Länge haben und in den entsprechenden Gliedern übereinstimmen: $(a) = (b)$ besagt soviel wie $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots$

Wir wollen nun untersuchen, wie sich diese Begriffe im Fall von Folgenmengen auswirken.

Wir betrachten eine nicht leere, von endlichen, etwa α-gliedrigen Folgen gebildete Menge $\mathscr{A}$. Die γ-ten Hauptteile der Elemente von $\mathscr{A}$, $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$, bilden eine nicht leere Menge, die die *γ-te zu der Menge $\mathscr{A}$ gehörige Hauptteil-Menge* genannt und mit $\mathscr{A}_\gamma$ bezeichnet wird. Zu $\mathscr{A}$ gehören also die Hauptteil-Mengen $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_\alpha$, wobei offenbar $\mathscr{A}_\alpha$ mit $\mathscr{A}$ übereinstimmt: $\mathscr{A}_\alpha = \mathscr{A}$. Ferner gehört für $\gamma < \alpha$ zu jedem Element $a^{(\gamma)} \in \mathscr{A}_\gamma$ eine nicht leere *Nachfolgermenge* von $a^{(\gamma)}$, die von den $(\gamma + 1)$-ten Hauptteilen der mit der Teilfolge $a^{(\gamma)}$ beginnenden Elemente von $\mathscr{A}$ gebildet wird und die wir mit $N(a^{(\gamma)})$ bezeichnen. Es gilt natürlich $N(a^{(\gamma)}) \subset \mathscr{A}_{\gamma+1}$.

Ein wichtiges Beispiel einer Menge, die von α-gliedrigen Folgen gebildet wird, stellt eine nicht leere Punktmenge in einem α-dimensionalen Koordinatenraum dar. In diesem Fall wird ein Punkt a mit einer α-gliedrigen Folge $(a_1, \ldots, a_\alpha)$ identifiziert, wobei die „Koordinaten" $a_1, \ldots, a_\alpha$ reelle oder komplexe Zahlen sind. Der γ-te Hauptteil $(a_1, \ldots, a_\gamma)$, $1 \leqq \gamma < \alpha$, stellt die „Projektion" des Punktes a in den durch die Gleichungen $a_{\gamma+1} = \cdots = a_\alpha = 0$ bestimmten γ-dimensionalen Raum dar.

8. Kartesisches Produkt von Mengen. Kartesische Potenzen. Unter dem *kartesischen Produkt* der Menge A mit der Menge B verstehen wir die Menge der zweigliedrigen Folgen (a, b), worin a alle Elemente von A und b alle Elemente von B durchläuft. Wenn eine der Mengen A, B leer ist, so wird das kartesische Produkt der Menge A und der Menge B als die Nullmenge erklärt.

Durch diese Definition ist genau ein kartesisches Produkt der Menge A mit der Menge B bestimmt. Dieses kartesische Produkt wird mit $A \times B$ bezeichnet. A bzw. B ist der *erste* bzw. *zweite Faktor* des kartesischen Produktes $A \times B$; a bzw. b die *erste* bzw. *zweite Koordinate* seines Elements (a, b). Aus der Definition sehen wir, daß im allgemeinen $A \times B \neq B \times A$ ist.

Unter der *kartesischen zweiten Potenz* oder dem *kartesischen Quadrat* der Menge A verstehen wir das kartesische Produkt $A \times A$. Diese kartesische zweite Potenz ist also die von den zweigliedrigen Folgen (a, b) gebildete Menge, wobei a, b alle Elemente von A durchlaufen. Wenn die Menge A leer ist, so ist auch $A \times A$ leer. Zum Beispiel ist die kartesische zweite Potenz der obigen Menge [3] die Menge aller zweigliedrigen, von gleichen oder verschiedenen natürlichen Zahlen gebildeten Folgen, d. h. die Menge aller Punkte (im Sinn der analytischen ebenen Geometrie) mit natürlichen Koordinaten.

Die Ausdehnung des kartesischen Produkts auf mehr als zwei Faktoren und die der kartesischen zweiten Potenz auf kartesische höhere Potenzen bietet keine Schwierigkeiten und kann wohl vom Leser selbst erarbeitet werden.

Offenbar gehören die kartesischen Produkte zu den oben erwähnten Mengen, die von endlichen Folgen gebildet werden. Wir wollen auf diese Begriffe nicht näher eingehen, da sie in unseren weiteren Ausführungen nicht mehr auftreten werden.

9. α-Mengengebilde. In unseren weiteren Betrachtungen werden wir auch komplizierteren, auf dem Mengenbegriff beruhenden Gebilden begegnen. Wir wollen hier insbesondere die sogenannten α-Mengengebilde erwähnen.

Es sei $\alpha (\geqq 1)$ eine beliebige natürliche Zahl und $((A) =) (A_1, \ldots, A_\alpha)$ eine Folge von nicht leeren Mengen.

Unter einem α-*Mengengebilde bezüglich der Mengenfolge* (A) verstehen wir eine nicht leere Menge $\mathbb{A}$ von folgender Struktur:

Die Elemente $\bar{a} \in \mathbb{A}$ sind α-gliedrige Folgen; das Glied $\bar{a}_\gamma$ vom Rang γ $(= 1, \ldots, \alpha)$ der Folge $\bar{a}$ ist jeweils eine nicht leere Teilmenge in A_γ.

Wir werden insbesondere den Fall zu betrachten haben, daß die Mengen $A_1, \ldots, A_\alpha$ von nicht leeren Mengen gebildet werden, also nicht leere Systeme $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_\alpha$ von nicht leeren Mengen darstellen. Solche α-Mengengebilde $\mathbb{A}$ haben also die folgende Struktur: Die Elemente $\bar{a} \in \mathbb{A}$ sind α-gliedrige Folgen; das Glied $\bar{a}_\gamma$ vom Rang γ $(= 1, \ldots, \alpha)$ der Folge $\bar{a}$ ist jeweils ein nicht leeres System von nicht leeren Mengen, die als Elemente in dem System $\bar{A}_\gamma$ vorkommen.

10. Übungsaufgaben.

1. $A \cup \emptyset = A$; $A \cup A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap A = A$.
2. $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$.
3. Aus $A \subset B$ folgt $A \cup B = B$, $A \cap B = A$. Gilt umgekehrt eine dieser beiden Gleichheiten, so ist $A \subset B$.
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
6. In einer endlichen Menge mit $n (\geqq 0)$ Elementen gibt es genau 2^n verschiedene Teilmengen.
7. Das kartesische Produkt einer endlichen Menge mit $m (\geqq 0)$ und einer solchen mit $n (\geqq 0)$ Elementen enthält genau $m\,n$ Elemente.
8. Eine Teilmenge in dem kartesischen Produkt $A \times B$ braucht nicht das kartesische Produkt einer Teilmenge von A und einer Teilmenge von B zu sein.

§ 2. Zerlegungen in Mengen

Unsere folgenden Ausführungen knüpfen an die Betrachtung einer nicht leeren Menge an, die wir stets mit G bezeichnen wollen.

1. Zerlegung in einer Menge. Unter einer *Zerlegung in* G verstehen wir ein nicht leeres System von nicht leeren, paarweise disjunkten Teilmengen in G.

Der Begriff der Zerlegung in einer Menge gehört zu den wichtigsten, die in sämtlichen weiteren Untersuchungen vorkommen, und bildet die mengen-