5. Doplňkové rozklady

Další situace vytvořené rozklady na množině G ve speciálních vzájemných vztazích se týkají tzv. doplňkových rozkladů. Doplňkové rozklady mají v dalších úvahách velmi důležitou úlohu a proto jim věnujeme zvláštní kapitolu.

5.1. Pojem doplňkových rozkladů

Nechť $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ jsou libovolné rozklady na G.

Podle definice nejmenšího společného zákrytu $[\bar{A}, \bar{B}]$ je každý prvek $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ součtem jistých prvků $\bar{a} \in \bar{A}$ a současně součtem jistých prvků $\bar{b} \in \bar{B}$. Rozklad $\bar{A}$ nazýváme *doplňkový k rozkladu* $\bar{B}$, když každý prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ je incidentní se všemi prvky rozkladu $\bar{B}$, které leží v témž prvku $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ jako prvek $\bar{a}$.

Když např. rozklad $\bar{A}$ je zákryt rozkladu $\bar{B}$, je rozklad $\bar{A}$ doplňkový k $\bar{B}$. Vidíme, že náš nový pojem zobecňuje pojem zákrytu.

Platí tyto výroky:

a) *Rozklad* $\bar{A}$ *je doplňkový k* $\bar{A}$.

b) *Když je rozklad* $\bar{A}$ *doplňkový k* $\bar{B}$, *pak je rozklad* $\bar{B}$ *doplňkový k* $\bar{A}$.

Vskutku, platnost výroku a) je zřejmá. Abychom zjistili platnost výroku b), připusťme předpoklad a odmítněme tvrzení. Pak existuje prvek $\bar{b} \in \bar{B}$, ležící v jistém prvku $\bar{u} \in [\bar{B}, \bar{A}]$, který není incidentní se všemi prvky rozkladu $\bar{A}$ ležícími v $\bar{u}$. Z toho soudíme, že prvek $\bar{b}$ není incidentní s jistým prvkem $\bar{a} \in \bar{A}$ ležícím v $\bar{u}$. Odtud plyne, že prvek $\bar{a}$ není incidentní se všemi prvky rozkladu $\bar{B}$ ležícími v $\bar{u}$, což odporuje předpokladu, že rozklad $\bar{A}$ je doplňkový k $\bar{B}$. Tím je platnost výroku b) zjištěna.

Se zřetelem na platnost výroku b) mluvíme obvykle o doplňkových rozkladech, ale nevyzdvihujeme, který z nich je doplňkový ke kterému.

Na následujícím příkladě poznáme, že *když jsou rozklady* $\bar{A}$, $\bar{B}$ *a současně rozklady* $\bar{B}$, $\bar{C}$ *doplňkové, nemusí být doplňkové rozklady* $\bar{A}$, $\bar{C}$.

Nechť $G = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ je množina skládající se ze šesti prvků. Označme dále:

$$\bar{a}_1 = \{a_1, a_2\}, \quad \bar{a}_2 = \{a_3, a_4\}, \quad \bar{a}_3 = \{a_5, a_6\};$$
$$\bar{b}_1 = \{a_1, a_3, a_5\} \quad \bar{b}_2 = \{a_2, a_4, a_6\};$$
$$\bar{c}_1 = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad \bar{c}_2 = \{a_4, a_5, a_6\},$$

takže na G máme rozklady

$$\bar{A} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}, \quad \bar{B} = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}, \quad \bar{C} = \{\bar{c}_1, \bar{c}_2\}.$$

Každý prvek $\bar{a}_\alpha$ je incidentní s každým prvkem $\bar{b}_\beta$ a každý prvek $\bar{b}_\beta$ je incidentní s každým prvkem $\bar{c}_\gamma$ $(\alpha = 1, 2, 3;\ \beta, \gamma = 1, 2)$. Odtud plyne $[\bar{A}, \bar{B}] = \bar{G}_{\max}$, $[\bar{B}, \bar{C}] = \bar{G}_{\max}$ a vidíme, že rozklady $\bar{A}$, $\bar{B}$ a současně rozklady $\bar{B}$, $\bar{C}$ jsou doplňkové. Dále jsou oba prvky $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ incidentní s prvkem $\bar{a}_2$, takže $[\bar{A}, \bar{C}] = \bar{G}_{\max}$, avšak např. prvky $\bar{a}_1$, $\bar{c}_2$ incidentní nejsou. Z toho vidíme, že rozklady $\bar{A}$, $\bar{C}$ nejsou doplňkové.

5.2. Charakteristické vlastnosti

Nechť i nadále $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ značí rozklady na G.

Když každé dva prvky $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$, ležící v témž prvku nějakého společného zákrytu $\bar{C}$ rozkladů $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou incidentní, pak $\bar{C} = [\bar{A}, \bar{B}]$, a tudíž rozklady $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou doplňkové.

Vskutku, nechť $\bar{C}$ je nějaký společný zákryt rozkladů $\bar{A}$, $\bar{B}$ a nechť $\bar{c} \in \bar{C}$. Pak $\bar{C}$ je součtem jistých prvků rozkladu $[\bar{A}, \bar{B}]$. Nechť $\bar{u}$, $\bar{v}$ jsou prvky rozkladu $[\bar{A}, \bar{B}]$ ležící v $\bar{c}$. Každý prvek $\bar{a}_1 \in \bar{A}$ ležící v $\bar{u}$ je incidentní s některým prvkem $\bar{b} \in \bar{B}$, který pak nutně leží v $\bar{u}$ a tedy v $\bar{c}$. Mají-li rozklady $\bar{A}$, $\bar{B}$ výše popsanou vlastnost, pak prvek $\bar{b}$ je incidentní s každým prvkem $\bar{a}_2 \in \bar{A}$ ležícím v prvku $\bar{v}$, a tedy dvojčlenná posloupnost $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ tvoří vazbu $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ od $\bar{a}_1$ do $\bar{a}_2$. Odtud plyne $\bar{v} = \bar{u}$ a též $\bar{c} = \bar{u}$ a dále $\bar{C} \subset$ $\subset [\bar{A}, \bar{B}]$. Protože každý prvek rozkladu $[\bar{A}, \bar{B}]$ leží v některém prvku rozkladu $\bar{C}$, platí též vztah $\supset$, a proto též rovnost, a tím je důkaz ukončen.

Rozklady $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou doplňkové tehdy a jen tehdy, když pro každé dva prvky $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2 \in \bar{A}$ ležící v témže prvku $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ platí rovnost $\bar{a}_1 \sqsubset \bar{B} = \bar{a}_2 \sqsubset \bar{B}$.

Důkaz. a) Nechť jsou rozklady $\bar{A}$, $\bar{B}$ doplňkové. Když je některý prvek $\bar{b} \in \bar{B}$ incidentní s $\bar{a}_1$, pak leží v $\bar{u}$, a tedy je incidentní s $\bar{a}_2$. Odtud vychází $\bar{a}_1 \sqsubset \bar{B} \subset \bar{a}_2 \sqsubset \bar{B}$ a obdobně plyne $\bar{a}_2 \sqsubset \bar{B} \subset \bar{a}_1 \sqsubset \bar{B}$.

b) Nechť platí hořejší rovnost. Nechť prvky $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$ leží v témž prvku $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$. Prvek $\bar{b}$ je incidentní s některým prvkem $\bar{x} \in \bar{A}$ a tento prvek leží v $\bar{u}$. Tedy máme $\bar{b} \in \bar{x} \sqsubset \bar{B} = \bar{a} \sqsubset \bar{B}$ a odtud vychází, že prvky $\bar{a}$, $\bar{b}$ jsou incidentní.

5.3. Další vlastnosti

Nechť jsou $\bar{A}$, $\bar{B}$ doplňkové rozklady na G.

Pro každé dva prvky $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ vyznačující se tím, že $\bar{a} \subset \bar{u}$, je $\bar{u} =$ $= \mathbf{s}(\bar{a} \sqsubset \bar{B})$.

Vskutku, buďtež $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ libovolné prvky ve zmíněném vzájemném vztahu, takže $\bar{a} \subset \bar{u}$. Každý bod $u \in \bar{u}$ leží v jistém prvku $\bar{b} \in \bar{B}$, který je ovšem částí prvku $\bar{u}$. Protože rozklady $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou doplňkové, jsou prvky $\bar{a}$, $\bar{b}$ incidentní a tedy je $\bar{b}$ prvkem obalu $\bar{a} \sqsubset \bar{B}$, tj. $\bar{b} \in \bar{a} \sqsubset \bar{B}$. Odtud následuje $u \in \bar{b} \subset \mathbf{s}(\bar{a} \sqsubset \bar{B})$ a dále $\bar{u} \subset$

$\subset \mathbf{s}(\bar{a} \sqsubset \bar{B})$. Dále každý bod $a \in \mathbf{s}(\bar{a} \sqsubset \bar{B})$ leží v jistém prvku $\bar{b} \in \bar{B}$ incidentním s $\bar{a}$ a prvek $\bar{b}$ je částí prvku $\bar{u}$. Odtud plyne $a \in \bar{u}$ a tedy též $\mathbf{s}(\bar{a} \sqsubset \bar{B}) \subset \bar{u}$, čímž je důkaz ukončen.

Každý rozklad $\bar{C}$ na G, který vyhovuje vztahům $[\bar{A}, \bar{B}] \geqq \bar{C} \geqq \bar{A}$, je doplňkový k rozkladu $\bar{B}$.

Vskutku, nechť je $\bar{C}$ libovolný rozklad na G, který vyhovuje hořejším vztahům. Pak je (**3.7**.2a; **3.4**): $[\bar{A}, \bar{B}] \geqq [\bar{C}, \bar{B}] \geqq [\bar{A}, \bar{B}]$ a tedy (**3.2**): $[\bar{C}, \bar{B}] = [\bar{A}, \bar{B}]$. Vezměme v úvahu libovolné prvky $\bar{c} \in \bar{C}$, $\bar{b} \in \bar{B}$, které jsou částí téhož prvku $\bar{u} \in [\bar{C}, \bar{B}]$. Z rovnosti $[\bar{C}, \bar{B}] = [\bar{A}, \bar{B}]$ soudíme, že prvky $\bar{c}$, $\bar{b}$ jsou obsaženy v témž prvku $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$. Ze vztahu $\bar{C} \geqq \bar{A}$ plyne, že $\bar{c}$ je součtem některých prvků $\bar{a} \in \bar{A}$. Z toho, že rozklady $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou doplňkové, soudíme, že prvky $\bar{c}$, $\bar{b}$ jsou incidentní. Tím je zjištěno, že rozklady $\bar{C}$, $\bar{B}$ jsou doplňkové.

Dále platí tyto věty:

Když rozklad $\bar{X}$ na G představuje zákryt rozkladu $\bar{A}$, takže $\bar{X} \geqq \bar{A}$, pak je rozklad $\bar{A}$ doplňkový k $(\bar{X}, \bar{B})$.

Když rozklad $\bar{Z}$ na G představuje zjemnění rozkladu $\bar{A}$, tj. $\bar{Z} \leqq \bar{A}$, pak je rozklad $\bar{A}$ doplňkový k $[\bar{Z}, \bar{B}]$.

Důkaz. a) Nechť platí $\bar{X} \geqq \bar{A}$. Vezměme v úvahu libovolný prvek $\bar{u} \in [\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})]$. Máme ukázat, že každé dva prvky $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b}' \in (\bar{X}, \bar{B})$ obsažené v $\bar{u}$ jsou incidentní, tedy $\bar{a} \cap \bar{b}' \neq \emptyset$. Nuže, podle **3.7**.2a při vhodných $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{w} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ jednak máme $\bar{u} \subset \bar{x} \cap \bar{w}$, jednak vzhledem k významu $\bar{b}'$ při vhodných $\bar{x}' \in \bar{X}$, $\bar{b} \in \bar{B}$ platí: $\bar{b}' = \bar{x}' \cap \bar{b}$. Ze vztahů $\bar{x}' \cap \bar{b} \subset \bar{u} \subset \bar{x} \cap \bar{w}$ plyne $\bar{x}' = \bar{x}$ a $\bar{b} \subset \bar{w}$. Dále je $\bar{a} \subset \bar{u} \subset \bar{x} \cap \bar{w}$. Z relací $\bar{a}, \bar{b} \subset \bar{w}$ a z toho, že rozklady $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou doplňkové, soudíme na platnost nerovnosti $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ a ze vztahu $\bar{a} \subset \bar{x}$ na platnost vzorců: $\bar{a} \cap \bar{b} = (\bar{a} \cap \bar{x}) \cap \bar{b} = \bar{a} \cap (\bar{x} \cap \bar{b}) = \bar{a} \cap \bar{b}'$. Vidíme, že $\bar{a} \cap \bar{b}' \neq \emptyset$, jak jsme měli ukázat.

b) Nechť platí $\bar{Z} \leqq \bar{A}$. Pak máme (**3.7**.2a): $[\bar{B}, \bar{A}] \geqq [\bar{Z}, \bar{B}] \geqq \bar{B}$ a správnost tvrzení je zřejmá z hořejší (druhé) věty.

5.4. Modulárnost

Nechť i nadále značí $\bar{A}$, $\bar{B}$ doplňkové rozklady na G.

Když $\bar{X} \geqq \bar{A}$, je rozklad $\bar{B}$ modulární vzhledem k rozkladům $\bar{X}$, $\bar{A}$.

Důkaz. Nechť je $\bar{X}$ libovolný zákryt rozkladu $\bar{A}$, tedy $\bar{X} \geqq \bar{A}$. Se zřetelem na **3.7**.2 vidíme, že máme zjistit platnost vztahu $(\bar{X}, [\bar{A}, \bar{B}]) \leqq [\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})]$. Vezměme v úvahu libovolný prvek $\bar{u}' \in (\bar{X}, [\bar{A}, \bar{B}])$, takže $\bar{u}' = \bar{x} \cap \bar{u}$ při vhodných prvcích $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$. Prvek $\bar{u}$ je součtem jistých prvků rozkladu $\bar{A}$, z nichž některé, které jednotlivě označíme $\bar{a}$, jsou incidentní s $\bar{x}$, kdežto jiné, pokud existují, jsou s $\bar{x}$ disjunktní. Vzhledem k $\bar{X} \geqq \bar{A}$ platí pro každý prvek $\bar{a}$ vztah $\bar{x} \supset \bar{a}$ a vidíme, že $\bar{u}'$ je součtem všech těchto prvků $\bar{a}$, tedy $\bar{u}' = \bigcup \bar{a}$. K ukončení důkazu je třeba ještě zjistit, že se každé dva prvky $\bar{a}$ dají navzájem spojit v rozkladu $(\bar{X}, \bar{B})$. Buďte tedy $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ takové prvky, takže $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \subset \bar{x} \cap \bar{u}$. Protože rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ jsou doplňkové a protože prvky $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ leží v $\bar{u}$, existuje prvek $\bar{b} \in \bar{B}$, který leží v $\bar{u}$ a je s prvky $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ incidentní: $\bar{a}_1 \cap \bar{b} \neq \emptyset$, $\bar{a}_2 \cap \bar{b} \neq \emptyset$; protože mimoto $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ leží v $\bar{x}$, máme $\bar{a}_1 \cap \bar{b} = \bar{a}_1 \cap (\bar{x} \cap \bar{b})$, $\bar{a}_2 \cap \bar{b} = \bar{a}_2 \cap (\bar{x} \cap \bar{b})$. Vidíme, že prvky $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ jsou incidentní s $\bar{x} \cap \bar{b} \in (\bar{X}, \bar{B})$, takže dvojčlenná posloupnost $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ je vazbou $\{\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})\}$ od $\bar{a}_1$ do $\bar{a}_2$. Tím je důkaz ukončen.

Předešlá věta se nedá obrátit. Vskutku, v dalším příkladě ukážeme toto: *Když o dvou rozkladech $\bar{A}_0$, $\bar{B}_0$ na množině G platí, že rozklad $\bar{B}_0$ je modulární vzhledem ke každému zákrytu rozkladu $\bar{A}_0$ a k tomuto rozkladu $\bar{A}_0$, pak rozklady $\bar{A}_0, \bar{B}_0$ nejsou nutně doplňkové.*

Nechť se množina G skládá ze čtyř prvků a_1, a_2, a_3, a_4, tedy $G = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ a nechť $\bar{A}_0, \bar{B}_0$ jsou rozklady na G skládající se z prvků:

$$\bar{a}_1 = \{a_1, a_2\}, \quad \bar{a}_2 = \{a_3, a_4\};$$
$$\bar{b}_1 = \{a_1\}, \quad \bar{b}_2 = \{a_2, a_3\}, \quad \bar{b}_3 = \{a_4\},$$

takže

$$\bar{A}_0 = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}, \quad \bar{B}_0 = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\}.$$

V této situaci platí $[\bar{A}_0, \bar{B}_0] = \{G\}$ a vidíme, že např. prvky $\bar{a}_1$ a $\bar{b}_3$ nemají společné body; z toho plyne, že rozklady $\bar{A}_0, \bar{B}_0$ nejsou doplňkové. Celkem existují dva zákryty rozkladu $\bar{A}_0$, a to: $\bar{X}_1 = \bar{A}_0$, $\bar{X}_2 = \bar{G}_{\max}$ a rozklad $\bar{B}_0$ je modulární jak vzhledem k $\bar{X}_1, \bar{A}_0$, tak i vzhledem k $\bar{X}_2, \bar{A}_0$ (**4.3**).

Se zřetelem na hořejší větu soudíme, že útvary vytvořené rozklady $\bar{X} \geqq \bar{A}$, $\bar{Y} \geqq \bar{B}$ mají všechny vlastnosti modulárních rozkladů, zvláště pak vlastnosti popsané v (**4.3**). Zejména pro rozklady

$$\mathring{A} = (\bar{X}, [\bar{A}, \bar{B}]) = [\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})],$$
$$\mathring{B} = (\bar{Y}, [\bar{B}, \bar{A}]) = [\bar{B}, (\bar{Y}, \bar{A})]$$

platí vzorce (1), (2) uvedené ve zmíněném odstavci **4.3**. Mimoto mají rozklady $\mathring{A}, \mathring{B}$ další vlastnosti, které souvisí s tím, že rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ jsou doplňkové. V tomto směru se spokojíme s poznámkou, že *rozklady $\mathring{A}, \mathring{B}$ jsou doplňkové*; přenecháváme čtenáři, aby se o správnosti tohoto tvrzení přesvědčil použitím vzorce $[\mathring{A}, \mathring{B}] = [\bar{A}, \bar{B}]$.

5.5. Lokální vlastnosti

Nechť $\bar{A}, \bar{B}$ opět značí doplňkové rozklady na G a $\bar{X}, \bar{Y}$ jejich zákryty, takže $\bar{X} \geqq \bar{A}$, $\bar{Y} \geqq \bar{B}$. Rovněž $\mathring{A}, \mathring{B}$ nechť mají týž význam jako v **5.4**.

Dále budiž $a \in G$ libovolný bod a $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{y} \in \bar{Y}$, $\bar{b} \in \bar{B}$ ony prvky uvedených rozkladů, v nichž bod a leží.

Především *se rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ v důsledku modulárnosti vyznačují tím, že obaly* $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{A}$, $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B}$ *jsou spřažené.*

Dále vezměme v úvahu tyto rozklady v G:

$$\bar{X}^a = \bar{x} \sqsubset \bar{A} \; (= \bar{A} \sqcap \bar{x}), \quad \bar{Y}^a = \bar{y} \sqsubset \bar{B} \; (= \bar{B} \sqcap \bar{y});$$

vidíme, že rozklad $\bar{X}^a$ leží na $\bar{x}$ a obsahuje $\bar{a}$ jako svůj prvek. Podobně je tomu s rozkladem $\bar{Y}^a$ a prvky $\bar{y}$, $\bar{b}$.

Ukážeme, že *rozklady $\bar{X}^a$, $\bar{Y}^a$ jsou adjungované vzhledem k $\bar{a}$, $\bar{b}$.* Za tím účelem máme zjistit, že platí

$$\mathbf{s}(\bar{b} \sqsubset \bar{X}^a \sqcap \bar{y}) = \mathbf{s}(\bar{a} \sqsubset \bar{Y}^a \sqcap \bar{x}).$$

Nuže, buďte $\mathring{a} \in \mathring{A}$, $\mathring{b} \in \mathring{B}$ prvky obsahující bod a. Protože podle **5.3** jsou rozklady $\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})$ doplňkové a $\mathring{A}$ je jejich nejmenším společným zákrytem, máme (podle **5.3**)

$$\mathring{a} = \mathbf{s}((\bar{b} \cap \bar{x}) \sqsubset \bar{A}).$$

Dále s přihlédnutím ke vztahu $\bar{X} \geqq \bar{A}$ vidíme, že se obal $(\bar{b} \cap \bar{x}) \sqsubset \bar{A}$ skládá právě z oněch prvků rozkladu $\bar{A}$, které leží v $\bar{x}$ a jsou incidentní $\bar{b}$, takže $(\bar{b} \cap \bar{x}) \sqsubset \bar{A} = \bar{b} \sqsubset \bar{X}^a$. Odtud následuje $\mathbf{s}(\bar{b} \sqsubset X^a) = \mathring{a}$ a dále

$$\mathbf{s}(\bar{b} \sqsubset \bar{X}^a \sqcap \bar{y}) = \mathbf{s}(\bar{b} \sqsubset \bar{X}^a) \cap \bar{y} = \mathring{a} \cap \bar{y} \in (\bar{Y}, \mathring{A}),$$

přičemž poslední vztah je odůvodněn platností vzorců $\mathring{a} \cap \bar{y} \supset \{a\} \neq \emptyset$. Vidíme, že množina $\mathbf{s}(\bar{b} \sqsubset \bar{X}^a \sqcap \bar{y})$ je prvkem rozkladu $(\bar{Y}, \mathring{A})$, a to oním, v němž leží bod a. Podobně zjistíme, že množina $\mathbf{s}(\bar{a} \sqsubset \bar{Y} \sqcap \bar{x})$ je prvkem rozkladu $(\bar{X}, \mathring{B})$ obsahujícím bod a. Odtud a ze vzorce $(\bar{X}, \mathring{B}) = (\bar{Y}, \mathring{A})$ plyne rovnost, kterou jsme chtěli dokázat.

5.6. Cvičení

1. Když jsou rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ doplňkové, můžeme vzorce $(\mathring{A}, \mathring{B}) = (\bar{X}, \mathring{B}) = (\bar{Y}, \mathring{A}) = ((\bar{X}, \bar{Y}), [\bar{A}, \bar{B}])$ platné pro modulární rozklady $\bar{X} \geqq \bar{A}$, $\bar{Y} \geqq \bar{B}$ (viz **4.3.**(2)), doplnit rovnosti: $(\mathring{A}, \mathring{B}) = [(\bar{X}, \bar{B}), (\bar{Y}, \bar{A})]$. V tomto případě jsou též rozklady $(\bar{X}, \bar{B})$, $(\bar{Y}, \bar{A})$ doplňkové.

2. Ukažte, že na množině o čtyřech prvcích existují vedle dvojic skládajících se vždy ze zákrytu a zjemnění jenom tyto dvojice doplňkových rozkladů: 1. Dvojice rozkladů o dvou prvcích, z nichž každý se skládá ze dvou bodů množiny. 2. Dvojice rozkladů, které jsou disjunktní a z nichž každý má tři prvky.