Picardova metóda postupných aproximácií na riešenie d. rovnice

In: Otakar Borůvka (author): Diferenciálne rovnice. [Vysokoškolské učebné texty. Univerzita Komenského v Bratislave, Prírodovedecká fakulta]. (Slovak). Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1961. pp. 105--133.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401396

pričom $B > 0$ značí vhodnú konštantu. Potom dostaneme rovnaký výsledok.

10. Picardova metóda postupných aproximácií na riešenie d. rovnice

$$y' = f(x, y)$$

56. Princíp metódy

E. Picard vynašiel k štúdiu d. rovníc obyčajných a parciálnych tzv. metódu postupných aproximácií [Journal de mathématiques pures et appliqées, VI, (1890)], ktorú neskoršie zdokonalil E. Lindelöf [ten istý časopis, X. (1894)]. Táto metóda nielenže vedie k dôkazu existencie riešenia, ale je užitočná tiež i pre prax, lebo v konkrétnych prípadoch umožňuje nájsť aspoň približné riešenie danej d. rovnice. Tiež treba pripomenúť, že použitie tejto metódy nie je obmedzené len na d. rovnice prvého rádu, ale dá sa s vhodnou obmenou aplikovať i na d. rovnice vyšších rádov.

Uvažujme opäť d. rovnicu

$$y' = f(x, y) \tag{a}$$

pritom o funkcii $f(x, y)$ predpokladajme, že je spojitá v dv. intervale

$$D : |x - \xi| \leq a, \quad |y - \eta| \leq b$$

pričom (ξ, η) je nejaký bod a a, b sú kladné čísla.

Okrem toho predpokladajme navyše, že funkcia $f(x, y)$ spĺňa v D L. podmienku, ktorej konštantu označme L (> 0), takže pre každé dva body (x, y_1), $(x, y_2) \in D$ platí:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2| \tag{1}$$

Potom princíp Picardovej metódy postupných aproximácií je tento:

Zvolíme ľubovoľnú funkciu $y_0(x)$, tzv. počiatočnú funkciu, definovanú v intervale $[\xi, \xi + a]$, ktorá má určité vlastnosti, a vychádzajúc z nej, definujeme postupne ďalšie funkcie podľa vzorcov

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \eta + \int_\xi^x f\big(t, y_0(t)\big)\, dt \\ y_2(x) &= \eta + \int_\xi^x f\big(t, y_1(t)\big)\, dt \end{aligned} \tag{2}$$

všeobecne . . . .

$$y_k(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f\big(t,\ y_{k-1}(t)\big)\, dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots ,$$

takže ako hovoríme, každá funkcia $y_k(x)$ vznikne z predchádzajúcej Picardovou transformáciou, ktorá patrí k funkcii $f(x, y)$ a k bodu (ξ, η) stručnejšie: Picardovou transformáciou.

Postupnosť funkcií

$$y_0(x),\ y_1(x),\ y_2(x),\ \dots, \tag{3}$$

sa nazýva Picardovou postupnosťou, patriacou k d. rovnici (a), k bodu (ξ, η) a k počiatočnej funkcii $y_0(x)$, stručnejšie: Picardovou postupnosťou. Picardova postupnosť je počiatočnou funkciou $y_0(x)$ jednoznačne určená.

O funkciách (3) ukážeme, že sú vzorcami (2) definované v určitom spoločnom intervale $[\xi, \xi + \rho]$ a že postupnosť (3) rovnomerne konverguje v tomto intervale k určitej funkcii $y(x)$, ktorá je riešením d. rovnice (a) a v čísle ξ nadobúda hodnotu η. Funkcia $y(x)$ je potom zrejme jediným riešením d. rovnice (a), definovaným v intervale $[\xi, \xi + \rho]$, ktoré prechádza bodom (ξ, η), pretože, podľa predpokladu, funkcia $f(x, y)$ spĺňa v D L. podmienku.

57. Dôkaz existenčnej teorémy metódou postupných aproximácií

Ukážeme, že za predpokladov o funkcii $f(x, y)$ uvedených v predchádzajúcom odseku, existuje riešenie d. rovnice (a), definované v intervale $[\xi, \xi + \rho]$, ktoré má v čísle ξ hodnotu η. Pritom ρ značí určité kladné číslo, ktoré sa aspoň rovná najväčšiemu číslu α, ktoré spĺňa nerovnosti

$$\alpha \leqq a, \quad \alpha M \leqq b$$

kde M je najväčšia hodnota funkcie $|f(x, y)|$ v D. Toto riešenie je teda jediné, ako sme už podotkli.

Zvoľme teda ľubovoľnú funkciu $y_0(x)$, definovanú v intervale $[\xi, \xi + a]$, ktorá má tieto vlastnosti:

1. V čísle ξ má hodnotu η
2. všetky jej hodnoty ležia v intervale $[\eta - b, \eta + b]$
3. má všade deriváciu.

Za funkciu $y_0(x)$ môžeme teda zvoliť napr. konštantu η, ktorá má vlastnosti 1 - 3. Nech zvolíme funkciu $y_0(x)$ akokoľvek, v dôsledku vlastností 1 - 3, funkcia

$$\frac{y_0(x) - \eta}{x - \xi}, \tag{4}$$

ktorej hodnotu v čísle ξ definujeme hodnotou $y_0'(\xi)$, je v intervale $[\xi, \xi + a]$ spojitá a teda ohraničená.

Vychádzajúc z funkcie $y_0(x)$ definujeme pomocou vzorcov (2) funkcie (3).

O funkciách (3) predovšetkým ukážeme, že sú vzorcami (2) definované v istom intervale $[\xi, \xi + \rho]$, kde $\rho \geqq \alpha$ a že majú v tomto intervale vlastnosti 1 - 3.

Aby sme to ukázali, stačí zistiť, že každá funkcia $y_k(x)$ je definovaná vzorcami (2) v určitom intervale $[\xi, \xi + \rho_k]$, kde $\rho_k \geqq \alpha$, v ktorom má tiež vlastnosti 1 - 3. Lebo potom postupnosť čísel

$$\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots \tag{5}$$

má určitú dolnú hranicu $\rho \geqq \alpha$ a v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ sú všetky funkcie (3) definované a majú v ňom vlastnosti 1 - 3.

K dôkazu použijeme metódu úplnej indukcie. Označme $\rho_0 = a$. Funkcia $y_0(x)$ je teda definovaná v intervale $[\xi, \xi + \rho_0]$, kde $\rho_0 \geqq \alpha$ a má v ňom vlastnosti 1 - 3.

Predpokladajme, že funkcia $y_{k-1}(x)$, kde $k \geqq 1$, je definovaná v určitom intervale $[\xi, \xi + \rho_{k-1}]$, kde $\rho_{k-1} \geqq \alpha$ a má v ňom vlastnosti 1 - 3. Potom funkcia $f(t, y_{k-1}(t))$ je spojitá v intervale $[\xi, \xi + \rho_{k-1}]$ a preto vzorec (2), pomocou ktorého je definovaná funkcia $y_k(x)$, má pre každé x v tomto intervale zmysel. Funkcia $y_k(x)$ je teda tiež definovaná pre $x \in [\xi, \xi + \rho_{k-1}]$ a je zrejmé, že má v tomto intervale vlastnosti 1 a 3. Nech ρ_k je najväčšie číslo $\leqq \rho_{k-1}$ tej vlastnosti, že pre $x \in [\xi, \xi + \rho_k]$ je $|y_k(x) - \eta| \leqq b$. Toto číslo existuje, pretože funkcia $|y_k(x) - \eta|$ je spojitá v intervale $[\xi, \xi + \rho_{k-1}]$. Zrejme má funkcia $y_k(x)$ v intervale $[\xi, \xi + \rho_k]$ všetky vlastnosti 1 - 3, takže treba ešte dokázať, že je $\rho_k \geqq \alpha$. Vskutku, pre $x \in [\xi, \xi + \alpha]$ zo vzorcov (2) vyplýva:

$$|y_k(x) - \eta| = \left|\int_{\xi}^{x} f(t, y_{k-1}(t))dt\right| \leqq \int_{\xi}^{x} |f(t, y_{k-1}(t))|dt \leqq M(x - \xi) \leqq$$

$$\leqq M\alpha \leqq b$$

takže skutočne je $\rho_k \geqq \alpha$.

Všimnime si, že voľbou funkcie $y_0(x)$ sú jednoznačne určené všetky ďalšie funkcie (3), teda tiež všetky čísla (5) a teda i číslo ρ.

Doteraz sme nepoužili to, že funkcia $f(x, y)$ spĺňa v dv. intervale D L. podmienku. Až teraz použijeme tento predpoklad.

Ukážme, že pre $x \in [\xi, \xi + \rho]$ a pre $k = 1, 2, \dots$ platí nerovnosť

$$| y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leqq K L^{k-1} \frac{(x - \xi)^k}{k!} \qquad (6)$$

kde $K \geqq 0$ je konštanta (a to $= M_o + N_o$. kde M_o značí maximum funkcie $|f(t, y_o(t))|$ a N_o maximum absolútnej hodnoty funkcie (4) v intervale $[\xi, \xi + \rho]$).

K dôkazu opäť použijeme metódu úplnej indukcie.

Nech teda $x \in [\xi, \xi + \rho]$ je ľubovoľné číslo.

Predovšetkým je

$$| y_1(x) - y_o(x)| = | (y_1(x) - \eta) - (y_o(x) - \eta)| \leqq | y_1(x) - \eta | + | y_o(x) - \eta |$$

Z prvého vzorca (2) vidíme, že prvý sčítanec na pravej strane tejto nerovnosti je $\leqq M_o(x - \xi)$ a druhý je zrejme $\leqq N_o(x - \xi)$. Odtiaľ vyplýva, že nerovnosť (6) je splnená pre $k = 1$. Ďalej máme pre $k \geqq 1$:

$$| y_{k+1}(x) - y_k(x)| = \left| \int_\xi^x \left(f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t))\right) dt \right| \leqq \int_\xi^x | f(t,$$

$$y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t))| \, dt \leqq L \int_\xi^x | y_k(t) - y_{k-1}(t)| \, dt$$

Ak teda nerovnosť (6) platí pre niektoré $k \geqq 1$ je

$$| y_{k+1}(x) - y_k(x) | \leqq K \cdot L^k \frac{1}{k!} \int_\xi^x (t - \xi)^k \, dt = K L^k \frac{(x - \xi)^{k+1}}{(k+1)!}$$

takže potom platí i pre $k + 1$ a tým je dôkaz platnosti nerovnosti (6) realizovaný.

Z nerovnosti (6) vidíme, že pre $x \in [\xi, \xi + \rho]$, absolútne hodnoty členov nekonečného radu

$$y_o(x) + [y_1(x) - y_o(x)] + [y_2(x) - y_1(x)] + \dots \qquad (7)$$

neprevyšujú absolútne hodnoty rovnoľahlých členov nekonečného radu

$$y_o(x) + \frac{K}{L} \frac{L(x - \xi)}{1!} + \frac{K}{L} \frac{[L(x - \xi)]^2}{2!} + \dots,$$

ktorý zrejme konverguje a má súčet

$$Y(x) = y_o(x) + \frac{K}{L} \left[e^{L(x - \xi)} - 1 \right]$$

Je zrejmé, že absolútne hodnoty členov nekonečného radu (7) pre $x \in [\xi, \xi + \rho]$ neprevyšujú rovnoľahlé členy konvergentného radu s nezápornými členmi

$$(|\eta| + N_0 \rho) + \frac{K}{L} \cdot \frac{L\rho}{1!} + \frac{K}{L} \frac{(L\rho)^2}{2!} + \ldots .$$

Odtiaľ vyplýva (pozri napr. K. Petr, Počet diferenciální, str. 177), že nekonečný rad (7) rovnomerne konverguje v intervale $[\xi, \xi + \rho]$.

Všimnime si, že pre $k = 1, 2, \ldots$ a pre $x \in [\xi, \xi + \rho]$ je

$$y_k(x) = y_0(x) + [y_1(x) - y_0(x)] + \ldots + [y_k(x) - y_{k-1}(x)]$$

odtiaľ a zo vzorca (6) vyplýva

$$| y_k(x) - y_0(x) | \leqq \frac{K}{L} \frac{L(x-\xi)}{1!} + \ldots + \frac{K}{L} \frac{[L(x-\xi)]^k}{k!}$$

a vidíme, že platí nerovnosť

$$| y_k(x) - y_0(x) | \leqq Y(x) - y_0(x)$$

Označme súčet nekonečného radu (7) $y(x)$ takže máme

$$y(x) = \lim_{k \to \infty} y_k(x) \tag{8}$$

pričom konvergencia je v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ rovnomerná.

Funkcia $y(x)$ má v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ predovšetkým vlastnosti 1 a 2, pretože tieto vlastnosti majú všetky funkcie (3).

Treba ešte ukázať, že funkcia $y(x)$ má v každom čísle $x \in [\xi, \xi + \rho]$ deriváciu, ktorej hodnota je $f(x, y(x))$.

Predovšetkým ľahko vidíme, že pre $x \in [\xi, \xi + \rho]$ platí

$$\lim_{k \to \infty} f(x, y_k(x)) = f(x, y(x)) \tag{9}$$

pričom konvergencia je rovnomerná. Vskutku, ak totiž zvolíme číslo $\varepsilon > 0$, existuje číslo $\delta > 0$, ktoré sa vyznačuje tým, že pre každé dva body (x, y_1), $(x, y_2) \in D$, pre ktoré platí $| y_1 - y_2 | < \delta$ je $| f(x, y_1) - f(x, y_2) | < \varepsilon$ lebo funkcia $f(x, y)$ je v uzavretom dv. intervale D (spojitá a teda) rovnomerne spojitá; okrem toho je pre celkom všetky indexy k a pre všetky $x \in [\xi, \xi + \rho]$: $| y_k(x) - y(x) | < \delta$, pretože v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ platí rovnomerne rovnosť (8) a odtiaľ vyplýva naše tvrdenie.

Vzhľadom na to, že v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ platí rovnomerne rovnosť (9) pre každé x v tomto intervale je

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\xi}^{x} f(t, y_k(t))\, dt = \int_{\xi}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

(pozri K. Petr, Počet integrální, II. vyd. str. 176) a odtiaľ vzhľadom na vzťahy

$$y(x) = \lim_{k \to \infty} y_{k+1}(x) = \lim_{k \to \infty} \left(\eta + \int_{\xi}^{x} f(t, y_k(t))\, dt \right) =$$

$$= \eta + \lim_{k \to \infty} \int_{\xi}^{x} f(t, y_k(t))\, dt$$

vychádza

$$y(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

Pretože funkcia $f(t, y(t))$ je v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ spojitá, vyplýva z tejto nerovnosti pre každé číslo $x \in [\xi, \xi + \rho]$:

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

Tým je dôkaz ukončený.

<u>Poznámka</u>. Riešenie definované Picardovou metódou postupných aproximácií je definované v určitom intervale $[\xi, \xi + \rho]$ a dĺžka ρ tohto intervalu závisí, ako vieme z predchádzajúceho odseku, len od voľby počiatočnej funkcie $y_0(x)$. Je potrebné odhadnúť túto dĺžku.

Jeden odhad sme už urobili v predchádzajúcom odseku. Zistili sme totiž, že je

$$\rho \geqq \alpha$$

pričom α je najväčšie číslo vyhovujúce nerovnostiam:

$$\alpha \leqq a, \qquad \alpha M \leqq b$$

Inými slovami, ak $M = 0$, je $\rho = a$, ako $M > 0$ je ρ rovné aspoň najmenšiemu z čísel a, $\frac{b}{M}$.

Iný odhad urobil Lindelöf [v cit. práci v časopise Journ. de math. pures et appl.]

Označme K_o najväčšiu hodnotu funkcie $|f(x, \eta)|$ pre $x \in [\xi, \xi + a]$ a L Lipschitzovu konštantu podmienky (1). Lindelöf ukázal, že je $\rho \geqq \beta$, kde β je najmenšie z oboch čísel.

$$a, \quad \frac{1}{L} \log \left(1 + \frac{bL}{K_o}\right)$$

v prípade $K_o = 0$ je $\rho = a$.

58. Vlastnosti Picardových postupností

Teraz sa budeme zaoberať vlastnosťami Picardových postupností patriacich k diferenciálnej rovnici

$$y' = f(x, y) \tag{a}$$

pričom budeme o funkcii $f(x, y)$ len predpokladať, že je spojitá a nebudeme na ňu klásť, aspoň zatiaľ, ďalšie predpoklady. Najmä nebudeme požadovať, aby spĺňala L. podmienku, prípadne aby mala vlastnosti, ktoré by zaručovali rovnomernú konvergenciu Picardovej postupnosti.

Predpokladajme teda, že funkcia $f(x, y)$ je spojitá v dvojrozmernom intervale

$$D : |x - \xi| \leqq a, \quad |y - \eta| \leqq b$$

Obmedzíme sa opäť na štúdium vlastností Picardových postupností pre $x \geqq \xi$.

Nech postupnosť funkcií

$$y_0, y_1, y_2, \dots \tag{1}$$

je Picardovou postupnosťou, stručne P. postupnosťou patriacou k d. rovnici (a), k bodu (ξ, η) a k počiatočnej funkcii y_0. O počiatočnej funkcii y_0 predpokladajme, že má vlastnosti 1, 2, 3 predchádzajúceho odseku, teda najmä, že má v intervale $[\xi, \xi + a]$ všade deriváciu a navyše, že táto derivácia y_0' je všade spojitá. V predchádzajúcom odseku sme videli, že všetky funkcie P. postupnosti sú definované v určitom intervale $[\xi, \xi + \rho]$, kde $\rho \geqq \alpha$. Pripomeňme si, že pre $k = 1, 2, \dots$ je

$$y_k(x) = \eta + \int_\xi^x f\big(t, y_{k-1}(t)\big)\, dt \tag{2}$$

Najväčšiu hodnotu funkcie $|f(x, y)|$ v dv. intervale D označíme opäť písmenom M.

Predovšetkým ľahko vidíme, že keď P. postupnosť (1) rovnomerne konverguje v nejakom intervale $[\xi, \xi + \sigma]$ kde je $0 < \sigma \leqq \rho$, potom jej limita je riešením diferenciálnej rovnice (a).

Vskutku, lebo podľa vzorca (2) pre $x \in [\xi, \xi+\sigma]$ máme:

$$y(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} \lim_{k\to\infty} f(t, y_{k-1}(t))\,dt = \eta + \int_{\xi}^{x} f(t, y(t))\,dt$$

kde $y(x)$ značí limitu P. postupnosti a odtiaľ vyplýva tvrdenie.

Ďalej ľahko ukážeme, že funkcia P. postupnosti (1) sú v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ rovnomerne ohraničené a rovnomocne spojité. Vskutku, zo vzorca (2) vyplýva pre každé $k = 1, 2, \ldots$ a $x \in [\xi, \xi + \rho]$:

$$|y_k(x) - \eta| \leqq (x - \xi)\,M \leqq \rho\,M;$$

odtiaľ vychádza

$$|y_k(x)| \leqq |\eta| + \rho\,M$$

a tým je ukázané, že funkcie y_k sú v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ rovnomerne ohraničené. To isté platí o všetkých funkciách postupnosti (1), pretože funkcia y_0 je v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ ohraničená. Nech ďalej $\varepsilon > 0$ značí ľubovoľné kladné číslo. Zvoľme $\delta > 0$ ľubovoľne v prípade $M = 0$ a $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{M}$ v prípade $M > 0$. Potom pre $k = 1, 2, \ldots$ a každé dve čísla x', $x'' \in [\xi, \xi + \rho]$, pre ktoré je $|x' - x''| < \delta$, vyplýva zo vzorca (2).

$$|y_k(x') - y_k(x'')| = \left| \int_{x''}^{x'} f(t, y_{k-1}(t))\,dt \right| \leqq |x' - x''| \,.\, M < \delta M < \varepsilon$$

a odtiaľ vidíme, že funkcie y_k sú v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ rovnomocne spojité. To isté platí o všetkých funkciách P. postupnosti (1), lebo funkcia y_0 je v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ rovnomerne spojitá.

Z Ascoliovej vety usudzujeme, že z P. postupnosti (1) môžeme vybrať čiastočnú postupnosť, ktorá rovnomerne konverguje v intervale $[\xi, \xi + \sigma]$ Súčasne vidíme, že P. postupnosť (1) v ľubovoľnom intervale $[\xi, \xi + \sigma]$, kde $0 < \sigma \leqq \rho$, rovnomerne konverguje a jej limita je riešením diferenciálnej rovnice (a), ak je v intervale $[\xi, \xi + \sigma]$ monotónna, alebo ak všetky jej čiastočné postupnosti, ktoré v intervale $[\xi, \xi + \sigma]$ rovnomerne konvergujú, majú tú istú limitu.

Nech ďalej

$$z_0, z_1, z_2, \ldots \qquad (3)$$

je postupnosť funkcií definovaných v intervale $[\xi, \xi + \sigma]$ takto:

$$z_k(x) = f\big(x, y_{k-1}(x)\big) - f\big(x, y_k(x)\big)$$

$$z_o(x) = y_o'(x) - f\big(x, y_o(x)\big) \qquad (4)$$

kde $k = 1, 2, \ldots$. Funkciu z_{k-1} budeme nazývať <u>zvyšok funkcie</u> y_{k-1}, takže (3) je postupnosť zvyškov funkcií P. postupnosti (1).

Všimnime si, že pre $k = 1, 2, \ldots$ a pre $x \in [\xi, \xi + \rho]$ platí:

$$y_{k-1}' = f(x, y_{k-1}) + z_{k-1}$$

$$\delta y_k = \int_{\xi}^{x} z_{k-1}(t)\, dt \qquad (5)$$

kde

$$\delta y_k = y_{k-1} - y_k$$

Predovšetkým si všimnime, že ak sú všetky zvyšky (3) rovnaké, potom sa rovnajú nule a funkcia y_o je riešením diferenciálnej rovnice (a). Vskutku predpokladajme, že sú všetky zvyšky rovnaké a označme z ich spoločnú hodnotu. Ak teraz vo vzorci (4) kladieme postupne $k = 1, 2, \ldots, n$, kde n značí ľubovoľné prirodzené číslo, ak sčítame výsledky, dostaneme

$$n z = f(x, y_o) - f(x, y_n)$$

Odtiaľ vyplýva, pre každé $x \in [\xi, \xi + \rho]$

$$n |z| \leqq 2 M$$

To však je možné len pre $z = 0$.

Z druhej rovnice (4) vidíme, že funkcia y_o je riešením d. rovnice (a).

O funkciách postupnosti zvyškov (3) dokážeme ďalej, že sú tiež v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ rovnomerne ohraničené a rovnomocne spojité.

Že sú rovnomerne ohraničené, vidíme priamo zo vzorcov (4). Aby sme dokázali, že sú rovnomocne spojité, zvoľme ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$. Pretože funkcia $f(x, y)$ je v dv. intervale D (spojitá a teda) rovnomerne spojitá, existuje číslo $\delta' > 0$ také, že pre každé dva body (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in D$, ktoré spĺňajú nerovnosť $\max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) < \delta'$ platí $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pretože funkcie y_ν P. postupnosti sú v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ rovnomocne spojité, existuje číslo $\delta'' > 0$ tej vlastnosti, že pre každé dve čísla $x', x'' \in [\xi, \xi + \rho]$, pre ktoré je $|x' - x''| < \delta''$ a pre všetky čísla $\nu = 0, 1, \ldots$ je $|y_\nu(x') - y_\nu(x'')| < \delta'$. Označme $\delta = \min(\delta', \delta'')$. Potom pre každé dve čísla $x', x'' \in [\xi, \xi + \rho]$; pre ktoré platí $|x' - x''| < \delta$, je $\max(|x' - x''|, |y_\nu(x') - y_\nu(x'')|) < \delta'$ a teda tiež

$$| z_k(x') - z_k(x'') | = \left| \left\{ f(x', y_{k-1}(x')) - f(x', y_k(x')) \right\} - \left\{ f(x'', y_{k-1}(x'')) - f(x'', y_k(x'')) \right\} \right| \leqq | f(x', y_{k-1}(x')) - f(x'', y_{k-1}(x''))| +$$

$$+ | f(x', y_k(x')) - f(x'', y_k(x''))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pre $k = 1, 2, \ldots$

Funkcie $z_1, z_2, \ldots$ sú teda v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ rovnomocne spojité a to isté platí o všetkých funkciých postupnosti (3), pretože funkcia z_0 je v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ rovnomerne spojitá.

O postupnosti zvyškov (3) platí teda tiežm že z nej možno vybrať čiastočnú postupnosť, ktorá rovnomerne konverguje v intervale $[\xi, \xi + \rho]$. Súčasne vidíme, že postupnosť zvyškov (3) rovnomerne konverguje (neskoršie zistíme, že k 0) v ľubovoľnom intervale $[\xi, \xi + \sigma]$, kde $0 < \sigma \leqq \rho$, ak je v intervale $[\xi, \xi + \sigma]$ monotónna, lebo ak všetky jej čiastočné postupnosti, ktoré rovnomerne konvergujú v intervale $[\xi, \xi + \sigma]$, majú tú istú limitu.

59. Č i a s t o č n é   p o s t u p n o s t i

V predchádzajúcom odseku sme zistili, že z P. postupnosti (1) a podobne z postupnosti zvyškov (3) môžeme vybrať čiastočnú postupnosť, ktorá rovnomerne konverguje v intervale $[\xi, \xi + \rho]$. Teraz sa budeme zaoberať vlastnosťami čiastočných postupností, vybraných z P. postupností (1), alebo z postupností zvyškov (3), ktoré sú rovnomerne konvergentné v intervale $[\xi, \xi + \rho]$. Kvôli stručnosti budeme hovoriť o častiach P. postupnosti alebo postupnosti zvyškov, alebo tiež o čiastočných P. postupnostiach a čiastočných postupnostiach zvyškov, majúc na mysli čiastočné postupnosti vybrané z P. postupnosti (1) alebo postupnosti zvyškov (3).

Predovšetkým zavedieme niekoľko názvov.

Nech

$$y_{k_1}, y_{k_2}, \ldots \qquad (6)$$

je nejakou čiastočnou P. postupnosťou a m ľubovoľné celé nezáporné číslo.

Čiastočnú P. postupnosť

$$y_{k_1+m}, \quad y_{k_2+m}, \; \ldots \tag{7}$$

nazveme posunutou o m členov vzhľadom na čiastočnú postupnosť (6).

Podobne definujeme posunutú čiastočnú postupnosť zvyškov.

Dve čiastočné postupnosti, z ktorých jedna je časťou P. postupnosti (1) a druhá časťou postupnosti zvyškov (3), nazývame rovnoľahlými a o každej hovoríme, že je rovnoľahlá s druhou, keď indexy členov jednej a druhej čiastočnej postupnosti sú rovnaké.

Predovšetkým ukážeme, že ak čiastočná P. postupnosť (6) v intervale $[\xi, \xi+\rho]$ rovnomerne konverguje, potom tiež posunutá čiastočná postupnosť (7) v intervale $[\xi, \xi+\rho]$ rovnomerne konverguje a limita posunutej postupnosti Y_m vznikne z limity pôvodnej čiastočnej postupnosti (6) Y_o m postupnými Picardovými transformáciami.

Vskutku, predpokladajme, že čiastočná P. postupnosť (6) rovnomerne konverguje v intervale $[\xi, \xi+\rho]$. Ak $m = 0$, je tvrdenie správne. Nech teda $m > 0$ a predpokladajme, že tvrdenie je správne pre čiastočnú postupnosť posunutú o $m-1$ členov, takže v intervale $[\xi, \xi+\rho]$ rovnomerne existuje $\lim\limits_{n\to\infty} y_{k_n+m-1}(x) = Y_{m-1}(x)$ a funkcia Y_{m-1} vznikne z Y_o $m-1$ postupnými Picardovými transformáciami.

Podľa vzorca (3) máme

$$y_{k_n+m}(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f\big(t, y_{k_n+m-1}(t)\big)\, dt \tag{8}$$

Z toho, že funkcia $f(x, y)$ je v dv. intervale D spojitá a z nášho predpokladu vyplýva, že v intervale $[\xi, \xi+\rho]$ platí rovnomerne:

$$\lim_{n\to\infty} f\big(t, y_{k_n+m-1}(t)\big) = f\big(t, Y_{m-1}\big)$$

a odtiaľ ďalej vyplýva, že existuje rovnomerne:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\xi}^{x} f\big(t, y_{k_n+m-1}(t)\big)\, dt = \int_{\xi}^{x} f\big(t, Y_{m-1}(t)\big)\, dt$$

Z rovnosti (8) potom vyplýva, že v intervale $[\xi, \xi+\rho]$ existuje rovnomerne $\lim\limits_{n\to\infty} y_{k_n+m}(x) \left[= Y_m(x)\right]$ a je

$$Y_m(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f\big(t, Y_{m-1}(t)\big)\, dt$$

takže funkcia Y_m vznikne z Y_{m-1} Picardovou transformáciou. Tým je tvrdenie dokázané.

Vidíme najmä, že limity jednotlivých čiastočných postupností, posunutých vzhľadom na čiastočnú postupnosť (6) o $m = 0, 1, 2, \dots$ členov, ktoré postupne označíme

$$Y_0, Y_1, Y_2, \dots \tag{9}$$

tvoria P. postupnosť patriacu k počiatočnej funkcii Y_0.

Ďalej ukážeme, že za toho istého predpokladu o rovnomernej konvergencii čiastočnej P. postupnosti (6), tiež čiastočná postupnosť zvyškov, rovnoľahlá s čiastočnou P. postupnosťou (7)

$$z_{k_1+m}, z_{k_2+m}, \dots \tag{10}$$

pre $m = 0, 1, 2, \dots$ v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ rovnomerne konverguje a jej limita Z_m je zvyšok funkcie Y_m.

Vskutku, postupnosť (10) spĺňa predpoklady Ascoliovej vety, a teda môžeme z nej vybrať čiastočnú postupnosť, ktorá rovnomerne konverguje v intervale $[\xi, \xi + \rho]$.

Nech

$$z_{\ell_1+m}, z_{\ell_2+m}, \dots$$

je ľubovoľná taká čiastočná postupnosť a nech X_m značí jej limitu. Postupnosť

$$y_{\ell_1+m}, y_{\ell_2+m}, \dots$$

ako časť postupnosti (7) rovnomerne konverguje v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ a má teda limitu Y_m. Podľa prvého vzorca (5) máme pre $j = 1, 2, \dots$ a pre $x \in [\xi, \xi + \rho]$:

$$y'_{\ell_j+m} = f(x, y_{\ell_j+m}) + z_{\ell_j+m}$$

a odtiaľ vyplýva

$$Y'_m = f(x, Y_m) + X_m$$

Tento vzorec ukazuje, že X_m je zvyšok funkcie Y_m. Tým je zistené, že každá časť čiastočnej postupnosti zvyškov (10), ktorá rovnomerne konverguje v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ má tú istú limitu X_m. Z toho usudzujeme, že čiastočná postupnosť zvyškov (10) rovnomerne konverguje v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ a $Z_m = X_m$.

Ako aplikáciu už uvedených výsledkov ukážeme, že ak postupnosť zvyškov (3) rovnomerne konverguje v intervale $[\xi, \xi + \rho]$, potom jej limita je nutne nula a limita každej čiastočnej P. postupnosti, ktorá v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ rovnomerne konverguje, je riešením d. rovnice (a).

Vskutku predpokladajme, že postupnosť zvyškov (3) rovnomerne konverguje v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ a označme X jej limitu.

Zvoľme ľubovoľnú čiastočnú P. postupnosť, ktorá rovnomerne konverguje v intervale $[\xi, \xi + \rho]$; nech Y_0 je jej limita. Limity jednotlivých posunutých čiastočných P. postupností tvoria P. postupnosť patriacu k počiatočnej funkcii Y_0 a zvyšky funkcií tejto postupnosti sa všetky rovnajú funkcii X, lebo tieto zvyšky sú limitami určitých častí postupnosti zvyškov (3). Z predchádzajúceho usudzujeme, že $X = 0$ a že funkcia Y_0 je riešením d. rovnice (a).

Videli sme, že ak čiastočná P. postupnosť (6) rovnomerne konverguje v intervale $[\xi, \xi + \rho]$, potom to isté platí o každej posunutej čiastočnej P. postupnosti. Je otázka, či podobný výsledok platí pre čiastočné postupnosti zvyškov. Odpoveď na túto otázku je daná nasledujúcou vetou:

Ak nejaká čiastočná postupnosť zvyškov rovnomerne konverguje v intervale $[\xi, \xi + \rho]$

$$z_{k_1}, z_{k_2}, \dots \to Z_0 \tag{11}$$

potom to isté platí o každej posunutej čiastočnej postupnosti zvyškov, ak d. rovnica

$$Y' = f(x, Y) + Z_0 \tag{12}$$

má len jedno riešenie prechádzajúce bodom (ξ, η) definované v intervale $[\xi, \xi + \rho]$.

Vskutku, nech sú splnené predpoklady. Stačí ukázať, že v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ rovnomerne konverguje čiastočná P. postupnosť (6) rovnoľahlá s postupnosťou (11), lebo potom to isté platí, ako sme už videli, o každej posunutej čiastočnej P. postupnosti (7) a tiež o rovnoľahlej čiastočnej postupnosti zvyškov (10).

Z čiastočnej P. postupnosti (6) môžeme vybrať čiastočnú postupnosť, ktorá v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ rovnomerne konverguje. O každej takej čiastočnej postupnosti ľahko zistíme, použijúc opäť prvý vzorec (5), že jej limita Y spĺňa pre $x \in [\xi, \xi + \rho]$ d. rovnicu (12). Ak má teda táto rovnica len jedno riešenie, prechádzajúce bodom (ξ, η) a definované v intervale $[\xi, \xi + \rho]$, potom všetky časti čiastočnej P. postupnosti (6), ktoré rovnomerne konvergujú v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ majú tú istú limitu. Odtiaľ usudzujeme, že čiastočná postupnosť (6) rovnomerne konverguje v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ a tým je dôkaz uskutočnený.

Podľa vety, ktorú sme práve dokázali, stačí zmienená jednoznačnosť riešení d. rovnice (12) v bode (ξ, η) na to, aby súčasne s čiastočnou postupnosťou zvyškov (11) rovnomerne konvergovala každá posunutá postupnosť. Ako teda ukážeme, tento predpoklad v prípade $Z_0 = 0$ nie je nutný, takže platí táto veta:

Ak nejaká čiastočná postupnosť zvyškov rovnomerne konverguje k nule v intervale $[\xi, \xi + \rho]$, potom to isté platí v každej posunutej postupnosti.

Dôkaz stačí urobiť v prípade, že ide o čiastočnú postupnosť posunutú len o jeden člen.

Predpokladajme, že čiastočná postupnosť zvyškov

$$z_{k_1}, \ z_{k_2}, \ \dots \tag{13}$$

rovnomerne konverguje k nule v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ a ukážme, že to isté platí o čiastočnej postupnosti posunutej o jeden člen:

$$z_{k_1+1}, \ z_{k_2+1}, \ \dots \tag{14}$$

Zvoľme ľubovoľne $\varepsilon > 0$. Nakoľko $f(x, y)$ je spojitá v. dv. intervale D, dá sa rovnomerne aproximovať polynómom $P(x, y)$, takže platí:

$$f(x, y) = P(x, y) + \vartheta(x,y) \quad \text{kde} \ |\vartheta(x, y)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Je

$$z_\alpha(x) = f(x, y_{\alpha-1}(x)) - f[x, y_\alpha(x)] = P[x, y_{\alpha-1}(x)] - P[x, y_\alpha(x)] +$$
$$+ \vartheta[x, y_{\alpha-1}(c)] - \vartheta[x, y_\alpha(c)]$$

Ak použijeme na rozdiel $P[x, y_{\alpha-1}(x)] - P[x, y_\alpha(x)]$ vetu o prírastku funkcie, ľahko zistíme, že existuje také číslo $N_\varepsilon \geqq 0$, že pre $x \in [\xi, \xi + \rho]$ a pre $\alpha = 1, 2, \dots$ platí

$$|z_\alpha| \leqq |\delta y_\alpha| \cdot N_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \tag{15}$$

pričom

$$\delta y_\alpha = y_{\alpha-1} - y_\alpha$$

V prípade $N_\varepsilon = 0$ odtiaľ vyplýva nerovnosť

$$|z_{k_n+1}| < \varepsilon$$

pre $x \in [\xi, \xi + \rho]$ a pre všetky indexy k_n. Nech teraz $N_\varepsilon > 0$. Podľa predpokladu platí pre skoro všetky indexy k_n v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ nerovnosť

$$|z_{k_n}| < \frac{\varepsilon}{2\rho \ N_\varepsilon} \tag{16}$$

Podľa druhého vzorca (5) máme teda pre $x \in [\xi, \xi + \rho]$ a pre všetky indexy k_n, pre ktoré platí nerovnosť (16)

$$|\delta y_{k_n+1}| \leq \int_{\xi}^{x} |z_{k_n}(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2 N_\varepsilon}$$

a ďalej, podľa vzorca (15),

$$|z_{k_n+1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Tým je ukázané, že v obidvoch prípadoch $N_\varepsilon = 0$ a $N_\varepsilon > 0$ platí v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ pre skoro všetky funkcie postupnosti (14) nerovnosť

$$|z_{k_n+1}| < \varepsilon$$

a tým je dôkaz realizovaný.

Všimnime si najmä tieto dôsledky, ktoré vyplývajú z predchádzajúcich úvah:

Ak nejaká čiastočná P. postupnosť rovnomerne konverguje v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ potom to isté platí o rovnoľahlej postupnosti zvyškov a platí vzťah: $Y' = f(x, Y) + Z$, kde $Y(Z)$ značí limitu tej čiastočnej P. postupnosti (čiastočnej postupnosti zvyškov).

Ak nejaká čiastočná postupnosť zvyškov rovnomerne konverguje v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ k limite Z, potom každá v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ rovnomerne konvergentná časť rovnoľahlej P. postupnosti konverguje k určitému riešeniu d. rovnice $Y' = f(x, Y) + Z$, prechádzajúcemu bodom (ξ, η). Ak má táto d. rovnica len jedno riešenie prechádzajúce bodom (ξ, η) a definované v intervale $[\xi, \xi + \rho]$, potom rovnoľahlá P. postupnosť rovnomerne konverguje v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ a jej limita je týmto riešením.

Z týchto viet zrejme vyplýva toto:

Ak nejaká čiastočná P. postupnosť rovnomerne konverguje v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ k riešeniu d. rovnice (a), potom rovnoľahlá postupnosť zvyškov konverguje rovnomerne v tom istom intervale k nule.

Ak nejaká čiastočná postupnosť zvyškov rovnomerne konverguje k nule v intervale $[\xi, \xi + \rho]$, potom každá časť rovnoľahlej P. postupnosti rovnomerne konvergentnej v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ konverguje k určitému riešeniu d. rovnice (a), prechádzajúcemu bodom (ξ, η) a definovanému v intervale $[\xi, \xi + \rho]$. Ak má d. rovnica (a) len jedno riešenie prechádzajúce bodom (ξ, η) a definované v intervale $[\xi, \xi + \rho]$, potom rovnoľahlá P. postupnosť rovnomerne konverguje v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ a jej limita je týmto riešením.

60. Picardove postupnosti v prípade monotónnej funkcie $f(x, y)$

Doteraz sme predpokladali o funkcii $f(x,y)$ len to, že je v dv. intervale D : $|x-\xi|\leq a$, $|y-\eta|\leq b$ spojitá. Teraz sa budeme zaoberať prípadom, že je okrem toho monotónnou funkciou premennej y pri každom $x\in[\xi, \xi + a]$

Zvlášť budeme uvažovať o prípade, že je neklesajúcou a zvlášť o prípade, že je nerastúcou funkciou premennej y.

Poznamenajme predovšetkým toto:

Z druhého vzorca (5) vidíme, že ak je pri určitom $k(= 1, 2, \ldots)$ v nejakom intervale $[\xi, \xi + \alpha_{k-1}]$ kde $0 < \alpha_{k-1} \leq \rho$.

$$z_{k-1} \geq 0 \quad (z_{k-1} \leq 0)$$

potom je v ňom tiež

$$\delta y_k \geq 0 \qquad (\delta y_k \leq 0)$$

Z prvého vzorca (5) vyplýva, že potom tiež platí v určitom intervale $[\xi, \xi + \sigma_{k-1}]$:

$$G_{k-1}(x) \geq G(x) \quad [y_{k-1} \leq G(x)] \tag{17}$$

kde $G_{k-1}(x)$ značí najväčšie riešenie d. rovnice $y' = f(x, y) + z_{k-1}$ a $G(x)$ najväčšie riešenie d. rovnice (a) prechádzajúce bodom (ξ, η). Interval $[\xi, \xi + \sigma_{k-1}]$ je prienik intervalov $[\xi, \xi + \alpha_{k-1}]$ a intervalu $[\xi, \xi + \rho]$ v ktorom existujú funkcie $G_{k-1}(x)$, $G(x)$ $[G(x)]$

1. Predpokladajme predovšetkým že funkcia $f(x, y)$ vzhľadom na y pri žiadnom $x\in[\xi, \xi + a]$ neklesá.

Potom z platnosti nerovnosti

$$\delta y_k \geq 0 \qquad\qquad (\delta y_k \leq 0)$$

v nejakom intervale vyplýva, že v tom istom intervale tiež platí:

$$z_k \geq 0 \qquad\qquad (z_k \leq 0)$$

Ak teda platí pri určitom $k = 1, 2, \ldots$ pre $x \in [\xi, \xi + \alpha_{k-1}]$ nerovnosť

$$z_{k-1} \geq 0 \qquad\qquad (z_{k-1} \leq 0)$$

potom tiež je v tom intervale, ako sme už videli

$$\delta y_k \geq 0 \qquad\qquad (\delta y_k \leq 0)$$

a teda tiež

$z_k \gtreqless 0 \qquad (z_k \lesseqgtr 0)$

Predpokladajme, že v intervale $[\xi, \xi + \alpha_0]$ platí nerovnosť

$z_0 \gtreqless 0 \qquad (z_0 \lesseqgtr 0)$

t.j.

$y_0' \gtreqless f(x, y_0) \qquad [y_0' \lesseqgtr f(x, y_0)]$

Potom v tom istom intervale je

$z_0 \gtreqless 0, z_1 \gtreqless 0, z_2 \gtreqless 0, \ldots \quad (z_0 \lesseqgtr 0, z_1 \lesseqgtr 0, z_2 \lesseqgtr 0, \ldots)$

takže v intervale $[\xi, \xi + \alpha_0]$ je

$y_0 \gtreqless y_1 \gtreqless y_2 \gtreqless \ldots \quad (y_0 \lesseqgtr y_1 \lesseqgtr y_2 \lesseqgtr \ldots)$

a teda P. postupnosť (1) v intervale $[\xi, \xi + \alpha_0]$ nerastie (neklesá).

Odtiaľ vyplýva, že P. postupnosť (1) v intervale $[\xi, \xi + \alpha_0]$ rovnomerne konverguje k určitej funkcii $y(x)$, ktorá je tiež súčasne riešením d. rovnice (a).

Tým sme došli k tomuto výsledku:

Ak funkcia $f(x, y)$ v intervale $[\xi, \xi + a]$ vzhľadom na y neklesá a počiatočná funkcia y_0 P. postupnosti spĺňa v intervale $[\xi, \xi + \alpha_0]$ nerovnosť $y_0' \gtreqless f(x, y_0)$ $[y_0' \lesseqgtr f(x, y_0)]$ potom táto postupnosť v intervale $[\xi, \xi + \alpha_0]$ rovnomerne konverguje, nerastie (neklesá) k určitému riešeniu d. rovnice (a) prechádzajúcemu bodom (ξ, η).

Všimnime si zvláštneho prípadu, keď funkcia y_0 má konštantnú hodnotu η.

Z nášho výsledku vychádza, že ak je $f(x, \eta) \lesseqgtr 0$ $[f(x, \eta) \gtreqless 0$, príslušná P. postupnosť, majúca za počiatočnú funkciu konštantu η, nerastie (neklesá) a rovnomerne konverguje k určitému riešeniu d. rovnice (a) prechádzajúcemu bodom (ξ, η).

<u>Príklad</u>. Uvažujme o d. rovnici

$$y' = \sqrt[3]{y}$$

Funkcia $f(x, y) = \sqrt[3]{y}$ rastie vzhľadom na y pri každom x. V žiadnom obore, ktorý obsahuje body ležiace na priamke $y = 0$, nie je splnená L. podmienka. Najväčšie (najmenšie) riešenie tejto d. rovnice, prechádzajúce bodom $(0,0)$, je pre $x \gtreqless 0$

$$y = \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}} \qquad \left(y = -\left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

pretože riešenie prechádzajúce ľubovoľným bodom nad (pod) týmto riešením a definované aj pre $x = 0$ má v čísle 0 hodnotu kladnú (zápornú).

Zvoľme za počiatočnú funkciu P. postupnosti funkciu

$$y_0 = A\left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$$

kde A je nejaká konštanta. Ľahkým výpočtom zistíme, že je

$$y_0' - f(x, y_0) = A^{\frac{1}{3}}\left(A^{\frac{2}{3}} - 1\right)\left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

Odtiaľ vidíme, že pre $x \geqq 0$ je

$$y_0' - f(x, y_0) \begin{cases} \geqq 0 & \text{ak } A \geqq 1, \text{ lebo } -1 \leqq A \leqq 0 \\ \leqq 0 & \text{ak } A \leqq -1, \text{ lebo } 0 \leqq A \leqq 1 \end{cases}$$

Podľa vety, ktorú sme už dokázali, usudzujeme, že P. postupnosť patriace k našej počiatočnej funkcii y_0 rovnomerne konverguje v ľubovoľnom intervale $[0, \alpha]$ ($\alpha > 0$) k určitému riešeniu našej d. rovnice, prechádzajúcemu bodom $(0,0)$ a pritom nerastie, ak $A \geqq 1$ alebo $-1 \leqq A \leqq 0$ a neklesá, ak $A \leqq -1$, alebo $0 \leqq A \leqq 1$.

Súčasne vidíme, že v prípadoch $A = 1, 0, -1$ je funkcia y_0 riešením d. rovnice, ktoré prechádza bodom $(0,0)$, a to v prípade $A = 1$ (-1) riešením najväčším (najmenším) a v prípade $A = 0$ riešením identicky rovným nule; v každom z týchto prípadov sú všetky funkcie P. postupnosti tie isté a sú identické s riešením y_0.

Pri predtým uvedenej voľbe počiatočnej funkcie P. postupnosti môžeme jednotlivé funkcie tejto postupnosti explicitne vyjadriť jednoduchým vzorcom. Vskutku, aplikujúc vzorec (2) ľahkým výpočtom zistíme, že pri ľubovoľnej hodnote konštanty A je funkcia y_k P. postupnosti pre $k = 0, 1, \ldots,$ daná vzorcom

$$y_k = A^{\left(\frac{1}{3}\right)^k}\left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$$

Z toho vidíme, že v prípade $A > 0$ $(A < 0)$ konverguje P. postupnosť k najväčšiemu (najmenšiemu) riešeniu našej d. rovnice prechádzajúcemu bodom (0,0) a v prípade $A = 0$ k riešeniu 0.

Tým sme došli k tomuto výsledku:

Ak $A > 0$, potom P. postupnosť patriaca k počiatočnej funkcii $A\left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$ rovnomerne konverguje v ľubovoľnom intervale $[0, \alpha]$ $(\alpha > 0)$ k najväčšiemu riešeniu našej d. rovnice, prechádzajúcemu bodom (0, 0), a to monotónne zhora alebo zdola, podľa toho, či $A \geq 1$ alebo $0 < A \leq 1$. Ak $A < 0$, potom táto postupnosť konverguje k najmenšiemu riešeniu prechádzajúcemu bodom (0,0) monotónne zhora alebo zdola, podľa toho či $-1 \leq A \leq 0$ alebo $A \leq -1$ Ak $A = 0$, potom všetky funkcie P. postupnosti sa identicky rovnajú nule, takže táto postupnosť rovnomerne konverguje k riešeniu 0.

61. Predpokladajme teraz, že funkcia $f(x, y)$ vzhľadom na y pri žiadnom $x \in [\xi, \xi + a]$ nerastie.

Potom z platnosti nerovnosti

$$\delta y_k \geq 0 \qquad (\delta y_k \leq 0)$$

v nejakom intervale vyplýva, že v tomto intervale je

$$z_k \leq 0 \qquad (z_k \geq 0)$$

Ak teda platí pre $x \in [\xi, \xi + \alpha_{k-1}]$, pri určitom $k = 1,2,\ldots$ nerovnosť

$$z_{k-1} \geq 0 \qquad (z_{k-1} \leq 0)$$

potom v tomto intervale platí tiež, ako sme už videli

$$\delta y_k \geq 0 \qquad (\delta y_k \leq 0)$$

a teda tiež:

$$z_k \leq 0 \qquad (z_k \geq 0)$$

Predpokladajme, že v intervale $[\xi, \xi + \alpha_0]$ platí nerovnosť

$$z_0 \geq 0 \qquad (z_0 \leq 0)$$

t.j.

$$y_0' \geq f(x, y_0) \qquad \left(y_0' \leq f(x, y_0)\right)$$

Potom v tomto intervale je

$$z_0 \geqq 0, \quad z_1 \leqq 0, \quad z_2 \geqq 0, \ldots \qquad (z_0 \leqq 0, \quad z_1 \geqq 0, \quad z_2 \leqq 0, \ldots)$$

t.j. pre $k = 1, 2, \ldots$

$$z_{2k-2} \geqq 0, \; z_{2k-1} \leqq 0 \qquad (z_{2k-2} \leqq 0, \quad z_{2k-1} \geqq 0) \qquad (18)$$

takže v intervale $[\xi, \xi + \alpha_0]$ platia nerovnosti

$$\delta y_{2k-1} \geqq 0, \quad \delta y_{2k} \leqq 0 \qquad (\delta y_{2k-1} \leqq 0, \quad \delta y_{2k} \geqq 0)$$

a teda tiež

$$y_{2k-2} \geqq y_{2k-1} \leqq y_{2k} \qquad (y_{2k-2} \leqq y_{2k-1} \geqq y_{2k}) \qquad (19)$$

Ďalším dôsledkom nášho predpokladu, že funkcia $f(x,y)$ pri žiadnom $x \in [\xi, \xi + a]$ vzhľadom na y nerastie, je, že bodom (ξ, η) prechádza len jedno riešenie d. rovnice (a), definované v určitom najväčšom intervale $[\xi, \xi + \sigma]$, kde zrejme $\sigma \leqq a$. Označme toto riešenie $y(x)$, stručne y. Z toho dôvodu funkcia y_{k-1} pre $k = 1, 2, \ldots$ je jediným riešením d. rovnice $y' = f(x, y) + z_{k-1}$, definovaným v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ a prechádzajúcim bodom (ξ, η).

Podľa vzorcov (17) platí teda v intervale $[\xi, \xi + \sigma_0]$, kde σ_0 je najmenšie z čísel α_0, σ a pre $k = 1, 2, \ldots$.

$$y_{2k-2} \geqq y \geqq y_{2k-1} \qquad (y_{2k-2} \leqq y \leqq y_{2k-1})$$

Tým sme došli k tomuto výsledku:

Ak funkcia $f(x, y)$ pri žiadnom $x \in [\xi, \xi + a]$ vzhľadom na y nerastie a počiatočná funkcia y_0 P. postupnosti spĺňa v intervale $[\xi, \xi + \alpha_0]$ nerovnosť $y_0' \geqq f(x, y_0)$ $[y_0' \leqq f(x, y_0)]$, potom každá funkcia P. postupnosti s párnym indexom má všade v intervale $[\xi, \xi + \sigma_0]$ hodnotu aspoň (najviac) takú ako riešenie d. rovnice (a) prechádzajúce bodom (ξ, η) a každá funkcia s nepárnym indexom má hodnotu najviac (aspoň) takú.

Pripomeňme, že z nášho výsledku vyplýva, že každá funkcia P. postupnosti s párnym indexom má všade v intervale $[\xi, \xi + \sigma_0]$ hodnotu aspoň (najviac) takú, ako ktorákoľvek funkcia s nepárnym indexom. V tomto intervale platia najmä nerovnosti (19), ktorých platnosť sme zistili dokonca v intervale $[\xi, \xi + a]$.

Všimnime si ďalej zvláštny prípad, kedy počiatočná funkcia y_0 má konštantnú hodnotu η. Z nášho výsledku vyplýva, že ak $f(x, \eta) \leqq 0$ $[f(x, \eta) \geqq 0]$, potom každá funkcia s párnym indexom P. postupnosti, ktorá má za počiatočnú funkciu konštantu η, má všade v intervale $[\xi, \xi + \sigma_0]$ hodnotu aspoň (najviac) takú ako riešenie d. rovnice (a) prechádzajúce bodom (ξ, η) a každá funkcia s nepárnym indexom hodnotu najviac (aspoň) takú.

Označme symbolmi

$Z_1, Z_2, \dots$

funkcie definované v intervale $[\xi, \xi + \rho]$ vzorcami

$$Z_{k+1}(x) = f\big(x, y_{k-1}(x)\big) - f\big(x, y_{k+1}(x)\big)$$

$$Z_1(x) = y_0'(x) - f\big(x, y_1(x)\big)$$

a symbolmi

$\Delta y_2, \quad \Delta y_3, \dots$

funkcie definované takto:

$$\Delta y_{k+1}(x) = y_{k-1}(x) - y_{k+1}(x)$$

kde $k = 1, 2, \dots$.

Pre $x \in [\xi, \xi + \rho]$ a $k = 1, 2, \dots$ zrejme platí vzťah

$$\Delta y_{k+1} = \int_{\xi}^{x} Z_k(t)\, dt$$

Z tohto vzťahu vidíme, že ak je pri určitom k (= 1, 2, ...) v nejakom intervale $[\xi, \xi + \beta_k]$, kde $0 < \beta_k \leqq \rho$

$$Z_k \geqq 0 \qquad (Z_k \leqq 0)$$

potom je v ňom tiež

$$\Delta y_{k+1} \geqq 0 \qquad (\Delta y_{k+1} \leqq 0)$$

Vráťme sa teraz k nášmu predpokladu, že funkcia $f(x, y)$ pri žiadnom $x \in [\xi, \xi + a]$ vzhľadom na y nerastie. Potom z platnosti poslednej nerovnosti v intervale $[\xi, \xi + \beta_k]$ vyplýva, že v tom intervale je

$$Z_{k+1} \leqq 0 \qquad (Z_{k+1} \geqq 0)$$

Predpokladajme, že v intervale $[\xi, \xi + \beta_1]$ platí nerovnosť

$$Z_1 \geqq 0 \qquad (Z_1 \leqq 0)$$

t.j.

$$y_0' \geqq f(x, y_1) \qquad \big(y_0' \leqq f(x, y_1)\big)$$

Potom v tomže intervale je

$$z_1 \geqq 0, \quad z_2 \leqq 0, \quad z_3 \geqq 0, \ \dots \qquad (z_1 \leqq 0, \ z_2 \geqq 0, \ z_3 \leqq 0, \dots)$$

t.j.

$$z_{2k-1} \geqq 0, \quad z_{2k} \leqq 0 \qquad (z_{2k-1} \leqq 0, \ z_{2k} \geqq 0)$$

pre $k = 1, 2, \dots$ a teda tiež podľa už vykonanej úvahy,

$$\Delta \ y_{2k} \geqq 0, \quad \Delta y_{2k+1} \leqq 0, \qquad (\Delta \ y_{2k} \leqq 0, \quad y_{2k+1} \geqq 0)$$

t.j.

$$y_0 \geqq y_2 \geqq y_4 \geqq \dots \qquad (y_0 \leqq y_2 \leqq y_4 \leqq \dots)$$

$$y_1 \leqq y_3 \leqq y_5 \leqq \dots \qquad (y_1 \geqq y_3 \geqq y_5 \geqq \dots)$$

Vidíme, že postupnosti

$$y_2, y_4, y_6, \dots \longrightarrow Y_0$$

$$y_1, y_3, y_5, \dots \longrightarrow Y_1$$

v obidvoch prípadoch rovnomerne konvergujú v intervale $[\xi, \xi + \beta_1]$ (lebo ako časti P. postupnosti sú v tomto intervale rovnomerne onraničené a rovnomocne spojité). Ďalej vidíme, že každá z nich je o jeden člen posunutá vzhľadom na druhú a teda funkcie Y_0, Y_1 vzniknú jedna z druhej Picardovou transformáciou. Funkcie Y_0, Y_1 sú teda riešením systému d. rovníc:

$$Y_0' = f(x, Y_1)$$

$$Y_1' = f(x, Y_0) \tag{20}$$

a majú v čísle ξ hodnotu η.

Došli sme k tomuto výsledku:

Ak funkcia $f(x, y)$ pri žiadnom $x \in [\xi, \xi + a]$ vzhľadom na y nerastie a medzi počiatočnou funkciou y_0 P. postupnosti, ktorá patrí k nej a k bodu (ξ, η) a nasledujúcou funkciou y_1 platí v nejakom intervale $[\xi, \xi + \beta_1]$ nerovnosť $y_0' \geqq f(x, y_1)$ $(y_0' = f(x, y_1))$, potom čiastočná P. postupnosť funkcií s párnymi indexmi v intervale $[\xi, \xi + \beta_1]$ rovnomerne konverguje monotónne zhora (zdola) k určitej funkcii Y_0 a čiastočná P. postupnosť funkcií s nepárnymi indexmi v tom istom intervale rovnomerne konverguje monotónne zdola (zhora) k určitej funkcii Y_1. Funkcie Y_0, Y_1 vzniknú jedna z druhej P. transformáciou, takže sú riešením systému d. rovníc (20) a majú v čísle ξ hodnotu η.

Funkcie Y_0, Y_1, ako neskoršie ukážeme na príkladoch, môžu ale nemusia byť identické.

Ak sú identické, potom sú, pravda, riešením d. rovnice (a), ktoré nadobúda v čísle ξ hodnotu η, takže v intervale $[\xi, \xi + \beta_1]$ je $Y_0(x) = Y_1(x) = y(x)$. V tomto prípade P. postupnosť v intervale $[\xi, \xi + \beta_1]$ rovnomerne konverguje k riešeniu y d. rovnice (a), a to tak, že čiastočná postupnosť funkcií s párnymi indexmi k nemu konverguje monotónne zhora alebo zdola a čiastočná postupnosť funkcií s nepárnymi indexmi k nemu konverguje monotónne zdola alebo zhora. Všimnime si, že tento prípad nastane vždy vtedy, keď systém diferenciálnych rovníc (20) má jediné riešenie prechádzajúce bodom (ξ, η, η).

Ak funkcie Y_0, Y_1 nie sú identicky sebe rovné, potom P. postupnosť v niektorom čísle $x \in [\xi, \xi + \beta_1]$ diverguje, lebo jej čiastočné postupnosti zložené z funkcií s párnymi indexmi a z funkcií s nepárnymi indexmi konvergujú k rôznym limitám. Môže sa stať, ako uvidíme na príkladoch, že funkcie Y_0, Y_1 majú v každom čísle $x \in [\xi, \xi + \beta_1]$ rôzne hodnoty a potom v celom tomto intervale P. postupnosť diverguje, i keď bodom (ξ, η) prechádza práve jedno riešenie d. rovnice (a) definované v intervale $[\xi, \xi + \beta_1]$

62. **Uvažujme teraz o tom, že niektoré nerovnosti:**

$$Z_0 \geqq 0, \quad Z_0 \leqq 0; \quad Z_1 \geqq 0, \quad Z_1 \leqq 0$$

ktorých dôsledky sme už skúmali, platia súčasne.

1. Predpokladajme, že v intervale $[\xi, \xi + \beta_1]$ platia súčasne nerovnosti

$$y_0' \geqq f(x, y_0), \quad y_0' \geqq f(x, y_1)$$

Dôsledkom prvej nerovnosti je, že v intervale $[\xi, \xi + \sigma_1]$, kde σ_1 je najmenšie z čísel β_1, σ platí pre $k = 1, 2, \ldots$

$$y_{2k-2} \geqq y \geqq y_{2k-1}$$

Z druhej nerovnosti vyplýva pre $x \in [\xi, \xi + \beta_1]$

$$y_{2k-2} \to Y_0, \quad y_{2k-1} \to Y_1$$

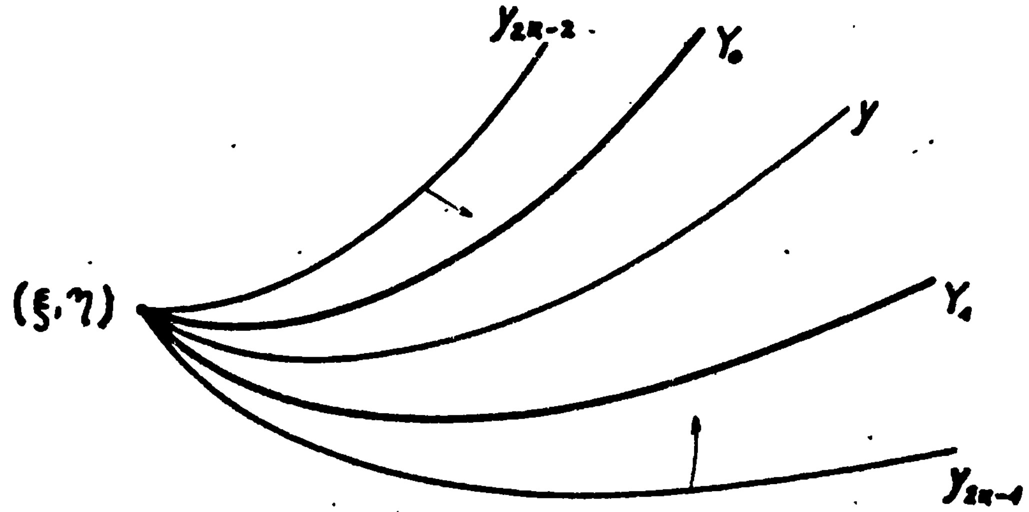
pritom konvergencia je rovnomerná a v prvom prípade monotónna zhora a v druhom zdola.

Vidíme teda, že v intervale $[\xi, \xi + \sigma_1]$ platia nerovnosti

$$Y_0 \geqq y \geqq Y_1$$

pritom funkcie y_{2k-2} konvergujú rovnomerne a monotónne k Y_0 zhora a funkcie y_{2k-1} k Y_1 zdola.

Výsledok je znázornený na nasledujúcom obrázku, kde krivky Y_0, y, Y_1 môžu prípadne splývať



Obr. 15

2. Predpokladajme, že v intervale $[\xi, \xi + \beta_1]$ súčasne platia nerovnosti

$$y_0' \leq f(x, y_0) \qquad\qquad y_0' \leq f(x, y_1)$$

Potom v tomže intervale pre $k = 1, 2, \ldots,$ je

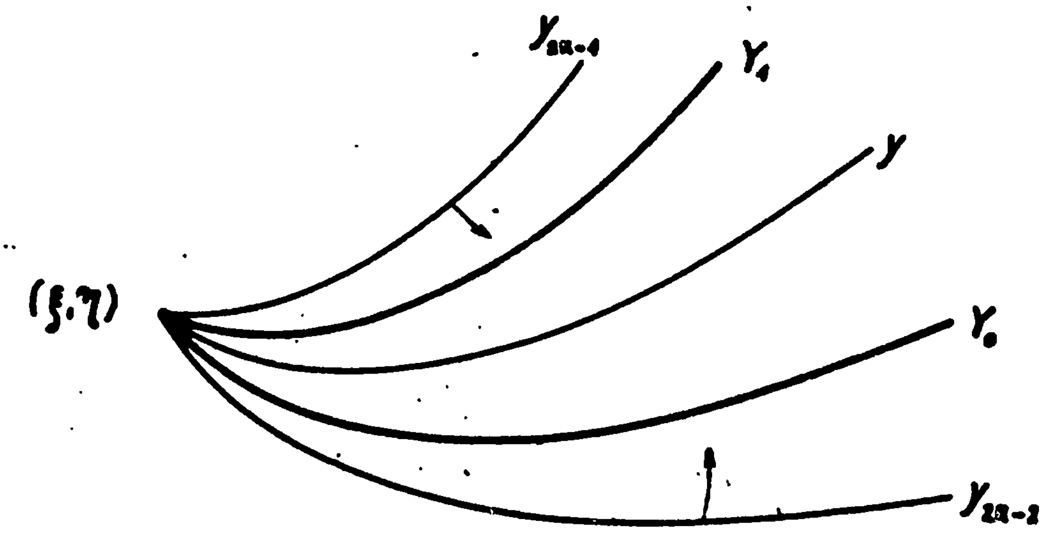
$$y_{2k-2} \leq y \leq y_{2k-1}$$

a súčasne je, ako vyplýva z úvah

$$Y_0 \leq y \leq Y_1$$

pričom funkcie y_{2k-2} rovnomerne konvergujú monotónne k funkcii Y_0 zdola a a funkcie y_{2k-1} k funkcii Y_1 zhora.

Situácia je teda takáto:



Obr. 16

3. Predpokladajme, že v intervale $[\xi, \xi + \beta_1]$ platia súčasne nerovnosti

$$f(x, y_1) \geqq y_0' \geqq f(x, y_0)$$

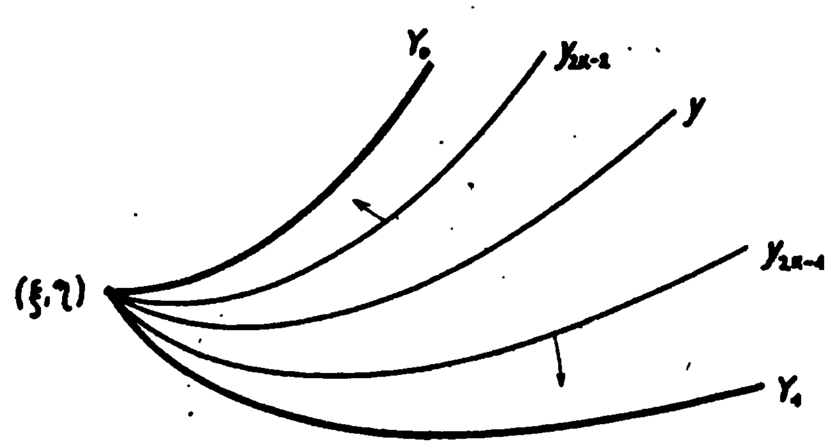
Podobne ako v predchádzajúcich prípadoch zistíme, že v intervale $[\xi, \xi + \sigma_1]$ platia pre $k = 1, 2, \ldots$ nerovnosti

$$Y_1 \leqq y_{2k-1} \leqq y \leqq y_{2k-2} \leqq Y_0$$

pričom funkcie y_{2k-2} konvergujú rovnomerne monotónne k funkcii Y_0 zdola a funkcie y_{2k-1} k funkcii Y_1 zhora.

V tomto prípade diverguje teda P. postupnosť v intervale $[\xi, \xi + \sigma_1]$ všade tam, kde funkcie Y_0 a Y_1 majú rôzne hodnoty.

Situácia je znázornená na tomto obrázku:



Obr. 17

4. Konečne predpokladajme, že v intervale $[\xi, \xi + \beta_1]$ platia súčasne nerovnosti:

$$f(x, y_0) \geqq y_0' \geqq f(x, y_1)$$

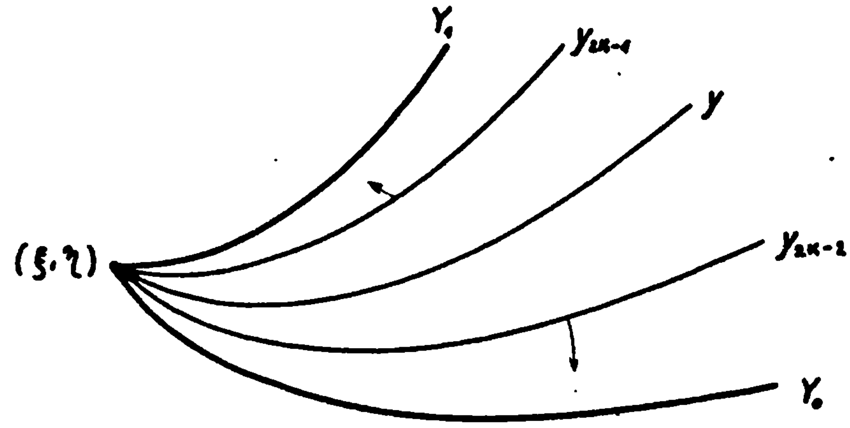
V tomto prípade je pre $x \in [\xi, \xi + \beta_1]$ a pre $k = 1, 2, \ldots$:

$$Y_0 \leqq y_{2k-2} \leqq y \leqq y_{2k-1} \leqq Y_1$$

pričom funkcie y_{2k-2} rovnomerne konvergujú monotónne zhora k funkcii Y_0 a funkcie y_{2k-1} zdola k funkcii Y_1.

Taktiež v tomto prípade P. postupnosť diverguje v intervale $[\xi, \xi + \sigma_1]$ všade tam, kde funkcie Y_0, Y_1 majú rôzne hodnoty.

Výsledok je znázornený na tomto obrázku:



Obr. 18

Už sme videli, že funkcie Y_0, Y_1, ktoré sú limitami čiastočných P. postupností funkcií o párnych a nepárnych indexoch, sú riešením systému d. rovníc (20) a majú v čísle ξ hodnotu η.

Systém d. rovníc (20), v ktorom Y_0, Y_1 považujeme za neznáme funkcie, má zrejme riešenie prechádzajúce bodom (ξ, η, η) totiž

$$Y_0(x) = Y_1(x) = y(x)$$

kde $y(x)$ je (jediné) riešenie d. rovnice (a). Ak nemá tento systém iného riešenia lokálne rôzneho, prechádzajúceho bodom (ξ, η, η), potom v uvedených prípadoch 1. a 2. P. postupnosť rovnomerne konverguje k riešeniu $y(x)$ d. rovnice (a), naproti tomu prípady 3. a 4. môžu nastať len, keď $y_0 = y$.

Všimnime si, že P. postupnosť, v ktorej za počiatočnú funkciu zvolíme jednu z funkcií Y_0, Y_1, ktoré sú riešením systému d. rovníc (20) prechádzajúcim bodom (ξ, η, η), napr. Y_0, je

$$Y_0,\ Y_1,\ Y_0,\ Y_1$$

a teda diverguje všade tam, kde $Y_0 \neq Y_1$.

<u>Príklad</u>. Uvažujme o d. rovnici

$$y' = -\sqrt[3]{y} \qquad \text{(a)}$$

Tu funkcia $f(x, y) = -\sqrt[3]{y}$ pri každom x vzhľadom na y klesá. Pre $x \geq 0$ má d. rovnica jediné riešenie vychádzajúce z bodu $(0,0)$, a to $y = 0$. Súčasne vidíme, že v žiadnom obore, ktorý obsahuje body ležiace na priamke $y = 0$ nie je L. podmienka splnená.

Systém (20) je v tomto prípade

$$Y_0' = -\sqrt[3]{Y_1}$$

$$Y_1' = -\sqrt[3]{Y_0} \qquad (1)$$

a všetky jeho riešenia definované pre $x \geq 0$ a vychádzajúce z bodu $(0,0)$ ľahko nájdeme. Vskutku, z rovníc (1) vyplýva, že každé riešenie $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ systému (1) spĺňa rovnicu

$$\sqrt[3]{Y_0}\ Y_0' = \sqrt[3]{Y_1}\ Y_1'$$

t.j.

$$\left(Y_0^{\frac{4}{3}}\right)' = \left(Y_1^{\frac{4}{3}}\right)'$$

takže pre každé riešenie majúce v čísle 0 hodnotu 0 máme

$$Y_0^{\frac{4}{3}}(x) = Y_1^{\frac{4}{3}}(x)$$

a teda

$$Y_1(x) = \pm\, Y_0(x)$$

V prípade $Y_1(x) = Y_0(x)$ vidíme, že táto funkcia je riešením d. rovnice (a), takže je

$$Y_1(x) = Y_0(x) = 0$$

V prípade $Y_1(x) = -\, Y_0(x)$ z rovníc (1) vyplýva, že funkcia Y_0 je riešením d. rovnice

$$Y_0' = \sqrt[3]{Y_0}.$$

Táto rovnica má najväčšie riešenie prechádzajúce bodom $(0,0)$

$$Y_0 = \left(\frac{2}{3}\, x\right)^{\frac{3}{2}}$$

a najmenšie riešenie

$$Y_1 = -\left(\frac{2}{3}\, x\right)^{\frac{3}{2}}$$

Zvoľme si počiatočnú funkciu P. postupnosti funkciu

$$y_0 = A \left(\frac{2}{3}\, x\right)^{\frac{3}{2}}$$

Jednoduchým výpočtom dostaneme funkcie P. postupnosti v tvare

$$y_k = (-1)^k A^{\left(\frac{1}{3}\right)^k} \left(\frac{2}{3} x\right)^{\frac{3}{2}} \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

takže

$$y_{2k} = A^{\left(\frac{1}{3}\right)^{2k}} \left(\frac{2}{3} x\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$y_{2k+1} = - A^{\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1}} \left(\frac{2}{3} x\right)^{\frac{3}{2}}$$

Odtiaľ vidíme, že pri

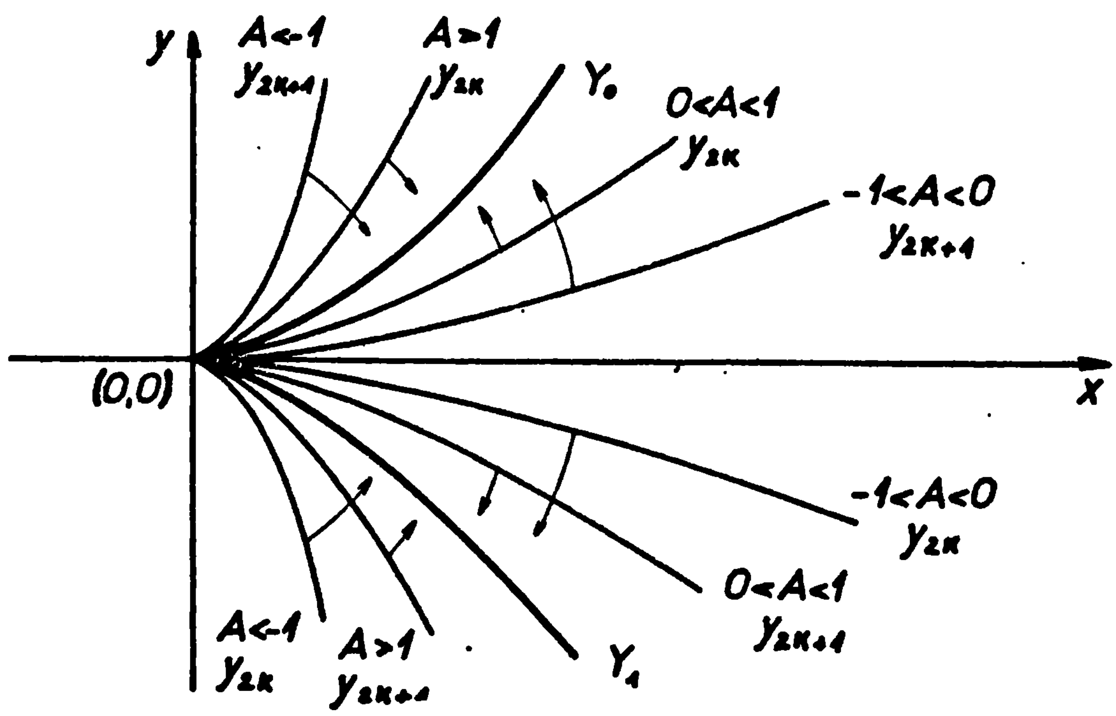
$$A > 1 \quad \text{je} \quad y_{2k} \longrightarrow \left(\frac{2}{3} x\right)^{\frac{3}{2}}, \quad y_{2k+1} \longrightarrow -\left(\frac{2}{3} x\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$0 < A < 1 \quad \text{je} \quad y_{2k} \longrightarrow \left(\frac{2}{3} x\right)^{\frac{3}{2}}, \quad y_{2k+1} \longrightarrow -\left(\frac{2}{3} x\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$A < -1 \quad \text{je} \quad y_{2k} \longrightarrow -\left(\frac{2}{3} x\right)^{\frac{3}{2}}, \quad y_{2k+1} \longrightarrow \left(\frac{2}{3} x\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$0 > A > -1 \quad \text{je} \quad y_{2k} \longrightarrow -\left(\frac{2}{3} x\right)^{\frac{3}{2}}, \quad y_{2k+1} \longrightarrow \left(\frac{2}{3} x\right)^{\frac{3}{2}}$$

Výsledok je znázornený na tomto obrázku:



Obr. 19

Všimnime si, že ak zvolíme za počiatočnú funkciu P. postupnosti napr.

$y_o = (\frac{2}{3} x)^{\frac{3}{2}}$, P. postupnosť je

$$(\frac{2}{3} x)^{\frac{3}{2}}, \quad -(\frac{2}{3} x)^{\frac{3}{2}}, \quad (\frac{2}{3} x)^{\frac{3}{2}}, \quad -(\frac{2}{3} x)^{\frac{3}{2}}$$

teda periodická, ktorá (okrem pre $x = 0$) diverguje. Každá časť tejto postupnosti, ktorá rovnomerne konverguje, nekonverguje k jedinému riešeniu $y = 0$ d. rovnice (a).