21. Použití normálních soustav vektorů k řešení systémů lineárních homogenních diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty

In: Otakar Borůvka (author): Základy teorie matic. (Czech). Praha: Academia, 1971.
pp. 147--151.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401350

21. POUŽITÍ NORMÁLNÍCH SOUSTAV VEKTORŮ K ŘEŠENÍ SYSTÉMŮ LINEÁRNÍCH HOMOGENNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC 1. ŘÁDU S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

Mějme systém lineárních homogenních diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n\,, \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n\,, \end{aligned} \tag{114}$$

kde a_{jk} značí dané konstanty $(n \geqq 2)$. Označíme-li

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix},$$

můžeme systém (114) zapsat jedinou maticovou rovnicí

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\,.$$

Jde o určení obecného řešení systému (114). Ukážeme, že k řešení této úlohy stačí určit normální soustavu vektorů matice $\boldsymbol{A}$: Je-li nějaká normální soustava vektorů matice $\boldsymbol{A}$ určena, lze obecné řešení systému (114) vyjádřit explicitními vzorci. Základem je tato

21.1. Věta. Nechť a je α-násobný kořen matice $\boldsymbol{A}$ s charakteristickými čísly $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_r$ a nechť vektory

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a}_{11}, \ldots, \boldsymbol{a}_{1,\alpha_r}\,, \\ &\boldsymbol{a}_{21}, \ldots, \boldsymbol{a}_{2,\alpha_r}, \boldsymbol{a}_{2,\alpha_r+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{2,\alpha_{r-1}}\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\boldsymbol{a}_{r1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{r,\alpha_r}, \boldsymbol{a}_{r,\alpha_r+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{r,\alpha_{r-1}}, \ldots, \boldsymbol{a}_{r,\alpha_2+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{r,\alpha_1} \end{aligned} \tag{115}$$

tvoří k němu příslušnou normální soustavu vektorů. Nechť x je nezávisle proměnná v systému (114). Pak vektory $\mathbf{y}_{\varrho\sigma}$ ($\varrho = 1, \ldots, r$; $\sigma = 1, \ldots, \alpha_{r-\varrho+1}$) v počtu α, definované vzorcem

$$\mathbf{y}_{\varrho\sigma} = e^{ax} \left\{ \mathbf{a}_{\varrho\sigma} + \frac{x}{1!} \mathbf{a}_{\varrho+1,\sigma} + \ldots + \frac{x^{r-\varrho}}{(r-\varrho)!} \mathbf{a}_{r\sigma} \right\}, \quad (116)$$

jsou nezávislé a každý z nich je řešením systému (114).

Důkaz: Každý minor α-tého řádu matice (typu n/α)

$$[\mathbf{y}_{r1}, \ldots, \mathbf{y}_{11}; \mathbf{y}_{r2}, \ldots, \mathbf{y}_{12}; \ldots, \mathbf{y}_{r,\alpha_1}]$$

v libovolném čísle x se rovná, jak je patrno, součinu čísla $\exp \alpha a x$ a stejnolehlého minoru matice

$$[\mathbf{a}_{r1}, \ldots, \mathbf{a}_{11}; \mathbf{a}_{r2}, \ldots, \mathbf{a}_{12}; \ldots, \mathbf{a}_{r,\alpha_1}] .$$

Z toho soudíme, že vektory $\mathbf{y}_{\varrho\sigma}$ jsou nezávislé.

Dále pro $1 \leqq \varrho \leqq r$, $\sigma = 1, \ldots, \alpha_{r-\varrho+1}$ platí rovnice

$$\mathbf{y}'_{\varrho\sigma} = a \,.\, e^{ax} \sum_{k=0}^{r-\varrho} \frac{x^k}{k!} \mathbf{a}_{\varrho+k,\sigma} + e^{ax} \sum_{k=1}^{r-\varrho} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \mathbf{a}_{\varrho+k,\sigma},$$

přičemž v případě $\varrho = r$ značí druhý výraz na pravé straně vektor nulový. Odtud plynou s ohledem na vlastnosti normální soustavy vektorů (115) vztahy

$$\mathbf{y}'_{\varrho\sigma} = a \,.\, e^{ax} \sum_{k=0}^{r-\varrho} \frac{x^k}{k!} \mathbf{a}_{\varrho+k,\sigma} + e^{ax} \sum_{k=1}^{r-\varrho+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} (\mathbf{A} - a\mathbf{E})\, \mathbf{a}_{\varrho+k-1,\sigma}$$

$$= \mathbf{A} \left(e^{ax} \sum_{k=0}^{r-\varrho} \frac{x^k}{k!} \mathbf{a}_{\varrho+k,\sigma} \right) = \mathbf{A}\mathbf{y}_{\varrho\sigma} .$$

Z nich vidíme, že každý vektor $\mathbf{y}_{\varrho\sigma}$ je řešením systému (114).

Tím je důkaz proveden.

Nechť $a, b, \ldots, f$ značí jednotlivé kořeny matice $\mathbf{A}$ a $\alpha, \beta, \ldots, \varphi$ jejich násobnosti. Když ke každému kořenu přiřadíme podle vzorce (116) soustavu řešení systému (114), obdržíme celkem $\alpha + \beta + \ldots + \varphi = n$ řešení systému (114). Tato řešení jsou nezávislá, neboť determinant jejich matice v libovolném čísle x se rovná, jak je patrno, součinu čísla $\exp(\alpha a + \beta b + \ldots + \varphi f)\,x$ a determinantu normální soustavy vektorů příslušné k matici $\boldsymbol{A}$, takže je různý od nuly. Tím je určen fundamentální systém řešení systému (114). Obecné řešení systému (114) se pak skládá z lineárních kombinací s konstantními koeficienty utvořených z řešení tohoto fundamentálního systému.

Všimněme si zejména případu, že matice $\boldsymbol{A}$ a rovněž nezávisle proměnná x jsou reálné. Pak ke každému reálnému kořenu matice $\boldsymbol{A}$ existuje jistá normální soustava reálných vektorů a k němu podle vzorce (116) přiřazená řešení systému (114) jsou rovněž reálná. Ke dvěma komplexně sdruženým kořenům $a = a_1 + ia_2$, $\bar{a} = a_1 - ia_2$ matice $\boldsymbol{A}$ existují příslušné normální soustavy vektorů $\boldsymbol{a}_{\varrho\sigma} = \boldsymbol{a}_{\varrho\sigma 1} + i\boldsymbol{a}_{\varrho\sigma 2}$, $\bar{\boldsymbol{a}}_{\varrho\sigma} = \boldsymbol{a}_{\varrho\sigma 1} - i\boldsymbol{a}_{\varrho\sigma 2}$ komplexně sdružených a k nim podle vzorce (116) přiřazená řešení $\boldsymbol{y}_{\varrho\sigma}$, $\bar{\boldsymbol{y}}_{\varrho\sigma}$ systému (114) jsou komplexně sdružená. Vektory $\boldsymbol{y}_{\varrho\sigma 1} = (\boldsymbol{y}_{\varrho\sigma} + \bar{\boldsymbol{y}}_{\varrho\sigma}) : 2$, $\boldsymbol{y}_{\varrho\sigma 2} = (\boldsymbol{y}_{\varrho\sigma} - \bar{\boldsymbol{y}}_{\varrho\sigma}) : 2i$, vyjádřené vzorci

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_{\varrho\sigma 1} &= e^{a_1 x} \sum_{k=0}^{r-\varrho} \frac{x^k}{k!} \left(\cos a_2 x\, \boldsymbol{a}_{\varrho+k,\sigma 1} - \sin a_2 x\, \boldsymbol{a}_{\varrho+k,\sigma 2}\right), \\ \boldsymbol{y}_{\varrho\sigma 2} &= e^{a_1 x} \sum_{k=0}^{r-\varrho} \frac{x^k}{k!} \left(\sin a_2 x\, \boldsymbol{a}_{\varrho+k,\sigma 1} + \cos a_2 x\, \boldsymbol{a}_{\varrho+k,\sigma 2}\right) \end{aligned} \tag{117}$$

jsou reálné, nezávislé a jsou ovšem řešeními systému (114). Vidíme že když matice $\boldsymbol{A}$ je reálná, existuje fundamentální systém řešení systému (114), která jsou tvaru (116) nebo vždy po dvou tvaru (117). Poznamenejme, že vzorce (116) a (117) vyjadřují ovšem též pro komplexní hodnoty proměnné x řešení systému (114).

Příklad 21. Řešme systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= - y_2 + y_3, \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 + y_3 - y_4, \\ y_3' &= 2y_1 - y_2 - y_3 + y_4, \\ y_4' &= 2y_2 - 2y_3. \end{aligned} \tag{118}$$

Řešení: Matice tohoto systému je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Je to tedy matice z příkladu 20, a tedy má čtyřnásobný kořen 0 a k němu příslušná charakteristická čísla

$$\alpha_1 = 2\,, \quad \alpha_2 = 1\,, \quad \alpha_3 = 1\,.$$

Normální soustava vektorů matice $\boldsymbol{A}$ příslušná ke kořenu 0 má tedy tvar

$$\boldsymbol{a}_{11}, \boldsymbol{a}_{21}, \boldsymbol{a}_{31}, \boldsymbol{a}_{32}\,.$$

Vektor $\boldsymbol{a}_{11}$ je libovolný nenulový vektor, který se lineární transformací o matici $\boldsymbol{A}^3$ převede na vektor $\boldsymbol{0}$; a lineární transformací o matici $\boldsymbol{A}^2$ na vektor $\neq \boldsymbol{0}$ zvolíme např. jeho složky takto: 1, 0, 0, 0.

Lineární transformací vektoru $\boldsymbol{a}_{11}$ o matici $\boldsymbol{A}$ obdržíme vektor $\boldsymbol{a}_{21}$ o složkách 0, -2, 2, 0.

Lineární transformací vektoru $\boldsymbol{a}_{21}$ o matici $\boldsymbol{A}$ obdržíme vektor $\boldsymbol{a}_{31}$ o složkách 4, 0, 0, -8.

Za vektor $\boldsymbol{a}_{32}$ zvolíme libovolný, na předcházejících vektorech nezávislý vektor, který se lineární transformací o matici $\boldsymbol{A}$ převede na vektor $\boldsymbol{0}$; zvolíme jej např. takto: 1, 1, 1, 0.

Vektory

$$\boldsymbol{a}_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_{31} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a}_{32} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tvoří tedy normální soustavu vektorů matice $\boldsymbol{A}$ příslušnou ke kořenu 0.

Podle věty 21.1 tvoří vektory

$$\mathbf{y}_{11} = \begin{bmatrix} 1 + 2x^2 \\ -2x \\ 2x \\ -4x^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_{21} = \begin{bmatrix} 4x \\ -2 \\ 2 \\ -8x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_{31} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_{32} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{119}$$

fundamentální systém řešení systému diferenciálních rovnic (118).

Vezmeme-li libovolné nezávislé lineární kombinace s konstantními koeficienty vektorů (119), obdržíme opět fundamentální systém řešení systému diferenciálních rovnic (118). Např. vektory

$$\mathbf{y}_1 = -\tfrac{1}{4}\mathbf{y}_{31} + \mathbf{y}_{32}, \quad \mathbf{y}_2 = \tfrac{1}{2}\mathbf{y}_{31}, \quad \mathbf{y}_3 = \tfrac{1}{2}\mathbf{y}_{21}, \quad \mathbf{y}_4 = \tfrac{1}{2}\mathbf{y}_{11} + \tfrac{1}{8}\mathbf{y}_{31}$$

tj.

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 2x \\ -1 \\ 1 \\ -4x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_4 = \begin{bmatrix} 1 + x^2 \\ -x \\ x \\ -1 - 2x^2 \end{bmatrix}$$

tvoří fundamentální systém řešení systému diferenciálních rovnic (118), takže obecné řešení tohoto systému (118) je

$$\begin{aligned} y_1 &= \quad 2C_2 + 2C_3x + C_4(1 + x^2)\,, \\ y_2 &= C_1 \qquad\quad - C_3 - C_4x\,, \\ y_3 &= C_1 \qquad\quad + C_3 + C_4x\,, \\ y_4 &= 2C_1 - 4C_2 - 4C_3x - C_4(1 + 2x^2)\,, \end{aligned}$$

přičemž C_1, C_2, C_3, C_4 značí libovolné konstanty.