

# Z historie lineární algebry

---

## Soustavy lineárních rovnic

In: Jindřich Bečvář (author): Z historie lineární algebry. (Czech). Praha: Matfyzpress, 2007. pp. 21–45.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/400925>

### Terms of use:

© Bečvář, Jindřich

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## II. SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

S úlohami, které vedou na soustavy lineárních rovnic, se setkáváme již v nejstarších civilizacích, ve starém Egyptě a Mezopotámii; charakterizují znalosti počtářů, kteří žili před čtyřmi tisíci lety. K výraznému pokroku v metodách řešení takovýchto úloh došlo ve staré Číně před dvěma tisíci lety. Antický svět se touto problematikou příliš nezabýval. Ve středověké Evropě pracoval s velmi zajímavými soustavami lineárních rovnic Leonardo Pisánský.

Čtenáře lze odkázat na následující monografie, v nichž lze nalézt řadu dalších bibliografických informací:

J. Bečvář a kol.: *Matematika ve středověké Evropě* (2001),

J. Bečvář, M. Bečvářová, H. Vymazalová: *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie* (2003),

H. Vymazalová: *Staroegyptská matematika. Hieratické texty* (2006),

J. Hudeček: *Matematika v devíti kapitolách* (2008).

### 1. Egypt

V Moskevském papyru se vyskytuje několik úloh, které je možno vyjádřit jednoduchými soustavami lineárních rovnic. Jsou to úlohy věnované problematice chleba a piva. S několika takovými úlohami, které však vedou pouze na jednu lineární rovnici, jsme se setkali již v předcházející kapitole.

V 5. úloze Moskevského papyru je třeba zjistit počet džbánů piva o *pesu* 4, které odpovídají 100 chlebům o *pesu* 20 (příslušným koeficientem je  $\frac{1}{2}$ ).

Z jedné měrice obilí se podle zadání upeče dvacet chlebů; sto chlebů se upeče z pěti měric. Vypočtených pět měric se tedy vynásobí jednou polovinou (užití koeficientu) a vynásobí čtyřmi; vychází 10 džbánů piva.

V 9. úloze je úkolem převést 16 měric hornoegyptského ječmene na 100 chlebů o *pesu* 20 a na pivo o *pesu* 2, 4, 6 (příslušným koeficientem je  $\frac{1}{2}$ ); z popsání řešení vyplývá, že budou vyrobena stejná množství těchto tří druhů piva, i když to ze zadání příkladu vůbec není zřejmé.

Nejprve je vypočteno, že na 100 chlebů o *pesu* 20 je třeba 5 měric ječmene, tj. na výrobu piva zbude 11 měric ječmene. Označíme-li písmenem  $y$  počet džbánů jednotlivých druhů piva o *pesu* 2, 4, 6, získáme rovnici

$$\frac{y}{2} + \frac{y}{4} + \frac{y}{6} = \frac{1}{2} \cdot 11 .$$

Postup výpočtu starých Egyptanů v podstatě odpovídá řešení této rovnice; vyrobí se po šesti džbánech jednotlivých druhů piva.

Ve 24. úloze se má vyrobit z 15 měřic ječmene 100 chlebů a 10 džbánů piva, přičemž *pesu* piva má být jednou desetinou *pesu* chleba; opět se uvažuje koeficient  $\frac{1}{2}$ . *Pesu* chleba vychází 20, *pesu* piva vychází 2.<sup>1</sup>

Výše uvedené slovní úlohy lze v naší symbolice zapsat takto:

$$\begin{aligned} \mathbf{5. \text{ úloha:}} \quad & 100 = x \cdot 20, \\ & y = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 4. \end{aligned} \quad (x = 5, y = 10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{9. \text{ úloha:}} \quad & 100 = x \cdot 20, & (x = 5, y = 6) \\ & y = \frac{1}{2} \cdot x_1 \cdot 2, & (x_1 = 6) \\ & y = \frac{1}{2} \cdot x_2 \cdot 4, & (x_2 = 3) \\ & y = \frac{1}{2} \cdot x_3 \cdot 6. & (x_3 = 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{24. \text{ úloha:}} \quad & 100 = x_1 \cdot p, & (p = 20, x_1 = 5, x_2 = 10) \\ & 10 = \frac{1}{2} \cdot x_2 \cdot \frac{p}{10}, \\ & 15 = x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Příklady o chlebu a pivu vedoucí na soustavy lineárních rovnic, které jsou obsaženy v Rhindově papýru (71. až 78. úloha), jsou jednodušší, neboť se v nich nevyskytují žádné koeficienty.

Velmi zajímavá je 71. úloha, v níž se hovoří o tom, že z jednoho džbánu piva (o *pesu* 2) byla odlita jedna čtvrtina a pro „zjemnění“ byla nahrazena vodou. Vypočítat se má *pesu* zředěného piva. Podle uvedeného řešení odpovídá jednomu džbánu  $\frac{1}{2}$  měřice sladu, po odebrání jedné čtvrtiny vyjde  $\frac{1}{4} \frac{1}{8}$  měřice sladu. Převrácená hodnota tohoto čísla je  $2 \frac{2}{3}$ , a to je *pesu* zředěného piva.

V 72., 73. a 75. úloze je nahrazováno známé množství chlebů dané kvality neznámým množstvím  $y$  chlebů jiné dané kvality. Nejprve je vypočteno množství  $x$  mouky potřebné pro výrobu známého množství chlebů, a potom neznámá  $y$ . Podobný charakter mají 77. a 78. úloha, v nichž se nahrazuje pivo chlebem, resp. chleba pivem.

74. a 76. úloha jsou složitější a náročnější. V první z nich je třeba dané množství chlebů známé kvality nahradit neznámými množstvími  $y_1, y_2$  chlebů dvou různých kvalit 10 *pesu* a 20 *pesu*; mlčky se přitom předpokládá, že se pro tato dvě neznámá množství chlebů použije stejné množství obilí.

V 76. úloze je třeba nahradit dané množství chlebů známé kvality neznámým množstvím chlebů dvou různých kvalit 20 a 30 *pesu*; v tomto případě se oproti předchozímu příkladu předpokládá, že získáme stejná množství  $y$  obou druhů chleba.

Všechny tyto úlohy je možno vyjádřit následujícími rovnicemi:

---

<sup>1</sup> Příklad je poznamenán chybou; v zadání je požadováno 200 chlebů, v odpovědi je uvedeno jen 100 chlebů. Předpokládáme, že je chyba v zadání – tomu odpovídá výše uvedená interpretace.

- 71. úloha:**  $1 = x \cdot 2$  ,  
 $1 = (x - \frac{1}{4}x) \cdot p$  .      $(x = \frac{1}{2}, p = 2\frac{2}{3})$
- 72. úloha:**  $100 = x \cdot 10$  ,  
 $y = x \cdot 45$  .      $(x = 10, y = 450)$
- 73. úloha:**  $100 = x \cdot 10$  ,  
 $y = x \cdot 15$  .      $(x = 10, y = 150)$
- 74. úloha:**  $1000 = x \cdot 5$  ,  
 $y_1 = \frac{x}{2} \cdot 10$  ,  
 $y_2 = \frac{x}{2} \cdot 20$  .      $(x = 200, y_1 = 1000, y_2 = 2000)$
- 75. úloha:**  $155 = x \cdot 20$  ,  
 $y = x \cdot 30$  .      $(x = 7\frac{1}{2}\frac{1}{4}, y = 232\frac{1}{2})$
- 76. úloha:**  $1000 = x \cdot 10$  ,  
 $y = a \cdot 20$  ,  
 $y = b \cdot 30$  ,  
 $x = a + b$  .      $(x = 100, y = 1\,200)$
- 77. úloha:**  $10 = x \cdot 2$  ,  
 $y = x \cdot 5$  .      $(x = 5, y = 25)$
- 78. úloha:**  $100 = x \cdot 10$  ,  
 $y = x \cdot 2$  .      $(x = 10, y = 20)$

Z našeho pohledu se většinou nejedná o klasické soustavy lineárních rovnic, ale o situaci, kdy se z první rovnice vypočte jedna neznámá, ta se dosadí do druhé rovnice, a pak se vypočte druhá neznámá. Výjimkou je 76. úloha, v níž je mezi neznámými komplikovanější vazba.

Příklady jsou z matematického hlediska zcela triviální, jsou řešeny přímým dělením (vzhledem k jednoduchému zadání) a dosazovací metodou.

## 2. Mezopotámie

Úlohy vedoucí na soustavy lineárních rovnic nalézáme i na hliněných tabulkách ze Starobabylónské říše (zhruba 2000 až 1600 př. Kr.). Jsou většinou složitější než úlohy egyptské; v některých rovnicích se neznámé vyskytují v komplikovanějších vztazích. Např. na tabulce AO 8862 je uvedena následující úloha:

*... cihly, lidi a své dny sečetl jsem, to dá (2; 20).  $\frac{2}{3}$  lidí jsou mé dny. Stanov cihly, lidi a dny.<sup>2</sup>*

<sup>2</sup> Pripomeňme, že se jedná o zápis čísel v šedesátkové soustavě, tj. např.  $(2; 20) = 2 + \frac{20}{60}$ ,  $(2, 20) = 2 \cdot 60^1 + 20$  apod.

Podle připojeného výpočtu, a rovněž s přihlédnutím ke studiu jiných tabulek, lze úlohu interpretovat jako soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 140 , \\x + y &= 120 , \\ \frac{2}{3} \cdot y &= z ,\end{aligned}$$

kde  $x$  je počet cihel,  $y$  počet lidí a  $z$  počet dnů. Mezopotámská tabulka uvádí správný výsledek: 90 cihel, 30 lidí a 20 dnů.

Poznamenejme, že úloha je umělá, rozumný smysl nemá, neboť se sčítají objekty různého typu.

Na další starobabylónské tabulce objevené v Suse je příklad, který lze v naší symbolice zapsat soustavou dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned}x + \frac{y}{4} &= 7 , \\x + y &= 10 .\end{aligned}$$

Rozebereme-li připojený postup řešení a zapíšeme-li jej naší symbolikou, zjistíme, že byl nejprve odstraněn zlomek, pak byla provedena eliminace neznámé  $y$  (patrně odečtením rovnic) a získána tak rovnice  $3x = 18$ . Odtud již snadno vyplynul výsledek  $x = 6$  a  $y = 4$ .

Velmi zajímavá úloha vedoucí na soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých je na starobabylónské tabulce VAT 8389. Její text zní takto:

*Z (1) bur (4) gur obilí jsem sklídlil. Z jednoho druhého bur (3) gur obilí jsem sklídlil. Obilí nad obilí o (8, 20) převyšuje.*

*Moje pole přičteno a (30, 0) dává. Moje pole jsou co?*

*(30, 0) pro pole vezmi. (20, 0) pro obilí, které on sklídlil, vezmi. (30, 0) pro druhé pole vezmi. (15, 0) pro obilí, které on sklídlil, vezmi.*

*(8, 20), obilí nad obilí vychází, vezmi. A (30, 0) součet ploch polí vezmi a (30, 0) součet ploch polí do dvou rozděl a (15, 0) je to.*

*(15, 0) a (15, 0) dvakrát k zdvojnásobení vezmi a reciproké z (30, 0) toho pole utvoř a (0; 0, 2) je to.*

*(0; 0, 2) s (20, 0), obilí, které on sklídlil, násobeno. (0; 40) je předešlé obilí.*

*S (15, 0), to dvakrát k jeho dvojnásobku bylo vzato, násobeno. (10, 0) pamatuje tvoje hlava.*

*Reciproké z (30, 0), toho druhého pole, utvoř a (0; 0, 2) je to.*

*(0; 0, 2) s (15, 0) obilí, které on sklídlil, násobeno. (0; 30) je předešlé obilí. S (15, 0), to dvakrát k jeho dvojnásobku bylo vzato, násobeno, je (7, 30).*

*(10, 0), tvoje hlava pamatuje nad (7, 30) o co vychází? (2, 30) vychází.*

*(2, 30), co vychází, z (8, 20), obilí nad obilí vychází, odečti a (5, 50) necháš zpátky.*

$(5, 50)$ , které jsi nechal zpátky, pamatuje tvá hlava.  $(0; 40)$  jeden faktor a  $(0; 30)$  druhý faktor sečtené a  $(1; 10)$  jako jmenovatele.

Co s  $(1; 10)$  se má vzít, to mně  $(5, 50)$ , co tvá hlava pamatuje, dává?  $(5, 0)$  vezmi.

$(5, 0)$  s  $(1; 10)$  násobeno  $(5, 50)$  dá tobě.  $(5, 50)$ , to bylo vzato, z  $(15, 0)$ , to dvakrát k jeho dvojnásobnému bylo vzato, od jednoho odečti, k druhému přičti a za prvé  $(20, 0)$ , za druhé  $(10, 0)$  dává to.  $(20, 0)$  je plocha prvního pole,  $(10, 0)$  plocha druhého pole.

Zadání příkladu lze vysvětlit asi takto. Máme dvě pole. Z plošné jednotky *bur* prvního pole sklídíme 4 *gur* obilí, z plošné jednotky *bur* druhého pole sklídíme 3 *gur* obilí. Sklizeň z prvního pole převyšuje sklizeň z druhého pole o  $(8, 20) = 500$  *sila*. Součet ploch polí je  $(30, 0) = 1800$  *sar*. Jaké jsou výměry obou polí?

Úloha je komplikována převodem jednotek, který není nikde vysvětlen. Znalost převodních vztahů se předpokládala.<sup>3</sup>

Označíme-li  $x$  a  $y$  výměry uvažovaných polí v jednotkách *sar*, lze úlohu zapsat následující soustavou dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\frac{20 \cdot 60}{1800} \cdot x - \frac{15 \cdot 60}{1800} \cdot y = 500 ,$$

$$x + y = 1800 .$$

Soustava nebyla řešena ani eliminací, ani metodou dosazovací, ale metodou chybného předpokladu. Nejprve byla vypočtena úroda na jednotlivých polích za předpokladu, že obě pole mají stejnou výměru, tj.  $(15, 0)$  *sar*:

$$\frac{(20, 0)}{(30, 0)} \cdot (15, 0) = (0; 0, 2) \times (20, 0) \times (15, 0) = (0; 40) \times (15, 0) = (10, 0) ,$$

$$\frac{(15, 0)}{(30, 0)} \cdot (15, 0) = (0; 0, 2) \times (15, 0) \times (15, 0) = (0; 30) \times (15, 0) = (7, 30) .$$

Rozdíl úrod na těchto dvou polích stejné výměry je tedy

$$(10, 0) - (7, 30) = (2, 30) .$$

Úrody se však mají lišit o  $(8, 20)$ , rozdíl úrod při stejné výměře polí je tedy o  $(5, 50)$  menší. Počtář nyní vycházel z jednoduché úvahy: na každý *sar*, o který se zvětší první pole a zmenší druhé pole, se získá o  $(0; 40)$  více úrody na prvním poli a o  $(0; 30)$  méně úrody na druhém poli. Rozdíl úrod proto naroste o  $(0; 40) + (0; 30) = (1; 10)$ .

Poté počtář provedl příslušné dělení, tj. našel, čím je třeba vynásobit číslo  $(1; 10)$ , aby vyšlo číslo  $(5, 50)$ , tj. „chybějící“ rozdíl úrod. Snadno zjistil, že výsledek je  $(5, 0)$ . Pole tedy mají výměru

$$(15, 0) + (5, 0) = (20, 0) \quad \text{a} \quad (15, 0) - (5, 0) = (10, 0) .$$

<sup>3</sup> Pripomeňme, že 4 *gur* jsou  $(20, 0)$  *sila*, 3 *gur* jsou  $(15, 0)$  *sila*, 1 *bur* je  $(30, 0)$  *sar*.

Zobecníme-li tento postup, lze říci, že počtář použil klasickou mezopotámskou substituci. Je-li třeba řešit rovnici

$$x + y = 2h ,$$

kde pro  $x$  a  $y$  je dána ještě nějaká další podmínka, potom se položí

$$x = h + w , \quad y = h - w ,$$

kde  $w$  je nová neznámá.

Na výše zmíněné tabulce VAT 8389 jsou další tři úlohy, které jsou modifikací předchozího příkladu. Ve třetí úloze této tabulky je řešena soustava

$$\begin{aligned} \frac{(20, 0)}{(30, 0)} \cdot x - \frac{(15, 0)}{(30, 0)} \cdot y &= (8, 20) , \\ x - y &= (10, 0) . \end{aligned}$$

Ve druhé, resp. čtvrté úloze jsou dány naopak výměry polí a stejné podmínky pro výnosy jako v úloze první, resp. třetí. Mají se vypočítat úrody na jednotlivých polích a jejich rozdíl; tyto úlohy lze proto chápat jako zkoušky správnosti výsledků první, resp. třetí úlohy.

Šest úloh téměř totožného znění je na starobabylónské tabulce VAT 8390. Tato tabulka je zajímavou sbírkou úloh; je typickým představitelem mezopotámských „hliněných učebnic“, kdy modifikací základní úlohy dostáváme sérii dalších úloh s podobnou tematikou, ale postupně narůstající obtížnosti.

V první úloze jsou dány výměry polí a stejné podmínky jako u prvního příkladu na tabulce VAT 8389; mají se vypočítat úrody na jednotlivých polích, součet úrod a součet výměr polí.

Druhou úlohu lze zapsat soustavou

$$\begin{aligned} \frac{(20, 0)}{(30, 0)} \cdot x + \frac{(15, 0)}{(30, 0)} \cdot y &= (18, 20) , \\ x + y &= (30, 0) . \end{aligned}$$

Ve třetí úloze se vychází ze stejných podmínek, počítají se úrody na jednotlivých polích. Čtvrtá úloha vede na řešení soustavy

$$\begin{aligned} \frac{(20, 0)}{(30, 0)} \cdot x + \frac{(15, 0)}{(30, 0)} \cdot y &= (18, 20) , \\ x - y &= (10, 0) . \end{aligned}$$

V páté úloze jsou dány výměry polí a stejné podmínky jako v úloze čtvrté, počítají se úrody na jednotlivých polích.

V šesté úloze je dána výměra prvního pole a stejné podmínky jako ve čtvrtém příkladu. Počítá se výměra druhého pole a úrody na jednotlivých polích.

Poznamenejme, že jednoduché lineární rovnice a jejich soustavy lze nalézt i na starobabylónských tabulkách YBC 4668, YBC 4712, YBC 4713, YBC 4714, YBC 4715, VAT 7528 a VAT 7535.

### 3. Čína

Ve staré Číně se kromě úloh na přímou úměrnost nebo jednu lineární rovnici setkáváme se soustavami lineárních rovnic. Ty jsou řešeny v 7. a 8. kapitole klasického díla *Matematika v devíti kapitolách* (*Tiou čang suan šu*, resp. *Jiu zhang suan shu*<sup>4</sup>). Jedná se o první významnou čínskou učebnici matematiky pocházející z doby před dvěma tisíci lety, která na řadu století výrazně ovlivnila vývoj matematiky a vyučování matematice ve staré Číně. Text tohoto díla byl ustálen patrně na počátku našeho letopočtu, dochována zůstala verze z roku 263, jejímž „redaktorem“ byl Liou Chuej (Liu Hui), který připojil k základnímu textu své komentáře. V současné době je text *Matematiky v devíti kapitolách* dostupný nejen v několika světových jazycích, ale i v češtině.

Sedmá kapitola tohoto klasického díla se nazývá *O přebytku a nedostatku* (obsahuje 20 úloh; vyjádření posledních dvou rovnicemi je poněkud násilné), osmá kapitola nese název *Fang čcheng* (*Fangcheng*, 18 úloh). Tyto kapitoly jsou pojmenovány podle metod, které jsou v nich prezentovány.

Za textem každé slovní úlohy je vždy uveden její výsledek, u několika úloh je připojen podrobnější návod k řešení, který demonstruje příslušnou metodu; u dalších úloh jsou většinou jen kratší komentáře.

Jednotlivé soustavy rovnic i příslušné volby chybných předpokladů uvedeme v následujícím textu v naší současné symbolice. Čínští počtáři většinou úlohy řešili ve smíšených číslech (peněžní jednotky, objemové jednotky atd.) odpovídajících textu té které úlohy. Pro vážnější zájemce doporučujeme monografii [Hudeček, 2008]; jsou v ní úplná znění úloh, příslušné komentáře, informace o převodech jednotek atd.

Poznamenejme ještě, že čínští počtáři znázorňovali čísla pomocí tyčinek na početní desce a výpočty konali jejich postupným přemísťováním.

### 7. kapitola

V 7. kapitole čínské *Matematiky v devíti kapitolách* je nejprve prezentována metoda řešení slovních úloh, které je možno zapsat soustavou dvou lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_1x - b_1 &= y, \\ a_2x + b_2 &= y, \end{aligned}$$

kde  $a_1 > a_2$ ,  $b_1, b_2$  jsou kladná racionální čísla.

<sup>4</sup> Uvádíme český a mezinárodní přepis názvu.



Podle prvního návodu je třeba zapsat zadaná čísla slovní úlohy (tj. v dnešním pojetí koeficienty příslušné soustavy rovnic) do tabulky

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

a vypočítat součet součinnů „křížem“, tj.  $a_1b_2 + a_2b_1$  (tzv. *ší*), součet  $b_1 + b_2$  (tzv. *fa*), rozdíl  $a_1 - a_2$  a podíly

$$x = \frac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2}, \quad y = \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{a_1 - a_2}.$$

Druhý návod je mírnou modifikací prvního: vypočte se  $b_1 + b_2$ ,  $a_1 - a_2$ ; potom je

$$x = \frac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2}$$

a hodnota neznámé  $y$  se získá dosazením již vypočtené hodnoty  $x$  do první nebo druhé rovnice, tj.

$$y = a_1x - b_1 \quad \text{nebo} \quad y = a_2x + b_2.$$

V textu je popsán pouze mechanický postup získání výsledků bez jakéhokoli zdůvodnění.

Výše uvedené postupy jsou použity v prvních čtyřech úlohách 7. kapitoly; úplné znění první úlohy je zde uvedeno, další úlohy jsou již přepsány v současné symbolice.

### 1. úloha:

*Několik lidí kupuje nějakou věc. Dá-li každý člověk po 8, je přebytek 3. Dá-li každý člověk po 7, je nedostatek 4. Ptáme se na počet lidí a cenu věci.*

*Odpověď: 7 lidí, cena 53.*

$$8x - 3 = y,$$

$$7x + 4 = y. \quad (x = \frac{3+4}{8-7} = 7, y = \frac{8 \cdot 4 + 7 \cdot 3}{8-7} = 53)$$

Hodnota  $b_1 = 3$  je chápána jako *přebytek*, hodnota  $b_2 = 4$  jako *nedostatek*: dá-li každý člověk po 8, mají dohromady o 3 více, než je cena věci, dá-li každý člověk po 7, mají dohromady o 4 méně, než je cena věci. Proto se prezentovaný postup nazývá metoda *přebytku a nedostatku*.

### 2. úloha:

$$9x - 11 = y,$$

$$6x + 16 = y. \quad (x = 9, y = 70)$$

**3. úloha:**

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x - 4 &= y, \\ \frac{1}{3}x + 3 &= y.\end{aligned}\quad (x = 42, y = 17)$$

**4. úloha:**

$$\begin{aligned}\frac{270}{9}x - 30 &= y, \\ \frac{190}{7}x + 330 &= y.\end{aligned}\quad (x = 126, y = 3\,750)$$

V dalších čtyřech úlohách je výše uvedená metoda mírně modifikována pro případy vedoucí na soustavu rovnic tvaru

$$\begin{aligned}a_1x - b_1 &= y, & a_1x + b_1 &= y, & a_1x - b_1 &= y, & a_1x + b_1 &= y, \\ a_2x - b_2 &= y, & a_2x + b_2 &= y, & a_2x &= y, & a_2x &= y.\end{aligned}$$

Jedná se tedy o metody *dvou přebytků*, *dvou nedostatků*, *přebytku a rovnosti*, *nedostatku a rovnosti*. Pro jednodušší 7. a 8. úlohu je již uveden jen druhý návod, který je výhodnější.

**5. úloha:**

$$\begin{aligned}400x - 3\,400 &= y, \\ 300x - 100 &= y.\end{aligned}\quad (x = 33, y = 9\,800)$$

**6. úloha:**

$$\begin{aligned}7x + 3 &= y, \\ 5x + 45 &= y.\end{aligned}\quad (x = 21, y = 150)$$

**7. úloha:**

$$\begin{aligned}100x - 100 &= y, \\ 90x &= y.\end{aligned}\quad (x = 10, y = 900)$$

**8. úloha:**

$$\begin{aligned}5x + 90 &= y, \\ 50x &= y.\end{aligned}\quad (x = 2, y = 100)$$

Dále je v 7. kapitole popsána metoda řešení slovních úloh, které je většinou možno vyjádřit jednou lineární rovnicí nebo soustavou dvou lineárních rovnic,

z nichž jedna je velmi jednoduchá. Tyto úlohy jsou řešeny metodou *dvou chybných předpokladů* (ve středověké Evropě bylo toto pravidlo nazýváno *regula duorum falsorum positionum*), které vedou na *přebytek* a *nedostatek*.

Uvažujme nejprve lineární rovnici

$$ax = b ,$$

kde  $a, b$  jsou kladná racionální čísla. Za neznámou  $x$  se dosadí dvě vhodné hodnoty  $x_1 > x_2$  (chybné předpoklady), pro něž

$$ax_1 - z_1 = b ,$$

$$ax_2 + z_2 = b ,$$

kde kladná čísla  $z_1, z_2$  jsou chápána jako přebytek a nedostatek. Podle prezentované metody je třeba vytvořit tabulku

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} ,$$

součet součinů „křížem“  $x_1z_2 + x_2z_1$ , součet přebytku a nedostatku  $z_1 + z_2$  a podíl těchto dvou čísel, tj.

$$x = \frac{x_1z_2 + x_2z_1}{z_1 + z_2} .$$

Podle metody přebytku a nedostatku z předchozí části 7. kapitoly je totiž

$$a = \frac{z_1 + z_2}{x_1 - x_2} , \quad b = \frac{x_1z_2 + x_2z_1}{x_1 - x_2} ,$$

takže  $x = \frac{b}{a}$  má výše uvedený tvar.

Poznamenejme, že metodou chybného předpokladu, resp. dvou chybných předpokladů, resp. přebytku a nedostatku obcházel řešitel přímé dělení. Dělení bylo totiž nejtěžší aritmetickou operací, která byla v některých situacích těžko aplikovatelná (v případě velkých čísel, smíšených čísel apod.).

Uvažujme nyní soustavu dvou lineárních rovnic

$$a_1x + b_1y = c_1 ,$$

$$a_2x + b_2y = c_2 .$$

Vhodně zvolíme dva chybné předpoklady  $x_1 > x_2$ , z první rovnice vypočteme odpovídající hodnoty  $y_1, y_2$  a po dosazení do druhé rovnice přebytek  $z_1$  a nedostatek  $z_2$ . Nejde o nic jiného než o řešení jedné lineární rovnice

$$a_2x + b_2 \frac{c_1 - a_1x}{b_1} = c_2$$

výše uvedeným způsobem.

Zdůrazněme, že staří Číňané neznali rovnice v našem slova smyslu. Není proto jasné, zda je výstižnější (pro znázornění jejich postupů) vyjádřit některé slovní úlohy jednou, nebo dvěma rovnicemi.

Prezentovanou metodou se má řešit 9. až 20. úloha 7. kapitoly. V některých případech je řešení mírně komplikováno převodem jednotek.

### 9. úloha:

*V sudu o objemu 10 dou je neznámé množství obilí. Sud je potom doplněn neloupaným prosem. Po oloupání bylo v sudu jen 7 dou obilí. Kolik tam bylo původně obilí.<sup>5</sup>*

*Výsledek: 2 dou a 5 šenů.*

Úloha vede na soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x + y &= 10, \\x + \frac{3}{5}y &= 7, \quad (x = 2\frac{1}{2}, y = 7\frac{1}{2})\end{aligned}$$

resp. na rovnici

$$x + \frac{3}{5}(10 - x) = 7, \quad \text{tj.} \quad \frac{2}{5}x = 1.$$

V návodu se klade  $x_1 = 3$  a  $x_2 = 2$ , příslušná tabulka má tvar

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \frac{2}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix}.$$

Další úlohy je možno v současné symbolice vyjádřit buď jednou lineární rovnicí, nebo soustavou rovnic. Opět lze poznamenat, že metodou dvou chybných předpokladů obcházelí tehdejší počtáři přímé dělení.

### 10. úloha:

$$10x + 7x = 90. \quad (x = 5\frac{5}{17})$$

(klade se  $x_1 = 6$ ,  $x_2 = 5$ )

### 11. úloha:

$$4\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x = 3 + 4x. \quad (x = \frac{6}{13})$$

(klade se  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 2$ )

### 12. úloha:

$$3 + 4x + 1\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x = 5. \quad (x = \frac{2}{17})$$

(klade se  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 2$ )

### 13. úloha:

$$\begin{aligned}x + y &= 2, \\50x + 10y &= 30, \quad (x = \frac{1}{4}, y = 1\frac{3}{4})\end{aligned}$$

---

<sup>5</sup> Oloupáním se objem prosa redukuje na tři pětiny, jak vyplývá z tabulky uvedené na začátku 2. kapitoly i z výsledku, který za textem úlohy následuje. Poznamenejme, že jeden dou je deset šenů.

resp.

$$50x + 10(2 - x) = 30 .$$

$$(\text{klade se } x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{5})$$

**14. úloha:**

$$5x + y = 3 ,$$

$$x + 5y = 2 .$$

$$(x = \frac{13}{24}, y = \frac{7}{24})$$

$$(\text{klade se } x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{55}{100})$$

**15. úloha:**

$$x + y = 30 ,$$

$$y = \frac{5}{3}x .$$

$$(x = 11\frac{1}{4}, y = 18\frac{3}{4})$$

$$(\text{klade se } x_1 = 12, x_2 = 9)$$

**16. úloha:**

$$x + y = 27 ,$$

$$7x + 6y = 176 .$$

$$(x = 14, y = 13)$$

V 16. úloze se klade  $x_1 = 27$  a  $x_2 = 0$ . Je zajímavé, že se zde objevuje nula jako chybný předpoklad.

**17. úloha:**

$$x + y = 100 ,$$

$$300x + \frac{500}{7}y = 10\,000 .$$

$$(x = 12\frac{1}{2}, y = 87\frac{1}{2})$$

$$(\text{klade se } x_1 = 20, x_2 = 10)$$

**18. úloha:**

$$9x = 11y ,$$

$$8x + y + 13 = 10y + x .$$

$$(x = 35\frac{3}{4}, y = 29\frac{1}{4})$$

$$(\text{klade se } x_1 = 3, x_2 = 2)$$

**8. kapitola**

V 8. kapitole *Matematiky v devíti kapitolách* je 18 slovních úloh vedoucích na soustavy lineárních rovnic s regulární maticí řádu  $n$ , kde  $n = 2, 3, 4, 5$ .

V návodu k první úloze je popsána metoda, kterou se takovéto úlohy řeší. Z dnešního pohledu se jedná o obecnou metodu řešení soustavy lineárních



např. ve výsledcích. Při záznamech na početní desce byla kladná a záporná čísla odlišována barvou – kladná čísla červenými tyčinkami, záporná černými.

### 1. úloha:

Ze 3 snopů dobré úrody, 2 snopů průměrné úrody a 1 snopu špatné úrody získali 39 dou [zrna]. Ze 2 snopů dobré úrody, 3 snopů průměrné úrody a 1 snopu špatné úrody získali 34 dou [zrna]. Z 1 snopu dobré úrody, 2 snopů průměrné úrody a 3 snopů špatné úrody získali 26 dou [zrna]. Ptáme se, kolik [zrna] se získá z jednoho snopu dobré, průměrné a špatné úrody.

*Odpověď:* z 1 snopu dobré úrody  $9\frac{1}{4}$  dou,  
z 1 snopu průměrné úrody  $4\frac{1}{4}$  dou,  
z 1 snopu špatné úrody  $2\frac{3}{4}$  dou.

Tato slovní úloha vede na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39, \\ 2x + 3y + z &= 34, \\ x + 2y + 3z &= 26. \end{aligned}$$

Starí Číňané sestavili ze zadaných čísel tabulku, kterou upravovali „maticově“:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \\ 78 & 24 & 39 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \\ 195 & 24 & 39 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{bmatrix}$$

Z poslední tabulky je již možno vypočítat neznámé; v návodu k první úloze je přesně popsáno, jak se utvoří čitatelé a jmenovatel zlomků, kterými jsou neznámé vyjádřeny. Jmenovatel je 36, čitatelé neznámých  $z$ ,  $y$ ,  $x$  jsou po řadě:

$$99, \quad \frac{24 \cdot 36 - 99}{5} = 153, \quad \frac{39 \cdot 36 - 99 - 2 \cdot \frac{24 \cdot 36 - 99}{5}}{3} = 333.$$

Řešení 1. úlohy je tedy:

$$x = \frac{333}{36} = 9\frac{1}{4}, \quad y = \frac{153}{36} = 4\frac{1}{4}, \quad z = \frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}.$$

Návody k řešení dalších úloh jsou v 8. knize většinou velmi stručné. Často se omezují pouze na stručnou instrukci *sestav a uprav tabulku fang čheng*.

Většina slovních úloh vede přímo na výchozí tabulku, v úlohách 4, 5, 6, 8, 15 je nutno nejprve „převést některé členy z jedné strany rovnice na druhou“.

U druhé úlohy je navíc poznamenáno, že je třeba sloučit zadané absolutní členy; v 11. úloze je třeba sloučit členy obsahující neznámé. V návodu třetí úlohy jsou instrukce, jak upravovat tabulku *fang čcheng*, objeví-li se při výpočtech záporná čísla (práve ve třetí úloze k tomu poprvé dojde). Tento způsob úprav se nazývá *čžen-fu (zhengfu)*. Záporná čísla se objeví ve výchozí tabulce v úlohách 4, 5, 6, 8 a 15 (návody k těmto příkladům uvádějí, která čísla ze zadání se do tabulky *fang čcheng* zanesou jako kladná a která jako záporná). Při úpravách se s nimi pracuje v úlohách 3, 12, 13, 14, 16, 17 a 18.

Většina úloh má praktický charakter, jsou věnovány problematice kvality úrody, cen domácího dobytka, váhy různých plodin atd. 16. příklad je však absurdní, neboť se mezi tři typy lidí rozdělují slepice, a přitom jsou řešením (pro praxi nepoužitelné) zlomky  $\frac{45}{122}$ ,  $\frac{41}{122}$ ,  $\frac{97}{122}$ .

Vybočuje rovněž 13. úloha, která vede na soustavu rovnic s parametrem  $a$ . Tento parametr se při výpočtu volí tak, aby soustava měla nejmenší celočíselné řešení.

Zbývající úlohy 8. kapitoly nyní vyjádříme soustavami lineárních rovnic; uvedeme výsledky všech úloh, abychom si udělali zcela konkrétní obraz o početní obtížnosti jednotlivých příkladů.

## 2. úloha:

$$\begin{aligned} 7x - 1 + 2y &= 10, \\ 8y + 1 + 2x &= 10. \end{aligned} \quad \left(1\frac{18}{52}, \frac{41}{52}\right)$$

## 3. úloha:

*Dvěma snopům dobré úrody, třem snopům průměrné úrody a čtyřem snopům špatné úrody nestačí do jednoho dou po řadě jeden snop průměrné, špatné a dobré úrody. Ptáme se, kolik zrna se získá z jednoho snopu dobré, průměrné a špatné úrody.*

*Odpověď: z 1 snopu dobré úrody se získá  $\frac{9}{25}$  dou,  
z 1 snopu průměrné úrody  $\frac{7}{25}$  dou,  
z 1 snopu špatné úrody  $\frac{4}{25}$  dou.*

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1, \\ 3y + z &= 1, \\ x + 4z &= 1. \end{aligned} \quad \left(\frac{9}{25}, \frac{7}{25}, \frac{4}{25}\right)$$

## 4. úloha:

$$\begin{aligned} 5x - 11 &= 7y, \\ 7x - 25 &= 5y. \end{aligned} \quad (5, 2)$$



**5. úloha:**

$$\begin{aligned} 6x - 18 &= 10y , \\ 15y - 5 &= 5x . \end{aligned} \quad (8, 3)$$

**6. úloha:**

$$\begin{aligned} 3x + 6 &= 10y , \\ 5y + 1 &= 2x . \end{aligned} \quad (8, 3)$$

**7. úloha:**

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 10 , \\ 2x + 5y &= 8 . \end{aligned} \quad (1\frac{13}{21}, \frac{20}{21})$$

**8. úloha:**

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 13z + 1000 , \\ 3x + 3z &= 9y , \\ 6y + 8z &= 5x - 600 . \end{aligned} \quad (1200, 500, 300)$$

**9. úloha:**

$$\begin{aligned} 4x + y &= 8 , \\ 5y + x &= 8 . \end{aligned} \quad (1\frac{13}{19}, 1\frac{5}{19})$$

**10. úloha:**

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2}y &= 50 , \\ y + \frac{2}{3}x &= 50 . \end{aligned} \quad (37\frac{1}{2}, 25)$$

**11. úloha:**

$$\begin{aligned} 2x + y &= 10\,000 + \frac{1}{2}x , \\ x + 2y &= 10\,000 - \frac{1}{2}y . \end{aligned} \quad (5454\frac{6}{11}, 1818\frac{2}{11})$$

**12. úloha:**

$$\begin{aligned} x + y &= 40 , \\ 2y + z &= 40 , \\ 3z + x &= 40 . \end{aligned} \quad (22\frac{6}{7}, 17\frac{1}{7}, 5\frac{5}{7})$$

**13. úloha:**

$$\begin{aligned}
 2x + y &= a , \\
 3y + z &= a , \\
 4z + u &= a , \\
 5u + v &= a , \\
 6v + x &= a . \quad (265, 191, 148, 129, 76; 721)
 \end{aligned}$$

**14. úloha:**

$$\begin{aligned}
 2x + y + z &= 1 , \\
 3y + z + u &= 1 , \\
 4z + u + x &= 1 , \\
 5u + x + y &= 1 . \quad \left(\frac{33}{111}, \frac{28}{111}, \frac{17}{111}, \frac{10}{111}\right)
 \end{aligned}$$

**15. úloha:**

$$\begin{aligned}
 2x &= 1 + y , \\
 3y &= 1 + z , \\
 4z &= 1 + x . \quad \left(\frac{17}{23}, \frac{11}{23}, \frac{10}{23}\right)
 \end{aligned}$$

**16. úloha:**

$$\begin{aligned}
 x + 5y + 10z &= 10 , \\
 10x + y + 5z &= 8 , \\
 5x + 10y + z &= 6 . \quad \left(\frac{45}{122}, \frac{41}{122}, \frac{97}{122}\right)
 \end{aligned}$$

**17. úloha:**

$$\begin{aligned}
 5x + 4y + 3z + 2u &= 1496 , \\
 4x + 2y + 6z + 3u &= 1175 , \\
 3x + y + 7z + 5u &= 958 , \\
 2x + 3y + 5z + u &= 861 . \quad (177, 121, 23, 29)
 \end{aligned}$$

**18. úloha:**

$$\begin{aligned}
 9x + 7y + 3z + 2u + 5v &= 140 , \\
 7x + 6y + 4z + 5u + 3v &= 128 , \\
 3x + 5y + 7z + 6u + 4v &= 116 , \\
 2x + 5y + 3z + 9u + 4v &= 112 , \\
 x + 3y + 2z + 8u + 5v &= 95 . \quad (7, 4, 3, 5, 6)
 \end{aligned}$$

Uveďme ještě na závěr (v naší symbolice) přehledný postup, kterým čínští počtáři vypočítali z výsledné „trojúhelníkové“ tabulky neznámé veličiny; jeho slovní popis je uveden (pro  $n = 3$ ) v návodu 1. úlohy.

Uvažujme následující, již upravenou tabulku, která odpovídá soustavě čtyř rovnic o čtyřech neznámých.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & j_4 \\ 0 & 0 & j_3 & f \\ 0 & j_2 & c & g \\ j_1 & a & d & h \\ n_1 & b & e & i \end{bmatrix}$$

Hodnoty neznámých  $x, y, z, u$  byly vypočítávány jako podíly čitateľů  $n_1, n_2, n_3, n_4$  a jmenovatele  $j_1$ , přičemž bylo popsáno, jak se tyto čitatele  $n_1, n_2, n_3, n_4$  získávají:

$$u = \frac{n_1}{j_1},$$

$$z = \frac{n_2}{j_1}, \quad \text{kde} \quad n_2 = \frac{j_1 b - n_1 a}{j_2},$$

$$y = \frac{n_3}{j_1}, \quad \text{kde} \quad n_3 = \frac{j_1 e - n_1 d - c n_2}{j_3},$$

$$x = \frac{n_4}{j_1}, \quad \text{kde} \quad n_4 = \frac{j_1 i - n_1 h - g n_2 - f n_3}{j_4}.$$

#### 4. Antický svět

Matematika ve starém Řecku se výrazně odlišovala od matematiky ve starém Egyptě, Mezopotámii a staré Číně. Pozornost tehdejších matematiků řeckého světa byla zaměřena hlavně na teoretické problémy, konkrétní počítání „zůstávalo stranou“. Otázky lineárních rovnic a jejich soustav se v řeckých matematických textech neobjevují.

Jeden z největších antických vědců, Archimedes ze Syrakus (287–212), však byl rovněž vynikajícím počtářem. Teoretické poznatky, matematické a fyzikální, byl schopen dovést až k technickým aplikacím. Není proto divu, že je s jeho jménem spjata tzv. úloha o dobytku (*Problema bovinum*, *Problema Archimedis*), která vyžaduje značnou počtářskou zkušenost a erudici.

Objevena byla poprvé v 18. století, podruhé zhruba o sto let později a předními odborníky na řeckou matematiku byla připsána Archimedovi, který ji podle legendy zaslal do Alexandrie Eratostenovi (asi 284 až 200). Úkolem

je vypočítat, kolik bílých, černých, strakatých a hnědých býků a krav se pase na Sicílii ve stádech boha Héliá.<sup>6</sup>

Podmínky úlohy je možno vyjádřit sedmi lineárními rovnicemi o osmi neznámých:

$$\begin{aligned} X &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot Y + T, \\ Y &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot Z + T, \\ Z &= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \cdot X + T, \\ x &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot (Y + y), \\ y &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot (Z + z), \\ z &= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \cdot (T + t), \\ t &= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \cdot (X + x). \end{aligned}$$

Jedná se o klasickou diofantickou úlohu, v níž neznámé veličiny hledáme v oboru přirozených čísel. Standardním postupem zjistíme řešení v následujícím tvaru ( $\alpha$  je libovolné přirozené číslo):

$$\begin{aligned} X &= 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 53 \cdot 4\,657 \cdot \alpha &= 10\,366\,482 \cdot \alpha, \\ Y &= 2 \cdot 3^2 \cdot 89 \cdot 4\,657 \cdot \alpha &= 7\,460\,514 \cdot \alpha, \\ Z &= 2^2 \cdot 5 \cdot 79 \cdot 4\,657 \cdot \alpha &= 7\,358\,060 \cdot \alpha, \\ T &= 3^4 \cdot 11 \cdot 4\,657 \cdot \alpha &= 4\,149\,387 \cdot \alpha, \\ x &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 373 \cdot \alpha &= 7\,206\,360 \cdot \alpha, \\ y &= 2 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 15\,991 \cdot \alpha &= 4\,893\,246 \cdot \alpha, \\ z &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 761 \cdot \alpha &= 3\,515\,820 \cdot \alpha, \\ t &= 3^2 \cdot 13 \cdot 46\,489 \cdot \alpha &= 5\,439\,213 \cdot \alpha. \end{aligned}$$

Celkový počet býků je tedy  $29\,334\,443 \cdot \alpha$ , celkový počet krav  $21\,054\,639 \cdot \alpha$ , celkový počet kusů dobytka Héliových stád je  $50\,389\,082 \cdot \alpha$ . Položíme-li  $\alpha = 1$ , získáme tzv. „nejmenší řešení“. Starověké řešení odpovídá volbě  $\alpha = 80$ .

V závěrečných verších úlohy jsou uvedeny ještě dvě podmínky, které další výpočet výrazně komplikují. Někteří badatelé je považují za původní, jiní předpokládají, že byly doplněny později.<sup>7</sup> O Archimedovi a jeho díle viz [Bečvář, Štoll, 2005], kde lze nalézt další bibliografické odkazy.

<sup>6</sup> Český překlad textu úlohy viz K. Mačák: *Tři středověké sbírky matematických úloh*, Dějiny matematiky, svazek 15, Prometheus, Praha, 2001. Viz též F. J. Studnička: *Archimedes*, Živa 8(1898), 133–135, 178–180.

<sup>7</sup> Řešení totiž vede na tzv. Pellovu rovnici, výsledek je vyjádřen obrovskými čísly – v nejmenším řešení je celkový počet býků asi  $7\,766 \cdot 10^{206\,541}$ .

Výše uvedená úloha, i když je vyjádřena soustavou lineárních rovnic, do lineární algebry vlastně nepatří. Postup řešení je totiž do značné míry ovlivněn tím, že výsledek musí být vyjádřen přirozenými čísly. Již první část úlohy musela být pro řecké matematiky značně obtížná.

Obdobné úlohy, které vedou na diofantické rovnice nebo soustavy, se objevují během celé kulturní historie lidstva. Výše uvedená úloha je však výjimečná jak počtem neznámých, tak velkými čísly ve výsledku.

## 5. Středověká Evropa

Středověcí evropští počtáři řešili řadu úloh vedoucích na lineární rovnice a jejich soustavy. K výpočtům používali metodu chybného předpokladu, metodu dosazovací a substituční. Jejich početní postupy se v zásadě nelišily od postupů starověkých počtářů.

Problematiku lineárních rovnic a jejich soustav poměrně obsáhle a podrobně vyložil Leonardo Pisánský (Fibonacci, asi 1170 až 1240). Uvedl i značně komplikované úlohy, které se vymykaly matematikům před ním i dlouho po něm. Byl nejdůležitějším matematikem středověké Evropy, jeho dílo bylo překonáno až na přelomu středověku a novověku.

Pocházel z Pisy, v devadesátých letech 12. století pracoval v Bougii v severní Africe (dnes Alžír). Poznal svět při obchodních cestách, během nichž se seznámil s nejdůležitějšími výsledky matematiky egyptské, mezopotámské, řecké, islámské i byzantské. Všechny získané poznatky v něm dozrály a vytvořily jediný celek, do nějž sám ještě mnoho přidal. Po návratu do Pisy sepsal velké dílo *Liber abaci* (1202, přepracovaná verze je z roku 1228), spisy *Practica geometriae* (asi 1220), *Flos* (1225) a *Liber quadratorum* (1225).

Lineární úlohy jsou obsaženy zejména ve 12. kapitole knihy *Liber abaci*. Leonardo v ní vyložil nejprve metodu chybného předpokladu, kterou nazýval *regula versa*.

*Jaká je celková výška stromu, jehož  $\frac{1}{3}$  a  $\frac{1}{4}$ , což je 21 dlaní, je pod zemí?* ([Leonardo, 1857], díl I., str. 173)

Úloha vede na rovnici

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot x = 21.$$

Leonardo zvolil jako chybný předpoklad  $x_1 = 12$ ; poznamenal však, že je možné jako chybný předpoklad volit každé číslo, které je násobkem obou jmenovatelů. Po dosazení čísla 12 dostal místo čísla 21 číslo 7, tj. třikrát méně. Místo čísla  $x_1 = 12$  je tedy nutno vzít třikrát více, tj.  $x = 3 \cdot x_1 = 36$ .

V další části 12. kapitoly řešil Leonardo jednoduché soustavy lineárních rovnic. Jedna se týká finančních obnosů dvou osob.

*Dá-li první druhému denár, budou mít oba stejně. Dá-li druhý prvnímu denár, bude mít první desetkrát tolik.* ([Leonardo, 1857], díl I., str. 190)

Úloha vede na soustavu

$$\begin{aligned}x - 1 &= y + 1 , \\x + 1 &= 10(y - 1) .\end{aligned}$$

Leonardo zavedl novou neznámou  $z = x + y$ . Jeho postup odpovídá v moderní symbolice následujícím rovnicím:

$$\begin{aligned}y + 1 &= \frac{1}{2}z , \\x + 1 &= \frac{10}{11}z .\end{aligned}$$

Sečtením lze získat rovnici  $z + 2 = \frac{31}{22}z$ . Odtud

$$z = 4\frac{8}{9} , \quad x = 3\frac{4}{9} , \quad y = 1\frac{4}{9} .$$

I v dalších příkladech využíval Leonardo různé vtipné a důmyslné substituce.

Při algebraických postupech označoval neznámou slovem *res*, veličiny, které chápal jako „pomocné neznámé“, slovy *maior*, *minor*, *media*, *mediana*, případně *prima*, *secunda*, *tertia* apod. Velkou pozornost věnoval úlohám vedoucím na soustavu rovnic tvaru ([Leonardo, 1857], díl I., str. 192–198)

$$\begin{aligned}x + 7 &= 5(y - 7) \pm p , \\7(x - 5) &= y + 5 \pm q .\end{aligned}$$

Velmi poučná je úloha, která vede na soustavu rovnic ([Leonardo, 1857], díl I., str. 284–285)

$$\begin{aligned}x + y &= 27 , \\y + z &= 31 , \\z + u &= 34 , \\u + x &= 37 .\end{aligned}$$

Poslední rovnice je totiž neslučitelná s předchozími, jak se snadno přesvědčíme. Leonardo proto modifikoval zadání, poslední hodnotu 37 na pravé straně změnil na 30. Soustava se tak stala řešitelnou, Leonardo poznamenal, že je řešitelná v kladných číslech pro  $x < 27$ . Je totiž  $y = 27 - x$ ,  $z = 4 + x$ ,  $u = 30 - x$ . Setkáváme se tu jednak s neřešitelnou soustavou, jednak se soustavou bez parametru s jednodimenzionálním řešením.

Dále následuje ve 12. kapitole řada úloh, jež jsou věnovány výpočtu majetků osob, které dosáhnou určité hodnoty  $s$  jen tehdy, přidá-li se k jejich majetku

část majetku jiné osoby nebo jiných osob. První úloha tohoto typu vede na soustavu ([Leonardo, 1857], díl I., str. 228–229)

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{3}y &= s, \\y + \frac{1}{4}x &= s.\end{aligned}$$

Obecný případ úloh tohoto typu odpovídá soustavě rovnic

$$\begin{aligned}x + \frac{a_1}{b_1}y &= s, \\y + \frac{a_2}{b_2}x &= s.\end{aligned}$$

Protože je rovnost

$$x + \frac{a_1}{b_1}y = y + \frac{a_2}{b_2}x$$

ekvivalentní s rovností

$$\frac{b_1 - a_1}{b_1} \cdot y = \frac{b_2 - a_2}{b_2} \cdot x,$$

je soustava řešitelná právě tehdy, když

$$x = \frac{b_1 - a_1}{b_1} \cdot n, \quad y = \frac{b_2 - a_2}{b_2} \cdot n, \quad s = \frac{b_1 b_2 - a_1 a_2}{b_1 b_2} \cdot n.$$

Hodnota  $s$  nebyla ve většině úloh zadána. Leonardo řešil tyto úlohy v oboru přirozených čísel a hledal nejmenší řešení; proto bral jako hodnotu  $n$  součin  $b_1 b_2$ .

Následujících šest úloh pojednává o třech, čtyřech, pěti obnosech, které je možno vyjádřit obdobnými soustavami lineárních rovnic o třech, čtyřech, pěti neznámých. Leonardo podal stručné a srozumitelné pravidlo, jak neznámé veličiny vypočítat ze zadaných podmínek ([Leonardo, 1857], díl I., str. 229–235). Úlohy tohoto typu lze zapsat takto:

$$\begin{aligned}x_1 + \frac{a_1}{b_1}x_2 &= s, \\x_2 + \frac{a_2}{b_2}x_3 &= s, \\&\dots\dots\dots \\x_k + \frac{a_k}{b_k}x_1 &= s.\end{aligned}$$

Např. pro  $k = 4$  je neznámá  $x_1$  vypočtena postupem odpovídajícím vzorcem

$$x_1 = \frac{[(b_1 - a_1)b_2 + a_1 a_2]b_3 - a_1 a_2 a_3 b_4}{b_1 b_2 b_3 b_4 - a_1 a_2 a_3 a_4} \cdot s.$$

Leonardo položil v jednotlivých úlohách parametr  $s$  rovný jmenovateli, a proto počítal pouze čitatele uvedeného zlomku.

V dalších částech 12. kapitoly řešil Leonardo obdobné, různě komplikované soustavy tří, čtyř, pěti rovnic o třech, čtyřech, pěti neznámých; často využíval vtipné substituce. Mezi poměrně komplikované úlohy patří úloha vedoucí na soustavu pěti rovnic o pěti neznámých s parametrem  $s$  ([Leonardo, 1857], díl I., str. 249–250):

$$\begin{aligned}x + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)(y + z + u + v) &= s, \\y + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{480}\right)(z + u + v + x) &= s, \\z + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{638}\right)(u + v + x + y) &= s, \\u + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{420}\right)(v + x + y + z) &= s, \\v + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{27} + \frac{1}{810}\right)(x + y + z + u) &= s.\end{aligned}$$

Vychází  $x = 3$ ,  $y = 228$ ,  $z = 231$ ,  $u = 348$ ,  $v = 378$ ;  $s = 1\,030$ .

Rovněž ve 13. kapitole *Liber abaci* prezentoval Leonardo úlohy vedoucí na lineární rovnice a jejich soustavy. Objasnil zde metodu dvou chybných předpokladů, kterou nazýval *elchatayn* nebo *alchataieym* podle arabského *al-hatain*. V úvodním příkladu podrobně rozebral jednotlivé případy (dva nedostatky, dva přebytky, přebytek a nedostatek).

Soustavy lineárních rovnic se objevily i v jiných Leonardových dílech. Uvedeme nyní úlohy vedoucí na soustavy lineárních rovnic, které neobsahují parametr; u dvou vychází dokonce záporné řešení.

Ve spisu *Flos* je úloha o společném majetku tří mužů, kterou lze zapsat takovouto soustavou ([Leonardo, 1857], díl II., str. 234–236):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\right) &= \frac{1}{2}(x + y + z), \\ \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\right) &= \frac{1}{3}(x + y + z), \\ \frac{5}{6}z + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\right) &= \frac{1}{6}(x + y + z).\end{aligned}$$

Řešením je  $x = 33$ ,  $y = 13$ ,  $z = 1$ .

Velmi zajímavá úloha z tohoto spisu odpovídá následující soustavě čtyř



rovníc o čtyřech neznámých ([Leonardo, 1857], díl II., str. 242–243):

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{2}(y + z + u) &= 33 , \\y + \frac{1}{3}(z + u + x) &= 35 , \\z + \frac{1}{4}(u + x + y) &= 36 , \\u + \frac{1}{5}(x + y + z) &= 37 .\end{aligned}$$

Jedna z hodnot v řešení je záporná:  $x = -3$ ,  $y = 18$ ,  $z = 25$ ,  $u = 29$ . Leonardo poznamenal, že při změně pravých stran na hodnoty 181, 183, 184, 185 bude mít soustava kladné řešení (1, 94, 125, 141).

V dopise, který Leonardo zaslal mistru Theodorovi, nacházíme úlohu vedoucí na soustavu ([Leonardo, 1857], díl II., str. 250)

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{2}y &= 12 , \\y + \frac{1}{3}z &= 15 , \\z + \frac{1}{4}u &= 18 , \\u + \frac{1}{5}v &= 20 , \\v + \frac{1}{6}x &= 23 ,\end{aligned}$$

jejíž řešení je

$$x = 6 \frac{612}{721}, \quad y = 10 \frac{218}{721}, \quad z = 14 \frac{67}{721}, \quad u = 15 \frac{453}{721}, \quad v = 21 \frac{619}{721}.$$

V závěru tohoto dopisu je zajímavá úloha o finanční hotovosti pěti osob, která vede na následující soustavu pěti lineárních rovnic o pěti neznámých ([Leonardo, 1857], díl II., str. 251–252).

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{2}(y + z + u + v) &= 12 , \\y + \frac{1}{3}(z + u + v + x) &= 15 , \\z + \frac{1}{4}(u + v + x + y) &= 18 , \\u + \frac{1}{5}(v + x + y + z) &= 20 , \\v + \frac{1}{6}(x + y + z + u) &= 23 .\end{aligned}$$

Leonardo uvedl jen výsledek a poznamenal, že první osoba má dluh:

$$x = -13 \frac{97}{197}, \quad y = 3 \frac{297}{394}, \quad z = 11 \frac{99}{197}, \quad u = 15 \frac{247}{394}, \quad v = 20 \frac{20}{197}.$$

Úloh, v jejichž řešení se objeví záporné číslo, lze nalézt v Leonardově díle ještě několik. V jeho době (a ještě v následujících dvou stoletích) je to zcela výjimečné.

## 6. Závěr

Egyptské úlohy vedoucí na soustavy lineárních rovnic jsou triviální, ve většině případů se téměř zdráháme hovořit o soustavách rovnic. Jsou totiž tak jednoduché, že je lze zvládnout postupným řešením jednotlivých rovnic: vhodně zvolenou neznámou vypočteme z jedné rovnice, výsledek dosadíme do druhé rovnice, vypočteme druhou neznámou atd. Číselné zadání těchto úloh dokonce umožňovalo přímé dělení, nebylo proto zapotřebí užívat metodu chybného předpokladu.

Ve starověké Mezopotámii byly řešeny úlohy podstatně složitější. Již nebylo možno vystačit s postupným řešením jednotlivých rovnic. Často byla využívána vhodná substituce. Takové postupy nalézáme i v úlohách vedoucích na rovnice kvadratické a kubické, v geometrických úlohách apod. Metoda dosazovací byla naopak mezopotámským počtářům cizí.

Čínští počtáři neužívali při řešení soustav rovnic metodu dosazovací, eliminační ani substituční. V jednoduchých případech vystačili s metodou jednoho nebo dvou chybných předpokladů, složitější úlohy zvládli pomocí algoritmu *fang čcheng*. Zajímavé je, že soustavy o dvou neznámých byly řešeny jak s použitím chybných předpokladů, tak podle obecného algoritmu *fang čcheng*, a přitom nebylo poukázáno na vztah předložených metod.

Velkým přínosem čínské matematiky byl obecný algoritmus pro řešení soustav lineárních rovnic se čtvercovou regulární maticí, významným důsledkem jeho užívání byl objev záporných čísel. Evropská matematika k této metodě řešení soustav rovnic dospěla až v 19. století. Do té doby využívala metody jednoho nebo dvou chybných předpokladů, metodu dosazovací a různé verze substitucí. Leonardo Pisánský na počátku 13. století výrazně předběhl dobu; byl schopen řešit poměrně složité soustavy rovnic, které se jeho současníkům i následníkům vymykaly. Navíc tyto úlohy většinou řešil v oboru přirozených čísel.

Po polovině 18. století nabylo v Evropě na významu Cramerovo pravidlo, které dalo rozhodující podnět k rozvoji teorie determinantů.