Matematika v proměnách věků. V

Dana Trkovská
Erlangenský program

In: Martina Bečvářová (editor); Jindřich Bečvář (editor): Matematika v proměnách věků. V. (Czech). Praha: Matfyzpress, 2007. pp. 66–82.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400887

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Felix Klein.

ERLANGENSKÝ PROGRAM

Dana Trkovská

Erlangenský program představuje významný mezník ve vývoji geometrie 19. století, neboť na dlouhou dobu zásadně ovlivnil další rozvoj matematiky. Tento název dostala slavná přednáška Felixe Kleina *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* [Srovnávací úvahy o novějších geometrických bádáních]. F. Klein její text předložil v říjnu roku 1872 na univerzitě v Erlangen u příležitosti svého jmenování řádným profesorem. Tato přednáška, v níž byl vyložen význam pojmu grupa pro klasifikaci různých geometrií, vyšla také jako samostatná brožura. Postupně byla přeložena do několika jazyků. Věnujme se však nejprve autorovi Erlangenského programu.

Felix Klein

Felix Klein se narodil 25. dubna 1849 v Düsseldorfu (Prusko). Absolvoval zde gymnázium a poté odešel studovat matematiku a fyziku na univerzitu v Bonnu. Již během studií (v roce 1866) získal místo laboratorního asistenta u Julia Plückera (1801–1868), který se zabýval teoretickou matematikou a experimentální fyzikou. Pod jeho vedením sepsal disertační práci *Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Koordinaten auf eine kanonische Form* [O transformaci obecné rovnice druhého stupně v přímkových souřadnicích na kanonický tvar], která byla věnována geometrii přímky a jejím aplikacím v mechanice, a roku 1868 získal na univerzitě v Bonnu doktorát. Během následujících dvou let postupně navštívil matematická pracoviště v Berlíně, v Paříži a v Göttingen. V roce 1870 začal v Paříži spolupracovat s norským matematikem Sophusem Lie (1842–1899), s nímž se seznámil nedlouho předtím v Berlíně. S. Lie se tehdy teprve krátce zabýval matematikou, právě on má však nezanedbatelný podíl na Kleinových pozdějších výsledcích, neboť ho přivedl k myšlence propojení geometrie a teorie grup. Tato idea sehrála velkou roli v Kleinově pozdější práci. F. Klein a S. Lie začínali v té době chápat zásadní význam teorie grup, a proto si oblast matematiky, která je zajímala, „rozdělili“ na dvě části; F. Klein se soustředil na nespojité a S. Lie na spojité grupy. V Paříži se F. Klein stýkal také s francouzskými matematiky, zejména s Camillem Jordanem (1838–1922), profesorem na École Polytechnique, a studoval jejich práce.

V červenci 1870 proslovil pruský kancléř Otto von Bismarck (1815–1898) útočnou řeč proti francouzské vládě, Francie vyhlásila 19. července Prusku válku a F. Klein se rozhodl Paříž opustit. Krátce sloužil v armádě jako zdravotník, počátkem roku 1871 se však habilitoval a začal přednášet na univerzitě v Göttingen. Právě tehdy učinil své významné objevy, které se týkaly zejména geometrie. V roce 1872 byl ve věku pouhých 23 let jmenován řádným profesorem filozofické fakulty univerzity v Erlangen (Bavorsko). Přednášel zde však pouze do roku 1875, kdy mu bylo nabídnuto místo na Technische Hochschule v Mnichově. Zatímco v Erlangen měl jen velmi málo studentů, v Mnichově přednášel velkému počtu posluchačů, mezi nimiž bylo i několik budoucích významných matematiků. V roce 1875 se Felix Klein oženil s Annou Hegelovou (1851–1927), vnučkou významného německého filozofa Georga Wilhelma Friedricha Hegela (1770–1831). Po pětiletém působení na Technische Hochschule přesídlil F. Klein do Lipska, kde pracoval v letech 1880 až 1886. Chtěl zde vybudovat školu Riemannovy geometrie a teorie funkcí. Na podzim roku 1882 se však zhroutil a začal propadat těžkým depresím. Jeho kariéra špičkového matematika tím skončila. Roku 1886 se vrátil na univerzitu v Göttingen (na jeho místo v Lipsku přišel S. Lie), kde zůstal až do roku 1913. Spektrum jeho přednášek bylo široké; přednášel řadu partií matematiky a fyziky, např. teoretickou mechaniku nebo teorii potenciálu. V roce 1913 ze zdravotních důvodů univerzitu opustil, během první světové války se věnoval soukromé výuce matematiky. Zemřel 22. června 1925 v Göttingen.

Kleinovy zásluhy v matematice, zejména v geometrii, jsou všestranné. Na univerzitě v Göttingen vybudoval matematické středisko světové úrovně, které se pod jeho vedením stalo významným centrem matematického bádání. Přicházeli sem mladí lidé z celého světa a studovali speciální matematické otázky. Zřídil zde matematickou knihovnu a čítárnu, zavedl pravidelná týdenní diskusní zasedání. Kromě geometrie a teorie grup se hlouběji věnoval i algebraickým rovnicím a teorii funkcí; z těchto oblastí publikoval na sedmdesát prací. V roce 1876 převzal vedení časopisu *Mathematische Annalen*, který roku 1868 založili Alfred Clebsch (1833–1872) a Carl Gottfried Neumann (1832–1925), a přispěl ke zvýšení jeho úrovně. Tento časopis se specializoval především na problémy komplexní analýzy, otázky algebraické geometrie a teorie invariantů. Právě pod Kleinovým vedením začaly *Mathematische Annalen* konkurovat významnému Crelleovu časopisu *Journal für die reine und angewandte Mathematik* vydávanému berlínskými matematiky, který měl v té době za sebou již téměř padesátiletou úspěšnou historii. Na více než šedesát let se *Mathematische Annalen* staly jedním z nejvýznamnějších matematických časopisů. V roce 1885 byl F. Klein přijat do londýnské Královské společnosti, roku 1913 se stal členem Berlínské akademie věd. Ke konci své kariéry se začal zajímat i o výuku matematiky na německých školách, snažil se o její modernizaci. Prosadil, aby se na středních školách vyučovaly základy teorie funkcí a základy diferenciálního a integrálního počtu (tzv. *Kleinsche Reform*). Roku 1908 byl Felix Klein na Mezinárodním kongresu matematiků v Římě jmenován předsedou Mezinárodní komise pro vyučování matematice. Pod jeho vedením bylo vydáno několik publikací o výuce matematiky na všech stupních škol. F. Klein se také aktivně podílel na vydávání mnohasvazkové *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*, sám vydal čtyři svazky věnované mechanice.

Základní myšlenka klasifikace geometrií

V následujících třech odstavcích nastíníme v elementární podobě hlavní myšlenku Kleinova přístupu ke klasifikaci různých geometrií.

Elementární eukleidovská geometrie studuje ty vlastnosti geometrických útvarů, které zůstávají zachovány při jejich „pohybech". Většinou takto hovoříme o přímých nebo nepřímých shodnostech. Říkáme, že útvary A a B jsou shodné, je-li možno útvar A přemístit tak, aby splynul s útvarem B. Místo libovolných „pohybů" (shodností) se však můžeme omezit např. pouze na všechna posunutí nebo pouze na všechny rotace kolem pevně zvoleného bodu apod., tj. na množinu nějakých transformací.

Nechť M je nějaká množina transformací (roviny, prostoru). Útvary A a B (v rovině, prostoru) pokládáme za „ekvivalentní" (vzhledem k M), existuje-li v množině M transformace f, která útvar A převádí na útvar B, tj. platí $f(A) \equiv B$. Přitom požadujeme, aby uvedená relace mezi útvary byla opravdu ekvivalencí, tj. aby byla reflexivní, symetrická a tranzitivní. Odtud ihned vyplývá, že množina M musí být uzavřená vzhledem ke skládání transformací (plyne z tranzitivity), musí obsahovat identickou transformaci (plyne z reflexivity) a s každou transformací musí obsahovat také transformaci k ní inverzní (plyne ze symetrie). Množina M spolu s operací skládání je tedy grupou.

Každá grupa transformací tedy definuje určitou ekvivalenci geometrických útvarů. Volbou různých grup transformací tak získáváme různé geometrie: volíme-li klasické „pohyby" (shodnosti), dostáváme eukleidovskou geometrii, afinní transformace vedou ke geometrii afinní apod.

Grupy

Je třeba zdůraznit, že v sedmdesátých letech 19. století již teorie grup jako matematická disciplína existovala (rodila se přibližně na přelomu dvacátých a třicátých let 19. století), nikoliv však ve své dnešní podobě.

Pojem grupy se v matematice objevil v souvislosti se studiem řešitelnosti algebraických rovnic vyšších stupňů, jednalo se o tzv. řešitelnost *v radikálech*.[1] Při těchto bádáních začínali matematici čím dál tím více pracovat s grupami permutací.

V letech 1770 až 1771 sepsal významnou práci o algebraických rovnicích Joseph Louis Lagrange (1736–1813). Jeho spis *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* [Úvahy o algebraickém řešení rovnic] se stal velkou inspirací pro mnoho dalších matematiků. J. L. Lagrange se v něm zabývá základní otázkou, proč metody, které vedou k řešení algebraických rovnic stupně nejvýše čtvrtého, zůstávají pro rovnice vyšších stupňů neúspěšné. Tato

[1] O řešitelnosti algebraické rovnice v radikálech hovoříme, pokud je možno její kořeny vyjádřit vzorcem, v němž jsou použity pouze koeficienty dané rovnice a operace sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování. Poznamenejme ještě, že slovo *radikál* je tradičním termínem pro odmocninu.

otázka ho vede ke studiu racionálních funkcí kořenů rovnic a jejich chování při permutaci kořenů.

Roku 1799 uveřejnil italský matematik Paolo Ruffini (1765–1822) pojednání *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generale di grado superiore al quarto* [Obecná teorie rovnic, v níž je dokázána nemožnost algebraického řešení obecné rovnice stupně většího než čtyři] obsahující „důkaz" neřešitelnosti algebraické rovnice stupně vyššího než čtvrtého v radikálech. Tento Ruffiniho „důkaz" však nebyl uznán jako úplný, neboť je založen na hypotéze, že *radikály* lze vyjádřit jako racionální funkce kořenů rovnice.

Úplný důkaz neřešitelnosti obecné algebraické rovnice stupně vyššího než čtvrtého v radikálech podal jako první norský matematik Niels Henrik Abel (1802–1829). V roce 1824 na vlastní náklady vydal spis *Mémoire sur les équations algébriques, où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré* [Pojednání o algebraických rovnicích s důkazem neřešitelnosti obecné rovnice pátého stupně], v němž byl jeho důkaz poprvé prezentován. Když začal v roce 1826 A. L. Crelle (1780–1855) vydávat časopis *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, uveřejnil v prvním ročníku také několik Abelových prací; jednou z nich byl článek *Beweis der Unmöglichkeit, algebraische Gleichungen von höheren Graden, als dem vierten, allgemein aufzulösen* [Důkaz obecné neřešitelnosti algebraické rovnice stupně vyššího než čtvrtého] obsahující novou, propracovanější verzi stejného důkazu. N. H. Abel ve svém důkazu implicitně použil teorii grup a některé výsledky J. L. Lagrange a A. L. Cauchyho (1789–1857) týkající se počtu hodnot, kterých může funkce n proměnných nabývat při jejich permutaci.

Dva měsíce před smrtí publikoval N. H. Abel v Crelleově časopisu článek *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement* [Pojednání o zvláštní třídě rovnic řešitelných algebraicky]. Tento článek pojednává o speciální třídě rovnic všech stupňů, které jsou řešitelné v radikálech, a je v něm mimo jiné dokázáno následující obecné tvrzení:

Jestliže všechny kořeny nějaké rovnice lze vyjádřit jako racionální funkce jednoho z nich, řekněme x, a pokud libovolné dva kořeny $\theta_1 x$ a $\theta_2 x$, kde θ_1 a θ_2 jsou racionální funkce, splňují podmínku $\theta_1\theta_2 x = \theta_2\theta_1 x$, potom je uvažovaná rovnice řešitelná v radikálech.

Uvedené Abelovo tvrzení je přitom speciálním případem hlavního výsledku tzv. *Galoisovy teorie*. O ní bude řeč v následujícím odstavci.

Studiem řešitelnosti algebraických rovnic v radikálech se na přelomu dvacátých a třicátých let 19. století intenzivně zabýval také Evariste Galois (1811–1832). Jako první použil v roce 1830 termín *grupa* (v originále *groupe*), a to nejprve ve smyslu množina. Při studiu řešitelnosti obecné algebraické rovnice v radikálech našel určitou podmínku týkající se „substitucí na permutacích"; permutací přitom rozumí pořadí kořenů a substituci chápe jako vzájemně jednoznačné zobrazení množiny kořenů. Substituce rozdělil do „grup" a odhalil jejich uzavřenost (složení dvou substitucí je opět substituce). Každé rovnici potom přiřadil grupu permutací. Dále se zabýval rozkladem grupy na pravé a levé třídy podle podgrupy a uvažoval případ, kdy se oba rozklady shodují, tj. případ, kdy je uvažovaná podgrupa normální. Poté rozvinul obecnou teorii (dnes nazývanou *Galoisovou*), která umožňuje podle struktury tzv. *Galoisovy grupy*[2] dané rovnice rozhodnout o její řešitelnosti v radikálech. Platí následující tvrzení:

Rovnice $f(x) = 0$, kde f je polynom nad tělesem K, je řešitelná v radikálech právě tehdy, když je její Galoisova grupa G řešitelná, tj. právě tehdy, když existuje posloupnost podgrup $G \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_m = E$ taková, že každá grupa H_k je normální podgrupou grupy H_{k-1} a všechny faktorové grupy H_{k-1}/H_k jsou Abelovy.

Pro ireducibilní rovnice prvočíselného stupně dokázal E. Galois následující tvrzení:

Ireducibilní rovnice $f(x) = 0$, jejímž stupněm je nějaké prvočíslo n, je řešitelná v radikálech právě tehdy, když každá substituce grupy G převádí kořen x_k do $x_{k'}$ pomocí následující lineární transformace indexu k: $k' = ak + b \pmod n$.

Protože Galoisova grupa obecné rovnice 5. stupně výše uvedenou podmínku nesplňuje, vyplývá odtud, že tato rovnice není řešitelná v radikálech.

E. Galois své výsledky publikoval útržkovitě v letech 1830 až 1832; jeho rukopis *Mémoire sur la résolution algébrique des équations* [Pojednání o algebraickém řešení rovnic] vydal až v roce 1846 J. Liouville (1809–1882) v časopise *Journal de mathématiques pures et appliquées.*

Grupami permutací se zabýval také Augustin Louis Cauchy. V článcích uveřejněných v letech 1844 až 1846 dokázal řadu poznatků o grupách substitucí, které jsou podgrupami symetrické grupy. Zdůraznil také rozdíl mezi permutacemi a substitucemi; permutaci představuje libovolné pořadí n proměnných, substituce je přechod od jedné permutace k jiné.[3] Později se „substituce“ ve významu, v jakém je používali A. L. Cauchy a E. Galois, začaly nazývat naopak „permutacemi“, což lépe vystihovalo původní význam latinského slova *permutare* (zaměňovat, vyměňovat).

V padesátých a šedesátých letech 19. století, po uveřejnění Galoisových a Cauchyových výsledků, začal prudký a systematický rozvoj teorie grup. Arthur Cayley (1821–1895) zavedl v roce 1854 pojem grupy a jako první podal poměrně moderní definici tohoto pojmu. V práci *On the theory of groups, as depending on the symbolic equation* $\Theta^n = 1$ [O teorii grup v souvislosti se symbolickou rovnicí $\Theta^n = 1$], jejíž tři části byly postupně vydány v letech 1854, 1854 a 1859, definuje grupu jako abstraktní množinu symbolů s asociativní operací, která obsahuje identický prvek a rovnice $ax = b$ a $ya = b$ mají v dané množině jednoznačná řešení pro každá a a b. Dále uvádí možnost definovat grupu tabulkou pro násobení jejích prvků (tzv. *Cayleyho tabulka*)

---

[2] *Galoisova grupa* rovnice $f(x) = 0$, kde f je polynom nad tělesem K, je grupa všech automorfismů rozkladového nadtělesa polynomu f, které jsou identické na K.

[3] Jak jsme již poznamenali, E. Galois používal stejnou terminologii, avšak nepříliš důsledně.

a zkoumá způsoby jejího zadávání pomocí generátorů. Poznamenává přitom, že prvky grupy mohou být libovolné objekty. Kromě pojmu grupy zavádí v této práci řadu dalších základních pojmů abstraktní teorie; objevuje se zde např. pojem izomorfismu. Cayleyho výsledkům nebyla zpočátku věnována příliš velká pozornost, později se však staly významnými zejména pro svou exaktní definici grupy a objevily se prakticky ve všech učebnicích.

Zásadní význam pro další rozvoj teorie grup mělo dílo Camilla Jordana. Roku 1870 vyšel v Paříži jeho spis *Traité des substitutions et des équations algébriques* [Traktát o substitucích a algebraických rovnicích] obsahující mimo jiné první systematický výklad Galoisovy teorie řešitelnosti rovnic, který je důsledně vybudován na teorii grup permutací. Tato práce dále obsahuje podrobné shrnutí všech dosavadních výsledků teorie grup včetně Jordanových vlastních výsledků. Věnuje se např. zobrazení jedné grupy na jinou nebo na sebe samu. Poprvé se zde objevuje termín homomorfismus, ovšem ve významu surjektivního homomorfismu, tj. epimorfismu.

Koncem dubna 1870 přijel na studijní pobyt do Paříže Felix Klein a spolu se Sophusem Lie se z Jordanovy knihy *Traité des substitutions* seznámili s teorií grup permutací. Oba pak studiu grup věnovali velkou pozornost a přenesli pojem grupy do geometrie. Právě toto Jordanovo dílo zásadním způsobem ovlivnilo Kleinův přístup ke klasifikaci různých geometrií, dalo mu do rukou rozhodující algebraický aparát k vypracování Erlangenského programu.

F. Klein ve své tehdejší práci využil nejen nejnovější poznatky teorie grup, ale také některé podněty teorie invariantů. Klasická teorie invariantů vznikla kolem roku 1850 v Anglii. Mezi nejvýznamnější matematiky zabývající se teorií invariantů patřil již zmíněný Arthur Cayley a James Joseph Sylvester (1814–1897), který vymyslel řadu pojmů a termínů této teorie, včetně základního termínu *invariant*.

Pro Kleinův Erlangenský program se podnětnou inspirací stal Cayleyho spis *A sixth memoir upon quantics* [Šesté pojednání o kvantikách] z roku 1859, v němž bylo ukázáno, jak chápat metrické vlastnosti geometrických objektů z pohledu teorie invariantů. Základní Cayleyho myšlenka spočívá v tom, že vlastnosti geometrických útvarů, které jsou invariantní vůči geometrickým transformacím, se musí projevit také analyticky ve formě algebraických invariantů *kvantik*[4], které daným geometrickým útvarům odpovídají.

Geometrie

V následujících odstavcích uvedeme stručný přehled vývoje geometrie až do vzniku Erlangenského programu.

Počátky geometrie jsou spojeny se zeměměřictvím, vytyčováním staveb a využíváním geometrických tvarů, vzorů a ornamentů. Ve starém Egyptě a Mezopotámii se geometrie rozvíjí v souvislosti s řešením praktických problémů, které

[4] Pod pojmem *kvantika* (v originále *quantic*) A. Cayley rozumí v dnešní terminologii formu, tj. homogenní polynom n-tého stupně v m neurčitých s konstantními koeficienty.

postupně vedly k počátkům teoretické geometrie. Vysokého stupně abstrakce dosáhlo studium geometrie v Řecku v 6. až 4. stol. př. n. l. Kolem roku 300 př. n. l. sepsal Eukleides z Alexandrie (asi 325–265 př. n. l.) významné dílo *Základy* (řecky *Stoicheia*, latinsky *Elementa*) obsahující většinu tehdejších matematických výsledků. Eukleidův výklad je založen na logické dedukci jednotlivých matematických vět z definic, postulátů a axiomů. Geometrii obsaženou v *Základech* dnes označujeme jako *klasickou eukleidovskou geometrii.* Prakticky až do konce 18. století zůstávala tato geometrie předmětem studia celé řady matematiků a byla jediným, tehdy známým, „druhem“ geometrie.

V 17. století dochází ke vzniku nových metod studia eukleidovské geometrie. Roku 1637 vydal francouzský matematik René Descartes (1596–1650) krátké filozofické pojednání *Discours de la méthode* [Rozprava o metodě], v němž objasňuje svůj racionalistický přístup ke studiu přírody. Jedním ze tří dodatků k této práci byla kniha *La Géométrie* [Geometrie], v níž autor rozvíjí obecnou metodu propojující algebru a geometrii. Právě tato kniha prezentovala hlavní myšlenku *analytické geometrie.* Neobsahuje přitom ani kartézské souřadnice, ani rovnice přímek, ačkoliv jednotlivé rovnice 2. stupně jsou interpretovány jako rovnice vyjadřující kuželosečku. Velká část knihy je věnována teorii algebraických rovnic, mimo jiné je v ní obsaženo tzv. Descartovo pravidlo znamének. Hlavní Descartův přínos však spočívá v tom, že na eukleidovskou geometrii systematicky aplikoval algebru, v níž bylo v předcházejícím století dosaženo významných výsledků. Poznamenejme, že k základní myšlence analytické geometrie dospěl ve stejné době také francouzský matematik Pierre de Fermat (1601–1665). Jeho práce o tomto tématu však byla publikována se značným zpožděním a vývoj matematiky téměř neovlivnila.

V první polovině 17. století se rovněž objevují první myšlenky *projektivní geometrie.* Jejich autorem je francouzský architekt Girard Desargues (1591–1661). Jeho spis *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan* [Předběžný náčrt pokusu o pochopení jevů při vzájemném styku kužele a roviny] z roku 1639 obsahuje některé základní pojmy a myšlenky projektivní geometrie, např. ideu nevlastních bodů. V roce 1648 uveřejnil G. Desargues větu o perspektivních trojúhelnících. Ve své době však jeho dílo zůstalo stranou zájmu. Jednak je zastínila právě se rozvíjející analytická geometrie, jednak mohl být překážkou jeho neobvyklý způsob vyjadřování. Ve své práci totiž použil kolem sedmdesáti nových výrazů, z nichž většina byla převzata z botaniky a byla těžko srozumitelná. Jedinou výjimkou je pojem *involuce*, který se používá dodnes. Význam myšlenek, s nimiž G. Desargues přišel, se v plném rozsahu projevil až v 19. století.

Také koncem 18. století a na počátku 19. století vznikají a rozvíjejí se nové metody. S těmi nejdůležitějšími přišel francouzský matematik Gaspard Monge (1746–1818). V letech 1768 až 1780 působil na vojenské akademii v Mézières, kde ho přípravy přednášek o stavbě pevností přivedly k rozvinutí *deskriptivní geometrie* jako zvláštního odvětví geometrie. Mongeova hlavní idea spočívala v zobrazení trojrozměrných objektů pomocí vhodné projekce do dvou rovin, vodorovné a svislé. Své přednášky uveřejnil v roce 1799 v knize

Géométrie descriptive [Deskriptivní geometrie]. G. Monge také jako jeden z prvních matematiků začal využívat analytické metody při studiu prostorových křivek a ploch. Jeho práce o tomto tématu byly uveřejněny roku 1807 v knize *Application de l'analyse à la géométrie* [Aplikace analýzy na geometrii], kterou lze považovat za první knihu o *diferenciální geometrii*, i když je použitá forma výkladu odlišná od dnešního obvyklého přístupu.

V Mongeových pracích lze nalézt kořeny tzv. syntetické i algebraické metody. V pracích Mongeových žáků se obě metody oddělily; syntetická metoda vedla k *projektivní geometrii*, algebraická metoda se stala základem moderní *analytické a algebraické geometrie*. Hlavními představiteli algebraické geometrie byli v Německu A. F. Möbius (1790–1868) a J. Plücker, ve Francii M. Chasles (1793–1880) a v Anglii A. Cayley.

Jedním z Mongeových žáků byl Jean Victor Poncelet (1788–1867), jenž je považován za zakladatele *projektivní geometrie*. Ovlivněn Mongeovým analytickým přístupem ke geometrii rozvinul novou geometrickou disciplínu, jejíž některé myšlenky naznačil již dvě století před ním G. Desargues. Ponceletův spis *Traité des propriétés projectives des figures* [Pojednání o projektivních vlastnostech útvarů], který vyšel roku 1822 v Paříži, obsáhl všechny důležité pojmy tohoto nového odvětví geometrie, jako např. dvojpoměr, perspektivitu a projektivitu. Tato objemná kniha byla prvním souhrnným pojednáním o projektivní geometrii, která se stala již během dalšího desetiletí ucelenou matematickou teorií. Na Ponceletovy myšlenky navázali zejména švýcarský matematik Jacob Steiner (1796–1863) a německý matematik Karl Georg Christian von Staudt (1798–1867).

Zatímco všechny výše uvedené druhy geometrie „pouze" vnášejí nové metody do studia geometrie eukleidovské, rodí se na počátku 19. století zcela nový typ geometrie, tzv. *neeukleidovská geometrie*.

Otázka, zda pátý Eukleidův postulát o rovnoběžkách je nezávislým axiomem, nebo zda jej lze odvodit z ostatních axiomů, zaměstnávala matematiky více než dva tisíce let. Někteří z nich vypracovali různé „důkazy" nezávislosti pátého postulátu, které však v nějaké skryté formě pátý postulát využívaly. V 18. století se několik matematiků pokoušelo pátý postulát dokázat sporem a dospělo k některým myšlenkám geometrie neeukleidovské. Jmenujme alespoň italského matematika G. Saccheriho (1667–1733), švýcarské matematiky L. Bertranda (1731–1812) a J. H. Lamberta (1728–1777) a francouzského matematika A. M. Legendra (1752–1833), kteří při svých pokusech dokázat platnost pátého postulátu sporem došli k větám, které dnes řadíme do neeukleidovské geometrie. Žádný z nich však nemůže být označen za objevitele této nové geometrie, neboť jejich výsledky byly více či méně izolované a nebyla mezi nimi patrná žádná hlubší souvislost.

Německý matematik Carl Friedrich Gauss (1777–1855) byl patrně jako první zcela přesvědčen o nezávislosti pátého postulátu, a tedy i o tom, že další geometrie, které by se zakládaly na volbě jiného axiomu, jsou logicky možné. Během svého života však o této problematice nic nepublikoval.

Za objevitele neeukleidovské geometrie jsou kromě C. F. Gausse považováni ruský matematik Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792–1856) a maďarský důstojník János Bolyai (1802–1860). N. I. Lobačevskij své myšlenky shrnul roku 1826 ve francouzsky psané práci *Exposition succinte des principles de la Géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des paralèlles* [Stručný výklad základů geometrie s přesným důkazem věty o rovnoběžkách], v níž ukázal, že axiom o rovnoběžkách není k vybudování geometrie nutný. K vytištění této práce však roku 1826 nedošlo pro nepochopení ze strany kolegů; výtah z tohoto rukopisu je obsažen v Lobačevského první tištěné práci *O načalach geometrii* [O základech geometrie] uveřejněné postupně v letech 1829 až 1830 v časopise kazaňské univerzity, na které v té době N. I. Lobačevskij působil.

János Bolyai svůj spis o neeukleidovské geometrii dokončil již roku 1825; vyšel však až roku 1832 jako *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens* [Dodatek vysvětlující absolutně přesnou nauku o prostoru] ke knize jeho otce Farkase Wolfganga Bolyaie (1775–1856) nazvané *Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos* [Pojednání o základech matematiky pro pilné mladíky]. N. I. Lobačevskij i J. Bolyai ve svých pracích považovali pátý Eukleidův postulát za nezávislý axiom a vytvořili geometrii založenou na odlišném axiomu, podle něhož lze k dané přímce daným bodem, který na ní neleží, vést alespoň dvě různé rovnoběžky. Ještě několik desetiletí po svém objevu zůstávala neeukleidovská geometrie nesrozumitelnou a nepochopenou, mnoho vůdčích matematiků ji vůbec neznalo nebo odmítalo.

Prvním velkým matematikem, který plně pochopil její význam, byl Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), jenž vytvořil další typ neeukleidovské geometrie. Ve své přednášce *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* [O hypotézách, na nichž spočívají základy geometrie] pronesené roku 1854 na univerzitě v Göttingen představil obecnou metrickou geometrii, která zahrnovala celkem tři typy různých geometrií; vedle geometrie Eukleidovy a Lobačevského to byla geometrie, jež byla později nazvána geometrií Riemannovou. V této geometrii se každé dvě přímky navzájem protínají, z čehož plyne, že v rovině neexistují rovnoběžky.

K obecnému uznání neeukleidovských geometrií došlo až po roce 1870. Přispěl k němu rovněž Felix Klein, který poukázal na to, že kdyby existovaly logické rozpory v neeukleidovské geometrii, byly by stejné rozpory obsaženy také v geometrii eukleidovské. Podle F. Kleina se pro Lobačevského geometrii používá také název *hyperbolická geometrie*, pro eukleidovskou název *parabolická geometrie* a pro Riemannovu název *eliptická geometrie*[5].

---

[5] Poznamenejme, že Riemannova geometrie zahrnuje vedle eliptické geometrie ještě *sférickou geometrii*, která při dimenzi 2 splývá s eukleidovskou geometrií na sféře, jestliže jako „přímky“ uvažujeme hlavní kružnice. V této geometrii se každé dvě „přímky“ protínají právě ve dvou bodech, a proto ve sférické geometrii neplatí věta, že každé dva body určují právě jednu přímku. Tím se geometrie sférická odlišuje od eliptické, ve které tato věta platí.

Vergleichende Betrachtungen

über

neuere geometrische Forschungen

von

Dr. Felix Klein,
o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen.

Programm

zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat
der k. Friedrich-Alexanders-Universität
zu Erlangen.

Erlangen.
Verlag von Andreas Deichert.
1872.

Erlangenský program

Nyní se již věnujme přímo Erlangenskému programu. Jak již bylo řečeno, v říjnu roku 1872 předložil Felix Klein na univerzitě v Erlangen přednášku, která se později stala známou jako Erlangenský program. Sestává z deseti kapitol. V úvodu F. Klein nastiňuje současnou situaci v geometrii a uvádí, že ve vývoji geometrického bádání zaujímá v posledních padesáti letech přední místo geometrie projektivní. Zdůrazňuje, že vedle elementární (eukleidovské) a projektivní geometrie existuje celá řada dalších geometrií, např. geometrie reciprokých poloměrů[6] nebo geometrie racionálních transformací. Jeho cílem je zformulovat obecný princip, který by jednotlivé geometrie jasně a jednoznačně vymezil a logicky je uspořádal.

První kapitola, v níž je zformulována základní myšlenka Kleinova přístupu ke klasifikaci různých geometrií, se týká grup prostorových transformací. F. Klein nejprve vysvětluje pojem grupa transformací a poté uvažuje transformace prostoru, které zachovávají geometrické vlastnosti prostorového útvaru. Tyto transformace tvoří grupu, kterou F. Klein nazývá *hlavní grupou* (v originále *die Hauptgruppe*). Geometrické vlastnosti se tedy nemění při těchto transformacích, prvcích hlavní grupy. Naopak lze říci, že geometrické vlastnosti lze charakterizovat právě na základě jejich invariantnosti vůči transformacím z hlavní grupy. Geometrii poté definuje následujícím způsobem:

Je dán geometrický prostor a nějaká grupa transformací. Úkolem geometrie je zkoumat právě ty vlastnosti prostoru, které se nemění při transformacích dané grupy. Jinými slovy řečeno, každá geometrie je teorií invariantů dané grupy transformací.

F. Klein přitom zdůrazňuje, že grupu transformací lze volit libovolně.

Grupy transformací slouží tedy podle F. Kleina nejen ke zkoumání a klasifikaci daných geometrií, ale rovněž umožňují nové geometrie definovat. Základní geometrické pojmy jsou potom určeny jako invarianty zvolených grup transformací. Pokud však základní geometrické objekty dané geometrie určíme až na základě jejich invariantnosti vůči uvažované grupě transformací, nemůžeme předem definiční obor těchto transformací omezit právě na tyto objekty. F. Klein tedy musel definiční obor transformací stanovit nezávisle na nějakých objektech, čehož dosáhl tím, že za definiční obor zvolil obecně n-dimenzionální projektivní prostor (varietu)[7].

---

[6] Transformací reciprokými poloměry F. Klein rozumí transformaci, která každému bodu P přiřadí bod P' ležící na přímce OP spojující bod P s počátkem O, pro kterou je součin $OP \cdot OP'$ roven dané konstantě. (Jedná se o tzv. kruhovou Möbiovu geometrii.) Viz Felix Klein: *Elementary Mathematics from an advanced Standpoint – Geometry*, Dover Publications, United States of America, 1939, str. 98.

[7] F. Klein používá označení *die gesamte Mannigfaltigkeit* (něm. die Mannigfaltigkeit = rozmanitost), které v samotném Erlangenském programu nijak blíže neobjasňuje. Vysvětlení lze najít v jeho článku *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* (Mathematische Annalen 4(1871), 573–625). Zde definuje pojem *eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen* takto: Je-li dáno n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sestrojíme obor n-krát nekonečně mnoha

F. Klein tak v Erlangenském programu prezentoval svůj jednotící pohled na geometrii. Do té doby byly jednotlivé geometrie (eukleidovská, projektivní, hyperbolická, eliptická) zkoumány odděleně. Kleinovy výsledky však nebyly ihned pochopeny a přijaty. Ještě dvacet let poté bylo toto jeho dílo převážně hodnoceno jako nevýznamný článek a zůstávalo neznámé. Později bylo zjištěno, že během této doby několik dalších matematiků, např. Henri Poincaré (1854–1912), přišlo nezávisle na Kleinovi na podobné myšlenky. Kleinův Erlangenský program se stal obecně známým až poté, co jej F. Klein znovu otiskl v roce 1893 v časopise *Mathematische Annalen*, který v té době redigoval.[8]

F. Klein tedy charakterizoval každou geometrii pomocí grupy geometrických transformací, které zachovávají základní vlastnosti dané geometrie. Např. eukleidovskou geometrii asocioval s grupou shodností, tj. s grupou transformací, které zachovávají eukleidovskou vzdálenost, a Lobačevského geometrii asocioval s grupou transformací, které zachovávají nějakou regulární, bodově reálnou kuželosečku.

Ve druhé kapitole F. Klein zavádí uspořádání geometrií, a to tak, že relaci inkluze mezi různými grupami transformací přenáší na odpovídající geometrie. Pokud nějakou grupu nahradíme jinou grupou, která danou grupu obsahuje, zůstane zachována pouze část původních geometrických vlastností. Přechodem k rozšířené grupě nebo k vlastní podgrupě tak lze přejít od jednoho typu geometrie k jinému. Erlangenský program tedy přinesl jednoduchý, ale důležitý princip uspořádání jednotlivých geometrií.

Ilustrujme nyní Kleinovy myšlenky na příkladech. Nechť M je množina všech bodů nějaké roviny. Uvažujme množinu G všech transformací množiny M, která obsahuje právě všechny transformace složené z osových souměrností (a tedy rovněž všechna posunutí a otočení). Protože složení libovolných transformací z množiny G je opět prvkem množiny G a ke každé transformaci z množiny G existuje v množině G transformace inverzní, je množina G grupou. Jí odpovídající geometrií je *klasická eukleidovská geometrie*, G je grupa shodností. Protože takové vlastnosti jako délka, obsah, shodnost, podobnost, kolmost, rovnoběžnost a kolineárnost bodů jsou invariantní vzhledem ke grupě G, studuje eukleidovská geometrie právě tyto vlastnosti.

Pokud grupu G rozšíříme na nejmenší grupu obsahující navíc všechny stejnolehlosti, získáme grupu podobností. Vzhledem k této grupě již délka, obsah a shodnost invariantní nezůstávají, a tedy se v této geometrii nestudují. Podobnost, kolmost, rovnoběžnost a kolineárnost bodů se však stále zachovávají, a jsou proto předmětem studia této geometrie. Obdobně projektivní geometrie studuje ty vlastnosti, které zůstávají invariantní vzhledem ke grupě projektivních transformací. Z výše zmíněných vlastností se v tomto případě zachovává pouze kolineárnost bodů. Významným invariantem této grupy je také dvojpoměr čtyř kolineárních bodů.

---

systémů hodnot, které získáme tak, že proměnné x nezávisle na sobě necháme proběhnout reálné hodnoty od $-\infty$ do $+\infty$.

[8] Viz Mathematische Annalen 43(1893), 63–100.

V následující tabulce je vybráno pět základních geometrických vlastností a u každé ze čtyř zvolených grup transformací je uvedeno, zda uvažované transformace dané vlastnosti zachovávají, či nikoliv.

vlastnost	grupa shodností	grupa podobností	grupa afinit	grupa projektivit
poloha	mění se	mění se	mění se	mění se
velikost	zachována	mění se	mění se	mění se
kolmost	zachována	zachována	mění se	mění se
rovnoběžnost	zachována	zachována	zachována	mění se
kolineárnost	zachována	zachována	zachována	zachována

Jednotlivé grupy lze relací inkluze uspořádat takto:

$$\begin{matrix}\text{grupa}\\ \text{shodností}\end{matrix} \subset \begin{matrix}\text{grupa}\\ \text{podobností}\end{matrix} \subset \begin{matrix}\text{grupa}\\ \text{afinit}\end{matrix} \subset \begin{matrix}\text{grupa}\\ \text{projektivit}\end{matrix}$$

Každé grupě přitom přísluší odpovídající geometrie. Grupě shodností odpovídá eukleidovská geometrie, grupě podobností odpovídá „podobnostní“ geometrie, grupě afinit odpovídá afinní geometrie a grupě projektivit odpovídá projektivní geometrie. Z výše uvedeného schématu inkluzí grup transformací tak získáme následující uspořádání klasických geometrií:

$$\begin{matrix}\text{eukleidovská}\\ \text{geometrie}\end{matrix} \supset \begin{matrix}\text{podobnostní}\\ \text{geometrie}\end{matrix} \supset \begin{matrix}\text{afinní}\\ \text{geometrie}\end{matrix} \supset \begin{matrix}\text{projektivní}\\ \text{geometrie}\end{matrix}$$

Další kapitoly Erlangenského programu již okomentujeme jen stručně.

Třetí kapitola je věnována projektivní geometrii. F. Klein zde mimo jiné uvádí, že každá prostorová transformace, která nenáleží hlavní grupě, může být využita k přenesení vlastností známého útvaru na útvar nový. Kromě projektivních transformací uvažuje také tzv. dualistické a imaginární transformace; současně s nimi zavádí imaginární prvky.

Ve čtvrté kapitole se Felix Klein zabývá „přenášením prostřednictvím zobrazení“. Uvažuje varietu A jako definiční obor transformací grupy B. Pokud pomocí nějakého zobrazení přejdeme od variety A k jiné varietě A', změníme tímto zobrazením grupu B na grupu B', jejíž transformace se vztahují k varietě A'. Vlastnosti útvarů variety A se přenesou na odpovídající útvary variety A'. Tuto myšlenku F. Klein ilustruje na příkladech.

Pátá kapitola je mimo jiné věnována tzv. přímkové geometrii. Již Kleinův učitel J. Plücker poukázal roku 1865 na to, že geometrie nemusí být vybudována pouze na bodu jako základním prvku; přímky, roviny nebo kružnice lze též užít jako základní prvky nějaké geometrie. F. Klein v této kapitole zdůrazňuje, že základními prvky geometrie mohou být libovolné útvary uvažované variety. Dále zde uvádí souvislost projektivní geometrie roviny s teorií binárních forem a odkazuje na tzv. Hesseův princip (v originále *das Hessesche Übertragungsprinzip*). Obdobně nachází souvislost mezi projektivní geometrií prostoru a teorií kvadratických forem.

V šesté kapitole se F. Klein zabývá geometrií reciprokých poloměrů a její interpretací pomocí komplexních čísel. Geometrii reciprokých poloměrů porovnává s projektivní geometrií. Uvádí, že v projektivní geometrii jsou základními pojmy bod, přímka a rovina, zatímco kružnice, resp. sféra jsou pouze speciálními případy kuželosečky, resp. plochy druhého stupně. Naproti tomu v geometrii reciprokých poloměrů jsou základními pojmy bod, kružnice a sféra; přímka a rovina jsou speciálními případy útvarů, které obsahují nekonečně vzdálený bod. Elementární geometrii získáme, pokud tento bod pevně zafixujeme. Dále F. Klein nachází souvislost mezi geometrií reciprokých poloměrů v rovině a projektivní geometrií na ploše druhého stupně. V závěru kapitoly se věnuje reprezentaci geometrie reciprokých poloměrů pomocí teorie binárních forem komplexních proměnných.

V sedmé kapitole F. Klein navazuje na některé předchozí myšlenky a dále je rozvíjí. Připomíná, že geometrii roviny lze propojit s geometrií na kuželosečce tím, že přímkám roviny přiřadíme dvojice bodů, v nichž přímky danou kuželosečku protínají. Obdobně můžeme dát do souvislosti geometrii prostoru s geometrií na sféře tím, že každé rovině prostoru přiřadíme kružnici, ve které uvažovaná rovina danou sféru protíná. Pomocí stereografické projekce lze geometrii na sféře převést na geometrii v rovině; proto si budou navzájem odpovídat prostorová geometrie, jejímiž základními prvky jsou roviny a jejíž grupa obsahuje lineární transformace zachovávající danou sféru, a rovinná geometrie, jejímiž základními prvky jsou kružnice a jejíž grupou je grupa reciprokých poloměrů. Uvedenou prostorovou geometrii F. Klein dále zobecňuje; uvažuje obsáhlejší grupu a dochází k tzv. Lieově sférické geometrii. Připomíná, že výsledné rozšíření lze pomocí určitého zobrazení přenést také na rovinnou geometrii.

Osmá kapitola je věnována dalším metodám založeným na zkoumání nějaké grupy bodových transformací. Samostatný odstavec se týká tehdy ještě relativně neznámé topologie (v originále *die Analysis situs*), kterou F. Klein charakterizuje jako teorii invariantů spojitých bodových transformací. Dále se věnuje geometrii racionálních transformací; uvádí, že na přímce jsou racionální transformace totožné s lineárními transformacemi, v rovině se jedná o tzv. Cremonovy transformace, které lze vytvořit složením kvadratických transformací.

V závěru kapitoly se F. Klein zabývá grupou všech bodových transformací; uvádí, že libovolná bodová transformace nekonečně malé části prostoru vždy odpovídá nějaké lineární transformaci.

V deváté kapitole F. Klein pojednává o grupě všech kontaktních transformací. Kontaktní transformací rozumí každou substituci, která proměnné x, y, z a jejich parciální diferenciální podíly označené $p = \frac{dz}{dx}$ a $q = \frac{dz}{dy}$ vyjadřuje pomocí nových veličin x', y', z', p', q'. Název je odvozen ze skutečnosti, že dotýkající se plochy se při těchto transformacích zobrazí opět na plochy, které se dotýkají. Pokud za základní prvky geometrie vezmeme body, lze kontaktní transformace rozdělit do tří skupin podle toho, zda uvažované transformace trojnásobně nekonečnému počtu bodů přiřazují opět body (tj. jedná se o bodové transformace), nebo křivky, nebo plochy. F. Klein ve svých dalších úvahách volí za základní prvek prostoru systém hodnot x, y, z, p, q. Kontaktní transformace lze poté ekvivalentně definovat jako právě ty substituce pěti proměnných x, y, z, p, q, které zachovávají vztah $dz - p\,dx - q\,dy = 0$. Předmětem Kleinova dalšího zkoumání jsou variety, které lze vyjádřit pomocí soustavy parciálních diferenciálních rovnic prvního stupně.

Poslední, desátá, kapitola je věnována „rozšiřování“ variet. F. Klein zde připomíná, že všechny geometrické úvahy provedené v prostoru lze přenést také na libovolnou varietu. Dále se krátce zmiňuje o jedné oblasti moderní algebry, kterou je teorie invariantů. V závěru kapitoly zkoumá plochy s konstantní Gaussovou křivostí.

ZÁKLADNÍ LITERATURA K TÉMATU

[1] F. Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, A. Deichert, Erlangen, 1872, též Gesammelte mathematische Abhandlungen, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973, 460–497.

[2] F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Teil II*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1927.

[3] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, Oxford, 1972.

[4] H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Fourth edition, Library of Congress Cataloging in Publication Data, United States of America, 1953.

[5] A. N. Kolmogorov, A. P. Yushkevich, *Mathematics of the 19th Century – Geometry, Analytic Function Theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1996.

[6] A. N. Kolmogorov, A. P. Yushkevich, *Mathematics of the 19th Century – Mathematical Logic, Algebra, Number Theory, Probability Theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1992.

[7] B. L. van der Waerden, *A History of Algebra, From al-Khwārizmī to Emmy Noether*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.

[8] I. Grattan-Guinness, *The Fontana History of the Mathematical Sciences*, Harper Collins Publishers, A Fontana Press Original, London, 1997.

[9] I. James, *Remarkable Mathematicians, From Euler to von Neumann*, The Mathematical Association of America, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[10] C. J. Scriba, P. Schreiber, *5000 Jahre Geometrie*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2001.

[11] H. Struve, *Zur Geschichte des Abbildungsbegriffs*, Mathematische Semesterberichte **32** (1985), 181–194.

[12] R. Tobies, *Felix Klein*, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1981.

[13] D. E. Rowe, *A Forgotten Chapter in the History of Felix Klein's Erlanger Programm*, Historia Mathematica **10** (1983), 448–454.

[14] T. Hawkins, *The Erlanger Programm of Felix Klein: Reflections on Its Place in the History of Mathematics*, Historia Mathematica **11** (1984), 442–470.

[15] H. Wussing, *Ke vzniku Erlangenského programu*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **13** (1968), 367–373.

[16] I. Kolář, *Erlangenský program*, in Matematika v 19. století, edice Dějiny matematiky, svazek 3, Prometheus, Praha, 1996, 82–87.

[17] J. B. Pavlíček, *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského*, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1953.

[18] D. J. Struik, *Dějiny matematiky*, Malá moderní encyklopedie, svazek 43, Orbis, Praha, 1963.